На правах рукописи

Варин Виктор Петрович

ОСОБЕННОСТИ СЕМЕЙСТВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

01.02.01 - теоретическая механика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва
2009

Работа выполнена в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Научный консультант —	доктор физико-математических наук, профессор Брюно Александр Дмитриевич
Официальные оппоненты —	доктор физико-математических наук, профессор Лерман Лев Михайлович,
	доктор физико-математических наук, профессор Рябов Юрий Александрович,
	доктор физико-математических наук, профессор Садов Юрий Андреевич.
Ведущая организация —	Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН

Защита состоится 20 октября 2009 г. в 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.024.01 при Институте Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047, Миусская пл. 4, Москва, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Автореферат разослан 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.024.01 при ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
доктор физико-математических наук Т.А.Полилова

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена изучению семейств периодических решений двух задач небесной механики: уравнения колебаний и вращений спутника относительно его центра масс, движущегося по эллиптической орбите (уравнения Белецкого), и плоской круговой ограниченной задачи трех тел. Кроме того, развитые методы применяются к изучению вырожденных предельных циклов на плоскости в рамках проблемы центр-фокус.

Актуальность темы. Согласно Пуанкаре, периодические решения гамильтоновой системы образуют, в некотором смысле, скелет части ее фазового пространства, поэтому изучение семейств периодических решений и их особенностей является необходимым при изучении любых механических задач, где такие решения имеются. В задачах же небесной механики периодические решения представляют, как правило, наибольший интерес.

Три задачи, рассмотренные в данной диссертации, т.е. уравнение Белецкого (гл. I), проблема центра-фокуса и предельные циклы (гл. II), и ограниченная задача трех тел (гл. III), интенсивно изучались на протяжении десятилетий и имеют весьма обширные приложения. Однако сложность этих задач такова, что говорить о завершении исследования какой-либо из них не представляется возможным.

С момента открытия уравнения Белецкого в 1956 г. оно интенсивно изучалось преимущественно с практической точки зрения (приложения к задачам космической навигации, объяснение движения небесных тел). Изучение этого уравнения показало, что оно обладает большим набором семейств периодических решений с весьма сложной структурой.

Плоская круговая ограниченная задача трех тел является, вероятно, одной из наиболее изучаемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Не существует ни одной работы, где было бы дано исчерпывающее изложение результатов, накопленных в настоящее время по этой проблеме. Можно быть уверенным, что такого обзора никогда не будет, так как новые результаты в этой задаче появляются постоянно.

Несмотря на столь пристальное внимание к этим проблемам в прошлом и настоящем, многие вопросы классификации семейств периодических решений и их особенностей оставались нерешенными, а некоторые вопросы до недавнего времени не обсуждались. Во многом это связано с необходимостью привлечения численного анализа и большого количества вычислений, для которых ранее не было технических средств, а также, согласно Хенону, с необходимостью учета огромного количества деталей.

В этой работе основное внимание уделяется вырожденным решениям на семействах периодических решений уравнения Белецкого (гл. I) и ограниченной задачи трех тел (гл. III). При этом под вырожденными решениями понимаются любые особенности конечной коразмерности на семействах, т.е. решения, которые чем-либо выделяются из случая общего положения. В такой общей постановке вопрос о вырожденных решениях ранее не рассматривался. Обычно выделяется некоторый класс особых решений, общий для некоторого круга однотипных задач, и для которых создаются свои методы исследования. Эти методы могут быть весьма общими, однако применимыми только к данному типу особенностей. Примером может служить метод нормальной формы, который применяется к изучению локальных особенностей. Для того, чтобы привести систему дифференциальных уравнений к нормальной форме в окрестности особого решения, это особое решение должно быть уже известно. Таким особым решением может быть неподвижная точка или некоторое выделенное периодическое решение на семействе. Затем, используя нормальную форму уравнений, можно описать поведение решений в окрестности вырожденного решения. Однако в многопараметрических задачах механики довольно типичной является ситуация, когда существование особого решения не вызывает сомнения, в то же время его положение в фазовом пространстве не известно. Это может быть потеря устойчивости и связанная с ней топологическая особенность на семействе решений, или это может быть пересечение семейств решений. Возможны и более причудливые сценарии. Общим в них является лишь то, что особое решение необходимо сперва идентифицировать, прежде чем изучать его окрестность. Если особое решение соответствует интегрируемому случаю, то для его локализации на семействе возможно применение метода усреднения, или построение нормальной формы в окрестности целого семейства. В случае пересечения двух многообразий решений, одно из которых соответствует интегрируемому случаю, обычно применим метод регулярных возмущений. Если же особое решение лежит в области фазового пространства, где система не интегрируема, то единственным способом получения информации об особом решении являются вычисления. Однако вычислительный алгоритм, работающий в случае общего положения, обычно отказывает уже в некоторой окрестности особого решения. Вероятно, поэтому до недавнего времени таким *нелокальным особенностям* не уделялось должного внимания.

