

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Борисов Виталий Евгеньевич

**Разработка параллельного неявного метода  
решения задач динамики вязкого  
сжимаемого газа**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**

*на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель  
д.ф.-м.н. Луцкий А.Е.

Москва 2016

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Математическая модель и вычислительные алгоритмы</b>	<b>11</b>
1.1 Основные уравнения и определяющие соотношения . . . . .	11
1.2 Модель турбулентности Спаларта–Аллмараса . . . . .	13
1.3 Дискретизация уравнений . . . . .	14
1.3.1 Аппроксимация основных уравнений . . . . .	15
1.3.2 Аппроксимация уравнений модели турбулентности . .	20
1.3.3 Постановка начальных и граничных условий . . . . .	21
1.4 Алгоритмы решения дискретных уравнений . . . . .	22
1.4.1 Метод Ньютона . . . . .	22
1.4.2 Метод LU-SGS . . . . .	27
1.4.3 Метод BiCGStab . . . . .	29
1.4.4 Общий алгоритм решения . . . . .	30
<b>2. Программный комплекс</b>	<b>34</b>
2.1 Особенности программной реализации . . . . .	34
2.2 Валидационные расчёты . . . . .	37
2.2.1 Течение вокруг крыла с симметричным профилем . .	37
2.2.2 Переход между регулярным и маховским отражением ударных волн в области двойных решений . . . . .	42
2.3 Анализ эффективности параллельной реализации . . . . .	52
2.4 Выводы . . . . .	56
<b>3. Моделирование течений в воздухозаборнике прямооточного воздушно–реактивного двигателя</b>	<b>58</b>
3.1 Введение . . . . .	58
3.2 Описание модели . . . . .	60
3.3 Моделирование пограничного слоя заданной толщины . . . .	62
3.4 Расчёты стационарного режима течения в воздухозаборнике	65

3.4.1	Расчёт с дополнительной областью в двумерной постановке . . . . .	66
3.4.2	Расчёт с заданным пограничным слоем в двумерной постановке . . . . .	68
3.4.3	Расчёт в трёхмерной постановке . . . . .	70
3.5	Расчёты нестационарного режима течения в воздухозаборнике	71
3.5.1	Расчёт с вложением энергии в двумерной постановке	72
3.5.2	Расчёт с вложением энергии в трёхмерной постановке	74
3.6	Выводы . . . . .	75
<b>Заключение</b>		<b>76</b>
<b>Приложение</b>		<b>78</b>
<b>Литература</b>		<b>83</b>

# Введение

**Актуальность темы исследования.** Усложнение математических моделей современной гидрогазодинамики и непрерывное развитие вычислительной техники ставят вопрос о разработке соответствующих численных методов, которые позволили бы моделировать сложные физические процессы. Одновременно с этим возникает проблема повышения эффективности используемых алгоритмов, решение которой является критически важным в силу постоянного увеличения сложности стоящих перед инженерами задач. Разрабатываемые при этом численные алгоритмы, с одной стороны, должны с достаточной точностью воспроизводить характерную для задач данного класса сложную картину течений (в частности, наличие узких зон больших градиентов, особенности типа пограничных слоев, ударных волн и т.д.), а с другой – обладать необходимым запасом устойчивости, экономичности и масштабируемости, позволяя получать решение за приемлемое время. Поэтому, несмотря на большое количество разработанных к настоящему моменту алгоритмов, разработка новых эффективных численных методов продолжает оставаться актуальной.

История вычислительной гидрогазодинамики (в западной литературе CFD, Computational Fluid Dynamics) насчитывает чуть более 60-и лет, за которые она прошла значительный путь. За это время были разработаны принципы построения математических моделей, основы теории разностных схем, фундаментальные положения вычислительной математики. Существенный вклад в развитие численных методов для задач гидрогазодинамики внесли научные группы, работающие в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН, Институте вычислительных технологий СО РАН, Центральном институте авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Центральном аэрогидродинамическом институте имени профессора Н.Е. Жуковского, Институте теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Институте прикладной механики УрО РАН, РФЯЦ–ВНИИЭФ, Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском политехническом уни-

верситете, и многие другие. Из зарубежных научных центров можно отметить Los Alamos National Laboratory, University of Stanford (США), Imperial College, University of Manchester, University of Cambridge (Великобритания), University of Toulouse, ONERA (Франция) и т.д.

Основными уравнениями гидрогазодинамики являются уравнения Эйлера и Навье–Стокса для несжимаемой или сжимаемой среды. Анализ этих уравнений, способы их замыкания, построение численных методов их решения (в том числе параллельных) представлены в работах О.М. Белоцерковского [1], С.К. Годунова [2], А.А. Самарского, Ю.П. Попова [3], К.И. Бабенко, В.В. Русанова [4], А.Г. Куликовского, Н.В. Погорелова, А.Ю. Семёнова [5], Б.Н. Четверушкина [6], Т.Г. Елизаровой [7], Р.П. Федоренко [8], А.М. Липанова, Ю.Ф. Кисарова, И.Г. Ключникова [9], И.А. Белова, С.А. Исаева [10], P. Lax, V. van Leer, A. Harten, S. Osher [11–14] и многих других. Один из наиболее полных обзоров методов вычислительной гидрогазодинамики можно найти в работе С. Hirsch [15].

При проведении расчётов задач гидрогазодинамики широко применяются как явные, так и неявные разностные схемы. Явные схемы, как правило, более просты в реализации, однако в силу условия устойчивости накладывают ограничение на шаг интегрирования по времени. В случае течений с большими числами Рейнольдса (из-за большой разницы временных масштабов, на которых проявляют себя процессы конвективного и диффузионного переноса) расчёт задачи сводится к решению жестких систем дифференциальных уравнений, для которых допустимый временной шаг явной схемы существенно ограничен. Поэтому, даже несмотря на тот факт, что явные схемы обладают высокой степенью параллелизма, при жестких ограничениях на шаг по времени их использование может оказаться неэффективным (в особенности при расчёте стационарных задач методом установления). Однако если физический временной шаг, необходимый для описания нестационарного течения в силу соображений точности [8], мал, использование явных схем оправдано.

Неявные схемы не имеют формальных ограничений на шаг интегрирования по времени, связанных с условием устойчивости. Однако при их использовании возникает необходимость дополнительного решения систем

нелинейных уравнений. Для их решения обычно используется метод Ньютона, на каждой итерации которого необходимо решать линейную систему алгебраических уравнений с матрицей Якоби, обладающей большой размерностью и сложной структурой. В силу этих факторов применение неявных схем требует дополнительных вычислительных ресурсов – как памяти, так и процессорного времени. Кроме того, немаловажным фактором является степень параллелизма, которую допускает конкретная реализация неявной схемы. При использовании неявных схем область зависимости решения является глобальной, т.е. значение решения в данной ячейке зависит от значений решения во всех остальных ячейках расчётной сетки. Из-за этого эффективная параллельная реализация любой неявной схемы достаточно сложна.

За последние десятилетия было разработано большое количество неявных схем, основанных на методах полной и приближенной факторизации и методах расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям (позволяющим свести решение многомерной задачи к последовательности одномерных аналогов), в той или иной степени обеспечивающих компромисс между скоростью сходимости, требованиями к памяти и эффективностью параллельной реализации [16–25].

Один из возможных подходов к построению вычислительно эффективной неявной схемы заключается в использовании метода LU-SGS, впервые предложенного в работе [26] и далее модифицированного в работах [27–30]. Метод LU-SGS относится к классу безматричных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, т.е. решение системы данным методом не требует отдельного хранения коэффициентов матрицы системы целиком, позволяя строить компоненты решения локально по мере прохода циклов по ячейкам сетки через произведения матриц-векторов [31]. В этом методе блочно-диагональная матрица сводится к диагональной за счёт использования аппроксимаций специального вида при линеаризации правой части системы уравнений. Внедиагональные элементы матрицы при этом учитываются в прямом и обратном циклах итерационного процесса Гаусса-Зейделя. Это позволяет существенно сократить объемы используемой памяти и исключить операции с большой матрицей системы, что часто об-

легчает параллельную реализацию методов данного класса [24, 32].

Преимуществом использования метода LU-SGS в сравнении с остальными подходами к построению неявных схем является, по существу, явный характер вычислений, за счёт чего в перспективе его эффективность может быть сравнима по вычислительным затратам с аналогичными значениями для явных схем. *Таким образом, разработка параллельных алгоритмов неявной схемы на основе метода LU-SGS для решения промышленных задач гидрогазодинамики (в т.ч. динамики вязкого сжимаемого газа), является актуальной задачей, имеющей теоретическое и практическое значение.*

**Цель диссертационной работы** состоит в разработке параллельного программного комплекса для высокопроизводительных вычислительных систем, предназначенного для эффективного решения инженерных задач динамики вязкого сжимаемого газа, а также применение разработанного комплекса для математического моделирования различных режимов работы воздухозаборника проточного воздушно-реактивного двигателя.

Для достижения поставленных целей решены следующие задачи:

- 1) Разработка алгоритмов неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab для решения нестационарных осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса URANS. В качестве модели турбулентности используется дивергентная форма однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса.
- 2) Программная реализация разработанных алгоритмов на языках программирования C/C++ с использованием интерфейса параллельного программирования MPI для расчёта трёхмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговложением в поток.
- 3) Разработка подхода для моделирования турбулентного пограничного слоя заданной толщины, его реализация в виде вспомогательного программного модуля, проведение тестовых расчётов.

- 4) Проведение расчётов трансзвукового обтекания крыла ONERA M6 с симметричным профилем. Сравнение результатов расчётов с экспериментом.
- 5) Проведение расчётов перехода между регулярным и маховским отражением  $RR \Rightarrow MR$  ударных волн в области двойных решений, инициируемого вложением энергии в сверхзвуковой поток газа. Сравнение результатов расчётов с известными данными.
- 6) Моделирование различных режимов работы воздухозаборника прямоточного воздушно-реактивного двигателя. Сравнение результатов расчётов с экспериментом и известными данными.
- 7) Исследование масштабируемости и эффективности разработанных параллельных алгоритмов.

**Научная новизна** диссертации отражена следующими элементами:

- 1) Разработаны алгоритмы неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab для решения нестационарных осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса URANS совместно с дивергентной формой уравнения однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса и возможностью энерговложения в поток.
- 2) Разработан и реализован параллельный программный комплекс для расчёта трёхмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговложением в поток. Программный комплекс предназначен для работы на высокопроизводительных вычислительных системах, в процессе расчётов подтверждены его эффективность и масштабируемость.
- 3) Проведено моделирование стационарных и нестационарных течений в псевдоскачке в тракте воздухозаборника прямоточного воздушно-реактивного двигателя. Показано существенное влияние толщины пограничного слоя на положение и характер ударно-волновой структу-



ры в псевдоскачке, а также влияние инициируемого энерговожжением противодействия на возможность выхода на нерасчётные режимы работы воздухозаборника.

**Теоретическая ценность и практическая значимость** диссертационной работы состоят в разработанных вычислительных алгоритмах неявной схемы и параллельном программном комплексе для расчёта трёхмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговожжением в поток. Результаты диссертационной работы использованы для проведения численных экспериментов и решения промышленных инженерных задач.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

- 1) Разработаны алгоритмы неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab для решения нестационарных осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса URANS совместно с дивергентной формой уравнения однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллармаса для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса и возможностью энерговожжения в поток.
- 2) Разработан и реализован параллельный программный комплекс для расчёта трёхмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговожжением в поток. Программный комплекс предназначен для работы на высокопроизводительных вычислительных системах, в процессе расчётов подтверждены его эффективность и масштабируемость.
- 3) В результате проведенного моделирования различных режимов работы воздухозаборника прямого воздушного реактивного двигателя показано существенное влияние толщины пограничного слоя на положение и характер ударно-волновой структуры в псевдоскачке, а также влияние инициируемого энерговожжением противодействия на возможность выхода на нерасчётные режимы работы воздухозаборника.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов обеспечены строгостью используемого математического аппарата и подтверждаются сравнением результатов вычислительных экспериментов с опубликованными в литературе экспериментальными и расчётными данными.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

- научной конференции «Ломоносовские чтения» (г. Москва, 2014);
- семинарах кафедры вычислительной механики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва, 2014, 2015, 2016);
- XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Казань, 2015);
- 9-й Всероссийской школе-семинаре «Аэротермодинамика и физическая механика классических и квантовых систем» (г. Москва, 2015);
- XV Международном совещании по магнитоплазменной аэродинамике (г. Москва, 2016);
- XVIII Международной конференции по методам аэрофизических исследований «ICMAR 2016» (г. Пермь, 2016);
- семинаре 11-го отдела ИПМ им. М.В. Келдыша РАН «Вычислительные методы и математическое моделирование» (г. Москва, 2016);
- семинаре ИПМ им. М.В. Келдыша РАН «Математическое моделирование» под руководством В.Ф. Тишкина, А.А. Кулешова (г. Москва, 2016).

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 5 печатных работах [33–37], в том числе в 4 печатных работах [33, 34, 36, 37] в изданиях из перечня ВАК.

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю; заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, приложения и списка литературы. Работа представлена на 93 страницах, содержит 35 иллюстраций и 5 таблиц. Список литературы содержит 99 наименований.

# Глава 1

## Математическая модель и вычислительные алгоритмы

### 1.1 Основные уравнения и определяющие соотношения

Для описания трёхмерных течений совершенного вязкого сжимаемого газа используется система нестационарных осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (URANS), в декартовой системе координат ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ) имеющая следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x_j} + \mathbf{w}, \quad (1.1)$$

где суммирование ведётся по  $j = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{q}$  – вектор консервативных переменных,  $\mathbf{f}_j$  и  $\mathbf{g}_j$  – векторы невязких и вязких потоков соответственно,  $\mathbf{w}$  – вектор внешних источников (в настоящей работе используется только источник в уравнении баланса энергии):

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_j u_1 + \delta_{1,j} p \\ \rho u_j u_2 + \delta_{2,j} p \\ \rho u_j u_3 + \delta_{3,j} p \\ u_j (\rho E^* + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ \tau_{ij} u_i + h_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $u_j$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$ ,  $\tau_{ij}$  – компоненты тензора вязких напряжений,  $\delta_{i,j}$  – тензор Кронекера,  $E^*$  – полная энергия турбулентного течения:

$$E^* = E + k, \quad (1.2)$$

где  $E$  – полная энергия осредненного течения,  $k$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций, определяемая в рамках используемой модели турбулентности. Термодинамическое давление  $p$  вычисляется по уравне-

нию состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho \left( E - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 u_j^2 \right). \quad (1.3)$$

Здесь  $\gamma$  – показатель адиабаты, для воздуха  $\gamma = 1.4$ . Компоненты тензора вязких напряжений и вектора теплового потока имеют вид

$$\tau_{ij} = \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{i,j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{i,j},$$

$$h_j = \lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

В приведённых выше уравнениях  $T$  является температурой газа и определяется из формулы

$$T = \frac{p}{\rho R},$$

где  $R$  – газовая постоянная, для воздуха  $R = 287$  Дж/(кг·К).

«Эффективное» значение коэффициентов вязкости и теплопроводности определяется как

$$\begin{aligned} \mu_{\text{eff}} &= \mu + \mu_t, \\ \lambda_{\text{eff}} &= c_p \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $c_p$  – коэффициент удельной теплоемкости газа при постоянном давлении,  $\text{Pr}$  и  $\text{Pr}_t$  – ламинарное и турбулентное числа Прандтля, для воздуха принимается  $\text{Pr} = 0.7$ ,  $\text{Pr}_t = 0.9$ . Молекулярная вязкость определяется следующей степенной зависимостью:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^s,$$

где  $s = 0.76$ ,  $\mu_0$  – молекулярная вязкость при опорной температуре  $T_0$ .

Величина  $\mu_t$  обозначает добавочную турбулентную вязкость, которая определяется моделью турбулентности.

## 1.2 Модель турбулентности Спаларта–Аллмараса

В работе используется вариант однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса (SA) [38] для сжимаемых течений [39] с модификацией Эдвардса [40]. В рамках этой модели осредненная величина кинетической энергии турбулентных пульсаций не может быть найдена напрямую, поэтому в уравнении (1.2) полагается  $E^* = E$ .

Турбулентная вязкость задается соотношением

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \rho \frac{\tilde{\nu}}{\mu}, \quad (1.4)$$

где  $\tilde{\nu}$  – модельная величина, которая определяется из основного уравнения модели

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\nu} \mathbf{u}) = \rho (P_{\tilde{\nu}} - D_{\tilde{\nu}} + T_{\tilde{\nu}}) + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \nabla \cdot [(\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] \\ + \frac{C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \rho (\nabla \tilde{\nu})^2 - \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}} \rho} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \rho \cdot \nabla \tilde{\nu}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Величины  $P_{\tilde{\nu}}$  и  $D_{\tilde{\nu}}$ , отвечающие соответственно за производство и диссипацию турбулентности, и  $T_{\tilde{\nu}}$  – за определение ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое, записываются в виде

$$\begin{aligned} P_{\tilde{\nu}} = C_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu}, \quad D_{\tilde{\nu}} = \left( C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{k^2}f_{t2} \right) \left[ \frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2, \quad T_{\tilde{\nu}} = f_{t1}(\Delta U)^2, \\ f_w = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r). \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta U$  – модуль разности между скоростями в потоке и ближайшей точке ламинарно-турбулентного перехода,  $d$  – расстояние от твердой стенки.

Модификация Эдвардса модели Спаларта–Аллмараса [40] предназначена для улучшения поведения решения в пограничном слое. Соответству-

ющие величины  $\tilde{S}$  и  $r$  записываются в виде:

$$\tilde{S} = \sqrt{S} \left[ \frac{1}{\chi} + f_{v1} \right], \quad S = \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2,$$

$$r = \tanh \left( \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} k_r^2 d^2} \right) / \tanh(1.0).$$

Остальные величины являются константами модели SA и представлены в таб. 1.1.

$\sigma_{\tilde{\nu}}$	$k_r$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	$C_{v1}$	$C_{w1}$	$C_{w2}$	$C_{w3}$
$\frac{2}{3}$	0.41	0.1335	0.622	7.1	$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{k^2} + \frac{1+C_{b2}}{\sigma}$	0.3	2.0

Таблица 1.1. Константы модели SA

При моделировании полностью турбулентного пограничного слоя учёт  $f_{t1}$  и  $f_{t2}$  не вносит существенных изменений в решение, поэтому обычно ими пренебрегают [39].

### 1.3 Дискретизация уравнений

Уравнения (1.1) и (1.5) дискретизируются по пространственным переменным методом конечных объемов [41]. Этот метод имеет ряд преимуществ перед альтернативным методом конечных разностей, так как применим к любой геометрии, оперирует любыми сетками и позволяет избежать проблем с метрическими сингулярностями обобщённых координат. Предполагая, что расчётная область покрыта сеткой, состоящей из непрерывных многогранных ячеек, метод конечных объемов реализуется интегрированием уравнений (1.1) и (1.5) по каждой счётной ячейке с последующим преобразованием объемных интегралов от потоков в интегралы по граням ячейки.

Для дискретизации уравнений по времени используются явная и неявная схемы Эйлера [41].

### 1.3.1 Аппроксимация основных уравнений

После аппроксимации по пространству методом конечных объемов полудискретный вариант системы уравнений Навье-Стокса (1.1) имеет вид:

$$V_i \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} = - \sum_{\sigma} (\mathbf{f}_{\sigma} - \mathbf{g}_{\sigma}) s_{\sigma} + V_i \mathbf{w}_i \quad (1.6)$$

$$\mathbf{f}_{\sigma} = (\mathbf{f}_k, \vec{n}_{\sigma}), \quad \mathbf{g}_{\sigma} = (\mathbf{g}_k, \vec{n}_{\sigma}),$$

где  $i = 1 \dots N$ ,  $N$  – число счётных ячеек,  $V_i$  – объем ячейки,  $s_{\sigma}$  – площадь боковой грани ячейки,  $\vec{n}_{\sigma}$  – единичный вектор внешней нормали к грани ячейки. Нижний индекс  $\sigma$  указывает на грань, суммирование ведется во всем граням, составляющим боковую поверхность рассматриваемой счётной ячейки  $i$ .

Далее на каждой грани  $\sigma$  вводится ортонормированный базис  $(\vec{n}, \vec{k}, \vec{l})$ , где  $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$  и  $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$  – касательные векторы. Матрица преобразования  $T_{\sigma}$  к локальному базису при этом определяется координатами базисных ортов:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & l_1 & l_2 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Невязкий поток на грани ячейки представляется через локально-одномерный поток  $\mathbf{F}_{\sigma}$  в нормальном для грани направлении:

$$\mathbf{f}_{\sigma} = T_{\sigma}^{-1} \mathbf{F}_{\sigma},$$

$$\mathbf{F}_{\sigma} = \mathbf{f}_1(\mathbf{Q}_{\sigma}),$$

$$\mathbf{Q}_{\sigma} = T_{\sigma} \mathbf{q}_{\sigma}.$$

Здесь поток  $\mathbf{f}_1$  имеет такое же определение, как в уравнении (1.1), но аргументом его являются контрвариантные компоненты вектора  $\mathbf{q}$  в локальном



базисе  $(\vec{n}, \vec{k}, \vec{l})$  боковой грани ячейки.

В настоящей работе для вычисления невязкого потока  $\mathbf{F}_\sigma$  на грани счётной ячейки используется обобщенная схема Годунова [2] с интерполяционной схемой WENO3 [42]. Детальное описание данных методов представлено ниже.

Аппроксимация вязкого потока  $\mathbf{g}_\sigma$  на грани счётной ячейки в правой части уравнения (1.6) вычисляется интерполяцией сеточных значений и их производных:

$$\mathbf{g}_\sigma = \mathbf{g}(\mathbf{q}_\sigma, \nabla \mathbf{q}_\sigma),$$

$$\mathbf{q}_\sigma = \frac{V_i \mathbf{q}_{\sigma(i)} + V_{\sigma(i)} \mathbf{q}_i}{V_i + V_{\sigma(i)}}, \quad \nabla \mathbf{q}_\sigma = \frac{V_i \nabla \mathbf{q}_{\sigma(i)} + V_{\sigma(i)} \nabla \mathbf{q}_i}{V_i + V_{\sigma(i)}}.$$

Здесь, как и везде в настоящей работе, индекс  $\sigma(i)$  указывает на ячейку, которая является соседней к текущей ячейке  $i$  по грани  $\sigma$ .

Обозначим в качестве  $\mathbf{R}_i$  правую часть уравнения (1.6), во введённых обозначениях имеющую вид:

$$\mathbf{R}_i = - \sum_{\sigma} (T_\sigma^{-1} \mathbf{F}_\sigma - \mathbf{g}_\sigma) s_\sigma + V_i \mathbf{w}_i.$$

В конечном итоге после дискретизации по времени явным методом Эйлера система уравнений (1.6) примет вид:

$$V_i \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} = \mathbf{R}_i^n. \quad (1.7)$$

Аналогично проводится дискретизация неявным методом Эйлера:

$$V_i \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} = \mathbf{R}_i^{n+1}. \quad (1.8)$$

## Обобщенная схема Годунова решения задачи Римана

Для того чтобы определить численное значение невязкого потока  $\mathbf{F}_\sigma$  на грани счётной ячейки, используется обобщенная схема Годунова [2]. В данной схеме поток вычисляется на решении задачи Римана о распаде про-

извольного разрыва на грани ячейки между состояниями «слева»  $\mathbf{q}_\sigma^L$  и «справа»  $\mathbf{q}_\sigma^R$ , которые вычисляются по той или иной интерполяционной схеме, т.е.  $\mathbf{F}_\sigma = \mathbf{F}_\sigma(\mathbf{q}_\sigma^L, \mathbf{q}_\sigma^R)$ .

Задача ставится следующим образом. Пусть имеется совершенный газ, уравнение состояния которого задано соотношением (1.3). Параметры газа слева и справа от расчётной грани с индексом  $\sigma$  обозначим как  $p^L, \rho^L, u_n^L$  и  $p^R, \rho^R, u_n^R$  соответственно. Здесь  $u_n$  – проекция вектора скорости на внешнюю нормаль к грани. Необходимо найти значения  $p^\sigma, \rho^\sigma, u_n^\sigma$  на грани расчётной ячейки.

Подробное описание алгоритма решения данной задачи представлено в приложении к настоящей работе. Здесь отметим лишь, что решение задачи сводится к нахождению давления на контактном разрыве из соответствующего нелинейного уравнения, после чего легко находятся остальные величины для всех возможных конфигураций решения.

## Схема реконструкции WENO3

В настоящей работе для реконструкции значений  $\mathbf{q}_\sigma^L$  и  $\mathbf{q}_\sigma^R$  слева и справа от расчётной грани  $\sigma$  используется интерполяционная схема WENO3 [43–47], адаптированная для структурированных неравномерных сеток [42]. Данный метод проводит реконструкцию величин вдоль одного координатного направления, при этом значения по каждой координате вычисляются по очереди.

Схемы WENO типа основаны на специальной технике интерполяции, которая автоматически выбирает веса аппроксимационных полиномов таким образом, чтобы обеспечить максимальный порядок точности в гладких областях (в случае использования схемы WENO3, соответственно, 3-й порядок точности). Тем самым минимизируется влияние разрывов в решении, приводящее к появлению осцилляций.

Пусть грань  $\sigma = i + 1/2$  разделяет ячейки с индексами  $i$  и  $i + 1$  как показано на рис. 1.1. Зеленым и синим цветами обозначены линейные размеры ячеек в рассчитываемом направлении, используемые для реконструкции значений слева и справа от грани соответственно. Под  $\mathbf{x}_i$  будем подразуме-

вать координаты центра  $i$ -й ячейки, под  $\mathbf{x}_\sigma$  – координаты центра грани  $\sigma$ .