Цель работы и основные задачи. Целью работы является систематическое изучение многопараметрических семейств периодических решений рассмотренных задач, а также анализ особенностей конечной коразмерности на этих семействах. Основными задачами при этом являются классификация семейств периодических решений и их особенностей, а также создание эффективных алгоритмов, позволяющих вычислять эти особенности аналитически или численно с заданной точностью.

Методы исследования. В диссертации предлагается метод исследования особых решений на семействах периодических решений, основанный на применении уравнений в вариациях высокого порядка. При этом предполагается лишь аналитичность множества всех возможных решений в окрестности особого решения. Оказалось, что с помощью решений уравнений в вариациях можно выразить любое особое решение в рассмотренных задачах, исключая сингулярные случаи, которые требуют отдельного исследования. При этом особое решение удовлетворяет некоторой невырожденной системе краевых задач, т.е. может быть вычислено с той же точностью, что и обычное решение на семействе.

Для исследования сингулярных случаев в гл. I применяются методы степенной геометрии.

Изучение вырожденных циклов в гл. II связано с большим объемом символьных преобразований. Для этих аналитических вычислений использовались методы компьютерной алгебры.

Изучение семейств периодических решений невозможно без их эффективного вычисления. При этом в ряде случаев обычные численные методы не применимы. Для вычисления сложных участков семейств периодических решений ограниченной задачи в гл. III применялись численные методы без насыщения, специально разработанные для этого в гл. IV.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. Основными из них являются следующие:

- Результаты многочисленных и подробных исследований уравнения Белецкого, полученные в работах Черноусько Ф.Л., Сарычева В.А., Сазонова В.В., Белецкого В.В. и др., обобщены и дополнены исследованием неизвестных ранее фрагментов семейств периодических решений при эксцентриситете $e \to 1$ и больших значения инерциального параметра μ. Обнаружено существование бесконечного числа интервалов устойчивых периодических решений при значениях эксцентриситета e близких к 1.

- Предложен метод анализа вырождений конечной коразмерности на семействах периодических решений, основанный на применении высших вариаций. Показано, что каждому вырожденному решению соответствует невырожденная на этом решении система краевых задач, что дает возможность вычислить это решение с той же точностью, как и решение в случае общего положения. Метод высших вариаций применен для изучения всех вырожденных решений на семействах обобщенно периодических решений уравнения Белецкого, которые ранее исследовались различными другими методами. Изучен также ряд вырождений, которые ранее были неизвестны. В частности, обнаружена бесконечная последовательность вложенных друг в друга сборок Уитни при $e \to 1$, которые имеются на семействах обобщенно периодических решений для каждого числа вращения.

- Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях центра для всего класса систем с одним ребром ломаной Ньютона. Найдено в явном виде асимптотическое разложение отображения Пуанкаре. Исследован ряд примеров рождения предельных циклов различной степени вырождения. Впервые проблема центра-фокуса решена для системы с двумя ребрами ломаной Ньютона.

- Дано полное описание циклической структуры порождающего семейства i периодических решений ограниченной задачи. Обнаружено ранее неизвестное зигзагообразное поведение его характеристик. Изучены бифуркации семейства i при изменении массового параметра μ и образование замкнутых семейств симметричных периодических решений (СПР). Изучена эволюция замкнутых семейств СПР при изменении μ и показано, что эти семейства стягиваются в одну орбиту. Показано, что образование замкнутых семейств СПР является типичным явлением в ограниченной задаче.

- В рамках плоской ограниченной круговой задачи трех тел дано объяснение распределению астероидов главного пояса вблизи резонансов 2:1, 3:2, 4:3, и расположению внешней границы главного пояса астероидов вблизи резонанса 5:4.

- Предложены численные методы без насыщения, применение которых позволило преодолеть ряд трудностей принципиального характера при вычислении семейств СПР ограниченной задачи при малых μ.

Теоретическая и практическая ценность. Работа относится к области теоретической механики и носит, в основном, теоретический характер. Созданный в гл. I метод исследования особых решений, основанный на высших вариациях уравнений исходной системы, применим к широкому классу задач маятникового типа. Предельные циклы, которые изучались в гл. II в рамках проблемы центра-фокуса, имеют обширные приложения к самым разнообразным задачам, где происходит потеря устойчивости стационарного режима и возникновение автоколебаний. Это явление объясняет переменную светимость звезд, колебания численности популяций животных, флаттер и вибрации в конструкциях и т.п. Накопленный и систематизированный материал, полученный при изучении ограниченной задачи в гл. III, позволил объяснить некоторые явления, наблюдаемые в распределении астероидов главного пояса, которые ренее не находили объяснения в рамках ограниченной задачи. Открытые закономерности в поведении замкнутых семейств периодических решений могут оказаться полезными при изучении структуры колец Сатурна и пояса Койпера.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

- Ergodic Theory and Dynamical Systems, Warsaw, Poland, 1995.
- Компьютерные методы в Небесной Механике, С.-Петербург, 1995.
- Чебышевские чтения. Международная конференция, посвященная 175-летию П.Л. Чебышева, МГУ, 1996.
- 2nd World Congress in Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Athens, Greece, 1996.
- 2nd European Congress of Mathematics, Budapest, Hungary, 1996.
- Some Topics of Mathematics, Samarkand, Uzbekistan, 1996.
- First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, FL, USA, 1996.
- Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik, GAMM-1998, Bremen, Germany.
- Конгресс Индустриальной и Прикладной Математики, Новосибирск, 1998.
- 3rd International ISAAC Congress, Berlin, Germany, 2001.

- International Conference on Differential Equations, EquaDiff 2003, Hasselt, Belgium.
- Dynamical Systems and Applications, Antalia, Turkey, 2004.
- CELMEC IV, Fourth Meeting on Celestial Mechanics, San Martino al Cimino, Viterbo, 2005, Italy
- XV и XVI Всероссийские конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам», посвященная памяти К.И. Бабенко, Новороссийск, 2004, 2006.
- Carlos Simo Fest, Barselona, Spain, 2006.
- ACA 2006, 12th International Conference on Applications of Computer Algebra, Varna, Bulgaria.
- Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 2006.
- VIII Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения», (МФЛ-2006), Крым, Алушта.
- International Conference «Differential Equations and Related Topics», Moscow, 2007.
- Классические задачи динамики твердого тела, Донецк, Украина, 2007.
- Analytical Methods of Celestial Mechanics, St. Petersburg, 2007.
- Третий и Шестой международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, Россия, 1998, 2007
- Девятый съезд Международной общественной организации «Астрономическое общество» и международная научная конференция «Астрономия и астрофизика начала XXI века», Москва, 2008.
- Десятая международная конференция «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», Донецк, Украина 2008.
- The Tenth International Conference on Integral Methods in Science and Engineering, IMSE-2008, Santander, Spain.

- Одиннадцатая Международная научно-техническая конференция «Моделирование, идентификация, синтез систем управления», (МИССУ 2008), пос. Канака, Крым, Украина.

Тезисы всех докладов опубликованы в сборниках тезисов соответствующих конференций.

Кроме этого автор выступал с докладами на следующих научных семинарах:

- Семинар по нелинейным задачам математического отдела ИПМ им. М.В. Келдыша РАН под руководством проф. А.Д. Брюно, 1995, 1997, 2000, 2002, 2004.
- Научный семинар в механико-математическом факультете МГУ п/р акад. Д.В. Аносова, проф. А.М. Степина, 2004.
- Научный семинар им. В.А.Егорова по механике космического полета кафедры теоретической механики механико-математического факультета МГУ п/р член.-корр. В.В. Белецкого, проф. В.В. Сазонова, 2000, 2009.
- Научный семинар по теоретической механике п/р акад. Д.М. Климова, Институт проблем механики РАН, Москва, 2008.
- Научный семинар по дифференциальным уравнениям кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета ННГУ п/р проф. Л.М. Лермана, 2006, 2009.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 46 работах (12 – в изданиях, рекомендованных ВАК). Их список приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на параграфы. Во введении и каждой главе независимая нумерация параграфов, теорем, формул, рисунков и таблиц. Общий объем работы – 317 страниц. Список литературы включает 122 наименования.

Содержание работы

В первой главе диссертации рассматривается уравнение плоских колебаний и вращений спутника относительно его центра масс, движущегося по эллиптической орбите (уравнение Белецкого), и изучаются семейства его обобщенных 2π-периодических, т.е. колебательных и вращательных решений с целым числом вращения, а также вырождения на этих семействах. Уравнение Белецкого имеет вид

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin\delta = 4e\sin\nu, \tag{1}$$

где $e \in [0, 1]$ – это эксцентриситет эллиптической орбиты, по которой движется центр масс спутника; ν – это истинная аномалия положения спутника на эллиптической орбите; δ – это удвоенный угол между радиус-вектором центра масс спутника и одной из его осей инерции; и μ – инерциальный параметр спутника, имеющий область физических значений $\mu \in [-3, 3]$. Уравнение (1) имеет ряд симметрий и эквивалентно гамильтоновой системе с полутора степенями свободы. Уравнение (1) регулярно при $e < 1$ и сингулярно при $e = 1$. В этой работе уравнение (1) рассматривается при значениях параметров $e \in [-1, 1]$ и $\mu \in (-\infty, \infty)$.

Обозначим $\mathcal{F}_k$ множество симметричных (нечетных) обобщенно 2π-периодических решений $\delta(\nu)$ уравнения (1), где $k \in \mathbb{Z}$ – число вращения, т.е.

$$\delta(0) = 0, \quad \delta(\pi) = k\pi, \tag{2}$$

а множество несимметричных обобщенно 2π-периодических решений обозначим $\mathcal{G}_k$. Кроме того, выделяются два множества обобщенно 2π-периодических решений, соответствующих интегрируемым случаям $\mu = 0$ и $e = 0$, которые обозначаются, соответственно, $\mathcal{M}_k$ и $\mathcal{E}_k$. Первая глава посвящена изучению этих четырех множеств решений, их особенностей и бифуркаций.