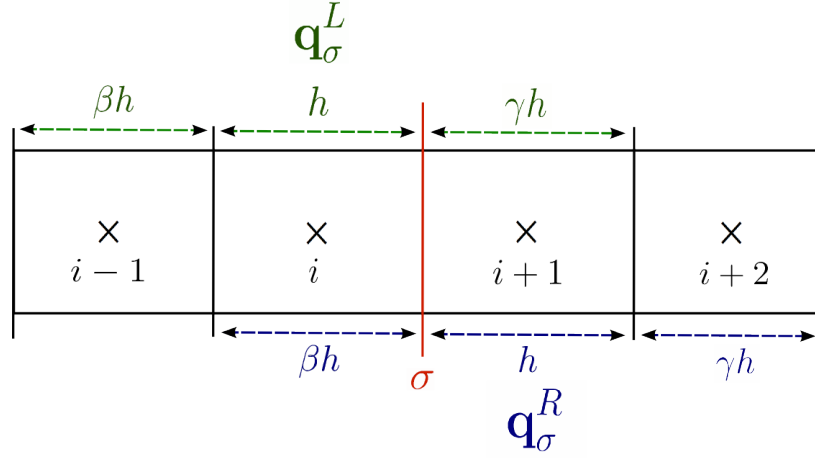


Рис. 1.1. Интерполяция переменных на границе ячеек

Рассмотрим процедуру построения значения  $\mathbf{q}_\sigma^L$  согласно схеме WENO3 [42]. Заметим, что реконструкция каждой компоненты  $q_j$ ,  $j = \overline{1, 5}$  вектора  $\mathbf{q}$  проводится отдельно от остальных. Интерполяционные полиномы  $P_l^L(\mathbf{x})$  и  $P_r^L(\mathbf{x})$  для компоненты  $q_j$  будут иметь вид

$$P_l^L(\mathbf{x}) = (q_j)_i + 2 \frac{(q_j)_i - (q_j)_{i-1}}{(1 + \beta) h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i),$$

$$P_r^L(\mathbf{x}) = (q_j)_i + 2 \frac{(q_j)_{i+1} - (q_j)_i}{(1 + \gamma) h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).$$

Соответствующие индикаторы гладкости строятся как

$$I_l = \frac{4}{(1 + \beta)^2} ((q_j)_i - (q_j)_{i-1})^2,$$

$$I_r = \frac{4}{(1 + \gamma)^2} ((q_j)_{i+1} - (q_j)_i)^2.$$

Оптимальные линейные веса имеют вид:

$$\begin{aligned}\omega_l &= \frac{\tilde{\omega}_l}{\tilde{\omega}_l + \tilde{\omega}_r}, & \omega_r &= \frac{\tilde{\omega}_r}{\tilde{\omega}_l + \tilde{\omega}_r}, \\ \tilde{\omega}_l &= \frac{C_l^+}{(\varepsilon + I_l)^2}, & \tilde{\omega}_r &= \frac{C_r^+}{(\varepsilon + I_r)^2}, \\ C_l^+ &= \frac{\gamma}{1 + \beta + \gamma}, & C_r^+ &= \frac{1 + \beta}{1 + \beta + \gamma},\end{aligned}$$

где  $\varepsilon = 0.5 h^2$  – зависящий от шага сетки регуляризирующий параметр, предохраняющий от деления на ноль в области равномерного течения.

После вычисления указанных величин реконструированное значение  $(q_j)_\sigma^L$  строится по формуле

$$(q_j)_\sigma^L = \omega_l P_l^L(\mathbf{x}_\sigma) + \omega_r P_r^L(\mathbf{x}_\sigma).$$

Для вычисления компонент вектора  $\mathbf{q}_\sigma^R$  используются аналогичные формулы с заменой соответствующих величин  $h, \beta$  и  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\omega_l &= \frac{\tilde{\omega}_l}{\tilde{\omega}_l + \tilde{\omega}_r}, & \omega_r &= \frac{\tilde{\omega}_r}{\tilde{\omega}_l + \tilde{\omega}_r}, & \tilde{\omega}_l &= \frac{C_l^-}{(\varepsilon + I_l)^2}, & \tilde{\omega}_r &= \frac{C_r^-}{(\varepsilon + I_r)^2}, \\ C_l^- &= \frac{1 + \beta}{1 + \beta + \gamma}, & I_l &= \frac{4}{(1 + \beta)^2} ((q_j)_{i+1} - (q_j)_i)^2, \\ C_r^- &= \frac{\gamma}{1 + \beta + \gamma}, & I_r &= \frac{4}{(1 + \gamma)^2} ((q_j)_{i+2} - (q_j)_{i+1})^2, \\ P_l^R(\mathbf{x}) &= (q_j)_{i+1} + 2 \frac{(q_j)_{i+1} - (q_j)_i}{(1 + \beta) h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+1}), \\ P_r^R(\mathbf{x}) &= (q_j)_{i+1} + 2 \frac{(q_j)_{i+2} - (q_j)_{i+1}}{(1 + \gamma) h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i+1}), \\ (q_j)_\sigma^R &= \omega_l P_l^R(\mathbf{x}_\sigma) + \omega_r P_r^R(\mathbf{x}_\sigma).\end{aligned}$$

### 1.3.2 Аппроксимация уравнений модели турбулентности

Дискретизация уравнения модели турбулентности Спаларта–Аллмараса (1.5) проводится аналогично дискретизации основных уравнений. Перепишем его в следующем виде (без учёта величин  $f_{t1}$  и  $f_{t2}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} = & -\nabla \cdot (\rho \tilde{\nu} \mathbf{u}) + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \nabla \cdot [(\mu + \rho \tilde{\nu}(1 + C_{b2})) \nabla \tilde{\nu}] - \frac{C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \tilde{\nu} \nabla \cdot [\rho \nabla \tilde{\nu}] \\ & + A_1 \tilde{\nu} + A_2 \tilde{\nu}^2 - \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}} \rho} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \rho \cdot \nabla \tilde{\nu}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $A_1 = \rho C_{b1} \tilde{S}$ ,  $A_2 = -\rho C_{w1} f_w / d^2$ .

Для произвольного  $\xi$  положим  $\xi^\pm = 0.5 (\xi \pm |\xi|)$ . Обозначим в качестве  $\tilde{R}$  правую часть уравнения (1.9). Тогда после дискретизации уравнения Спаларта–Аллмараса по пространству методом конечных объемов с учётом аппроксимации конвективного потока методом сноса против потока («upwind») во введённых обозначениях для  $i$ -й ячейки она примет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_i = & - \sum_{\sigma} \left( u_{n,i}^+ \tilde{\nu}_i + u_{n,\sigma(i)}^- \tilde{\nu}_{\sigma(i)} \right) s_{\sigma} \rho_{\sigma} + s_{\sigma} \Gamma_{\sigma,i}^{dis} (\partial_n \tilde{\nu})_{\sigma} \\ & + V_i (A_1 \tilde{\nu}_i + A_2 \tilde{\nu}_i^2) - \frac{V_i}{\sigma_{\tilde{\nu}} \rho_i} (\mu_i + \rho_i \tilde{\nu}_i) \nabla \rho_i \cdot \nabla \tilde{\nu}_i, \\ \Gamma_{\sigma,i}^{dis} = & \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} [\mu_{\sigma} + (1 + C_{b2}) \rho_{\sigma} \tilde{\nu}_{\sigma} - C_{b2} \rho_{\sigma} \tilde{\nu}_i]. \end{aligned}$$

При расчётах на сетках, близких к ортогональным, величина  $(\partial_n \tilde{\nu})_{\sigma}$  может быть заменена на  $(\tilde{\nu}_{\sigma(i)} - \tilde{\nu}_i) / h_{\sigma}$ , где  $h_{\sigma}$  – расстояние между центрами ячеек.

В конечном итоге после дискретизации по времени явным методом Эйлера уравнение модели турбулентности Спаларта–Аллмараса примет вид:

$$\rho_i V_i \frac{\tilde{\nu}^{n+1} - \tilde{\nu}^n}{\Delta t} = \tilde{R}_i^n. \quad (1.10)$$

Аналогично проводится дискретизация неявным методом Эйлера:

$$\rho_i V_i \frac{\tilde{\nu}^{n+1} - \tilde{\nu}^n}{\Delta t} = \tilde{R}_i^{n+1}. \quad (1.11)$$

### 1.3.3 Постановка начальных и граничных условий

Уравнения (1.7), (1.8), (1.10), (1.11) должны быть дополнены соответствующими граничными и начальными условиями, конкретный вид которых зависит от задачи. Для постановки граничных условий в настоящей работе применена схема с использованием двух (согласно шаблону схемы WENO3) рядов фиктивных ячеек за каждой границей расчётной области. При этом допускаются следующие типы границ:

- граница типа «вход»: задаются все 5 значений вектора примитивных переменных: 3 компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$ ; модельная переменная  $\tilde{\nu} = C\mu/\rho$ , где для полностью турбулентного пограничного слоя полагается  $C = 1 \div 5$ ;
- граница типа «выход»: значения всех переменных экстраполируются в фиктивные ячейки изнутри расчётной области;
- граница типа «твердая стенка» и условия симметрии: для твердой стенки со скольжением потока и условия симметрии в фиктивных ячейках значения давления  $p$ , плотности  $\rho$  и касательной компоненты скорости задаются симметричным отображением значений во внутренних точках относительно границы, а значение нормальной компоненты скорости и модельной переменной  $\tilde{\nu}$  – антисимметричным отображением, т.е. знак меняется на обратный. В случае твердой стенки без скольжения потока (т.е. условия прилипания) в отличие от предыдущего варианта все компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$  в фиктивных ячейках задаются антисимметричным отображением.

## 1.4 Алгоритмы решения дискретных уравнений

Алгоритм численного решения уравнений неявной схемы (1.8) и (1.11) основан на идее расщепления по физическим процессам: сначала решается система уравнений (1.8) с использованием значения турбулентной вязкости с предыдущего временного шага, затем решается уравнение (1.11). Такой подход не требует введения дополнительных рабочих массивов, что позволяет эффективно использовать уже имеющиеся данные о течении при решении уравнения турбулентной вязкости. Кроме того, преимуществом такого подхода является простота адаптации алгоритма к другой модели турбулентности.

Система дискретных уравнений (1.8) и уравнение (1.11) решаются методом установления по псевдо-временной переменной с использованием метода Ньютона [48]. Решение возникающей на каждой ньютоновской итерации линейной системы алгебраических уравнений (СЛАУ) осуществляется методами LU-SGS или BiCGStab с LU-SGS в качестве предобуславливателя.

### 1.4.1 Метод Ньютона

Метод Ньютона для решения системы нелинейных алгебраических уравнений формулируется следующим образом [49]. Необходимо найти решение  $\hat{\mathbf{q}}$  нелинейной системы

$$\mathcal{F}(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \Delta t) = 0 \quad (1.12)$$

в момент времени  $\hat{t} = t + \Delta t$ , если решение  $\mathbf{q}$  в момент времени  $t$  известно.

Идея метода Ньютона заключается в итерационном решении исходной задачи, при этом на каждой итерации метода задача заменяется некоторой вспомогательной линейной задачей в окрестности имеющегося приближения к решению  $\hat{\mathbf{q}}^s$ , после чего за следующее приближение выбирается решение этой вспомогательной линейной задачи. Итерации метода Ньютона строятся следующим образом: по известному приближенному решению на

$s$ -й итерации новое приближенное решение на  $s + 1$ -й итерации определяется из соотношений:

$$-\mathbf{J}^s \delta^s \mathbf{q} = \mathcal{F}^s, \quad \hat{\mathbf{q}}^{s+1} = \hat{\mathbf{q}}^s + \delta^s \mathbf{q},$$

где якобиан  $\mathbf{J}^s$  системы (1.12) записывается в виде

$$\mathbf{J}^s = \left. \frac{\partial \mathcal{F}(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \Delta t)}{\partial \hat{\mathbf{q}}} \right|_{\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{q}}^s},$$

а  $\mathcal{F}^s = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{q}}^s, \mathbf{q}, \Delta t)$  – вектор нелинейной невязки на приближении  $\hat{\mathbf{q}}^s$ . В качестве начального приближения обычно используется значение в момент времени  $t$ , т.е.  $\hat{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{q}$ . Итерации продолжаются до выполнения заданного критерия точности. В настоящей работе в качестве условия остановки итераций используется условие убывания нормы итерационного приращения в  $\varepsilon_r$  раз:

$$\|\delta^s \mathbf{q}\|_2 < \varepsilon_r \cdot \|\delta^0 \mathbf{q}\|_2.$$

В случае, когда за указанное максимальное число итераций  $s_{\max}$  критерий остановки не удовлетворяется, выполняется уменьшение временного шага  $\Delta t$  и задача решается заново. В общем виде алгоритм метода Ньютона приведён на схеме 1.

Применение метода Ньютона для системы уравнений (1.8) приводит к следующей системе линейных уравнений для определения итерационного приращения  $\delta^s \mathbf{q} = \mathbf{q}^{n+1,s+1} - \mathbf{q}^{n+1,s}$ :

$$\begin{aligned} V_i \frac{1}{\Delta t} \delta^s \mathbf{q}_i - \delta^s \mathbf{R}_i &= \mathbf{R}_i^{n+1,s} - V_i \frac{\Delta^s \mathbf{q}_i}{\Delta t}, \\ \delta^s \mathbf{R}_i &= \sum_{\sigma} s_{\sigma} (T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma} - \delta^s \mathbf{g}_{\sigma}) + V_i \delta^s \mathbf{w}_i, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где  $\Delta^s \mathbf{q} = \mathbf{q}^{n+1,s} - \mathbf{q}^n$  – итерационное приращение по времени, верхние индексы  $n$  и  $s$  указывают на временной слой и номер внутренней ньютоновской итерации соответственно. В настоящей работе предполагается, что вектор внешних источников  $\mathbf{w}$  (источник в уравнении энергии  $w$ ) является функцией, зависящей только от времени, но не зависящий от газодинами-



---

**Алгоритм 1** Метод Ньютона для решения системы нелинейных алгебраических уравнений

---

- 1) Инициализация: задать  $\varepsilon_r$ ,  $s_{\max}$ ,  $\Delta t$ ,  $\delta_{\Delta t} < 1$ ,  $\hat{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{q}$ .
  - 2) Для  $s = 1, 2, 3 \dots$ 
    - (а) Вычислить  $\mathbf{J}^{s-1}$  и  $\mathcal{F}^{s-1}$ .
    - (б) Вычислить  $\delta^{s-1}\mathbf{q}$  путем решения СЛАУ  $-\mathbf{J}^{s-1}\delta^{s-1}\mathbf{q} = \mathcal{F}^{s-1}$ .
    - (в) Вычислить  $\hat{\mathbf{q}}^s = \hat{\mathbf{q}}^{s-1} + \delta^{s-1}\mathbf{q}$ .
    - (г) Проверка сходимости: если  $\|\delta^{s-1}\mathbf{q}\|_2 < \varepsilon_r \cdot \|\delta^0\mathbf{q}\|_2$ , выйти из итераций.
    - (д) Если  $s \geq s_{\max}$ , вычислить  $\Delta t = \delta_{\Delta t}\Delta t$  и перейти к шагу 2.
  - 3) Положить  $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^s$ .
- 

ческих величин, поэтому  $\delta^s\mathbf{w} = 0$ .

После введения псевдо-временной переменной  $\tau$  система (1.13) примет вид

$$V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) \delta^s \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i^{n+1,s} - V_i \frac{\Delta^s \mathbf{q}_i}{\Delta t} - \sum_{\sigma} s_{\sigma} (T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma} - \delta^s \mathbf{g}_{\sigma}). \quad (1.14)$$

Здесь  $\Delta \tau$  – шаг дискретизации по псевдо-времени,  $\Delta t$  – шаг по физическому времени.

При линейаризации итерационной вариации  $\delta^s \mathbf{g}_{\sigma}$  вязкого потока из-за громоздкости получаемых уравнений обычно используется приближённый подход, в котором матрица линейаризации заменяется диагональной матрицей с мажорирующим спектральным радиусом  $\rho_{dis}$  на диагонали:

$$\delta^s \mathbf{g}_{\sigma} = \rho_{dis} \frac{\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} - \delta^s \mathbf{q}_i}{h_{\sigma}}, \quad \rho_{dis} = \max \left\{ \frac{\mu}{\rho}, \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \right\}.$$

Многочисленные вычислительные эксперименты показывают, что эффект от этого приближения в действительности несильно сказывается на скорости сходимости [15].

При линейаризации невязкой составляющей численного потока исполь-

зается упрощенная формула, предложенная В.В. Русановым [50]:

$$\mathbf{F}_\sigma = 0.5 [\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \rho_{inv,\sigma} (\mathbf{Q}_{\sigma(i)} - \mathbf{Q}_i)],$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_\sigma (\mathbf{Q}_i), \quad \mathbf{F}_{\sigma(i)} = \mathbf{F}_\sigma (\mathbf{Q}_{\sigma(i)}),$$

где  $\rho_{inv,\sigma}$  – спектральный радиус якобиана  $A_\sigma = \partial \mathbf{F}_\sigma / \partial \mathbf{Q}$ :

$$\rho_{inv,\sigma} = \max \{|u_n - c|_\sigma, |u_n + c|_\sigma\},$$

$c$  – локальная скорость звука. Кроме того, при линеаризации потока предполагается, что поток вычисляется по схеме первого порядка, т.е. на самих сеточных, а не интерполированных на грань, значениях.

При этих допущениях линеаризация невязкой составляющей потока проводится следующим образом:

$$T_\sigma^{-1} \delta^s \mathbf{F}_\sigma = 0.5 [T_\sigma^{-1} A_\sigma(\mathbf{Q}_i) T_\sigma + \rho_{inv,\sigma}] \delta^s \mathbf{q}_i$$

$$+ 0.5 [T_\sigma^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \rho_{inv,\sigma} \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}].$$

Здесь использовалась операция «обратной линеаризации»:  $A \delta^s \mathbf{Q} = \delta^s \mathbf{F}$ , предложенная в [51].

В работе [52] показано, что в общем случае неструктурированных сеток произвольной многогранной формы

$$\sum_\sigma s_\sigma T_\sigma^{-1} A_\sigma(\mathbf{Q}_i) T_\sigma = 0,$$

благодаря чему из алгоритма полностью исключается вычисление якобианов в явном виде.

В результате получается линейная система уравнений для определения итерационных вариаций  $\delta^s \mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned}
& \left[ V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left( \frac{1}{2} \rho_{inv, \sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right) \right] \delta^s \mathbf{q}_i \\
& \quad + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left[ \frac{1}{2} T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \left( \frac{1}{2} \rho_{inv, \sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right) \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} \right] \\
& \qquad \qquad \qquad = \mathbf{R}_i^{n+1, s} - V_i \frac{\Delta^s \mathbf{q}_i}{\Delta t}, \quad (1.15)
\end{aligned}$$

где  $\delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} = \mathbf{F}_{\sigma} (\mathbf{Q}_{\sigma(i)} + \delta^s \mathbf{Q}_{\sigma(i)}) - \mathbf{F}_{\sigma} (\mathbf{Q}_{\sigma(i)})$ .

Аналогичным образом проводится линеаризация уравнения (1.11). При этом принимаются следующие допущения:

- все параметры потока, кроме  $\tilde{\nu}$ , считаются фиксированными (за счёт использования схемы расщепления по физическим процессам),
- вместо величин  $A_1$  и  $A_2$  в целях устойчивости берутся их расщепления  $A_1^-$  и  $A_2^-$  (см. раздел 1.3.2),
- величины  $\Gamma_{\sigma, i}^{dis}, A_1^-, A_2^-$  считаются не зависящими от  $\tilde{\nu}^{n+1, s+1}$ .

Тогда линейная система для определения  $\delta^s \tilde{\nu}$  запишется в виде:

$$\begin{aligned}
& \left[ \rho_i V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left( \rho_{\sigma} u_{n, i}^+ + \frac{\Gamma_{\sigma, i}^{dis}}{h_{\sigma}} \right) - V_i (A_1^- + 2A_2^- \tilde{\nu}_i) \right. \\
& \quad \left. + \frac{V_i}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \nabla \rho_i \cdot \nabla \tilde{\nu}_i \right] \delta^s \tilde{\nu}_i + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left[ \rho_{\sigma} u_{n, \sigma(i)}^- - \frac{\Gamma_{\sigma, i}^{dis}}{h_{\sigma}} \right] \delta^s \tilde{\nu}_{\sigma(i)} \\
& \qquad \qquad \qquad = \tilde{R}_i^{n+1, s} - V_i \frac{\Delta^s \tilde{\nu}_i}{\Delta t}. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Таким образом, имеются две СЛАУ (1.15) и (1.16) вида  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  размерности  $5N$  и  $N$ , соответственно. В реальных задачах  $N$  достигает значений порядка миллионов или даже десятков миллионов, что, учитывая специфику уравнений, приводит к большим разреженным плохообусловленным матрицам общего вида (несимметричным и не положительно определённым). В силу этого использование для их решения прямых методов на основе полного LU разложения неприемлемо [53].

### 1.4.2 Метод LU-SGS

Определим диагональную матрицу  $D$ , ниже-треугольную матрицу  $L$ , верхне-треугольную матрицу  $U$  и вектор правой части  $\mathbf{G}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 D_i &= V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left( \frac{1}{2} \rho_{inv, \sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right), \\
 L(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}) &= \sum_{\sigma: \sigma(i) < i} s_{\sigma} \left[ \frac{1}{2} T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \left( \frac{1}{2} \rho_{inv, \sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right) \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} \right], \\
 U(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}) &= \sum_{\sigma: \sigma(i) > i} s_{\sigma} \left[ \frac{1}{2} T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \left( \frac{1}{2} \rho_{inv, \sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right) \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} \right], \\
 \mathbf{G}_i^s &= \mathbf{R}_i^{n+1, s} - V_i \frac{\Delta^s \mathbf{q}_i}{\Delta t}.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Тогда система уравнений (1.15) примет вид:

$$(L + D + U) \delta^s \mathbf{q} = \mathbf{G}^s.$$

Она может быть переписана эквивалентным образом как

$$(D + L) D^{-1} (D + U) \delta^s \mathbf{q} = \mathbf{G}^s - LD^{-1}U \delta^s \mathbf{q}. \tag{1.18}$$

Факторизация методом LU-SGS заключается в пренебрежении последним слагаемым в правой части уравнения (1.18), в результате чего факторизованная система разбивается на две подсистемы, решение которых реализуется двумя расчётными циклами по ячейкам сетки: первый – в прямом направлении (от первой ячейки к последней), а второй – в обратном:

$$\begin{aligned}
 \delta^{s,*} \mathbf{q}_i &= D_i^{-1} \left[ \mathbf{G}_i - L(\delta^{s,*} \mathbf{q}_{\sigma(i)}) \right], \quad i = 1 \dots N \\
 \delta^s \mathbf{q}_i &= \delta^{s,*} \mathbf{q}_i - D_i^{-1} U(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}), \quad i = N \dots 1.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Получающаяся при этом итерационная невязка служит для обновления итерационного вектора,  $\mathbf{q}^{n+1,s+1} = \mathbf{q}^{n+1,s} + \delta^s \mathbf{q}$ , после чего процедура (1.19) повторяется.

Аналогичным образом происходит решение уравнения (1.16):

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_i &= \rho_i V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left( \rho_{\sigma} u_{n,i}^+ + \frac{\Gamma_{dis,\sigma,i}}{h_{\sigma}} \right) \\
&\quad - V_i (A_1^- + 2A_2^- \tilde{v}_i) + \frac{V_i}{\sigma_{\tilde{v}}} \nabla \rho_i \cdot \nabla \tilde{v}_i, \\
\tilde{L}(\delta^s \tilde{v}_{\sigma(i)}) &= \sum_{\sigma:\sigma(i)<i} s_{\sigma} \left[ \rho_{\sigma} u_{n,\sigma(i)}^- - \frac{\Gamma_{dis,\sigma,i}}{h_{\sigma}} \right] \delta^s \tilde{v}_{\sigma(i)}, \\
\tilde{U}(\delta^s \tilde{v}_{\sigma(i)}) &= \sum_{\sigma:\sigma(i)>i} s_{\sigma} \left[ \rho_{\sigma} u_{n,\sigma(i)}^- - \frac{\Gamma_{dis,\sigma,i}}{h_{\sigma}} \right] \delta^s \tilde{v}_{\sigma(i)}, \\
\tilde{G}_i &= \tilde{R}_i^{n+1,s} - V_i \frac{\Delta^s \tilde{v}_i}{\Delta t},
\end{aligned} \tag{1.20}$$

и циклы по ячейкам примут вид

$$\begin{aligned}
\delta^{s,*} \tilde{v}_i &= \tilde{D}_i^{-1} \left[ \tilde{G}_i - \tilde{L}(\delta^{s,*} \tilde{v}_{\sigma(i)}) \right], \quad i = 1 \dots N \\
\delta^s \tilde{v}_i &= \delta^{s,*} \tilde{v}_i - \tilde{D}_i^{-1} \tilde{U}(\delta^s \tilde{v}_{\sigma(i)}), \quad i = N \dots 1.
\end{aligned}$$

Метод LU-SGS относится к классу безматричных методов решения СЛАУ, т.е. решение линейной системы методом LU-SGS не требует отдельного хранения коэффициентов матрицы системы целиком, позволяя строить компоненты решения локально по мере прохода циклов по ячейкам сетки через произведения матриц-векторов [31]. Это позволяет существенно сократить объемы используемой памяти и исключить операции с большой матрицей системы, что часто облегчает параллельную реализацию методов данного класса.

Следует отметить, что решение СЛАУ методом LU-SGS производится с точностью, обусловленной порядком величины  $LD^{-1}U$ . Однако в силу допущений, принятых для линеаризации потоков при аппроксимации мат-

рицы Якоби системы, очень точное решение СЛАУ и не требуется, в особенности, при расчёте стационарных течений [41]. В случае когда точности метода LU-SGS недостаточно для обеспечения сходимости метода Ньютона, решение СЛАУ должно осуществляться более точно, например, одним из итерационных методов крыловских подпространств, для которых метод LU-SGS может использоваться в качестве предобуславливателя.

### 1.4.3 Метод BiCGStab

Метод BiCGStab [53] относится к классу итерационных методов крыловских подпространств для решения СЛАУ вида  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . BiCGStab является «стабилизированным» вариантом метода бисопряжённых градиентов BiCG, он обеспечивает устойчивость вычислений и более гладкую по сравнению с BiCG сходимость к решению за счёт устранения матрично-векторных операций с транспонированной матрицей системы. Применение метода BiCGStab требует реализации следующих операций:

- вычисление скалярного произведения векторов:  $a = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ;
- вычисление матрично-векторного умножения:  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ ;
- применение операции предобуславливания:  $\mathbf{y} = M^{-1}\mathbf{x} \approx A^{-1}\mathbf{x}$ , где  $M^{-1}$  – подходящий линейный оператор, матрица которого довольно часто не задается явно.

Во многом качество работы итерационного метода зависит от качества используемого предобуславливателя, поскольку процедура предобуславливания является наиболее ресурсоемким элементом алгоритма. Кроме того, т.к. процедура распараллеливания скалярного произведения и матрично-векторного умножения может быть проведена стандартным образом без особого труда, эффективность параллельной реализации общего алгоритма зависит от степени параллелизма, которую допускает используемый метод предобуславливания. Следует отметить, что решение СЛАУ методом BiCGStab с LU-SGS в качестве предобуславливателя допускает реализацию

без хранения полной матрицы коэффициентов системы. За счёт этого общий алгоритм «Метод Ньютона + BiCGStab + LU-SGS» так же, как и алгоритм «Метод Ньютона + LU-SGS», является «безматричным» и относится к классу безматричных методов Ньютона-Крылова (Jacobian-free Newton-Krylov methods [54]).

В настоящей работе используется модифицированная версия алгоритма BiCGStab, выполненная аналогично работе [55]. Она включает в себя дополнительный «ранний» контроль сходимости, а также различные проверки, направленные на анализ возможности стагнации алгоритма и улучшающие устойчивость программной реализации.

Используемый алгоритм метода BiCGStab с предобуславливанием приведен на схеме 2. Здесь для наглядности представлен общий вариант алгоритма. В расчётах начальное приближение  $\mathbf{x}_0$  полагалось равным нулю, поскольку искомый вектор  $\mathbf{x}$  есть не что иное, как итерационная вариация в методе Ньютона. В качестве критерия остановки используется условие убывания нормы начальной невязки в  $\varepsilon_r$  раз, при этом для исключения стагнации алгоритма в случае малой нормы начальной невязки дополнительно вводится величина  $\varepsilon_a$ . Таким образом, критерий остановки имеет вид:

$$\|\mathbf{r}_k\|_2 < \varepsilon_r \cdot \|\mathbf{r}_0\|_2 + \varepsilon_a.$$

Операция вида  $\mathbf{a} = M^{-1}\mathbf{b}$  обозначает процедуру предобуславливания, в частности, при использовании метода LU-SGS под  $\mathbf{a} = M^{-1}\mathbf{b}$  подразумевается нахождение решения системы  $(D + L)D^{-1}(D + U)\mathbf{a} = \mathbf{b}$  согласно разделу 1.4.2.

#### 1.4.4 Общий алгоритм решения

В общем виде алгоритм решения полной задачи представлен на схеме 3. Под  $t_0$  и  $t_{\max}$  подразумевается начальное и конечное время расчёта соответственно. Величина  $\Delta t_n$  обозначает текущий шаг интегрирования по

---

**Алгоритм 2** Алгоритм предобусловленного метода BiCGStab для решения системы линейных алгебраических уравнений  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

---

- 1) Инициализация: выбрать начальное приближение  $\mathbf{x}_0$ .
  - 2) Вычислить  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ .
  - 3) Выбрать произвольный  $\mathbf{r}_0^*$ , такой, что  $(\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0) \neq 0$ , например  $\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0$ .
  - 4) Задать  $\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$ ,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0 = 0$ .
  - 5) Для  $k = 1, 2, 3 \dots$ 
    - (а) Вычислить  $\rho_k = (\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_{k-1})$ .
    - (б) Вычислить  $\beta = (\rho_k / \rho_{k-1})(\alpha / \omega_{k-1})$ .
    - (в) Вычислить  $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \beta(\mathbf{p}_{k-1} - \omega_{k-1}\mathbf{v}_{k-1})$ .
    - (г) Вычислить  $\mathbf{y} = M^{-1}\mathbf{p}_k$ .
    - (д) Вычислить  $\mathbf{v}_k = A\mathbf{y}$ .
    - (е) Вычислить  $\alpha = \rho_k / (\mathbf{r}_0^*, \mathbf{v}_k)$ .
    - (ж) Вычислить  $\mathbf{s} = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha\mathbf{v}_k$ .
    - (з) Проверка сходимости: если  $\|\mathbf{s}\|_2 < \varepsilon_a$ , вычислить  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha\mathbf{y}$  и выйти из итераций.
    - (и) Вычислить  $\mathbf{z} = M^{-1}\mathbf{s}$ .
    - (к) Вычислить  $\mathbf{t} = A\mathbf{z}$ .
    - (л) Вычислить  $\omega_k = (M^{-1}\mathbf{t}, M^{-1}\mathbf{s}) / (M^{-1}\mathbf{t}, M^{-1}\mathbf{t})$ .
    - (м) Вычислить  $\mathbf{r}_k = \mathbf{s} - \omega_k\mathbf{t}$ .
    - (н) Вычислить  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha\mathbf{y} + \omega_k\mathbf{z}$ .
    - (о) Проверка сходимости: если  $\|\mathbf{r}_k\|_2 < \varepsilon_r \cdot \|\mathbf{r}_0\|_2 + \varepsilon_a$ , выйти из итераций.
-



времени, который вычисляется согласно формуле

$$\Delta t_n = q_{\text{CFL}} \cdot \min_i \left\{ \frac{d_i}{|\mathbf{u}_i| + c_i}, \frac{\rho_i d_i^2}{(\mu_{\text{eff}})_i} \right\},$$

где  $d_i$  – минимальный линейный масштаб  $i$ -й ячейки,  $q_{\text{CFL}}$  – число Куранта–Фридрихса–Леви. При использовании явной схемы оно априори задается в диапазоне  $0.5 \div 0.8$ , для неявной схемы оно формально может быть любым.

Для задач газовой динамики в методе Ньютона обычно полагается  $\varepsilon_r \sim 10^{-4} \div 10^{-2}$ . Следует заметить, что в методе Ньютона для системы URANS и уравнения SA, а также в методе BiCGStab используются разные значения величины  $\varepsilon_r$ .

Как уже отмечалось выше, согласно схеме расщепления при интегрировании URANS уравнений для вычисления газодинамических потоков используется значение турбулентной вязкости  $\mu_t^{n-1}$  с предыдущего временного слоя, после чего интегрирование уравнения модели турбулентности SA проводится с использованием обновленного поля основных переменных  $\mathbf{q}^n$ . Новое значение турбулентной вязкости  $\mu_t^n$  вычисляется в конце текущего временного слоя согласно формуле (1.4) по величинам  $\mathbf{q}^n$  и  $\tilde{\nu}^n$ .

---

**Алгоритм 3** Общий алгоритм решения

---

- 1) Инициализация: задать  $s_{\max}$ ,  $\delta_{\Delta t}$ , начальные условия при  $n = 0$ ,  $t = t_0$ :  $\mathbf{q}^0$ ,  $\tilde{\nu}^0$ .
  - 2) Расчёт шагов по времени.  
Для  $n = 1, 2, 3 \dots$ 
    - (а) Вычислить  $\Delta t_n$ ,  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ .
    - (б) Решить неявно дискретизированные URANS уравнения методом Ньютона (с использованием  $\mu_t^{n-1}$ ):
      - Инициализация: задать  $\mathbf{q}^{n,0} = \mathbf{q}^{n-1}$ .
      - Для  $s = 1, 2, 3 \dots$ 
        - Решить СЛАУ методами LU-SGS или BiCGStab + LU-SGS: вычислить  $\delta^{s-1}\mathbf{q}$ .
        - Вычислить  $\mathbf{q}^{n,s} = \mathbf{q}^{n,s-1} + \delta^{s-1}\mathbf{q}$ .
        - Проверка сходимости: если  $\|\delta^{s-1}\mathbf{q}\|_2 < \varepsilon_r \cdot \|\delta^0\mathbf{q}\|_2$ , ВЫЙТИ из итераций.
        - Если  $s \geq s_{\max}$ , вычислить  $\Delta t_n = \delta_{\Delta t}\Delta t_n$ ,  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$  и перейти к шагу 2б.
      - Задать  $\mathbf{q}^n = \mathbf{q}^{n,s}$ .
    - (в) Решить неявно дискретизированное уравнение модели SA методом Ньютона (с использованием  $\mathbf{q}^n$ ):
      - Инициализация: задать  $\tilde{\nu}^{n,0} = \tilde{\nu}^{n-1}$ .
      - Для  $s = 1, 2, 3 \dots$ 
        - Решить СЛАУ методом LU-SGS: вычислить  $\delta^{s-1}\tilde{\nu}$ .
        - Вычислить  $\tilde{\nu}^{n,s} = \tilde{\nu}^{n,s-1} + \delta^{s-1}\tilde{\nu}$ .
        - Проверка сходимости: если  $\|\delta^{s-1}\tilde{\nu}\|_2 < \varepsilon_r \cdot \|\delta^0\tilde{\nu}\|_2$ , ВЫЙТИ из итераций.
      - Задать  $\tilde{\nu}^n = \tilde{\nu}^{n,s}$ .
      - Вычислить  $\mu_t^n = f(\mathbf{q}^n, \tilde{\nu}^n)$ .
    - (г) Если  $t_n \geq t_{\max}$ , закончить вычисления.
-

## Глава 2

# Программный комплекс

### 2.1 Особенности программной реализации

Рассмотренные в предыдущем разделе алгоритмы неявной схемы, а также уравнения явной схемы (1.7) и (1.10) были реализованы в виде программного комплекса на языках программирования C/C++ с использованием интерфейса параллельного программирования MPI (Message Passing Interface) [56], являющегося наиболее распространённым стандартом интерфейса обмена данными в параллельном программировании и имеющего реализации для большого числа компьютерных платформ.

Декомпозиция расчётной области проводилась с помощью процедур свободно распространяемой библиотеки CHACO [57]. Область разбивалась на равные подобласти по числу используемых вычислительных ядер (см. рис. 2.1), соответственно делился и объём памяти между ними. В целях балансировки нагрузки на вычислительные ядра и минимизации обменов между ними использовался обратный алгоритм Катхилла–Макки (RCM) [58], минимизирующий ширину ленты разреженной симметричной матрицы. С помощью него происходила перенумерация узлов расчётной области. Аналогично процедуре постановки граничных условий, за каждой границей подобласти вводились два ряда фиктивных ячеек, в которые пересылались данные из соседней подобласти, расчёт для которой проводился на другом вычислительном ядре. Несмотря на свою простоту, такая декомпозиция области обеспечивает равномерную загрузку вычислительных ядер и высокую эффективность расчётов [59, 60].

В работах [61, 62] была представлена параллельная реализация метода LU-SGS, полностью эквивалентная действию последовательного алгоритма (пригодная для использования как на структурированных, так и на неструктурированных сетках). Эквивалентность алгоритмов обеспечивалась за счёт специального разбиения расчётной области на подмножества и двухэтапного расчёта по типу составляющих их ячеек, которые разбива-

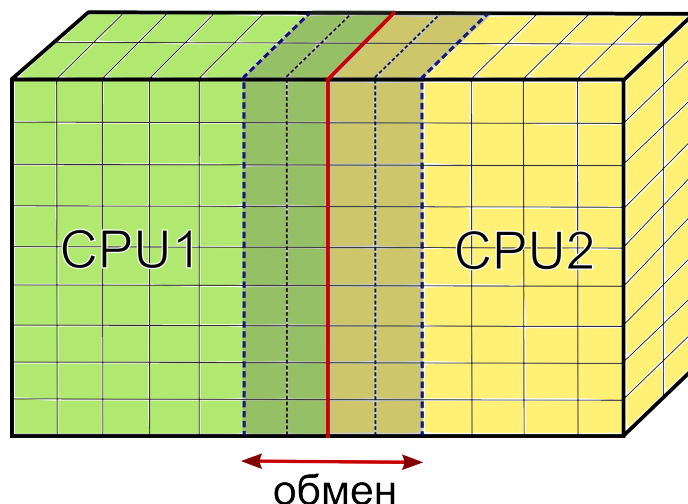


Рис. 2.1. Схематичное изображение декомпозиции расчётной области при проведении параллельных расчётов на 2-х вычислительных ядрах

лись на «внутренние» и «внешние». Аналогичный подход использовался в работе [32], в которой рассматривался вопрос о построении параллельной реализации метода LU-SGS, пригодной для использования на вычислительных архитектурах гибридного типа. Все расчётные подобласти разбивались на два типа, «black» и «white», после чего использовался специальный порядок обхода ячеек внутри блоков каждого типа и асинхронный обмен данными между ними. Предложенные реализации отличаются сложной структурой организации вычислений и обменов данными. Однако, как показывает практика, при отказе от полной эквивалентности действий последовательного и параллельного алгоритма появляется ряд существенных преимуществ [24]. В частности, это минимизация и простота организации обменов данными между расчётными узлами: обмены осуществляются синхронно и по одной и той же схеме.

Реализованный в настоящей работе параллельный метод LU-SGS является модификацией последовательного алгоритма, в которой вклад граней, соединяющих внутренние и обменные ячейки, в множители  $L$  и  $U$  в выражении (1.17) и  $\tilde{L}$  и  $\tilde{U}$  в выражении (1.20) не учитывается. Благодаря этому упрощению метод LU-SGS может быть применен отдельно для каждой подобласти, без введения специальных вариантов обхода ячеек и организации дополнительных взаимодействий между обменными ячейками для разных узлов. Естественное при использовании такого упрощения

ухудшение сходимости, как показывает практика, в большинстве случаев эффективно компенсируется хорошей масштабируемостью. В случае когда фактической точности реализованного варианта алгоритма LU-SGS не хватает, он используется в качестве предобуславливателя для итерационного метода BiCGStab. В этом случае решение СЛАУ проводится для исходной матрицы Якоби, элементы которой в последовательном и параллельном вариантах алгоритма строятся одинаковым образом с учётом всех взаимодействий (результат умножения матрицы Якоби системы на произвольный вектор в параллельной и последовательной версии алгоритма совпадают). Этот факт позволяет утверждать, что при заданной точности решения СЛАУ результаты работы последовательного и параллельного алгоритма на основе методов BiCGStab и LU-SGS совпадают.

Таким образом, предложенная параллельная реализация неявной схемы довольно проста, являясь по существу надстройкой над параллельной реализацией явной схемы, с локализацией неявности схемы внутри подобластей. Благодаря этому не требуется вводить специальное упорядочивание ячеек и существенно изменять порядок или топологию обменов данными между узлами по сравнению с параллельной явной схемой.

Расчёты проводились в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на гибридном вычислительном кластере К-100 с компиляторами Intel C/C++ [63]. Кластер состоит из 64 узлов, на каждом из которых стоит по два 6-ядерных процессора Intel Xeon X5670 с частотой 2.93 ГГц, 96Gb оперативной памяти DDR3 и 3 графических ускорителя nVidia Fermi C2050 (по 448 вычислительных ядер и 2.5Gb памяти DDR5 на каждом). Узлы соединены между собой с помощью адаптеров QDR InfiniBand. Таким образом, на каждом узле для вычислений доступны 12 ядер CPU и 3 графических ускорителя [64].

## 2.2 Валидационные расчёты

### 2.2.1 Течение вокруг крыла с симметричным профилем

Задача об обтекании крыла является одной из наиболее хорошо изученных, но тем не менее не теряющих актуальность задач аэродинамики. К настоящему времени накоплен большой объем экспериментальных, расчётных и теоретических данных для различных вариантов её постановок. Поэтому довольно часто задача об обтекании крыла используется в качестве теста для анализа эффективности и качества алгоритмов при верификации программных комплексов, предназначенных для решения задач данного класса [65].

В настоящей работе валидация разработанной реализации неявной схемы при расчёте стационарных течений проведена на задаче трансзвукового обтекания крыла ONERA M6 [65–67]. Описание геометрии и общий вид модели крыла в аэродинамической трубе представлены на рис. 2.2 и 2.3 соответственно. Полуразмах крыла составляет  $L/2 = 1.1963$  м, удлинение  $A = 3.8$ , сужение  $\lambda = 0.56$ , стреловидность по передней кромке  $\beta_f = 30^\circ$ , стреловидность по задней кромке  $\beta_b = 15.8^\circ$ . Геометрические размеры расчётной области составляют  $L_x = 41$  м,  $L_y = 40$  м,  $L_z = 21$  м. Параметры набегающего потока приведены в таб. 2.1. Здесь  $\alpha$  – угол атаки,  $M_\infty$ ,  $Re_\infty$ ,  $p_\infty$  и  $T_\infty$  – число Маха, число Рейнольдса, давление и температура в набегающем потоке.

$\alpha$	$M_\infty$	$Re_\infty$	$p_\infty$	$T_\infty$
$3.06^\circ$	0.8395	$19\,318\,611\text{ м}^{-1}$	315.98 кПа	255.56 К

Таблица 2.1. Параметры набегающего потока

Для расчётов использовалась гексагональная блочно-структурированная сетка  $\Omega_h$ , ячейки которой сгущались по мере приближения к крылу. Сетка содержала  $N = 1\,898\,960$  ячеек, её общий вид представлен на рис. 2.4.

FIGURE B1-1

SWEPT WING M6

Aspect ratio  $A = 3.8$   
 Taper ratio  $\lambda = 0.56$   
 Sweep angle  $\Lambda_{25\%} = 26.7^\circ$

ROWS OF PRESSURE TAPS

N°	y/b	upper	under
1	0.20	23	11
2*	0.44	23	11
3	0.65	23	11
4	0.80	23	11
5	0.90	31	14
6	0.95	31	14
7	0.99	31	14

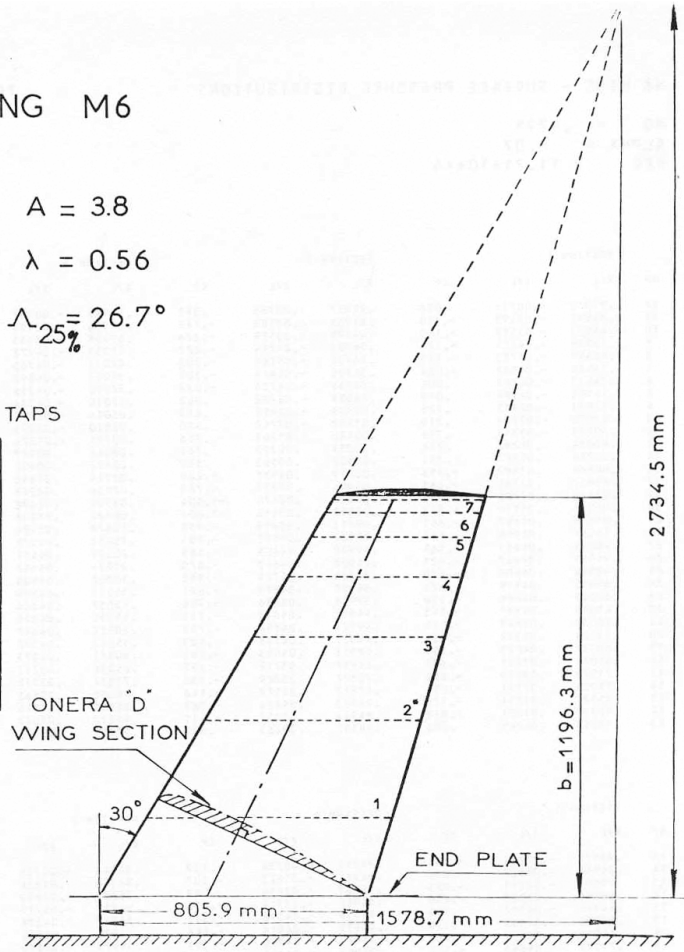


Рис. 2.2. Описание геометрии крыла ONERA M6 [66]

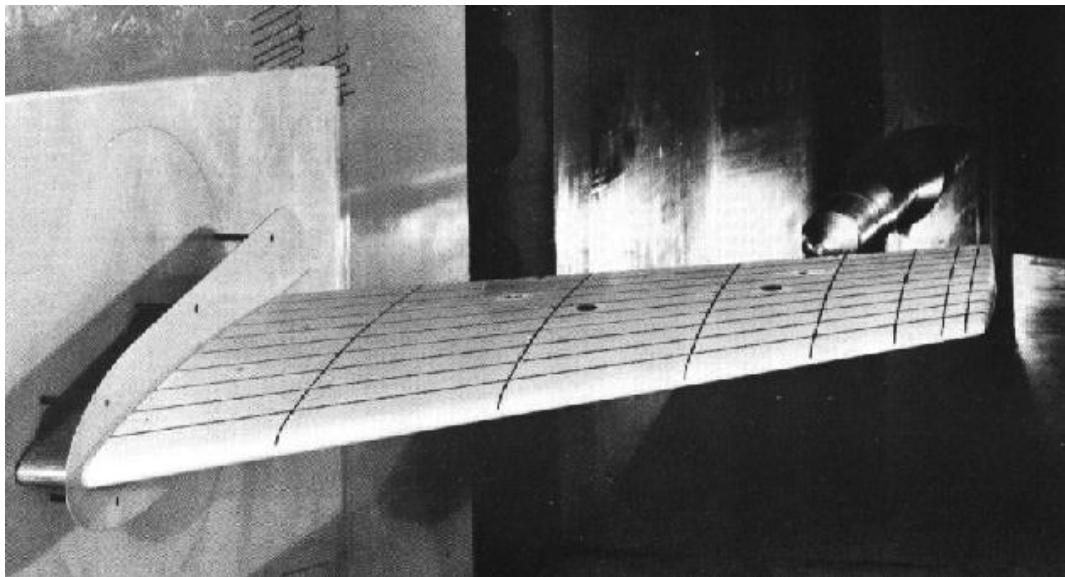


Рис. 2.3. Крыло ONERA M6 в аэродинамической трубе [66]

Характеристики течения в начальный момент времени полагались равными значениям набегающего потока. Также делалось предположение о полностью турбулентном характере течения, поэтому в начале расчёта значение модельной переменной уравнения SA (1.5) задавалось как  $\tilde{\nu}_0 = 3.0\mu_0$ . Граничные условия ставились согласно разделу 1.3.3: на входе в расчётную область и боковых границах (плоскости  $x = -L_x/2$ ,  $y = -L_y/2$ ,  $y = L_y/2$ ,  $z = -L_z$ ) задавались параметры набегающего потока (граничное условие «вход»), на выходе из расчётной области (плоскость  $x = L_x/2$ ) проводилась экстраполяция переменных (граничное условие «выход»), на боковой границе (плоскость  $z = 0$ ), содержащей боковую поверхность крыла, ставилось условие симметрии потока, на остальной поверхности крыла – условие прилипания (граничное условие «твёрдая стенка»).

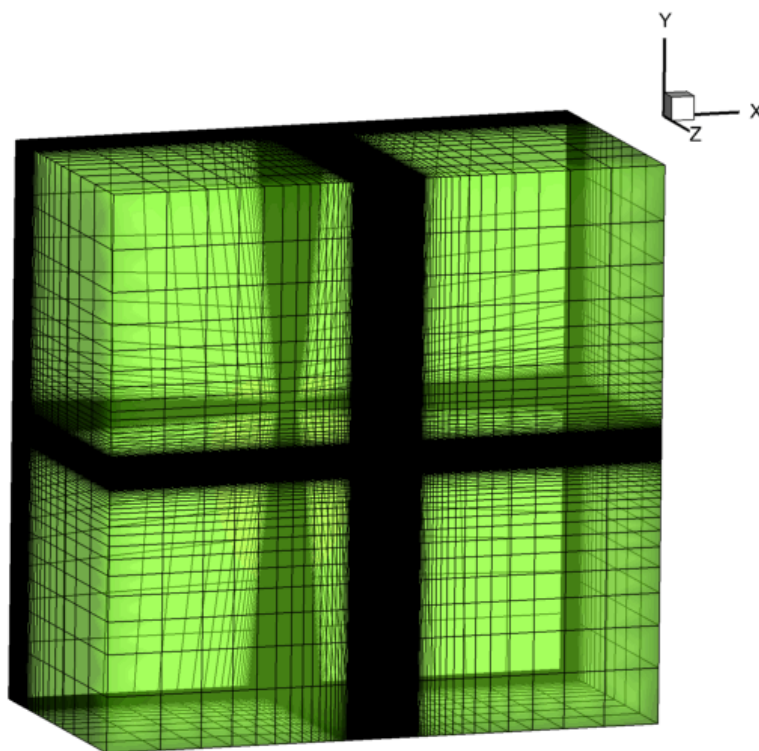


Рис. 2.4. Общий вид расчётной сетки

Численные расчёты проводились по явной и неявной схемам, ранее описанным в главе 1, результаты расчётов сравнивались с экспериментальными данными [66]. Для получения стационарного решения расчёты проводились методом установления, поэтому для неявной схемы было выбрано фиксированное количество внутренних ньютоновских итераций  $s_{\max} = 1$  на



один шаг по времени. В качестве исследуемого значения «невязки» была выбрана величина

$$\text{res} = \|\Delta\rho/\Delta t\|_{C(\Omega_h)} = \max_{i=1\dots N} |\Delta\rho_i/\Delta t|.$$

Расчёт останавливался при выполнении условия  $\text{res} < 5.0 \times 10^{-6}$ . Расчёты проводились на  $N_{\text{proc}} = 36$  вычислительных ядрах. Число Куранта для явной и неявной схем бралось равным  $q_{\text{CFL}}^{\text{exp}} = 0.5$  и  $q_{\text{CFL}}^{\text{imp}} = 1000.0$  соответственно.