В § 1 гл. I изучаются предельные (при $e = 1$) задачи для уравнения Белецкого. Вблизи сингулярности многоугольник Брюно уравнения (1) имеет 2 ребра и 1 вершину (см. рис. 1).

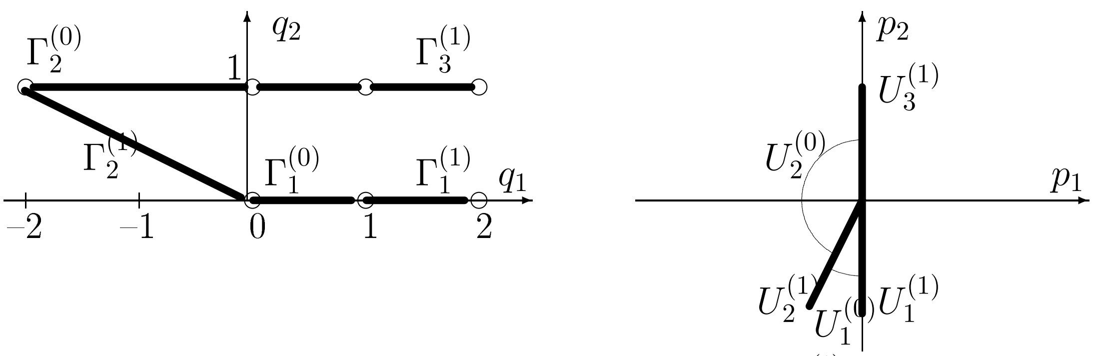


Рис. 1. Ломаная Брюно (слева) состоит из трех ребер $\Gamma_1^{(1)} = \{q_1 \geq 0,\ q_2 = 0\}$, $\Gamma_2^{(1)} = \{(0,0),\ (-2,1)\}$, $\Gamma_3^{(1)} = \{q_1 \geq -2,\ q_2 = 1\}$ и двух вершин $\Gamma_1^{(0)} = \{(0,0)\}$ и $\Gamma_2^{(0)} = \{(-2,1)\}$. Соответствующие нормальные конусы изображены справа.

Всего получено три предельных уравнения, соответствующих ребрам $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$ и вершине $\Gamma_1^{(0)}$. Предельные уравнения оказались неинтегрируемыми и изучались, в основном, численно. Выделено несколько семейств ограниченных решений предельных уравнений, одно из которых закручивается в самоподобную спираль вблизи значения инерциального параметра $\mu = -2$. Это обстоятельство позволяет сделать вывод о существовании бесконечного числа интервалов устойчивых периодических решений при значениях эксцентриситета e близких к 1.

В § 2 гл. I рассматриваются нечетные обобщенно 2π-периодические решения уравнения Белецкого и приводится классификация семейств таких решений. Дается наиболее полное к настоящему времени качественное описание множества этих решений при всех значениях эксцентриситета e и инерциального параметра μ, включая предельные значения $|e| = 1$ и $|\mu| = \infty$. Эта классификация существенно опирается на результаты изучения предельных задач § 1 гл. I. Результаты исследования представлены в виде графиков характеристик этих семейств в новой глобальной системе координат, в которой все характеристики, независимо от значения эксцентриситета, имеют одну и ту же асимптотику при $\mu \to +\infty$.

В § 3 гл. I изучаются критические семейства периодических решений уравнения Белецкого, т.е. вырождения коразмерности один на семействах 2π-периодических решений, определяемые следом матрицы монодромии $\mathrm{Tr} = \pm 2$. Эти семейства ограничивают области устойчивости (в линейном приближении) на двупараметрических семействах периодических решений. Критические семейства периодических решений вычисляются с использованием регуляризации, что дало возможность продвинуться до значений эсцентриситета $e > 0.99999$ и продемонстрировать квазифрактальную структуру этих семейств (см. рис. 2).

На последовательности картинок (а)-(г) рис. 2 изображены фрагменты критических семейств, соответствующие семейству $\mathcal{F}_0$ колебательных решений, с последовательным увеличением масштаба. При этом стрелка на картинке (б) указывает фрагмент (в), а стрелка на картинке (в) указывает фрагмент (г). Эти рисунки впервые приведены в работе [26]. Рис. 2 позволяет сделать вывод о существовании на семействе $\mathcal{F}_0$ бесконечного количества сборок Уитни, вложенных друг в друга.

Семейства $\mathcal{F}_k$ с другими числами вращения k имеют аналогичную структуру [43].

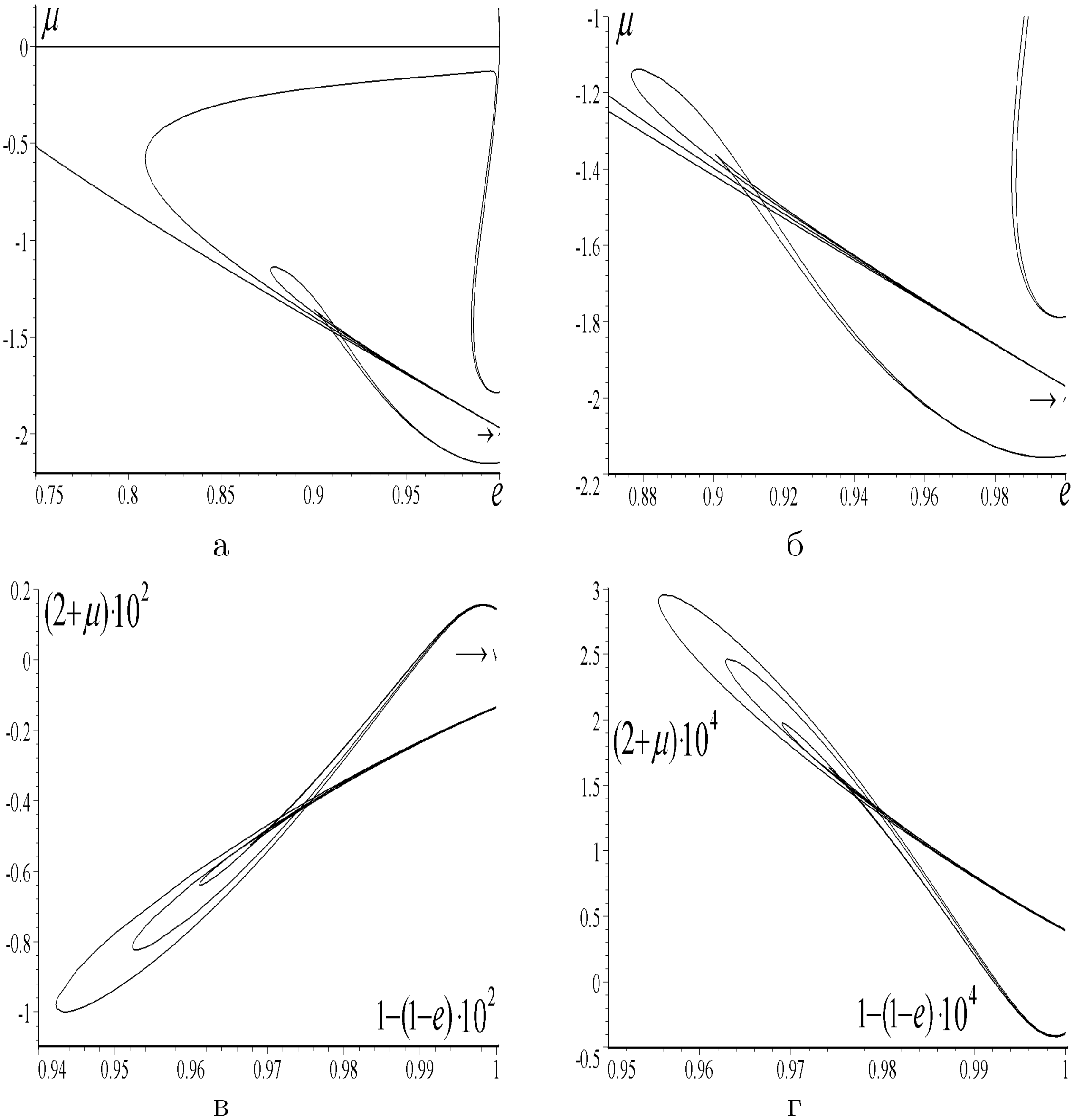


Рис. 2. Квазифрактальная структура семейства $\mathcal{F}_0$ вблизи $e = 1$ и $\mu = -2$.

В § 4 гл. I дается наиболее полный к настоящему времени анализ вырождений коразмерности два на семействах обобщенных периодических решений уравнения Белецкого. При этом используется метод высших вариаций, позволяющий поставить в соответствие каждому вырождению некоторую невырожденную систему краевых задач и вычислить особое решение с той же точностью, как и обычное решение. Суть этого метода состоит в следующем.

Каждое решение системы дифференциальных уравнений может рассматриваться как точка на некотором многообразии, называемом характеристическим, вложенным в конечномерное евклидово пространство. Локальными координатами на этом многообразии являются начальные данные задачи Коши, а также параметры, входящие в систему уравнений. Характеристическое многообразие является, в некотором смысле, графиком всех возможных решений при всех допустимых значениях параметров. Тогда семейство периодических решений можно отождествить с некоторым аналитическим подмногообразием, а особенности семейства получают геометрическую интерпретацию как особенности некоторой гладкой поверхности.

Характеристическое многообразие χ уравнения (1) определяется как четырехмерное множество

$$\chi = \{\delta(0), \delta'(0), e, \mu, \delta(\pi), \delta'(\pi)\} \subset \mathbb{R}^6 \tag{3}$$

в шестимерном евклидовом пространстве. Здесь $\delta(\nu)$ – это решение уравнения (1) с начальными данными $\delta(0), \delta'(0) \in (-\infty, \infty)$ при фиксированных параметрах $e \in (-1, 1)$ и $\mu \in (-\infty, \infty)$, а $\delta(\pi)$, $\delta'(\pi)$ вычисляются при этих начальных данных. Первые четыре величины в определении χ служат локальными координатами.