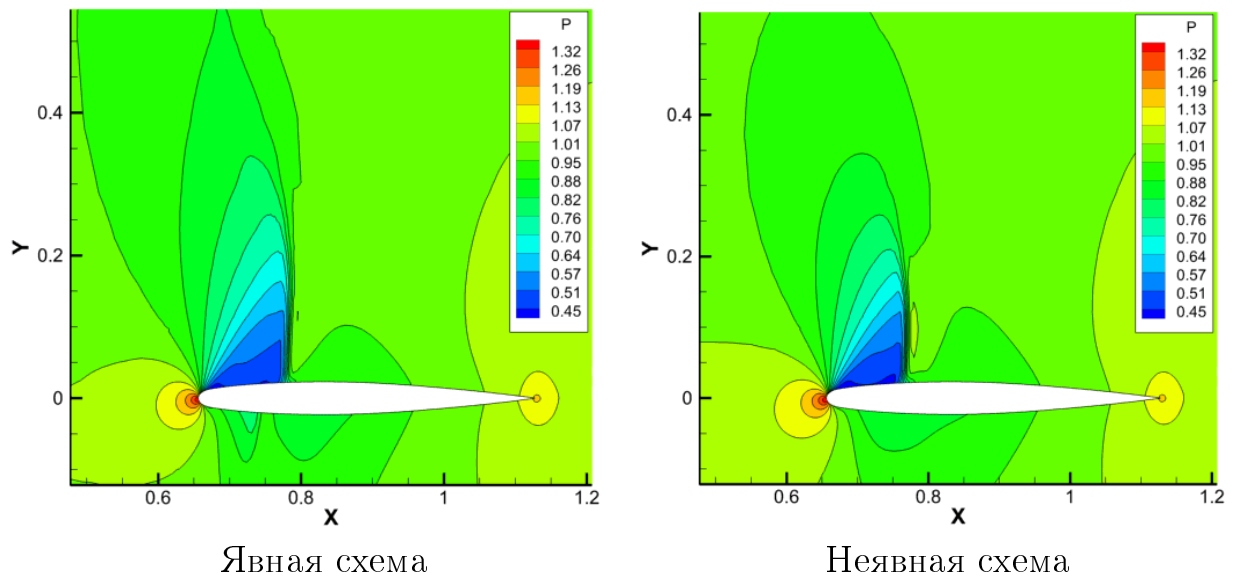


Рис. 2.5. Распределение давления в сечении  $z/(L/2)=0.95$

На рисунке 2.5 изображено полученное в расчётах по явной и неявной схемам распределение поля давления в плоскости сечения крыла  $z/(L/2) = 0.95$ . Для этого же сечения на рис. 2.6 представлено сравнение полученного в расчётах коэффициента давления  $C_p$  (взятого со знаком минус) с результатами эксперимента. Как видно из рис. 2.6, расчёт по неявной схеме довольно точно совпадает с экспериментальными данными, воспроизводя положение скачка уплотнения даже более точно, чем расчёт по явной схеме. Данный факт имеет логичное объяснение, следующее из рис. 2.7, на котором представлена зависимость «невязки» от числа временных шагов.

Для достижения стационарного решения в расчёте по неявной схеме потребовалось выполнить порядка 13 000 итераций, что значительно меньше,

чем количество выполненных шагов по явной схеме – 2 000 000 (для отображения результатов в одном масштабе значение на графике не представлено), за которые «невязка» упала до величины приблизительно  $1.0 \times 10^{-3}$  (далее расчёт не продолжался). Кроме того, время одной итерации расчёта по неявной схеме составило примерно 0.51 сек., по явной – 0.33 сек. Благодаря этим фактам использование неявной схемы позволило значительно сократить общее время расчёта при приемлемом совпадении с экспериментальными данными.

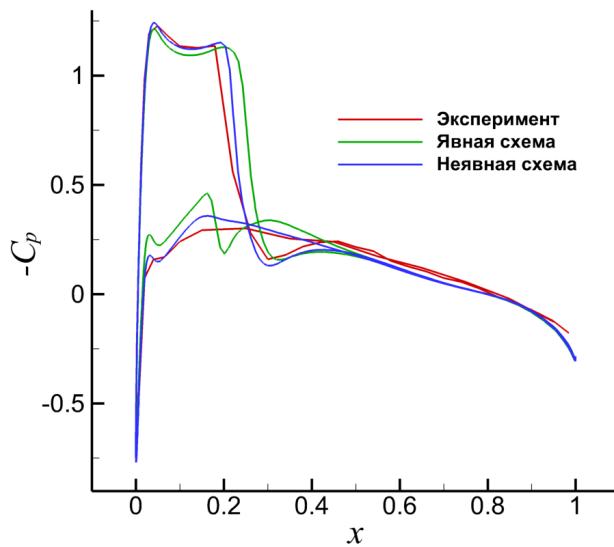


Рис. 2.6. Распределение коэффициента давления в сечении  $z/(L/2) = 0.95$

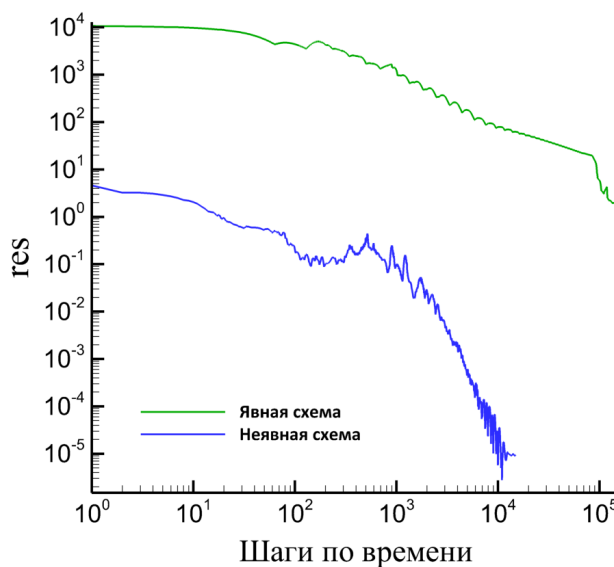


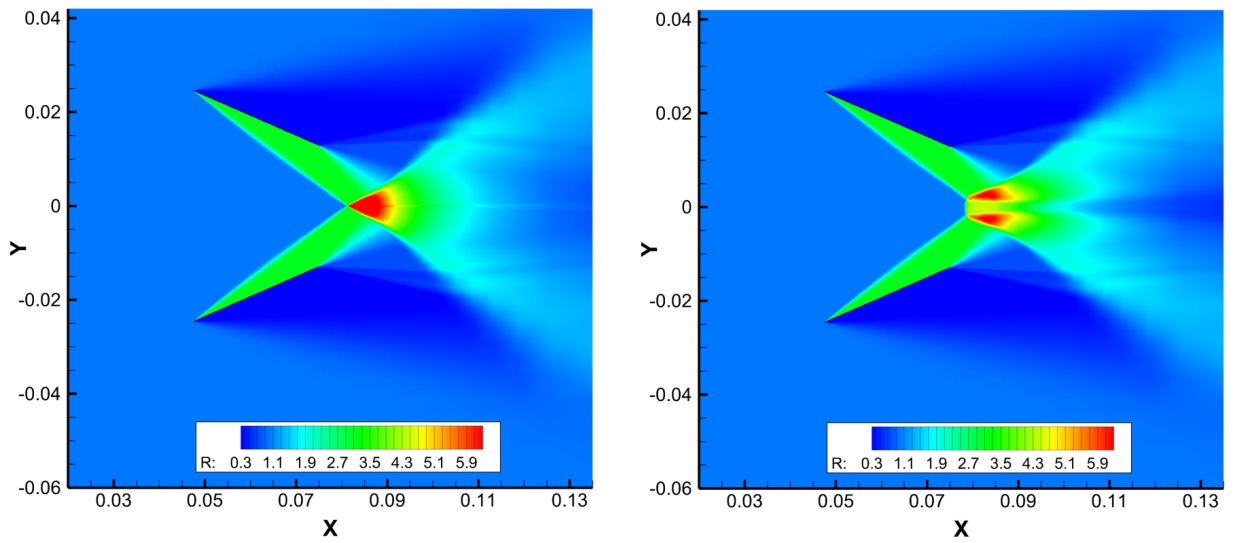
Рис. 2.7. Зависимость «невязки» от числа шагов по времени

### 2.2.2 Переход между регулярным и маховским отражением ударных волн в области двойных решений

Для верификации разработанной реализации неявной схемы в случае расчёта нестационарных течений рассмотрена задача о моделировании перехода между регулярным (RR) и маховским (MR) отражением ударных волн в области двойных решений, в которой переход инициируется импульсным подводом энергии в поток. При этом процесс перехода является существенно нестационарным, что накладывает дополнительные требования на точность используемых методов решения.

Постановка задачи взята из цикла работ [68–72], в которых проводились как натурные, так и численные эксперименты. Указанные работы были посвящены исследованию отражения ударной волны от плоскости симметрии при взаимодействии скачков уплотнения, генерируемых двумя помещёнными в сверхзвуковой поток симметричными клиньями (либо пластинами). Данная задача интересна тем, что в зависимости от угла падающего скачка  $\alpha$  возможно существование двух различных стационарных ударно-волновых конфигураций (рис. 2.8) в некотором диапазоне углов  $\alpha_N < \alpha < \alpha_d$  (т.н. «область двойного решения», рис. 2.9) и связанное с этим явление гистерезиса. В указанных работах исследовался диапазон данных углов, влияние возмущений набегающего потока, а также возможность управления течением (для инициирования перехода  $RR \Leftrightarrow MR$ ) путем локального выделения энергии перед ударной волной. Интерес к данной тематике во многом связан с интенсификацией исследований по разработке гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА), в частности, для нахождения способов управления течением в двигательной установке в целях устранения возможности выхода на нерасчётные режимы движения [35, 73–77].

Исследуемая в настоящей работе задача ставится следующим образом. Рассматривается трёхмерное сверхзвуковое обтекание двух симметрично расположенных клиньев (в численных расчётах для простоты заменённых на пластины аналогично работе [71]). Конфигурация модели схематично представлена на рис. 2.10, параметры набегающего потока и геометрии



Регулярное отражение

Маховское отражение

Рис. 2.8. Стационарные ударно-волновые конфигурации

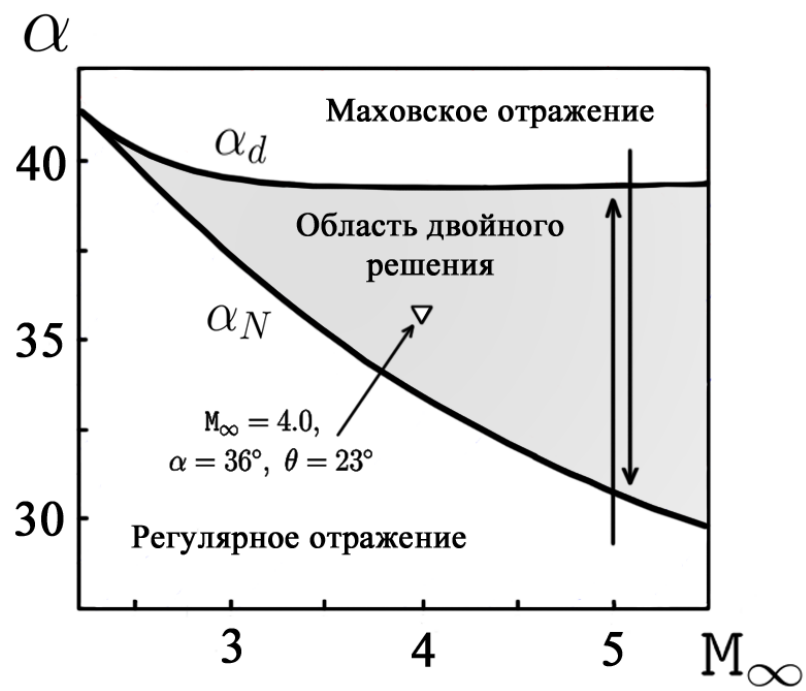


Рис. 2.9. Область двойного решения

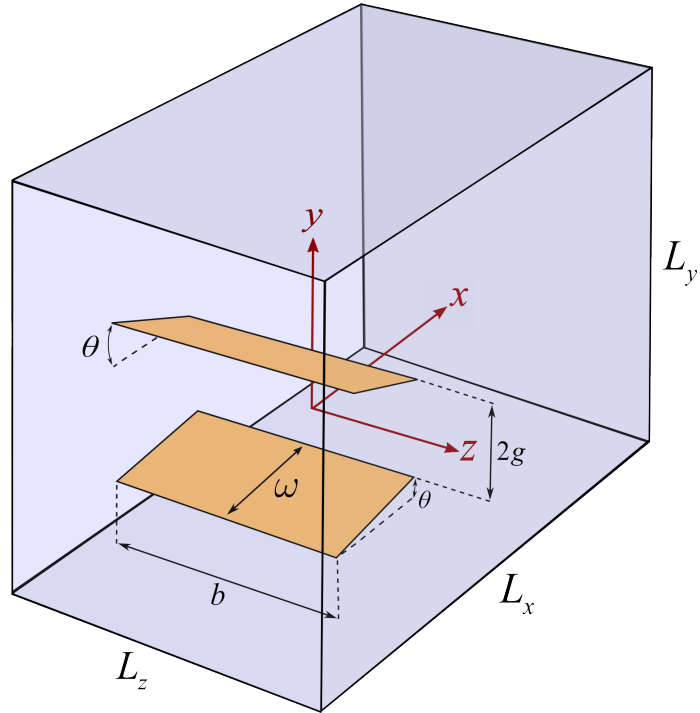


Рис. 2.10. Схематичный вид расчётной области

модели отображены в таб. 2.2 и 2.3 соответственно. Здесь  $M_\infty$  и  $Re_\infty$  – числа Маха и Рейнольдса в набегающем потоке,  $p_0$  и  $T_0$  – давление и температура торможения,  $L_x, L_y, L_z$  – геометрические размеры расчётной области,  $\omega$  – хорда клина,  $g/\omega$  – расстояние от задней кромки до плоскости симметрии,  $b/\omega$  – размах клина,  $\alpha$  – угол падающего скачка,  $\theta$  – угол клина.

$M_\infty$	$Re_\infty$	$p_0$	$T_0$
4.0	$1.278 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$	1.0 МПа	293.0 К

Таблица 2.2. Параметры набегающего потока

$L_x$	$L_y$	$L_z$	$\omega$	$g/\omega$	$b/\omega$	$\alpha$	$\theta$
135.0 мм	120.0 мм	158.4 мм	30.0 мм	0.43	3.37	$36^\circ$	$23^\circ$

Таблица 2.3. Параметры геометрии модели

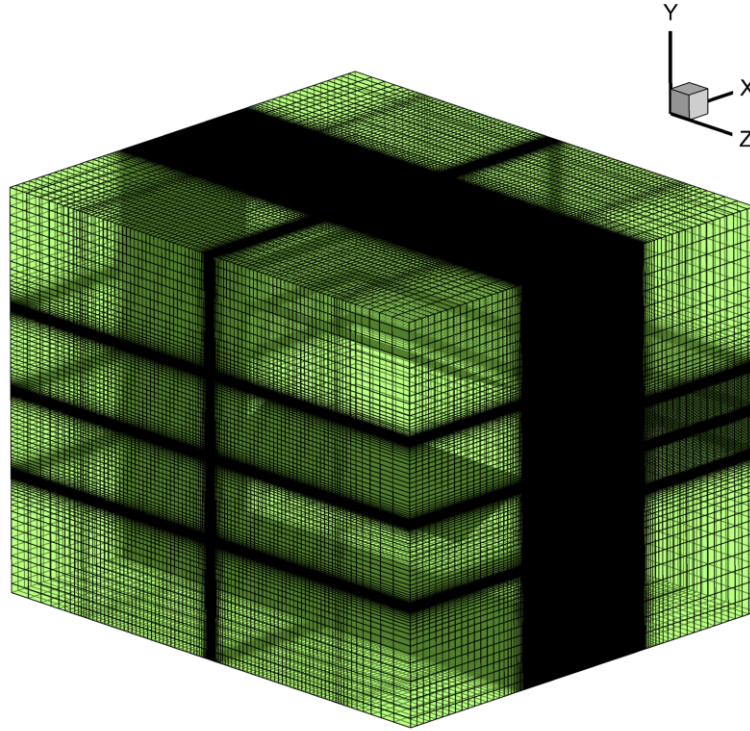


Рис. 2.11. Общий вид расчётной сетки

Для расчётов использовалась гексагональная блочно-структурированная сетка  $\Omega_h$ , имеющая сгущения в областях энерго-вложения и отражающихся скачков. Сетка содержала  $N = 9\,062\,400$  ячеек, ее общий вид представлен на рис. 2.11. Минимальное разрешение сетки по поперечной координате составило  $\Delta y_{\min}/\omega = 1.3 \times 10^{-3}$ , которое, как указано в работе [71], является достаточным для адекватного разрешения сеткой возникающего при маховской конфигурации мостообразного скачка.

Характеристики течения в начальный момент времени полагались равными значениям набегающего потока, при этом аналогично задаче об обтекании крыла 2.2.1  $\tilde{v}_0 = 3.0\mu_0$ . Граничные условия ставились согласно разделу 1.3.3: на входе в расчётную область (в плоскости  $x = -L_x/2$ ) задавались параметры набегающего потока (граничное условие «вход»), на выходе из области (в плоскости  $x = L_x/2$ ) проводилась экстраполяция переменных (граничное условие «выход»), на пластинах и боковых границах расчётной области ставилось условие прилипания (граничное условие «твёрдая стенка»).

Расчёт задачи о переходе  $RR \Rightarrow MR$  проводился в несколько этапов:

- 1) Моделирование стационарного регулярного отражения (расчёт проводился с начальных данных о равномерном сверхзвуковом потоке газа).
- 2) Локальное выделение энергии в область, расположенную на пересечении плоскостей симметрии перед точкой регулярного отражения.
- 3) Продолжение расчёта до установления стационарной маховской конфигурации.

Параметры источника энергии соответствовали лазерному импульсу с энергией  $J_l = 0.1$  Дж, действующему на область объемом  $V_l = 3$  мм<sup>3</sup> в течение  $\Delta t_l = 10$  нс. Центр объема располагался на пересечении плоскостей симметрии модели, параллельных координатным плоскостям  $xy$  и  $xz$  на расстоянии  $0.94\omega$  перед задней кромкой пластин. В работе [71] лазерный импульс моделировался следующим образом: после получения стационарного регулярного отражения в соответствующей области корректировалось поле температуры при всех остальных фиксированных параметрах (т.е. происходил изохорический нагрев газа), после чего расчёт продолжался с указанными изменёнными начальными данными. В настоящей работе применяется другой подход, основанный на использовании источника в уравнении (1.1). После получения регулярной конфигурации проводился расчёт одного временного шага с  $\Delta t = 10$  нс и включённым источником, энергия которого равнялась  $J = 0.1$  Дж и была равномерна распределена по объему  $V = 3$  мм<sup>3</sup> (в качестве области вложения выбирался сеточный куб со стороной 1.44225 мм). Далее источник энергии отключался и проводился расчёт до установления маховской конфигурации.

Моделирование стационарного регулярного отражения (этап 1) проводилось с помощью неявной схемы методом установления (аналогично расчётам обтекания крыла, см. раздел 2.2.1). Расчёт проводился на  $N_{\text{proc}} = 96$  вычислительных ядрах при числе Куранта  $q_{\text{CFL}} = 100.0$ , на каждом временном шаге использовалась одна ньютоновская итерация  $s_{\text{max}} = 1$ , для решения СЛАУ применялся метод LU-SGS. В качестве критерия остановки

использовалось соотношение

$$\text{res} = \|\Delta\rho/\Delta t\|_{L2(\Omega_h)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N V_i \left(\frac{\Delta\rho_i}{\Delta t}\right)^2} < 10^{-6},$$

для его выполнения потребовалось порядка 27 000 итераций.

На втором этапе проводился расчёт одного временного шага с  $\Delta t = 10$  нс, что соответствовало числу Куранта  $q_{\text{CFL}} \approx 0.57$ , при  $N_{\text{грос}} = 96$ . Здесь и далее для расчётов использовались следующие параметры неявной схемы: максимальное количество ньютоновских итераций  $s_{\text{max}} = 5$ , относительная точность  $\varepsilon_r = 10^{-3}$ , решение СЛАУ методом BiCGStab + LU-SGS с максимальным количеством итераций  $k_{\text{max}} = 10$ , относительной точностью  $\varepsilon_r = 10^{-4}$ , абсолютной точностью  $\varepsilon_a = 10^{-6}$ .

Третий этап расчётов проводился с помощью неявной схемы с указанными выше параметрами. Результаты сравнивались с аналогичными расчётами по явной схеме и данными из работы [71]. Число используемых вычислительных ядер в обоих случаях составило  $N_{\text{грос}} = 96$ , числа Куранта равнялись  $q_{\text{CFL}}^{\text{imp}} = 12.0$  и  $q_{\text{CFL}}^{\text{exp}} = 0.6$  соответственно.

В указанные моменты времени после лазерного теплового импульса сравнивались численные ширены [78, 79] и высота мостообразного скачка  $h$  (нормированная на длину хорды клина  $\omega$ ) в центральном сечении модели (координатная плоскость  $xy$ ). Численные ширены строились с использованием экспоненциального преобразования поля градиента плотности согласно формуле

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}) = a \exp\left(-\frac{b|\nabla\rho|}{|\nabla\rho|_{\text{max}}}\right), \quad a = 0.8, \quad b = 15.$$

Соответствующие результаты представлены на рис. 2.12–2.14 и 2.15. Здесь за  $t_0$  обозначено время начала третьего этапа расчёта, «а», «b» и «с» обозначают результаты из работы [71], расчёт по явной и неявной схемам соответственно.