Семейства обобщенных 2π-периодических решений образуют двумерные подмногообразия многообразия χ, при этом симметричные 2π-периодические решения множества $\mathcal{F}_k$ лежат в двух гиперплоскостях, определяемых уравнениями (2), т.е. $\mathcal{F}_k = \chi \cap \{\delta(0) = 0\} \cap \{\delta'(0) = k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Уравнения в вариациях для уравнения (1) определяются следующим образом. При фиксированном значении истинной аномалии ν функция $\delta(\nu)$ является аналитической функцией, заданной на многообразии χ: $\delta(\nu) = \delta(\nu)(p)$, где $p = (\delta(0), \delta'(0), e, \mu) \in \chi$.

Пусть точка $p \in \chi$ фиксирована. Обозначим $\Delta = (\Delta\delta(0), \Delta\delta'(0), \Delta e, \Delta\mu)$, тогда $\delta(\nu) = \delta(\nu, \Delta)$. Пусть $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ – мультииндекс. Обозначим

$$\delta_m(\nu, p) = \frac{\partial^m \delta(\nu, \Delta)}{\partial \Delta^m}(0), \quad \delta'_m(\nu, p) = \frac{\partial^m \delta'(\nu, \Delta)}{\partial \Delta^m}(0). \tag{4}$$

По формуле Тейлора имеем

$$\delta(\nu, \Delta) = \sum_{0 \le |m|} \frac{1}{m!} \delta_m(\nu, p) \Delta^m. \tag{5}$$

Кроме того, $\partial\delta_m(\nu, p)/\partial\nu = \delta'_m(\nu, p)$, так как порядок дифференцирования можно менять.

Если в уравнение (1) подставить $e \to e + \Delta e$ и $\mu \to \mu + \Delta\mu$, а также ряды (5), то, приравнивая нулю коэффициенты при Δ^m для всех значений мультииндекса m, получим *уравнения в вариациях* для функций $\delta_m(\nu, p)$.

Начальные данные для всех решений уравнений в вариациях фиксированы:

$\delta_{0,0,0,0}(0,p) = \delta(0)$, $\delta'_{0,0,0,0}(0,p) = \delta'(0)$, $\delta_{1,0,0,0}(0,p) = \partial\delta(0)/\partial\delta(0) = 1$ и $\delta'_{0,1,0,0}(0,p) = \partial\delta'(0)/\partial\delta'(0) = 1$. Для остальных значений мультииндекса m: $\delta_m(0,p) = \delta'_m(0,p) = 0$.

В точности те же уравнения получаются с помощью формального дифференцирования уравнения (1) по локальным координатам многообразия χ (т.е. по начальным данным и параметрам) необходимое число раз.

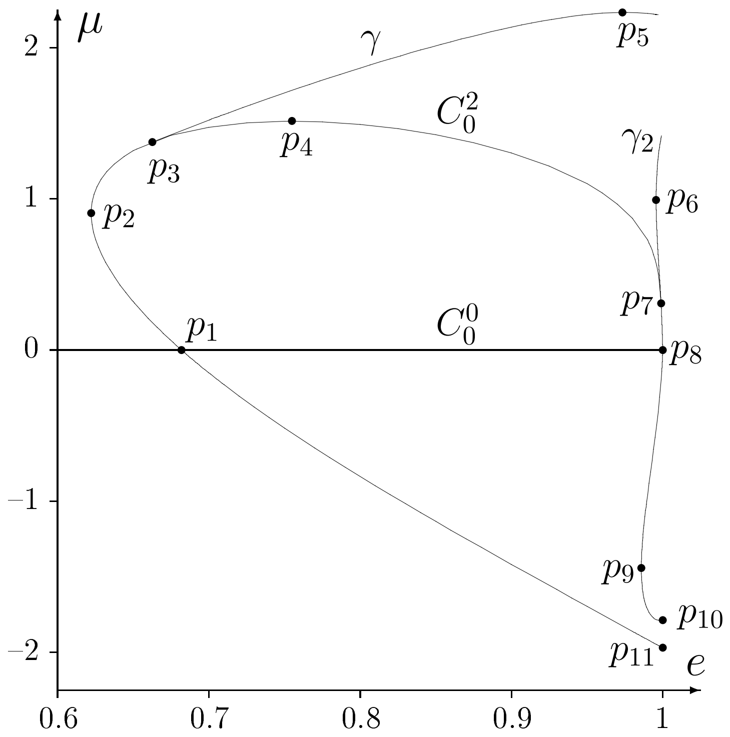


Рис. 3. Некоторые из вырождений вблизи пересечения многообразий $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{M}_0$.

Все изученные вырождения коразмерности 2 получили в § 4 гл. I геометрическую интерпретацию как особенности проектирования некоторой гладкой поверхности, либо как пересечение таких поверхностей. При этом использовались уравнения в вариациях до 5 порядка, включая смешанные вариации, которые ранее не применялись. На рис. 3 приведены некоторые из вырождений, найденные вблизи пересечения многообразий $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{M}_0$.