Полученные данные позволяют утверждать как о качественном, так и количественном совпадении результатов во всех трёх рассмотренных слу-



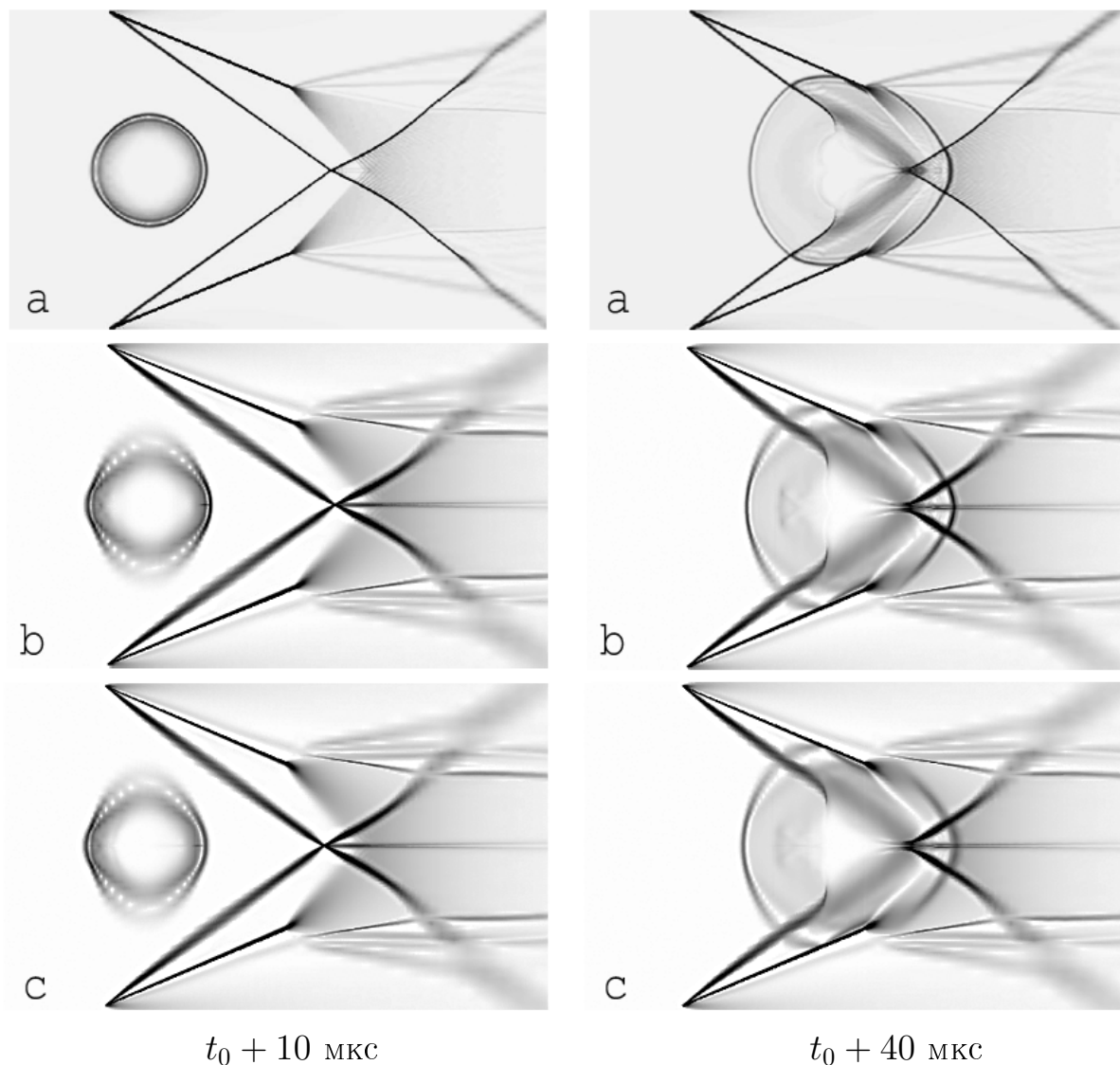


Рис. 2.12. Численные шпирены в моменты времени  $t_0 + 10$  мкс и  $t_0 + 40$  мкс

чаях. В частности, на рис. 2.15 получено довольно точное соответствие высоты мостообразного скачка в указанные моменты времени, при этом результаты работы явной и неявной схем практически идентичны. Отличия между ними объясняются аппроксимационной ошибкой (включающей численную диффузию и погрешности дискретизации при линеаризации якобиана), увеличивающейся по мере роста используемого временного шага интегрирования. За счёт этого, как видно на рис. 2.12–2.14, при использовании неявной схемы наблюдается «размазывание» фронтов ударных волн и мелких деталей течения. Однако данный эффект не повлиял критичным образом на общее качество расчёта. Незначительные (с точки зрения ко-

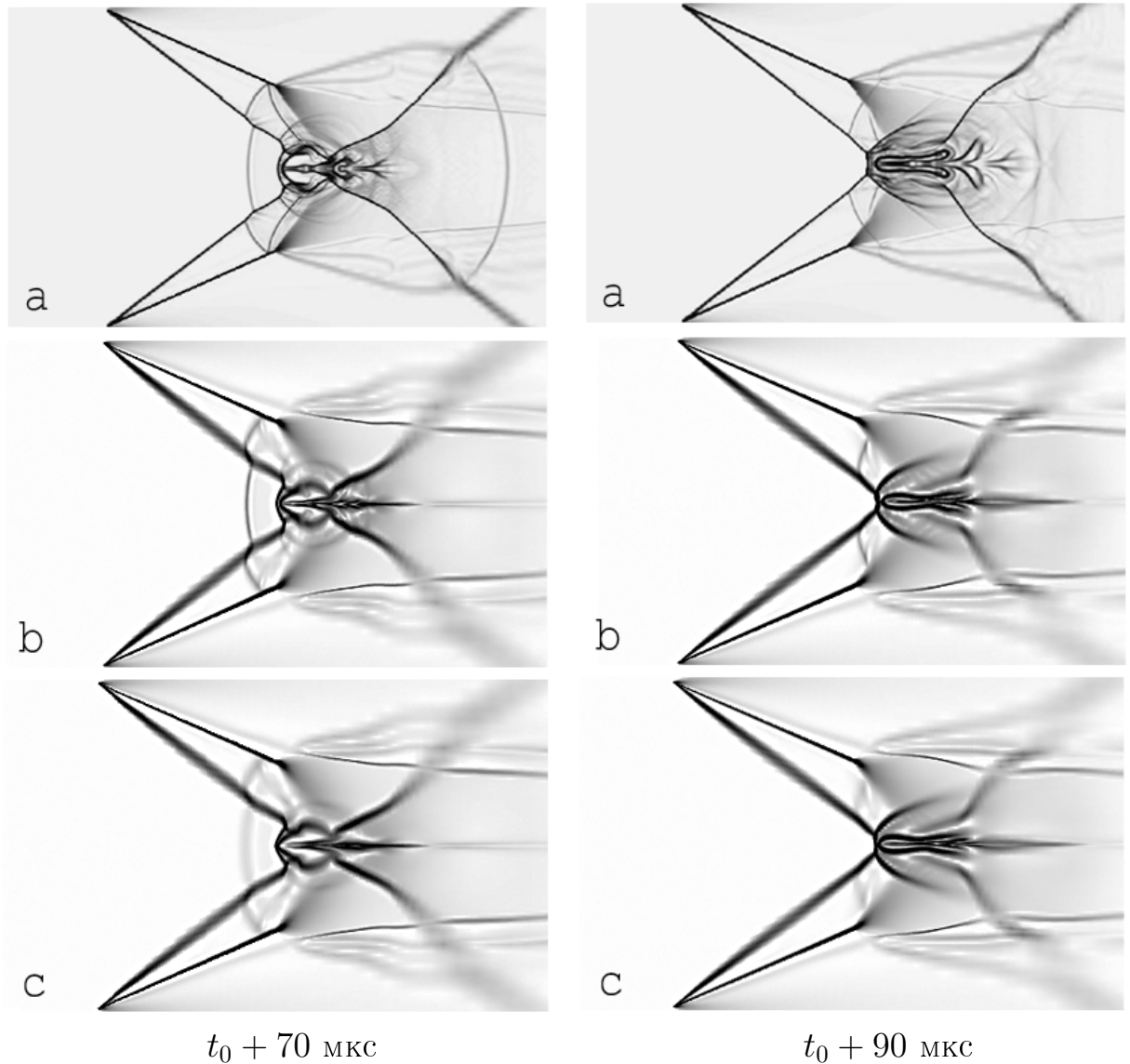


Рис. 2.13. Численные шпирены в моменты времени  $t_0 + 70$  мкс и  $t_0 + 90$  мкс

нечного результата) отличия в результатах расчётов (для обеих схем) и результатах из работы [71] связаны, во-первых, с используемой для расчётов сеткой и, во-вторых, с используемой для расчётов моделью уравнений. В указанной работе вычисления проводились в четверти области с граничными условиями симметрии и в рамках уравнений Эйлера. В настоящей работе, как было описано в соответствующих разделах, вычисления проводились для URANS уравнений совместно с моделью турбулентности и в полной расчётной области (см. рис. 2.10).

Отдельно следует остановиться на параметрах, с которыми проводился расчёт по неявной схеме. Число Куранта, как уже было указано выше,

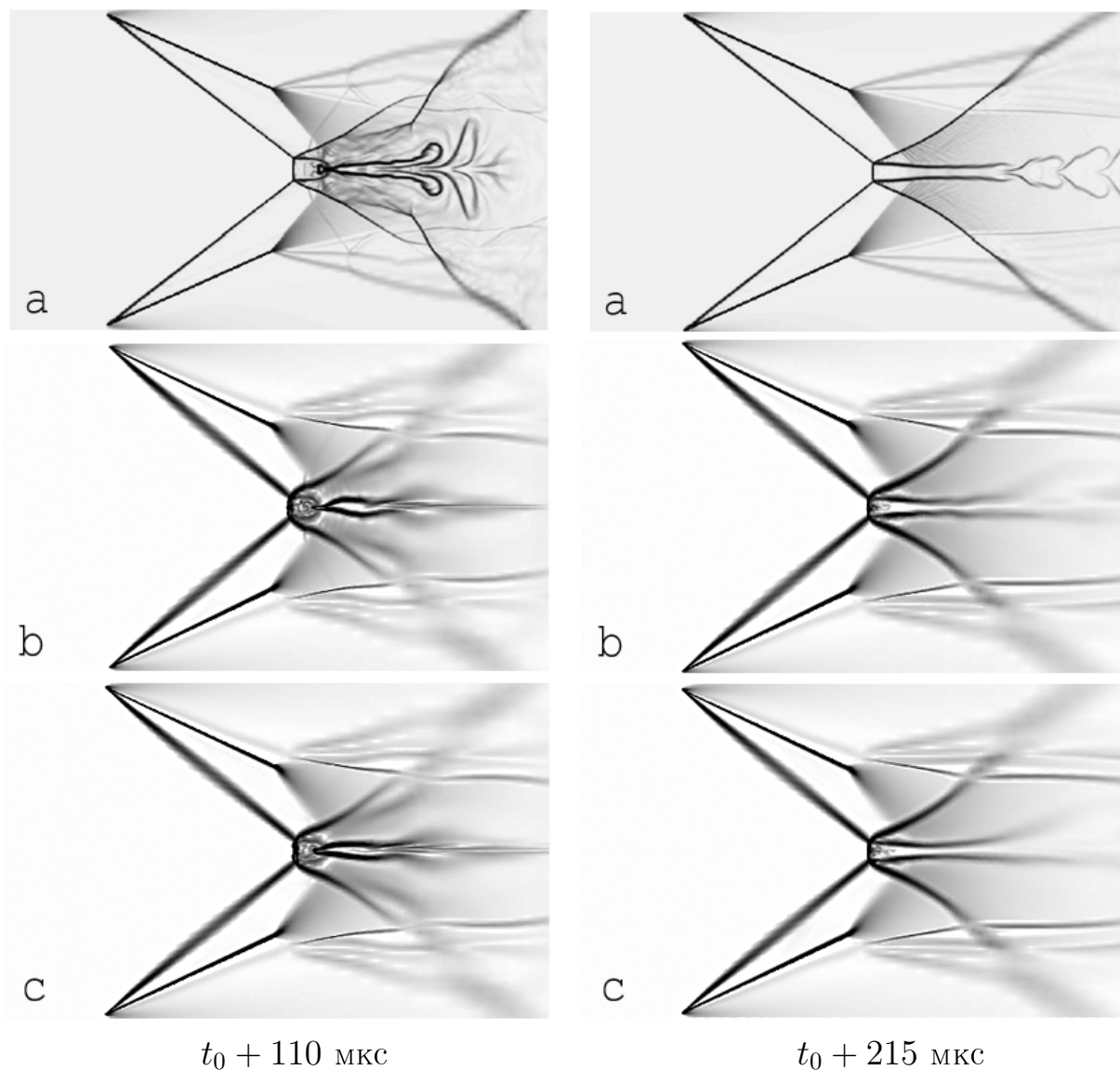


Рис. 2.14. Численные шпирены в моменты времени  $t_0 + 110$  мкс и  $t_0 + 215$  мкс

составило  $q_{\text{CFL}}^{\text{imp}} = 12.0$ , что в 20 раз больше аналогичного значения, которое обеспечивало устойчивый расчёт по явной схеме. При этом среднее число ньютоновских итераций на один временной шаг равнялось 4, число линейных итераций метода **BiCGStab** на одну ньютоновскую составило от 2 до 5. Физическое время выполнения одного шага неявной схемы составило порядка 5.35 с, время выполнения 20 итераций аналогичной явной схемы – 13.56 с. Таким образом, использование неявной схемы позволило получить общее ускорение расчёта порядка 2.5 раз.

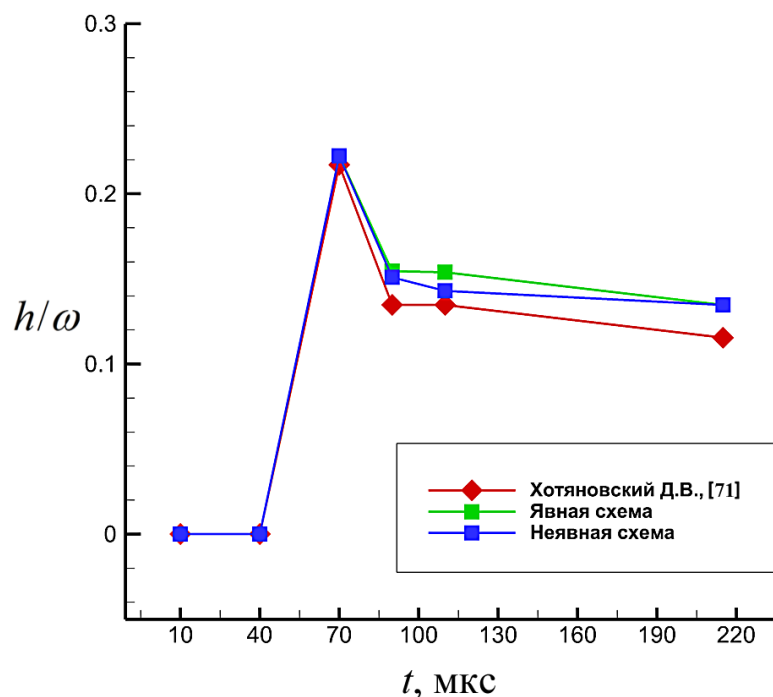


Рис. 2.15. Нормированная высота мостообразного скачка

Помимо представленных результатов также был проведен ряд параметрических расчётов, которые показали, что при использовании для решения СЛАУ только метода LU-SGS число итераций метода Ньютона возрастает в несколько раз, при этом очень часто при достижении порядка десяти итераций наблюдается стагнирование нелинейной невязки. По этой причине для данной задачи применение метода BiCGStab является целесообразным.

Использование для неявной схемы чисел Куранта, больших указанного в несколько раз, приводило к существенному ухудшению качества решения, вплоть до исчезновения перехода  $RR \Rightarrow MR$ . Однако данный факт имеет логичное объяснение, связанное с фактической погрешностью аппроксимации решения. В работе Р.П. Федоренко [8] на примере простейшего линейного уравнения теплопроводности было показано, что даже при не очень высоких требованиях к точности соотношение между пространственным шагом сетки и временным шагом для неявной схемы почти такое же, как и обеспечивающее требование устойчивости для аналогичной явной схемы. Поэтому для обеспечения приемлемой точности нестационарного расчёта условие Куранта не может быть нарушено очень сильно.

## 2.3 Анализ эффективности параллельной реализации

Для оценки эффективности работы параллельного алгоритма используются следующие количественные характеристики [60, 80]:

- 1) Параметр ускорения  $S_p$ , показывающий, насколько параллельный алгоритм выполняется быстрее, чем последовательный:

$$S_p = \frac{t_1}{t_p},$$

где  $p$  – число вычислительных ядер,  $t_1$  – время выполнения последовательного алгоритма,  $t_p$  – время выполнения параллельного алгоритма.

- 2) Параметр эффективности или коэффициент масштабируемости  $E_p$ , определяющий отличие получаемого ускорения от идеального:

$$E_p = \frac{S_p}{p} \cdot 100\%.$$

Основными причинами замедления работы параллельного алгоритма являются накладные расходы на обмен данными (увеличивающиеся с ростом количества используемых вычислительных ядер), доля кода, которая не поддается параллелизации (даже незначительная доля алгоритма, не поддающаяся распараллеливанию, существенно снижает максимально достижимое ускорение), а также неравномерная загрузка вычислительных ядер.

Исследование масштабируемости реализованных алгоритмов явной и неявной схем проводилось на рассмотренных выше задаче обтекания крыла ONERA M6 (раздел 2.2.1) и задаче о моделировании перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн в области двойных решений (раздел 2.2.2). Исследования проводились для различного числа вычислительных ядер при всех прочих фиксированных параметрах осреднением времени счёта 100 итераций.

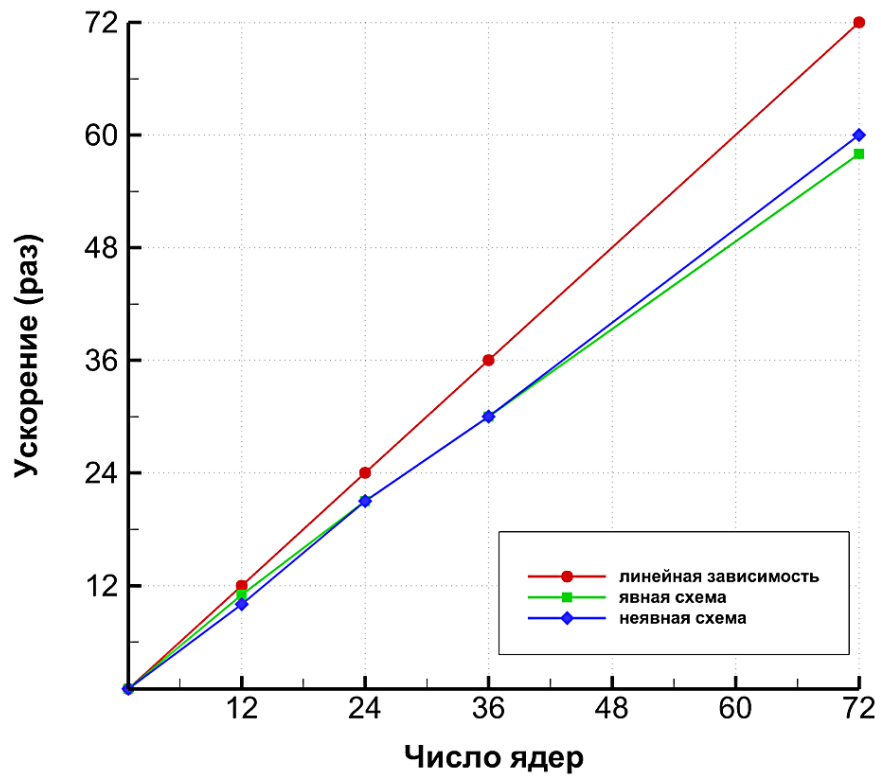


Рис. 2.16. Зависимость ускорения от числа ядер, задача 2.2.1

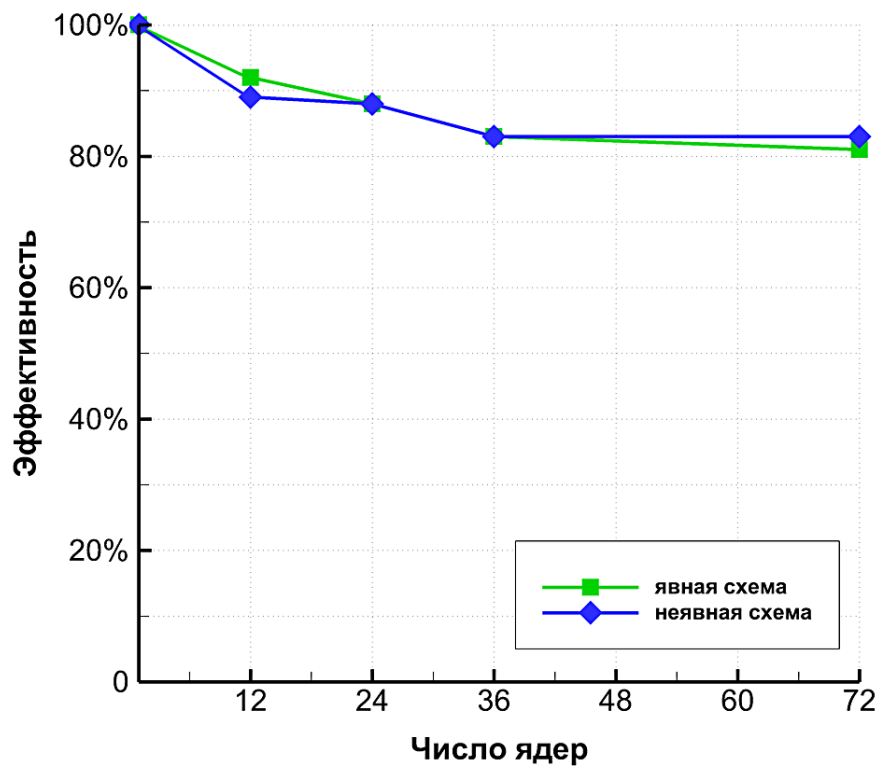


Рис. 2.17. Зависимость эффективности от числа ядер, задача 2.2.1

Полученные на задаче обтекания крыла результаты представлены на рис. 2.16 и 2.17. Из графиков видно, что предложенная методика обладает хорошей масштабируемостью (ускорение расчёта в 30 раз при использовании 36 вычислительных ядер и в 60 раз на 72 ядрах) и сохраняет свою эффективность распараллеливания (83% при использовании как 36, так и 72 вычислительных ядер).

Масштабируемость и эффективность распараллеливания предложенной методики, полученные на задаче о моделировании перехода регулярного отражения в маховское, продемонстрированы на рис. 2.18 и 2.19, на которых представлены также аналогичные результаты для явной схемы. На рис. 2.20 представлена фактическая доля времени обменов данными между вычислительными ядрами от общего времени расчёта. Как видно из рисунков, предложенная методика обладает хорошей масштабируемостью (ускорение расчёта в 68 раз при использовании 96 вычислительных ядер и в 210 раз на 384 ядрах) и эффективностью (71% на 96 ядрах, 55% на 384), при этом масштабируемость явной и неявной схем сопоставима. Большой запас масштабируемости неявной схемы в сравнении с явной, как и следовало ожидать, объясняется более высокими вычислительными затратами на один временной шаг.

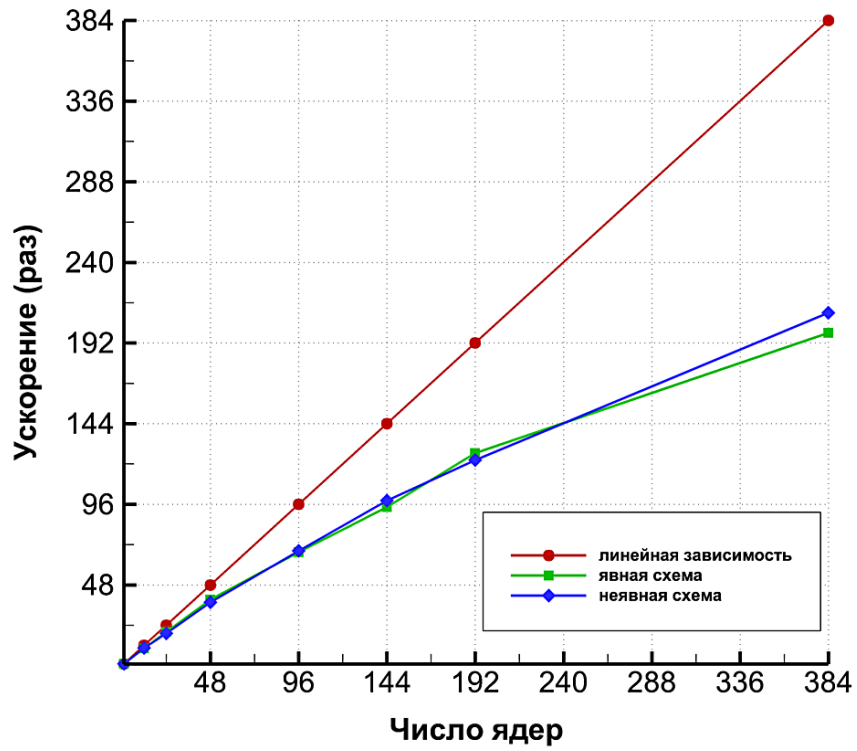


Рис. 2.18. Зависимость ускорения от числа ядер, задача 2.2.2

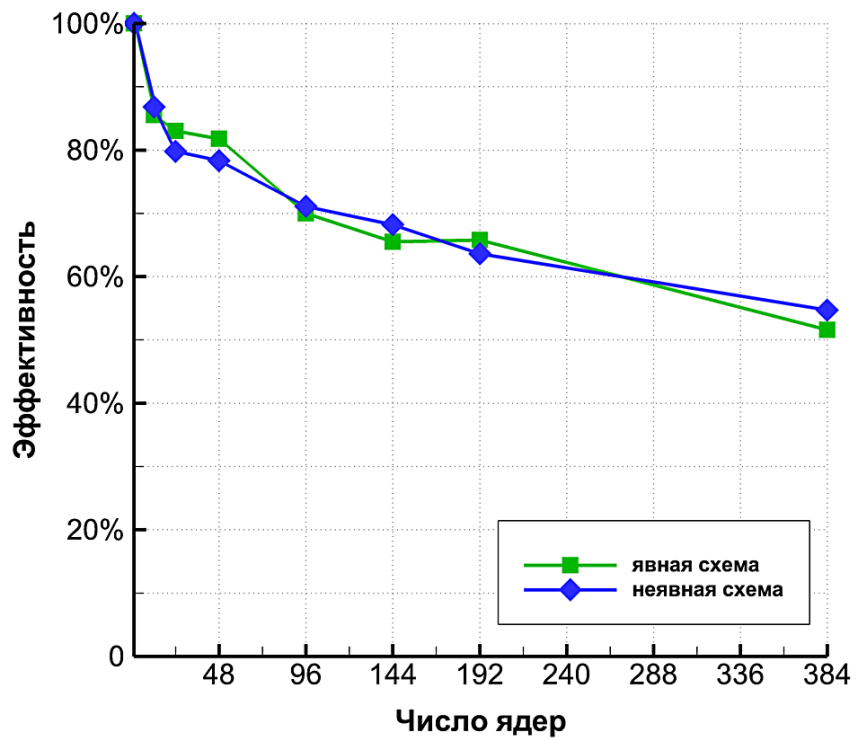


Рис. 2.19. Зависимость эффективности от числа ядер, задача 2.2.2



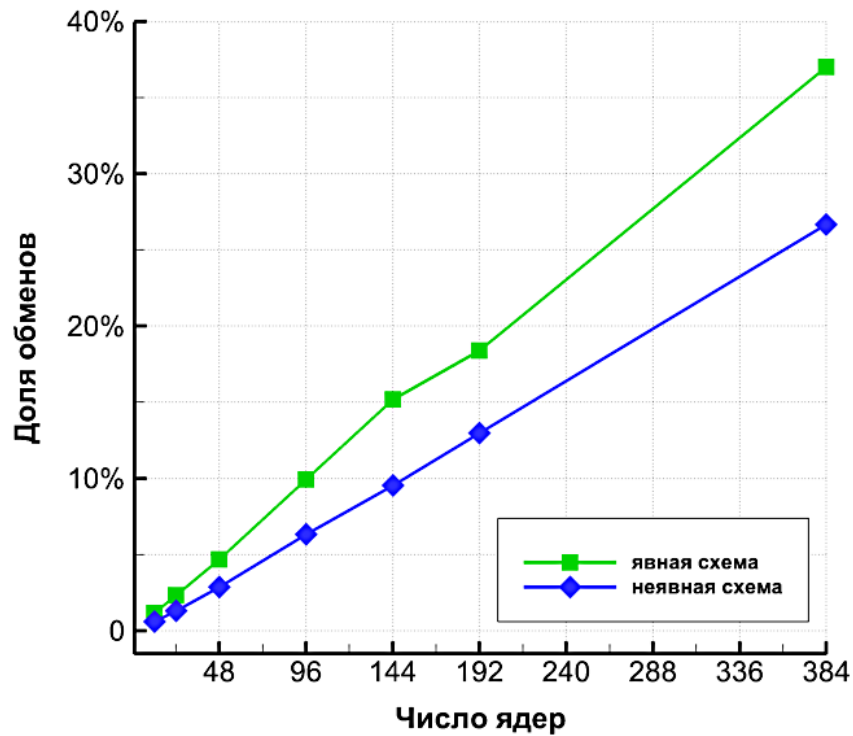


Рис. 2.20. Доля обменов от общего времени счёта в зависимости от числа вычислительных ядер, задача 2.2.2

## 2.4 Выводы

На основе математической модели и вычислительных алгоритмов, описанных в главе 1, а именно – явной и неявной схем, методов BiCGStab, LU-SGS, WENO3 для решения уравнений URANS с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса – разработан параллельный программный комплекс, предназначенный для расчёта трёхмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговыделением в поток.