Особенностью метода высших вариаций является его общность, так как все полученные формулы для вырожденных решений оказываются применимы к любому аналогичному уравнению без каких либо изменений (см. например, [34]). При этом сами уравнения в вариациях вычисляются с помощью операции формального дифференцирования, и этот процесс может быть автоматизирован с помощью методов компьютерной алгебры. Все необходимые уравнения в вариациях, вместе с исходным уравнением, образуют треугольную систему ОДУ и могут быть непосредственно включены в вычислительную программу.

Основные результаты первой главы

1. Изучены пределы семейств периодических решений уравнения Белецкого при $e \to 1$. Для этого вычислено несколько семейств ограниченных решений предельных (при $e = 1$) уравнений и произведено сращивание решений на этих семействах. Установлено, что одно из предельных семейств закручивается в самоподобную спираль вблизи значения инерциального параметра $\mu = -2$, что влечет существование бесконечного числа интервалов устойчивых периодических решений при значениях эксцентриситета e близких к 1.

2. Дано наиболее полное к настоящему времени качественное описание семейств обобщенных 2π-периодических решений уравнения Белецкого при всех значениях эксцентриситета e и инерциального параметра μ. Результаты исследования представлены в виде графиков характеристик этих семейств в новой глобальной системе координат. Дана классификация критических подсемейств, ограничивающих области устойчивости в линейном приближении на семействах 2π-периодических решений. Описана квазифрактальная структура некоторых из этих подсемейств при $e \to 1$.

3. Предложен метод анализа вырождений конечной коразмерности на семействах периодических решений уравнения Белецкого, основанный на применении высших вариаций этого уравнения. Показано, что каждому вырожденному решению соответствует невырожденная на этом решении система краевых задач, что дает возможность вычислить это решение с той же точностью, как и решение в случае общего положения. Метод высших вариаций применен для изучения всех вырожденных решений на семействах обобщенно периодических решений уравнения Белецкого, которые ранее исследовались различными другими методами. Изучен также ряд вырождений, которые ранее были неизвестны. В частности, обнаружена бесконечная последовательность вложенных друг в друга сборок Уитни при $e \to 1$, которые имеются на семействах периодических решений для каждого числа вращения.

4. Изучены бифуркации семейств симметричных и несимметричных периодических решений уравнения Белецкого, а также бифуркации семейств периодических решений в общем случае. Найдены в явном виде уравнения для порождающих решений и уравнения разветвления. Ответвившиеся решения найдены в виде рядов, члены которых удовле-

творяют бесконечной треугольной системе краевых задач. Эта система вырождена, но однозначно разрешима с помощью высших вариаций, как только выбрано решение уравнений разветвления.

Во второй главе метод высших вариаций применяется для изучения вырожденных предельных циклов в системах на плоскости, что имеет приложение также к проблеме центра-фокуса.

В § 1 гл. II рассматривается наиболее общий к настоящему времени класс полиномиальных систем ОДУ, имеющих одно ребро ломаной Ньютона, для которых проблема центра-фокуса может быть решена алгоритмически. Это системы, которые с помощью перенормировки x, y и t приводятся к виду

$$\begin{aligned} dx/dt &= y^{2jm-1} + \ldots, \\ dy/dt &= -x^{2jn-1} + \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

где $j, m, n \in \mathbb{N}$, m и n взаимно просты, а многоточие обозначает мономы $a_{p,q}x^{p+1}y^q$ в первом уравнении (6), или мономы $b_{p,q}x^p y^{q+1}$ во втором уравнении (6), все векторные показатели (p, q) которых лежат правее ребра ломаной Ньютона системы (6), т.е. $pm + qn > 2jmn - m - n$ (следуя Ляпунову, это случай *первой категории*), либо правее и на ребре ломаной Ньютона системы (6), т.е. $pm + qn \geq 2jmn - m - n$ (это случай *второй категории*). Ляпунов рассмотрел системы (6) для $j = m = 1$.

Вводится обобщенная полярная замена координат, пригодная для всего класса таких систем, которая приводит систему (6) к уравнению

$$dr/d\varphi = f(r, \varphi), \tag{7}$$

где правая часть $f(r, \varphi)$ аналитична для достаточно малых r в в некоторой полосе $|\mathrm{Im}\,\varphi| < \varepsilon$, и даются условия, при которых особая точка в нуле является монодромной.

В § 2 гл. II приводится процедура вычисления уравнений в вариациях любого порядка для уравнения (7). Все уравнения в вариациях на нулевом решении интегрируются в квадратурах, что позволяет найти асимптотику отображения Пуанкаре в явном виде. Доказана теорема о почти алгебраической разрешимости проблемы центр-фокус для данного класса систем (т.е. при фиксированных коэффициентах мономов на ребре ломаной Ньютона системы).