Для валидации разработанной методики проведены численные расчёты стационарного и нестационарного течений: задача трансзвукового обтекания крыла ONERA M6 и задача о моделировании перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн в области двойных решений, в которой переход инициируется импульсным подводом энергии в поток. Проведенные численные расчёты продемонстрировали хорошее совпадение с экспериментальными данными и результатами работ других авторов.

Отдельно исследовался вопрос об эффективности параллельной реализации, для чего были проведены параметрические расчёты на обеих рассмотренных задачах. Для задачи обтекания крыла при использовании 72 вычислительных ядер удалось получить ускорения расчёта в 60 раз с эффективностью распараллеливания 83%. При этом время выполнения одной итерации параллельного неявного метода оказалось сравнимо со временем выполнения одной итерации аналогичной параллельной явной схемы при схожих затратах памяти и одном и том же количестве вычислительных узлов. Но в отличие от явной схемы, предложенный неявный метод позволил использовать существенно больший шаг по времени, что значительно сократило полное время расчёта приблизительно в 100 раз. На задаче о моделировании перехода между регулярным и маховским отражением максимальное ускорение в 210 раз получено при использовании 384 вычислительных ядер. Эффективность распараллеливания в расчётном варианте на 96 ядрах составила 71%, при этом общее время расчёта в сравнении с явной схемой сокращено в 2.5 раза.

Всё это позволяет сделать вывод о возможности применения реализованного неявного метода для эффективного решения задач газовой динамики, обладающих большой размерностью.

Результаты, представленные в главе 2, опубликованы в работах [33, 34, 37].

## Глава 3

# Моделирование течений в воздухозаборнике прямоточного воздушно–реактивного двигателя

### 3.1 Введение

Одной из актуальных задач современной аэродинамики является создание летательных аппаратов для длительного полета в атмосфере, движущихся на гиперзвуковых скоростях (ГЛА). В значительной степени успешное создание ГЛА связано с прогрессом в разработке прямоточных воздушно-реактивных двигателей (ПВРД). Важной частью ПВРД является воздухозаборник тракта двигателя, в котором происходит торможение вязкого сверхзвукового потока, что представляет собой сложную комбинацию взаимодействия ударных волн с развивающимися турбулентными пограничными слоями, приводящую к формированию псевдоскачка (протяженной зоны перехода, на которой достигается давление, близкое к величине за прямым скачком уплотнения) [81, 82], см. рис. 3.1.

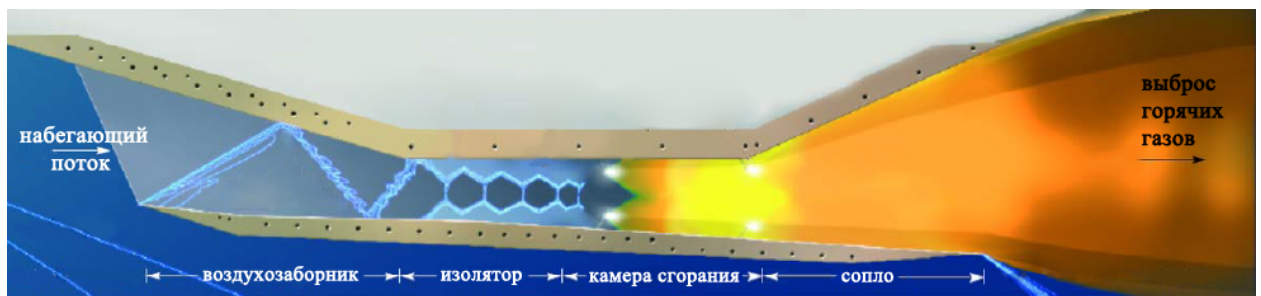


Рис. 3.1. Схема работы ПВРД [83]

Длина псевдоскачка зависит от числа Маха набегающего потока  $M_\infty$ , толщины пограничного слоя (ПС), числа Рейнольдса  $Re_\infty$  и других параметров. При этом структура течения является чувствительной к параметрам потока как на входе, так и на выходе из воздухозаборника [77]. В неко-

торых случаях может наблюдаться эффект запирания потока («незапуска» воздухозаборника), т.е. «... такого дросселирования канала воздухозаборника, при котором замыкающая система скачков выбивается из внутреннего канала и располагается перед входом в воздухозаборник, что приводит к резкому снижению тяги двигателя или даже полному нарушению его работы» [81]. В частности, именно по этой причине в 2011 году аварийно завершилось 2-е лётное испытание экспериментального ГЛА X-51A WaveRider [84].

Изучение формирования псевдоскачка в канале тракта двигателя является одной из самых востребованных практических задач при проектировании ПВРД. Сложная геометрия, высокие скорости и сильная нестационарность структуры происходящих процессов приводят к высокой стоимости натурных экспериментов. В силу этого предсказательное численное моделирование с бурным ростом вычислительных ресурсов и повышением точности используемых методов расчёта приобретает все более важную роль [85, 86].

В настоящей главе приведены результаты численного исследования различных режимов работы воздухозаборника прямооточного воздушно-реактивного двигателя. Трёхмерное моделирование проводилось с помощью разработанного комплекса программ, двумерные расчёты осуществлялись с помощью программы, описанной в работах [88, 89], позволяющей рассчитывать течения вязкого сжимаемого газа на основе явной схемы для уравнений URANS совместно с моделями турбулентности Спаларта-Алмараса [38] и SST Ментера [90]. Приведены результаты исследования влияния параметров потока, таких как толщина пограничного слоя на входе и противодавление на выходе из воздухозаборника, на характер течения. При этом для моделирования пограничного слоя различной толщины использовались выведенные аналитические формулы совместно с численным интегрированием; противодавление моделировалось с помощью вложения энергии в поток. Показано существенное влияние толщины пограничного слоя на положение и характер ударно-волновой структуры в псевдоскачке, а также влияние инициируемого энергосложением противодавления на возможность выхода на нерасчётные режимы работы воздухозаборника.

### 3.2 Описание модели

В качестве исследуемой задачи использовались данные из натурального эксперимента J. Wagner [91], в котором рассматривалось гиперзвуковое течение в модельном воздухозаборнике, см. рис. 3.2.

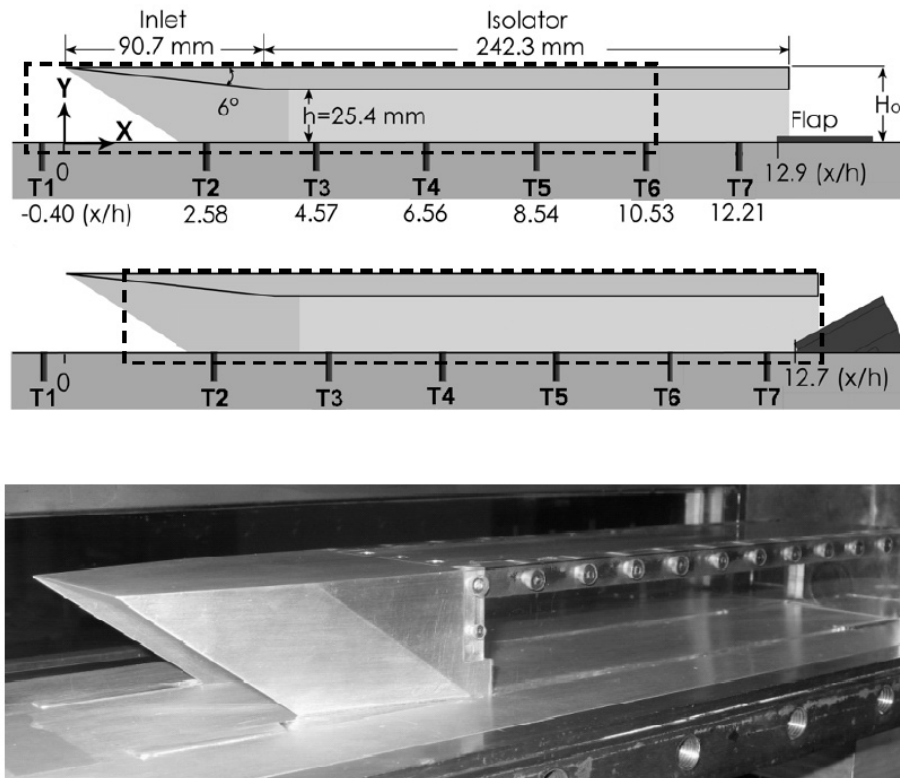


Рис. 3.2. Экспериментальная установка [91]

Начальное сжатие потока осуществлялось входной рампой с углом наклона  $6^\circ$ , изолятор представлял собой протяжённый прямоугольный тракт размерами  $243.2 (l) \times 50.8 (w) \times 25.4 (h)$  мм. Для изучения режима «незапуска» воздухозаборника в конце изолятора была установлена специальная пластина, поднятие которой до определенного угла инициировало запуск потока (в настоящей работе вместо поднятия пластины используется энерговложение).

Параметры набегающего потока во входном сечении в воздухозаборник, в частности, толщина пограничного слоя  $\delta$ , а также давление торможения  $p_0$  и температура торможения  $T_0$ , представлены в таб. 3.1

$M_\infty$	$Re_\infty$	$\delta$	$T_0, K$	$p_0, MPa$
4.9	$1.26 \times 10^6 h^{-1}$	$0.76 h$	333.15	2.433

Таблица 3.1. Параметры потока в эксперименте

В настоящей работе для проведения расчётов использовалось несколько сеток разной размерности и степени детализации, а также размеров области перед воздухозаборником. Самая подробная сетка была трёхмерной и насчитывала 14 081 984 ячейки. Общий вид этой модели (с показанным распределением давления для одного из расчётов) представлен на рис. 3.3.

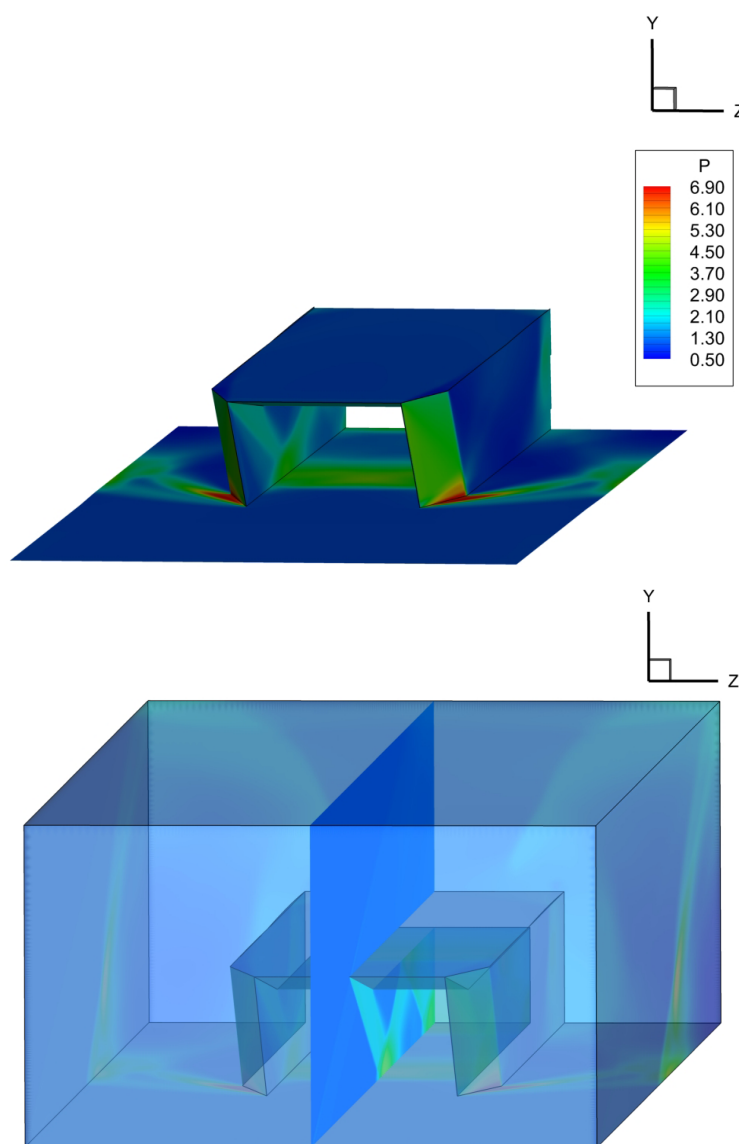


Рис. 3.3. Общий вид расчётной трёхмерной модели

### 3.3 Моделирование пограничного слоя заданной толщины

Как показывает практика натуральных и численных экспериментов [77, 81, 91–95], характеристики пограничного слоя на входе в канал (в частности, и воздухозаборник) оказывают существенное влияние на формирование и структуру псевдоскачка. В настоящей работе для формирования профиля пограничного слоя заданной толщины в конкретном сечении на входе в воздухозаборник использовался следующий подход, основанный на известных формулах для пограничного слоя на толстой пластине (flat plate) совместно с модификацией из работы [93].

Пусть ось  $Ox$  направлена вдоль, ось  $Oy$  – поперек, ось  $Oz$  – в трансверсальном направлении относительно пластины. Рассмотрим плоскопараллельное обтекание пластины набегающим потоком со скоростью  $u_\infty$ , см. рис. 3.4.

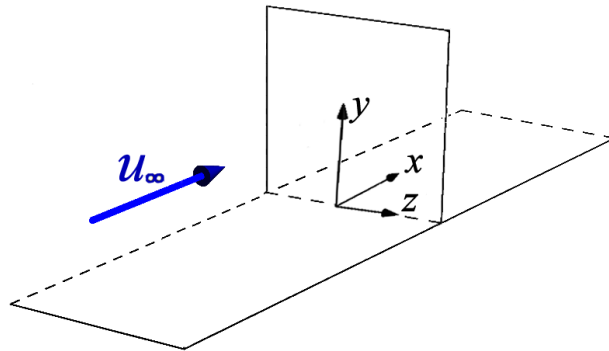


Рис. 3.4. Схематичный вид задачи об обтекании пластины

Будем считать, что вдоль сечения  $x = \text{const}$  давление постоянно, продольная компонента скорости имеет степенную зависимость, температура находится согласно формуле из работы [93], и по ней из уравнения состояния пересчитывается плотность, т.е.

$$\begin{aligned}
p(y) &= p_\infty, \\
u(y, \delta) &= u_\infty \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}, \\
T(y, \delta) &= T_\infty \left[ r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left( 1 - \left( \frac{u(y, \delta)}{u_\infty} \right)^2 \right) + 1 \right], \\
\rho(y, \delta) &= \frac{p(y)}{RT(y, \delta)}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\delta$  – заданная толщина моделируемого пограничного слоя, координата  $y$  представляет собой расстояние до пластины,  $r = 0.89$  – постоянная восстановления потока.

В такой постановке трансверсальная компонента скорости  $w$  может быть положена равной нулю (т.е. рассматривается эффективно двумерная задача), а поперечная компонента вектора скорости  $v$  находится интегрированием из уравнения неразрывности. Для этого необходимо предварительно привести  $u(y, \delta)$ ,  $\rho(y, \delta)$  к виду  $u(x, y)$ ,  $\rho(x, y)$ . Для пограничного слоя на толстой пластине известна зависимость [93]:

$$\frac{\delta}{x} = 0.382 \operatorname{Re}_x^{-\frac{1}{5}}, \quad \operatorname{Re}_x = \frac{\rho_\infty u_\infty x}{\mu_\infty}.$$

Выражая отсюда  $\delta(x)$ , можно посчитать  $u(x, y)$ , и далее  $T(x, y)$ ,  $\rho(x, y)$ , откуда

$$\left. \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right|_{(x,y)} \approx \frac{\rho(x + h_x, y) u(x + h_x, y) - \rho(x, y) u(x, y)}{h_x},$$

и тогда  $v$  приближенно находится численным интегрированием из уравнения неразрывности:

$$\frac{\rho(x, y + h_y) v(x, y + h_y) - \rho(x, y) v(x, y)}{h_y} = - \left. \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right|_{(x,y)},$$

для которого на пластине ставится условие прилипания  $v(x, 0) = 0$ .

При использовании моделей турбулентности для правильного модели-



рования пограничного слоя необходимо соответствующим образом пересчитывать модельные переменные. Для этих целей сначала по полученному ранее распределению основных переменных при фиксированном  $\delta$  моделируется величина турбулентной вязкости  $\mu_t$  с помощью алгебраической модели Себеси–Смита [96]:

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{t,i}, & y \leq y_m, \\ \mu_{t,o}, & y > y_m, \end{cases}$$

где  $y_m$  определяется равенством  $\mu_{t,i}|_{y_m} = \mu_{t,o}|_{y_m}$ . Величина турбулентной вязкости во внутренней области (ламинарном подслое) определяется по формуле

$$\mu_{t,i} = \rho l_{mix}^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2},$$

где

$$l_{mix} = ky \left( 1 - e^{-y^+/A^+} \right), \quad k = 0.4, \quad A^+ = 26,$$

$$y^+ = y u_\tau \frac{\rho_\infty}{\mu_\infty}, \quad u_\tau = 0.1162 u_\infty \text{Re}_x^{-1/14}.$$

Величина турбулентной вязкости во внешней области задается соотношением

$$\mu_{t,o} = \rho \alpha u_\infty \delta_v^* F_{kleb}, \quad \alpha = 0.0168,$$

$$F_{kleb} = \left( 1 + 5.5 \left( \frac{y}{\delta} \right)^6 \right)^{-1}, \quad \delta_v^* = \int_0^\delta (1 - u/u_\infty) dy,$$

где  $\delta_v^*$  находится численным интегрированием.

После того как  $\mu_t$  определено, модельная переменная  $\tilde{\nu}$  модели SA вычисляется из уравнения

$$\tilde{\nu}^4 - a\tilde{\nu}^3 - b = 0, \quad a = \frac{\mu_t}{\rho}, \quad b = \frac{\mu_t \mu^3 C_{v1}^3}{\rho^4},$$

а переменные  $k$  и  $\omega$  модели SST – согласно следующим формулам [96]:

$$\omega = \frac{7}{8\sqrt{\beta^*}} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad k = \omega \frac{\mu_t}{\rho},$$

где  $C_{v_1}, \beta^*$  – соответствующие моделям константы.

Следует отметить, что за границей пограничного слоя все параметры течения фиксировались равными соответствующим значениям на его границе.

### 3.4 Расчёты стационарного режима течения в воздухозаборнике

В оригинальной работе [91] в эксперименте с параметрами набегающего потока из таб. 3.1 наблюдаемый на входе в воздухозаборник пограничный слой имел толщину  $\delta = 0.76 h$ , т.е. порядка 55% высоты входного сечения. Шлирен фотография стационарного течения приведена на рис. 3.5.

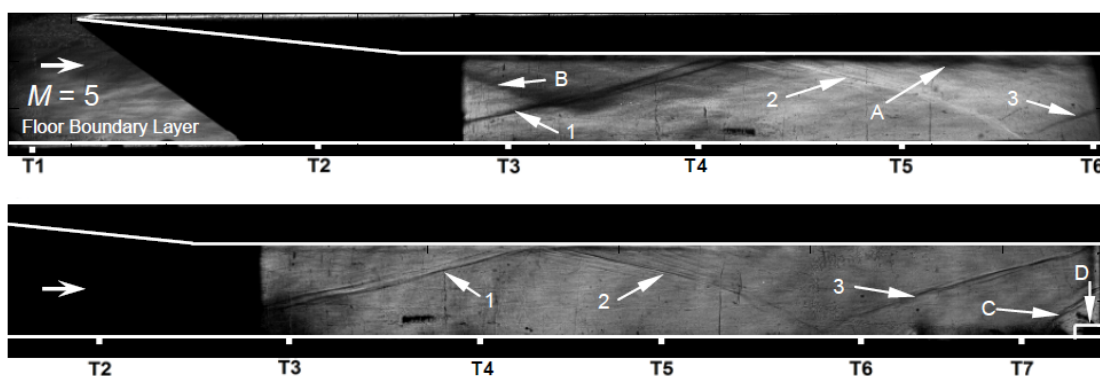


Рис. 3.5. Шлирен фотография стационарного течения

В данном разделе рассмотрена задача о формировании стационарного псевдоскачка в канале модельного воздухозаборника (без наличия противодавления на выходе) и проведено исследование влияния толщины пограничного слоя во входном сечении на характер течения.

### 3.4.1 Расчёт с дополнительной областью в двумерной постановке

В данной серии расчётов в двумерной постановке для получения необходимой толщины пограничного слоя рассматривалась задача с дополнительной протяженной областью (порядка  $100h$ ) перед воздухозаборником. Заметим, что наличие дополнительной области (с соответствующим измельчением сетки для адекватного отображения пограничного слоя) существенно увеличило объем вычислений и общее время расчёта. Ширина получившегося в данных расчётах пограничного слоя с моделями SA, и SST составила около  $\delta \approx 0.8h$ . Распределение посчитанного поля давления (показана только соответствующая эксперименту область с нанесенным расположением датчиков  $T_i$ ) приведено на рис. 3.6.

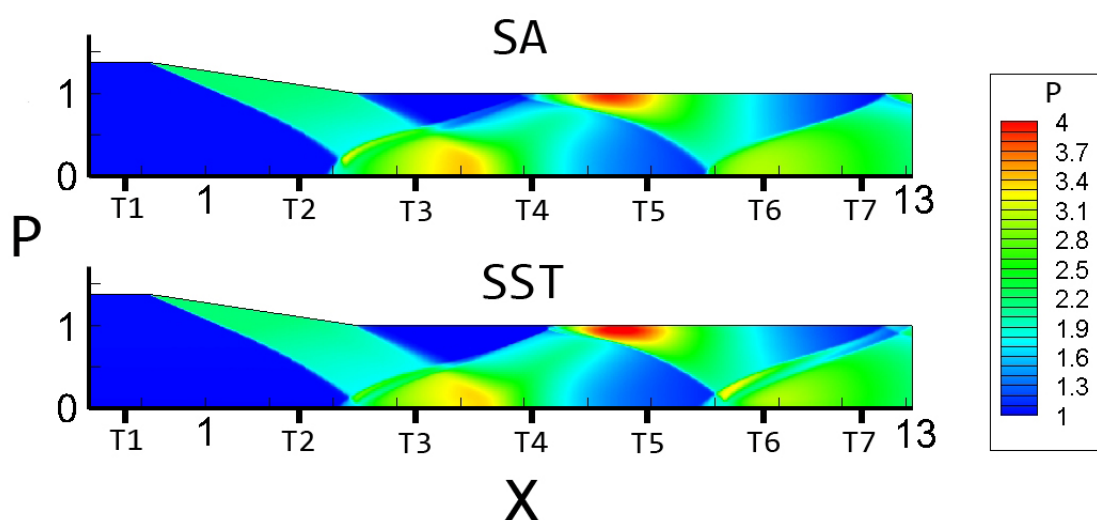


Рис. 3.6. Распределение поля давления в двумерных расчётах с дополнительной областью перед входом в воздухозаборник. Модели турбулентности SA и SST

Видно, что в обоих случаях положение ударных волн в псевдоскачке качественно совпадает со шпирен фотографией натурального эксперимента. Более точное сравнение с экспериментом можно провести на данных о нормированном давлении  $p/p_\infty$  на нижней стенке воздухозаборника в плоскости симметрии. На рис. 3.7 приведены соответствующие графики, где ромбиками обозначены данные натурального эксперимента, прерывистой линией –

результаты из работы [97], сплошной линией – результаты текущих расчётов. Чёрным цветом обозначено распределение из расчёта без дополнительной области (помимо стандартных  $6h$  [97]) перед воздухозаборником; толщина получившегося при такой постановке пограничного слоя на входе составляет  $\delta \approx 0.1h$ . Как видно из рис. 3.7, толщина пограничного слоя на входе заметно влияет на положение скачков: чем шире пограничный слой, тем ближе ко входу смещается система ударных волн. При этом результаты расчётов показывают приемлемое совпадение как с экспериментом, так и с данными из работы [97], в которой утверждается, что несоответствие в пиковых значениях объясняется существенной трёхмерностью задачи, а именно – влиянием боковых стенок воздухозаборника.

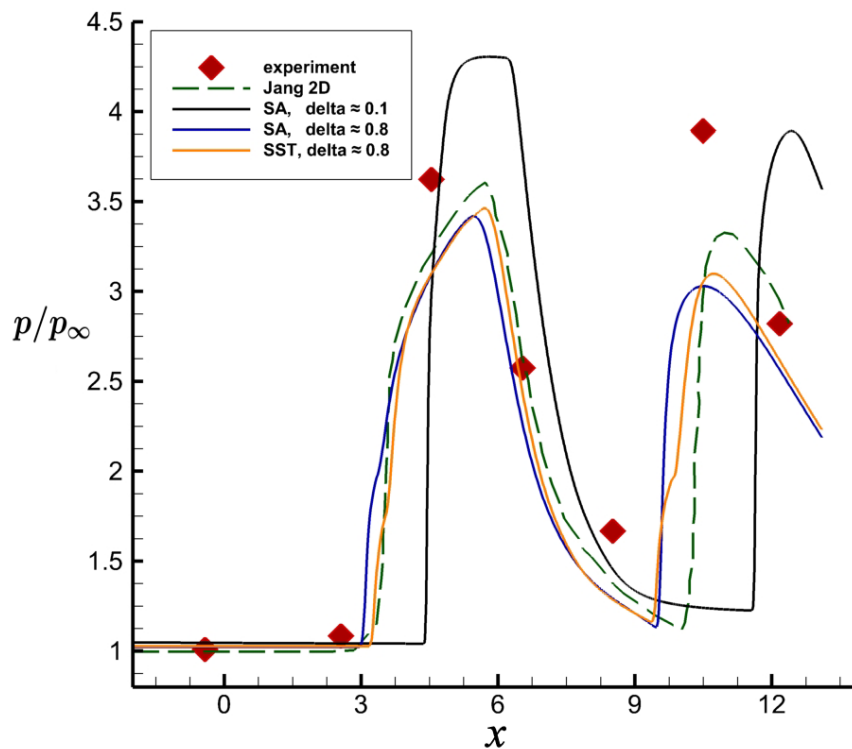


Рис. 3.7. Сравнение нормированного давления на нижней стенке воздухозаборника в эксперименте и в двумерных расчётах с дополнительной областью перед входом в воздухозаборник

### 3.4.2 Расчёт с заданным пограничным слоем в двумерной постановке

Следующая серия расчётов была посвящена моделированию пограничного слоя заданной толщины с помощью формул из раздела 3.3. Полученные характеристики сравнивались с аналогичными параметрами из представленных выше расчётов с дополнительной областью перед воздухозаборником. На рис. 3.8–3.9 представлены соответствующие результаты при  $\delta = 0.76 h$  для продольной  $u$  и поперечной  $v$  компонент скорости, плотности  $\rho$  и турбулентной вязкости  $\mu_t$ , переменных моделей турбулентности SA и SST  $\tilde{\nu}, k, \omega$  в зависимости от координаты  $y$  (совпадающей с расстоянием до нижней стенки). Видно, что в целом смоделированные величины (обозначенные как «BLM») соответствуют данным из расчётов, при этом полученное распределение турбулентной вязкости находится между расчётными распределениями.

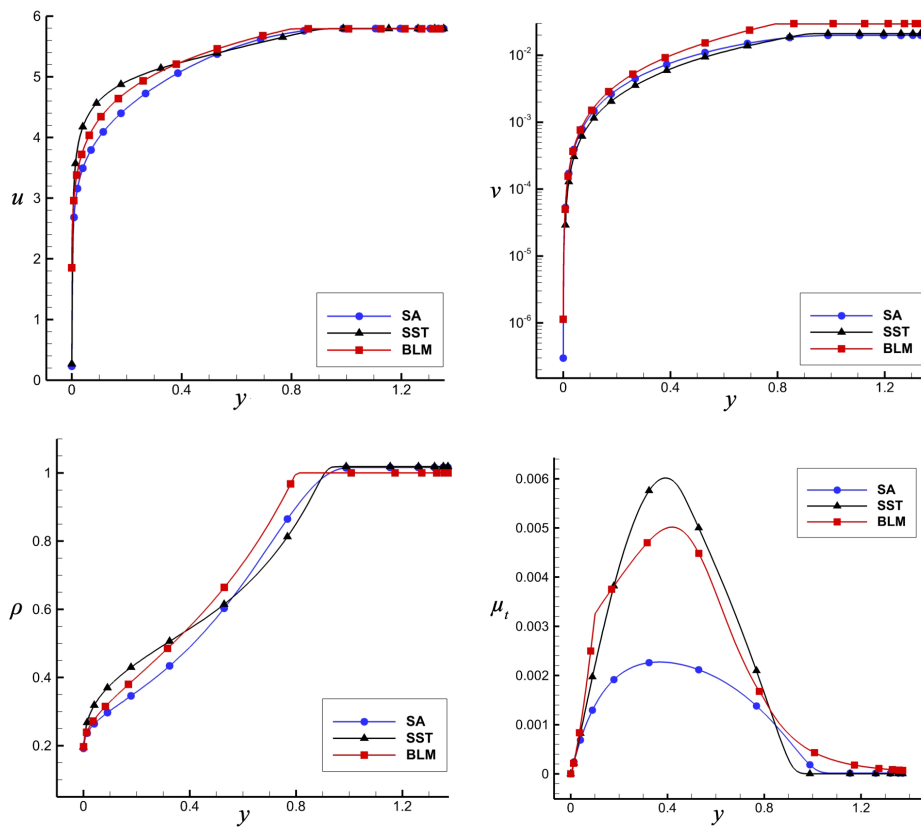


Рис. 3.8. Сравнение основных характеристик смоделированного при  $\delta = 0.76 h$  пограничного слоя с данными из расчёта

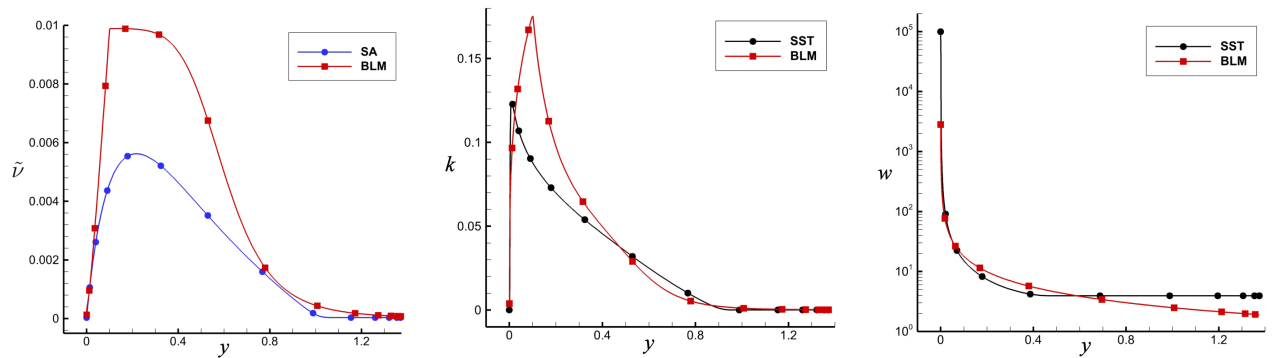


Рис. 3.9. Сравнение переменных моделей турбулентности смоделированного при  $\delta = 0.76 h$  пограничного слоя с данными из расчёта

На рис. 3.10 приведено сравнение нормированного давления  $p/p_\infty$  на нижней стенке воздухозаборника в эксперименте и в двумерных расчётах со смоделированным при  $\delta = 0.76 h$  пограничным слоем, параметры которого используются далее в расчётах в качестве заданного набегающего потока.

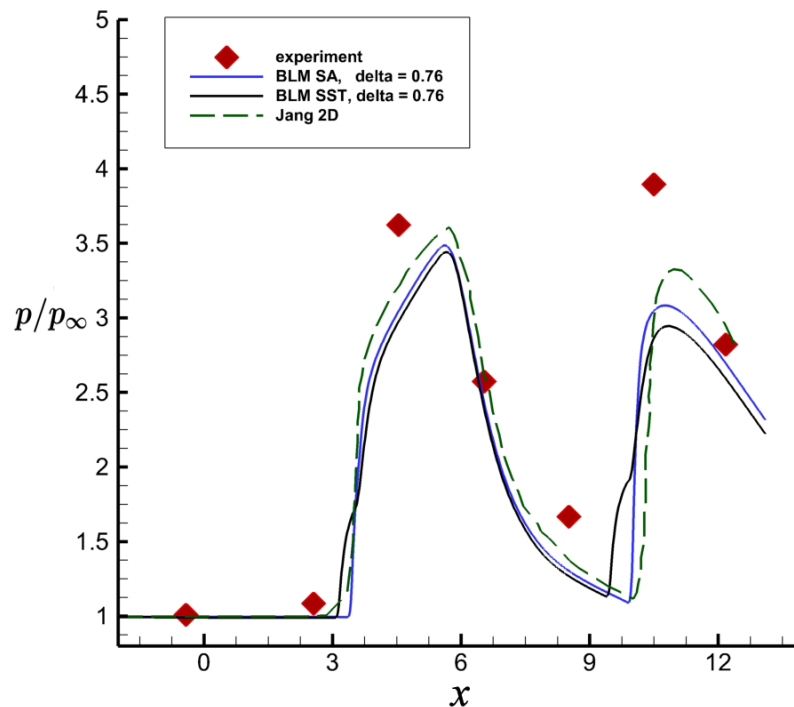


Рис. 3.10. Сравнение нормированного давления на нижней стенке воздухозаборника в эксперименте и в двумерных расчётах со смоделированным пограничным слоем

Как и на рис. 3.7, ромбиками обозначены данные натурального эксперимента, прерывистой линией – результаты из работы [97], сплошной линией – результаты текущих расчётов. Хорошо видно, что смоделированный пограничный слой позволяет получить адекватное совпадение с данными эксперимента и из работы [97], возможно даже лучшее, чем в расчётах с дополнительной областью перед воздухозаборником за счёт того, что здесь  $\delta = 0.76 h$  априори задан, а в расчётах с дополнительной областью составляет  $\delta \approx 0.8 h$ . При этом в целом полученные результаты в обоих случаях очень близки, что видно из сравнения рис. 3.7 и рис. 3.10. Таким образом, использование предложенных формул для моделирования пограничного слоя заданной толщины позволяет без видимой потери точности существенно сократить вычислительные затраты на расчёт.

### 3.4.3 Расчёт в трёхмерной постановке

Моделирование стационарного течения в трёхмерном случае проводилось с помощью разработанного программного комплекса на  $N_{\text{proc}} = 96$  вычислительных ядрах. Расчётная сетка содержала  $N = 14\,081\,984$  ячеек (см. раздел 3.2). Для моделирования использовалась неявная схема с числом Куранта  $q_{\text{CFL}} = 100.0$  и методом LU-SGS решения СЛАУ, расчёт проводился методом установления. Целью данного расчёта было качественное сравнение результатов двумерного и трёхмерного моделирования, поэтому для простоты сравнивались результаты расчётов без заданного пограничного слоя.

На рис. 3.11 приведено сравнение распределения нормированного давления  $p/p_\infty$  на нижней стенке воздухозаборника в центральном сечении для двумерного и трёхмерного расчётов с моделью турбулентности SA. Видно, что в трёхмерном расчёте за счёт влияния боковых стенок давление несколько выше. В обоих расчётах положение пиков ударных волн в псевдоскачке совпадает, что позволяет сделать вывод о качественном совпадении результатов двумерных и трёхмерных расчётов и в случае других значений толщины пограничного слоя во входном сечении.

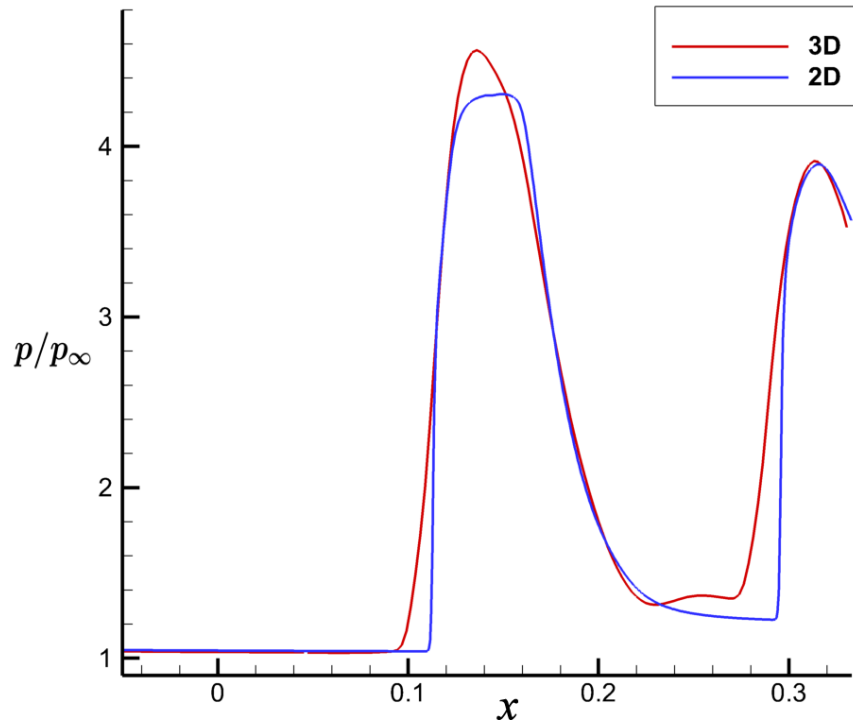


Рис. 3.11. Сравнение нормированного давления на нижней стенке воздухозаборника в двумерном и трёхмерном расчётах

### 3.5 Расчёты нестационарного режима течения в воздухозаборнике

В данной серии расчётов рассматривалась задача о формировании нестационарного псевдоскачка в канале модельного воздухозаборника, которое инициировалось созданием противодействия на выходе из воздухозаборника. Большинство работ по данной тематике [81, 91, 92, 97, 98] моделирует возникновение противодействия изменением геометрии выходного сечения. Этот подход при практическом проектировании требует согласования возникающего с помощью измененной геометрии противодействия с реальным противодействием, связанным с горением топлива.

В настоящей работе предлагается моделировать противодействие с помощью соответствующего вложения энергии на выходе из воздухозаборника, реализуемого с помощью источника в правой части системы URANS (см. раздел 1.1). Для расчётов использовалась следующая постановка:



- 1) На первом этапе расчёта моделировалось стационарное течение в воздухозаборнике (в качестве начальных условий использовались параметры набегающего потока).
- 2) На втором этапе включался стационарный источник энергии, при этом считалось, что энергия вкладывается мгновенно на каждом временном шаге (изохорический нагрев газа).

Энерговложение осуществлялось вдоль поперечного сечения недалеко от выхода из воздухозаборника с объемом (площадью для двумерных расчетов) вложения порядка  $V_{\text{energ}} = 1.0 h^3$  ( $S_{\text{energ}} = h^2$ ); (с соответствующим отступом от границы). Под  $\omega_{\text{max}}$  подразумевается «максимально возможное» количество вкладываемой энергии, рассчитываемое следующим образом. Пусть  $I_{\infty}$  [кг/с] – массовый расход воздуха во входном сечении в воздухозаборник,  $H_U$  [Дж/кг] – теплотворная способность топлива, тогда

$$\omega_{\text{max}} = \frac{I_{\infty} H_U}{V_{\text{energ}}},$$

$$\omega = k \omega_{\text{max}},$$

где  $0 \leq k \leq 1$  – некоторый коэффициент. При расчёте  $\omega_{\text{max}}$  предполагалось, что (теоретически сформированная) смесь имела стехиометрический состав. В качестве параметров топлива бралась теплотворная способность  $H_U = 42.9$  (МДж/кг) топлива Т-6 [99], используемого в сверхзвуковой авиации.

### 3.5.1 Расчёт с вложением энергии в двумерной постановке

На рис. 3.12 представлено распределение числа Маха в двумерном расчёте с  $\delta = 0.76 h$  для пограничного слоя в набегающем потоке и мощностью источника энерговложения, равной 50% от максимальной (согласно описанной выше постановке) в последовательные моменты времени (сверху вниз). При этом на самом нижнем рисунке показано новое установившееся распределение, т.е. в данном случае запираания потока не происходит.

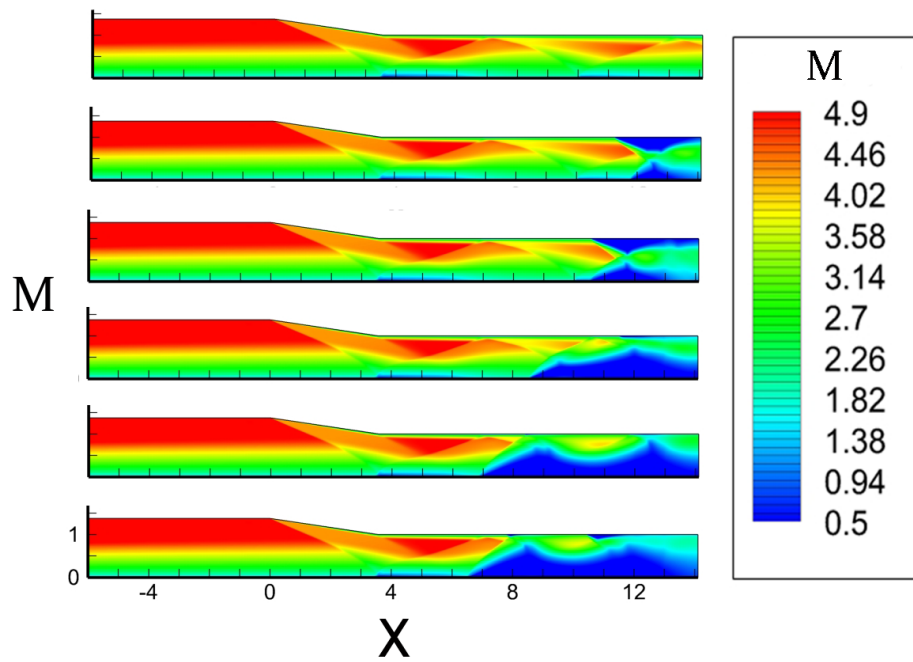


Рис. 3.12. Распределение числа Маха в последовательные моменты времени (сверху вниз) при  $w = 0.5 w_{\max}$

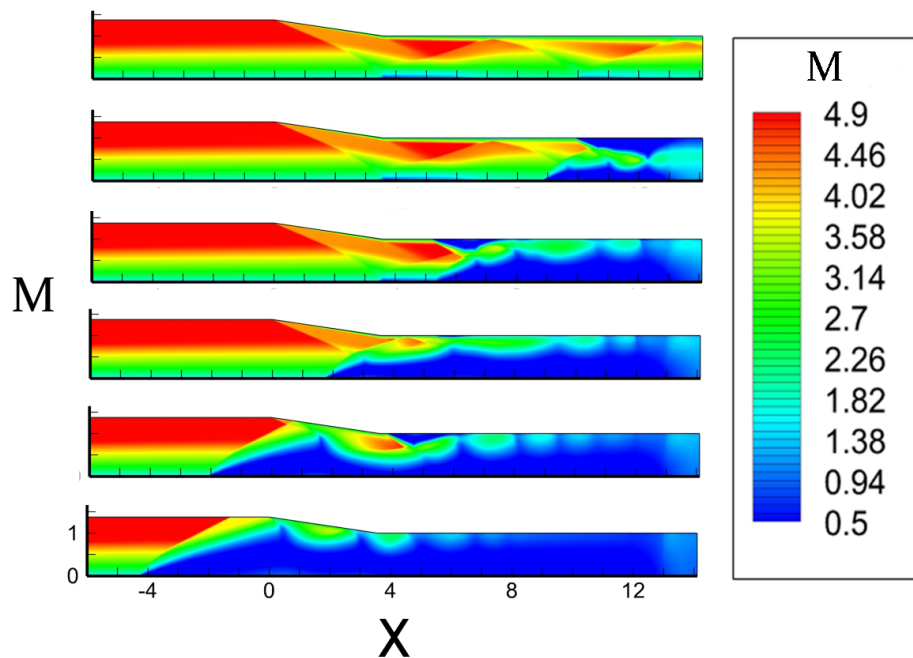


Рис. 3.13. Распределение числа Маха в последовательные моменты времени (сверху вниз) при  $w = w_{\max}$

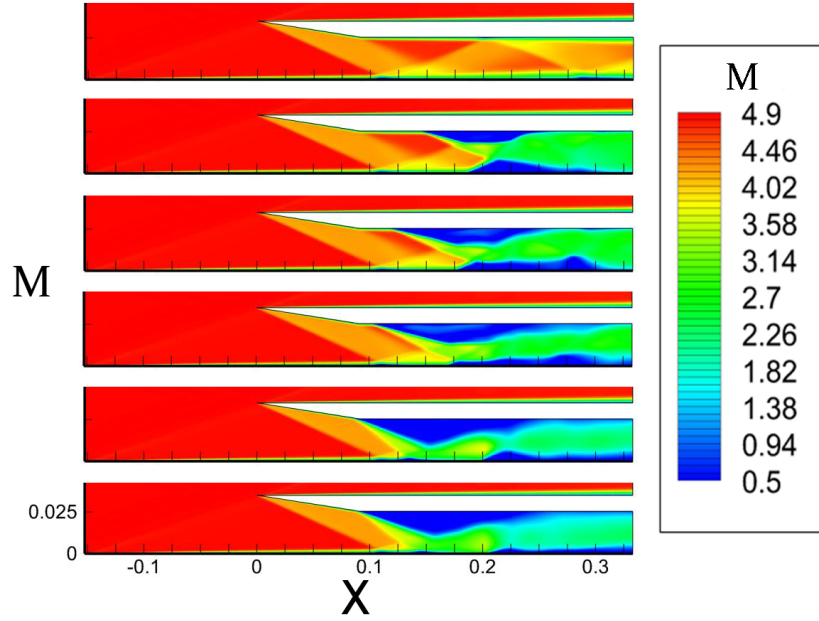


Рис. 3.14. Распределение числа Маха в последовательные моменты времени (сверху вниз) при  $w = 0.7 w_{\max}$

Напротив, на рис. 3.13 представлен вариант аналогичного двумерного расчёта, в котором наблюдается эффект записывания потока. Единственное отличие от предыдущего рассмотренного случая в параметрах задачи состоит в количестве вкладываемой энергии, которое берется равным максимальному в рамках постановки. При этом стационарный режим не формируется и возмущения продолжают распространяться против течения.

### 3.5.2 Расчёт с вложением энергии в трёхмерной постановке

Моделирование нестационарного течения в трёхмерном случае проводилось на  $N_{\text{proc}} = 96$  вычислительных ядрах. Для расчёта использовалась неявная схема с числом Куранта  $q_{\text{CFL}} = 20.0$  и методом  $\text{BiCGStab} + \text{LU-SGS}$  решения СЛАУ. Максимальное количество ньютоновских итераций было задано как  $s_{\max} = 5$ , относительная точность  $\varepsilon_r = 10^{-3}$ , для  $\text{BiCGStab}$  были заданы  $k_{\max} = 10$ , относительная точность  $\varepsilon_r = 10^{-4}$ , абсолютная точностью  $\varepsilon_a = 10^{-6}$ .

В трёхмерных расчётах наблюдались результаты, аналогичные двумерному моделированию. На рис. 3.14 представлено распределение числа Маха

в центральном сечении в трёхмерном расчёте без дополнительного моделирования пограничного слоя на входе в воздухозаборник и мощностью источника энергозатрат, равной 70% от максимальной (согласно описанной выше постановке), в последовательные моменты времени (сверху вниз). В данном случае ситуация качественно совпадает с изображённой на рис. 3.12, запираания потока не наблюдается, однако стабилизация псевдоскачка происходит значительно ближе к входному сечению воздухозаборника.

### 3.6 Выводы

В главе представлены результаты численного моделирования различных режимов работы воздухозаборника прямооточного воздушно-реактивного двигателя в двумерной и трёхмерной постановках.

Проведено исследование влияния параметров потока, таких как толщина пограничного слоя на входе и противодавление на выходе из воздухозаборника, на характер течения внутри воздухозаборника. Моделирование пограничного слоя заданной толщины проводилось с помощью выведенных аналитических формул совместно с численным интегрированием; противодавление моделировалось с помощью вложения энергии в поток.

Показано, что смоделированный с помощью формул пограничный слой адекватно отображает пограничный слой, формирующийся при реальных условиях. Установлено, что правильный учёт его характеристик существенно влияет на положение ударных волн в псевдоскачке, что критически важно при сравнении с натурным экспериментом. Также приведены некоторые результаты численного моделирования возникновения такого явления, как «незапуск» воздухозаборника, проявляющегося при запираании потока. Для инициации этого явления использовалась согласованная схема вложения энергии в поток.

Результаты, представленные в главе 3, опубликованы в работах [35, 36].

## Заключение

В процессе работы над диссертацией получены следующие результаты:

- 1) Разработаны алгоритмы неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab для решения нестационарных осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса URANS совместно с дивергентной формой уравнения однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса для сжимаемых течений с модификацией Эдвардса и возможностью энерговложения в поток.
- 2) Разработан и реализован параллельный программный комплекс для расчёта трёхмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, в том числе течений с энерговложением в поток. Программный комплекс предназначен для работы на высокопроизводительных вычислительных системах.
- 3) В целях валидации программного комплекса проведено моделирование: стационарного течения вокруг крыла ONERA M6 с симметричным профилем и нестационарного перехода между регулярным и маховским отражением  $RR \Rightarrow MR$  ударных волн в области двойных решений, инициируемого вложением энергии в сверхзвуковой поток. На данных задачах продемонстрирована высокая эффективность созданных параллельных алгоритмов.
- 4) Разработанный программный комплекс использован для численного моделирования различных режимов работы воздухозаборника прямого воздушно-реактивного двигателя. При этом:
  - разработана модель для построения турбулентного пограничного слоя заданной толщины, адекватно отображающая пограничный слой, формирующийся при реальных условиях;
  - установлено существенное влияние толщины пограничного слоя на положение и характер ударно-волновой структуры в псевдоскачке;

- проведено исследование влияния инициируемого энерговыделением противодействия на выходе из воздухозаборника на течение в псевдоскачке, смоделирован режим «незапуска» воздухозаборника.

# Приложение

## Обобщённая схема Годунова решения задачи Римана

В настоящей работе для определения численного значения невязкого потока  $\mathbf{F}_\sigma$  на грани счётной ячейки используется обобщённая схема Годунова [2]. В данной схеме поток вычисляется на решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва на грани ячейки между состояниями «слева»  $\mathbf{q}_\sigma^L$  и «справа»  $\mathbf{q}_\sigma^R$ , которые вычисляются по той или иной интерполяционной схеме, т.е.  $\mathbf{F}_\sigma = \mathbf{F}_\sigma(\mathbf{q}_\sigma^L, \mathbf{q}_\sigma^R)$ .

Задача ставится следующим образом. Пусть имеется совершенный газ, уравнение состояния которого задано соотношением (1.3). Параметры газа слева и справа от расчётной грани с индексом  $\sigma$  обозначим как  $p^L, \rho^L, u_n^L$  и  $p^R, \rho^R, u_n^R$  соответственно. Здесь  $u_n$  – проекция вектора скорости на внешнюю нормаль к грани. Необходимо найти значения  $p^\sigma, \rho^\sigma, u_n^\sigma$  на грани расчётной ячейки.

Задача о распаде произвольного разрыва в зависимости от начальных данных допускает пять конфигураций решения. Первые четыре из них содержат контактный разрыв (КР), на котором испытывает скачок плотность, а давление и скорость непрерывны. Обозначим их постоянные значения в областях слева и справа от контактного разрыва как  $P$  и  $U$ , а различные значения плотности как  $R^L$  и  $R^R$  для левой и правой области соответственно. В свою очередь, эти области отделены от «невозмущённых» областей с параметрами  $p^L, \rho^L, u_n^L$  слева и  $p^R, \rho^R, u_n^R$  справа либо ударной волной (УВ), либо волной разрежения (ВР), которые для краткости условно назовем «левой» или «правой». В случае, если волна является ударной, её скорость обозначим как  $D^k$ ,  $k = L, R$ . Если же волна представляет собой волну разрежения, то под  $D^k$  и  $D^{k,*}$  понимаются скорости ограничивающих её характеристик. Пятая конфигурация решения представляет собой предельный случай, когда в результате «разлёта» образуется область вакуума, в которой плотность падает до нуля в двух волнах разрежения, примыкающих к области вакуума слева и справа.

Решение задачи сводится к нахождению давления  $P$  на контактном разрыве, после чего легко находятся остальные величины для всех возможных

конфигураций. Уравнение для  $P$  имеет следующий вид:

$$F(P) \equiv f(P, p^L, \rho^L) + f(P, p^R, \rho^R) = u_n^L - u_n^R, \quad (1)$$

где для значений  $k = L, R$

$$f(P, p^k, \rho^k) = \begin{cases} \frac{P - p^k}{\rho^k c^k \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \pi^k + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}}, & \text{если } P \geq p^k, \\ \frac{2}{\gamma-1} c^k \left( (\pi^k)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right), & \text{если } P < p^k, \end{cases} \quad (2)$$

$$\pi^k = \frac{P}{p^k}, \quad c^k = \sqrt{\gamma \frac{p^k}{\rho^k}}.$$

Нелинейное уравнение (1) решается с помощью метода Ньютона. В качестве начального приближения используется решение линеаризованного уравнения (так называемый «звуковой распад разрыва»):

$$P^{(0)} = \frac{p^L \rho^R c^R + p^R \rho^L c^L + (u_n^L - u_n^R) \rho^L c^L \rho^R c^R}{\rho^L c^L + \rho^R c^R}. \quad (3)$$

Также для реализации метода Ньютона необходимо вычислять величину  $f'_P(P, p^k, \rho^k)$ :

$$f'_P(P, p^k, \rho^k) = \begin{cases} \frac{(\gamma+1)\pi^k + (3\gamma-1)}{4\gamma\rho^k c^k \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \pi^k + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^3}}, & \text{если } P \geq p^k, \\ \frac{1}{\gamma P} c^k (\pi^k)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, & \text{если } P < p^k. \end{cases} \quad (4)$$

Если  $P^{(n-1)}$  – полученное приближённое значение корня на  $n - 1$  итерации метода Ньютона, то новое приближение строится по формуле:

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} - \frac{f(P^{(n-1)}, p^L, \rho^L) + f(P^{(n-1)}, p^R, \rho^R) - (u_n^L - u_n^R)}{f'_P(P^{(n-1)}, p^L, \rho^L) + f'_P(P^{(n-1)}, p^R, \rho^R)}. \quad (5)$$



Критерий существования решения имеет следующий вид:

$$u^L - u^R \geq -\frac{2}{\gamma - 1} (c^L + c^R). \quad (6)$$

В противном случае уравнение (1) не имеет вещественного корня.

Критерий остановки ньютоновских итераций записывается в виде:

$$\left| P^{(i)} - P^{(i-1)} \right| < \varepsilon_r \cdot \min\{p^L, p^R\}, \quad (7)$$

где обычно полагается  $\varepsilon_r \sim 10^{-6} \div 10^{-12}$ .

После вычисления  $P$  скорость контактного разрыва определяется согласно формуле

$$U = u_n^L - f(P, p^L, \rho^L) = u_n^R + f(P, p^R, \rho^R). \quad (8)$$

Далее вычисляются величины  $R^L, R^R$  и  $D^L, D^R, D^{L,*}, D^{R,*}$ :

$$\begin{cases} c^{L,*} = c^L + 0.5(\gamma - 1)(u_n^L - U), \\ D^L = u_n^L - c^L, \\ D^{L,*} = U - c^{L,*}, \\ R^L = \gamma P / (c^{L,*})^2, \end{cases} \quad \text{если } P < p^L, \quad (9)$$

$$\begin{cases} R^L = \rho^L \frac{(\gamma + 1)P + (\gamma - 1)p^L}{(\gamma - 1)P + (\gamma + 1)p^L}, \\ D^L = \frac{\rho^L u_n^L - R^L U}{\rho^L - R^L}, \end{cases} \quad \text{если } P \geq p^L, \quad (10)$$

$$\begin{cases} c^{R,*} = c^R - 0.5(\gamma - 1)(u_n^R - U), \\ D^R = u_n^R + c^R, \\ D^{R,*} = U + c^{R,*}, \\ R^R = \gamma P / (c^{R,*})^2, \end{cases} \quad \text{если } P < p^R, \quad (11)$$

$$\begin{cases} R^R = \rho^L \frac{(\gamma + 1)P + (\gamma - 1)p^R}{(\gamma - 1)P + (\gamma + 1)p^R}, \\ D^R = \frac{\rho^R u_n^R - R^R U}{\rho^L - R^R}, \end{cases} \quad \text{если } P \geq p^R. \quad (12)$$

После этого становится возможным выписать искомое решение  $p^\sigma, \rho^\sigma, u_n^\sigma$  в зависимости от того, в какую зону попадает грань  $\sigma$ :

$$\begin{cases} \rho^\sigma = \rho^L, \\ p^\sigma = p^L, \\ u_n^\sigma = u_n^L, \end{cases} \quad \text{если } 0 \leq D^L, \quad (13)$$

$$\begin{cases} \rho^\sigma = \rho^L (c^\sigma / c^L)^{2/(\gamma-1)}, \\ p^\sigma = \rho^\sigma (c^\sigma)^2 / \gamma, \\ u_n^\sigma = c^\sigma, \\ c^\sigma = ((\gamma - 1)u_n^L + 2c^L) / (\gamma + 1), \end{cases} \quad \text{если } D^L < 0 \leq D^{L,*}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \rho^\sigma = R^L, \\ p^\sigma = P, \\ u_n^\sigma = U, \end{cases} \quad \text{если } D^{L,*} < 0 \leq U, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \rho^\sigma = R^R, \\ p^\sigma = P, \\ u_n^\sigma = U, \end{cases} \quad \text{если } U < 0 \leq D^{R,*}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} \rho^\sigma = \rho^R (c^\sigma / c^R)^{2/(\gamma-1)}, \\ p^\sigma = \rho^\sigma (c^\sigma)^2 / \gamma, \\ u_n^\sigma = -c^\sigma, \\ c^\sigma = ((1 - \gamma)u_n^R + 2c^R) / (\gamma + 1), \end{cases} \quad \text{если } D^{R,*} < 0 \leq D^R, \quad (17)$$

$$\begin{cases} \rho^\sigma = \rho^R, \\ p^\sigma = p^R, \\ u_n^\sigma = u_n^R, \end{cases} \quad \text{если } D^R < 0. \quad (18)$$

Полностью алгоритм решения задачи о распаде произвольного разрыва в указанной постановке представлен на схеме 4. Практика показывает, что для исследуемого класса задач в основной части расчётной области (в которой поле основных величин является довольно гладким), данный метод сходится за 2 – 3 итерации. И только на разрывах число итераций увеличивается, что в целом не является критичным для полного времени расчёта.

---

**Алгоритм 4** Алгоритм решения задачи о распаде произвольного разрыва для нахождения значений на грани  $\sigma$  расчётной ячейки

---

- 1) Инициализация: задать  $p^L, \rho^L, u_n^L, p^R, \rho^R, u_n^R, \varepsilon_r$  и  $n_{\max}$ .
  - 2) Вычислить  $c^L, c^R$ .
  - 3) Если критерий существования решения (6) не выполнен, остановить расчёт.
  - 4) Вычислить начальное приближение  $P^{(0)}$  по формуле (3).
  - 5) Метод Ньютона для решения уравнения (1).  
Для  $n = 1, 2, 3 \dots$ 
    - (а) Если  $n > n_{\max}$  остановить расчёт.
    - (б) Вычислить  $f(P^{(n-1)}, p^k, \rho^k), f'_P(P^{(n-1)}, p^k, \rho^k), k = L, R$  согласно соотношениям (2) и (4).
    - (в) Вычислить новое приближение  $P^{(n)}$  из соотношения (5).
    - (г) Если выполнен критерий остановки (7), выйти из итераций.
  - 6) Вычислить  $U$  по формуле (8).
  - 7) Вычислить  $R^L, R^R, D^L, D^R (D^{L,*}, D^{R,*})$  из (9)–(12).
  - 8) В зависимости от значений  $U, D^L, D^R (D^{L,*}, D^{R,*})$  выбрать текущую конфигурацию решения  $p^\sigma, \rho^\sigma, u_n^\sigma$  согласно соотношениям (13)–(18).
-

## Литература

- [1] Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994, 444 с.
- [2] Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976, 400 с.
- [3] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992, 424 с.
- [4] Бабенко К.И., Воскресенский Г.П., Любимов А.Н., Русанов В.В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М.: Наука, 1964, 505 с.
- [5] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001, 608 с.
- [6] Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1999, 232 с.
- [7] Елизарова Т.Г. Математические модели и численные методы в механике жидкости и газа. М.: Изд-во МГУ, 2005, 224 с.
- [8] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. 2-е изд, испр. и доп. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008, 503 с.
- [9] Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001, 160 с.
- [10] Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. СПб: Изд-во БГТУ, 2001, 108 с.

- [11] Harten A., Lax P., van Leer B. On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws // *SIAM review*. 1983. V. 25. P. 35–61.
- [12] Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes // *Int. J. of Numerical Analysis*. 1987.
- [13] Lax P.D., Wendroff B. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // *Comm. Pure Appl. Math.* 1964. V. 17, P. 381–398.
- [14] Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws and mathematical theory of shock waves. I. Philadelphia: SIAM, 1973.
- [15] Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. Vol 1. Elsevier, 2nd edition, 2007, 680 p.
- [16] Beam R.M., Warming R.F. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations // *AIAA Journal*. 1978. V. 16. P. 393–402.
- [17] Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Яненко Н.Н. Неявная разностная схема для численного решения пространственных уравнений газовой динамики // *Журн. вычисл. математики и матем. физики*. 1980. Т. 20. № 6. С. 1466–1482.
- [18] Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Чёрный С.Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990, 247 с.
- [19] Haga Takanori, Sawada Keisuke and Wang Z.J. An Implicit LU-SGS Scheme for the Spectral Volume Method on Unstructured Tetrahedral Grids. *Commun. Comput. Phys.* 2009. V. 6. № 5. P. 978–996.
- [20] Balay S., Gropp W.D., McInnes L.C., Smith B.F. PETSc 2.0 users manual. Technical Report ANL-95/11- Revision 2.0.24. Argonne National Laboratory, 1999.

- [21] Balay S., Buschelman K., Gropp W.D., Kaushik D., Knepley M.G., McInnes L.C., Smith B.F., Zhang H. PETSc Web page. 2001.  
<http://www.mcs.anl.gov/petsc>
- [22] Balay S., Gropp W.D., McInnes L.C., Smith B.F. Efficiency management of parallelism in object oriented numerical software libraries // *Modern Software Tools in Scientific Computing*. Birkhauser Press, 1997. P. 163–202.
- [23] Rasetarinera P., Hussaini M.Y. An efficient implicit discontinuous Galerkin method // *Journal of Computational Physics*. 2001. V. 172. № 2. P. 718–738.
- [24] Luo H., Sharov D., Baum J.D., Löwner R. Parallel unstructured grid GMRES+LU-SGS method for turbulent flows. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.
- [25] Копьев В.Ф., Титарев В.А., Беляев И.В. Разработка методологии расчёта шума винтов с использованием суперкомпьютеров // *Ученые записки ЦАГИ*. 2014. Т. XLV. № 2. С. 78–106.
- [26] Yoon S., Jameson A. Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier–Stokes equations // *AIAA Journal*. 1988. V. 26. № 9. P. 1025–1026.
- [27] Chen R.F., Wang Z.J. Fast, block lower-upper symmetric Gauss–Seidel scheme for arbitrary grids // *AIAA Journal*. 2000. V. 38. № 12. P. 2238–2245.
- [28] Jameson A., Caughey D.A. How many steps are required to solve the Euler equations of steady compressible flow: in search of a fast solution algorithm. In: 15th AIAA computational fluid dynamics conference, Anaheim, CA. June 2001.
- [29] Li Dong, Men'shov Igor, Nakamura Yoshiaki. Detached-Eddy Simulation of Three Airfoils with Different Stall Onset Mechanisms // *Journal of Aircraft*. 2006. V. 43. № 4. P. 1014–1021.

- [30] Sun Y., Wang Z.J., Liu Y., Chen C.L. Efficient implicit LU-SGS algorithm for high-order spectral difference method on unstructured hexahedral grids. AIAA Paper № 2007–0313, 2007.
- [31] Brown P.N., Hindmarsh A.C. Matrix-Free Methods for Stiff Systems of ODE's // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1986. V. 23. № 3. P. 610–638.
- [32] Павлухин П.В., Меньшов И.С. Эффективная реализация метода LU-SGS для задач газовой динамики // *Научный вестник МГТУ ГА*. 2011. Т. 165. С. 46–55.
- [33] Борисов В.Е., Давыдов А.А., Кудряшов И.Ю., Луцкий А.Е., Меньшов И.С. Параллельная реализация неявной схемы на основе метода LU-SGS для моделирования трёхмерных турбулентных течений // *Математическое моделирование*. 2014. Т.26. № 10. С. 64–78.
- [34] Борисов В.Е. Моделирование обтекания крыла ONERA M6 с помощью параллельной реализации неявной схемы // *Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика*. 2015. № 4. С. 65–68.
- [35] Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Моделирование течений в воздухозаборнике ПВРД // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2015. Т. 16, вып. 1. 12 с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-1/articles/530/>
- [36] Борисов В.Е., Кудряшов И.Ю., Луцкий А.Е. Численное исследование формирования псевдоскачка в канале // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2016. № 2. 24 с.  
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-2>
- [37] Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн с помощью неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2016. № 68. 36 с.  
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-68>

- [38] Spalart P.R., Allmaras S.R. A One-equations Turbulence Model for Aerodynamics Flows. AIAA Paper № 92–0439, 1992.
- [39] Allmaras S.R., Johnson F.T., Spalart P.R. Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model. In: 7th International Conference on CFD, Big Island, Hawaii, July 2012.
- [40] Edwards J.R., Chandra S. Comparison of Eddy Viscosity-Transport Turbulence Models for Three-Dimensional, Shock-Separated Flowfields // *AIAA Journal*. 1996. Vol. 34, no. 4. P. 756–763.
- [41] Blazek J. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications. New York: Elsevier, 2001.
- [42] Cravero I., Semplice M. On the accuracy of WENO and CWENO reconstructions of third order on nonuniform meshes // *Journal of Scientific Computing*. 2016. V. 67. № 3. P. 1219–1246.
- [43] Liu X.D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // *Journal of Computational Physics*. 1994. V. 115. P. 200–212.
- [44] Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. Chapter in: Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations. Volume 1697 of the series Lecture Notes in Mathematics, p. 325–432. Springer, Berlin, 1998.
- [45] Hu C., Shu C.W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes // *Journal of Computational Physics*. 1999. V. 150. P. 97–127.
- [46] Shu C.W. High order weighted essentially non-oscillatory schemes for convection dominated problems // *SIAM Review*. 2009. V. 51. P. 82–12.



- [47] Arandiga F., Baeza A., Belda A.M., Mulet P. Analysis of WENO schemes for full and global accuracy // *SIAM J. Numer. Anal.* 2011. V. 49. № 2. P. 893–915.
- [48] Jameson A. Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings. AIAA paper № 91–1596, 1991.
- [49] Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику: Учеб. пособие. 2-е изд., исправ. М.: ФИЗМАЛИТ, 2000, 296 с.
- [50] Русанов В.В. Расчёт нестационарных ударных волн с препятствиями // *ЖВМ и МФ.* 1961. Т. 1. № 2. С. 267–279.
- [51] Men'shov I., Nakamura Y. On implicit Godunov's method with exactly linearized numerical flux // *Computers and Fluids.* 2000. V. 29. P. 595–616.
- [52] Men'shov I., Nakamura Y. An implicit advection upwind splitting scheme for hypersonic air flows in thermochemical nonequilibrium. Collection of technical papers of 6th Int. Symp. on CFD, Lake Tahoe, Nevada, 1995. V. 2. P. 815–821.
- [53] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Second Edition. SIAM, 2003.
- [54] Knoll D.A., Keyes D.E. Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications // *Journal of Computational Physics.* 2004. V. 193. № 2. P. 357–397.
- [55] Krasnopolsky B. The reordered bicgstab method for distributed memory computer systems // *Procedia Computer Science.* 2010. V. 1. P. 213–218.
- [56] MPI: A message passing interface standard. University of Tennessee, Knoxville, Tennessee: 1994, 228 p.

- [57] Chaco: Software for Partitioning Graphs.  
<https://cfwebprod.sandia.gov/cfdocs/CompResearch/templates/insert/softwre.cfm?sw=36>
- [58] Cuthill E., McKee J. Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetrical Matrices // *Proc. ACM Nat. Conf.* New York, 1969. P. 157–172.
- [59] Волков К.Н., Емельянов В.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: ФИЗМАЛИТ, 2012. 468 с.
- [60] Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений: учебное пособие. М.: Бином. Лаборатория знаний; Интернет-университет открытых технологий, 2007. 423 с.
- [61] Семёнов И.В., Ахмедьянов И.Ф., Уткин П.С. Разработка вычислительного комплекса для решения двух и трёхмерных задач газодинамики реагирующих течений на многопроцессорных ЭВМ // *Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах: Мат-лы 6 Международ. науч.-практ. семинара. 12–17 декабря 2006 г.* СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского гос.университета, 2007. Т. 2. С. 138–145.
- [62] Семёнов И.В., Ахмедьянов И.Ф. Разработка параллельного алгоритма LU-SGS для решения многомерных задач вычислительной газодинамики // *Материалы Четвертой Сибирской школы-семинара по параллельным и высокопроизводительным вычислениям.* Изд-во Томск: Дельтаплан, 2008. С. 122–129.
- [63] Intel® Compilers.  
<http://software.intel.com/ru-ru/intel-compilers>
- [64] Гибридный вычислительный кластер К-100.  
<http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html>
- [65] NPARC Alliance Validation Archive.  
<https://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/m6wing/m6wing.html>

- [66] Schmitt V., Charpin F. Pressure Distributions on the ONERA-M6-Wing at Transonic Mach Numbers. Experimental Data Base for Computer Program Assessment. Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04, AGARD AR 138, 1979.
- [67] Gaultier Sylvain, ONERA research lab.  
[http://www.onera.fr/en/actualites/image-du-mois/  
onera-m6-wing-star-cfd](http://www.onera.fr/en/actualites/image-du-mois/onera-m6-wing-star-cfd)
- [68] Кудрявцев А.Н. Вычислительная аэродинамика сверхзвуковых течений с сильными ударными волнами: дис. ... д-ра ф.-м. наук. ИТПМ СО РАН, Новосибирск, 2014.
- [69] Иванов М.С., Кудрявцев А.Н., Никифоров С.Б., Хотяновский Д.В. Переход между регулярным и маховским отражением ударных волн: новые численные и экспериментальные результаты // *Аэромеханика и газовая динамика*. 2002. № 3, С. 3–12.
- [70] Ivanov M.S., Kudryavtsev A.N., Nikiforov S.B., Khotyanovsky D.V., Pavlov A.A. Experiments on shock wave reflection transition and hysteresis in low-noise wind tunnel // *Physics of Fluids*. 2003. V. 15. P. 1807–1810.
- [71] Khotyanovsky D.V., Knight D.D., Kudryavtsev A.N., Ivanov M.S. Numerical study on laser-induced shock wave reflection transition. In: The 5th Int. Workshop on Shock-Vortex Interaction, Kaohsiung, Taiwan, Oct. 27-31, 2003. P. 84–90.
- [72] Khotyanovsky D.V., Kudryavtsev A.N., Ivanov M.S. Effects of a Single-pulse Energy Deposition on Steady Shock Wave Reflection // *Shock Waves*. 2006. V. 15. № 5. P. 353–362.
- [73] Бормотова Т.А., Володин В.В., Голуб В.В., Ласкин И.Н. Тепловая коррекция входного диффузора гиперзвукового прямооточного воздушно-реактивного двигателя // *Теплофизика высоких температур*. 2003. Т. 41. № 3. С. 472–477.

- [74] Замураев В.П., Калинина А.П. Численно-аналитическое моделирование структуры сверхзвукового течения газа в канале переменного сечения с подводом энергии // *Инженерно-физический журнал*. 2015. Т. 88. № 1. С. 210–219.
- [75] Латыпов А.Ф. Численное моделирование течения в канале переменной площади сечения при импульсно-периодическом подводе энергии // *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50. № 1. С. 3–11.
- [76] Третьяков П.К. Организация пульсирующего режима горения высокоскоростных ПВРД // *Физика горения и взрыва*. 2012. Т. 48. № 6. С. 21–27.
- [77] Забайкин В.А. Управление псевдоскачком нестационарным воздействием // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2011. Т. 12. 7 с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2011-12/articles/353/>
- [78] Quirk J.J. AMRITA – A computational facility (for CFD modeling) // *VKI 29<sup>th</sup> CFD Series*. 1998. P. 23–27.
- [79] Hadiadi A., Kudryavtsev A. Computation and flow visualization in high-speed aerodynamics // *Journal of Turbulence*. 2005. V. 6. № 16.
- [80] Gratien J.M. et al. Scalability and load balancing problems in parallel reservoir simulation // *Proceedings of 10th ECMOR*. 2006.
- [81] Гуськов О.В., Копчёнов В.И., Липатов И.И., Острась В.Н., Старухин В.П. Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах. М.: ФИЗМАЛИТ, 2008.
- [82] Anderson J. Hypersonic and high-temperature gas dynamics, Second edition. AIAA, 2006.
- [83] Andreadis D. Scramjet Engines Enabling the Seamless Integration of

Air & Space Operations // *The Industrial Physicist*. August/September 2004.

- [84] Mutzman R.C., Murphy J.S. X-51 Development: A Chief Engineer's Perspective. In: 17<sup>th</sup> AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference, 13 April 2011.
- [85] Peebles C. Road to Mach 10: Lessons learned from the X-34A flight research program. AIAA, 2008.
- [86] Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. На пути к созданию модели виртуального ГЛА. I. М.: ИПМех РАН, 2013, 160 с.
- [87] Быков Л.В., Молчанов А.М., Щербаков М.А., Янышев Д.С. Вычислительная механика сплошных сред в задачах авиационной и космической техники. М.: ЛЕНАНД, 2015, 688 с.
- [88] Кудряшов И.Ю., Луцкий А.Е. Моделирование турбулентного отрывного трансзвукового обтекания тел вращения // *Математическое моделирование*. 2011. Т. 23. № 5. С. 71–80.
- [89] Кудряшов И.Ю., Луцкий А.Е. Численное моделирование эффектов турбулизации и реламинаризации потока в результате активных внешних воздействий // *Математическое моделирование*. 2014. Т. 26. № 3. С. 3–13.
- [90] Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4: Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass*. Begell House, Inc., 2003. P. 625–632.
- [91] Wagner J.L. Experimental studies of unstart dynamics in inlet/isolator configurations in a Mach 5 flow. PhD Thesis. The University of Texas at Austin, 2009.
- [92] Koo H., Raman V. Large-eddy simulation of a supersonic inlet-isolator // *AIAA Journal*. 2012. V. 50. № 7. P. 1596–1613.

- [93] Xu S., Martín M.P. Assessment of inflow boundary conditions for compressible turbulent boundary layers // *Physics of Fluids*. 2004. V. 16. № 7. P. 2623–2639.
- [94] Do H., Im S., Mungal M.G. et al. The influence of boundary layers on supersonic inlet flow unstart induced by mass injection // *Experiments in Fluids*. 2011. V. 51. № 3. P. 679–691.
- [95] Emami S., Trexler C.A., Auslender A.H., Weidner J.P. Experimental Investigation of Inlet-Combustor Isolators for a Dual-Mode. Technical Report 3502. NASA Langley Technical Report Server, 1994.
- [96] Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD (Third Edition). DCW Industries, Inc., 2006.
- [97] Jang I., Pecnik R., Moin P. A numerical study of the unstart event in an inlet/isolator model // *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*. 2010. P. 93–103.
- [98] Жуков В.Т. [и др.] Исследование картины течения в модельном тракте двигателя высокоскоростного летательного аппарата // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2015. № 5. 23 с.
- [99] Топлива, смазочные материалы, технические жидкости. Ассортимент и применение: Справочник. 2-е изд. Под ред. В.М. Школьников. М.: Химия, 1999.