Явный вид асимптотического разложения отображения Пуанкаре позволяет изучать рождение сколь угодно вырожденных циклов. На рис. 4 показаны две характеристические кривые $\mathcal{C}$ и $\mathcal{F}$, соответствующие центру и фокусу в начале координат системы (6). Кривая $\mathcal{C}$ является, очевидно, биссектрисой, а аналитическая кривая $\mathcal{F}$ полностью определяется значениями ее производных в нуле в некоторой окрестности начала координат. Эти производные вычисляются алгоритмически до нужного порядка.

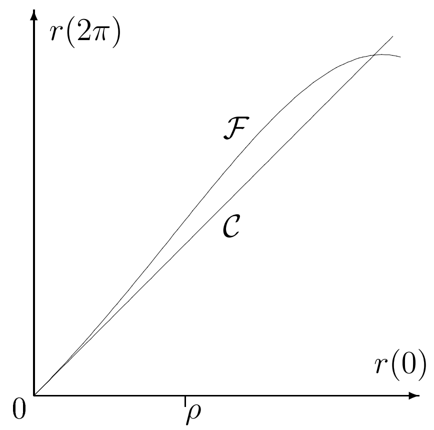


Рис. 4. Характеристическое множество центра ($\mathcal{C}$) и фокуса ($\mathcal{F}$).

Расположение кривой $\mathcal{F}$ по отношению к биссектрисе $\mathcal{C}$ позволяет судить об устойчивости или неустойчивости фокуса, о порядке касания кривых $\mathcal{C}$ и $\mathcal{F}$ в нуле (т.е. о грубости или порядке негрубости фокуса), а также о наличии предельных циклов и об их устойчивости. Например, кривая $\mathcal{F}$ на рис. 4 соответствует неустойчивому негрубому фокусу, а точка пересечения $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ соответствует устойчивому предельному циклу уравнения (7).

В § 3 гл. II рассматриваются системы ОДУ вида (6) с одним ребром ломаной Ньютона, близкие к гамильтоновым системам на плоскости. Вводятся замены координат при которых траектория укороченной, т.е. гамильтоновой, системы преобразуется в окружность.

В § 4 гл. II замены координат, предложенные в § 3 гл. II, обобщаются на некоторые системы ОДУ с ломаной Ньютона, состоящей из двух ребер. Для таких систем проблема центра-фокуса ранее не решалась. Получены условия центра вместе с асимптотикой отображения последования и показано, что такие случаи сводятся к исследованию систем ОДУ на римановых поверхностях.

Основные результаты второй главы.

1. Предложена обобщенная полярная замена координат для класса систем (6), которая приводит их к уравнению (7), что позволяет алгоритмически решить проблему центра-фокуса для этих систем с помощью высших вариаций уравнения (7). Предложен алгоритм вычисления

высших вариаций любого порядка для уравнения (7), который сводится к операциям формального дифференцирования и может быть запрограммирован на компьютере.

2. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях центра для систем (6): *Особая точка ноль системы* (6) *является центром тогда и только тогда, когда все уравнения в вариациях на нулевом решении уравнения* (7) *имеют в качестве решений* 2π*-периодические функции, ограниченные на вещественной оси.* Показано, что все уравнения в вариациях на нулевом решении уравнения (7) интегрируются в квадратурах, т.е. найдено в явном виде асимптотическое разложение отображения Пуанкаре для систем (6). Доказана теорема о почти алгебраической разрешимости проблемы центр-фокус для систем (6). Показано, что для случая первой категории все фокусные величины алгебраичны; для случая второй категории условие негрубости фокуса алгебраично и все фокусные величины начиная со второй трансцендентны.

3. Исследован ряд примеров рождения предельных циклов различной степени вырождения. Бифуркация Андронова-Хопфа является при этом частным невырожденным случаем. Условия рождения цикла выражаются в виде квадратур. Описано также рождение цикла конечного радиуса при разрушении особой точки центр у системы (6). Показано, что для систем первой категории все фокусные величины могут быть вычислены путем решения некоторого числа линейных задач.

4. Впервые проблема центра-фокуса решена для системы с двумя ребрами ломаной Ньютона. Показано, что для таких систем, имеющих гамильтоново укорочение, проблема центра-фокуса сводится к исследованию систем ОДУ на римановых поверхностях и аналогична случаям с одним ребром ломаной Ньютона.

В третьей главе изучаются натуральные семейства h, c и i симметричных периодических решений (СПР) плоской круговой ограниченной задачи трех тел и их особенности. Этот выбор не случаен. Среди натуральных семейств СПР имеются семейства, устроенные относительно просто, как, например, семейство h. В то же время существуют семейства СПР, имеющие очень сложную структуру. Среди девяти основных натуральных семейств СПР (см. начало гл. III) семейство i имеет, вероятно, наиболее сложную структуру, которая разрушается при сколь угодно малых значениях массового параметра μ. Семейство i претерпевает при этом бесконечный каскад бифуркаций, которые до недавнего времени были неизвестны. Семейство c устроено довольно просто само по себе, однако его эволюция при росте μ тесным образом связана с эволюцией семейства i и помогает объяснить эволюцию последнего. Семейство c заканчивается как локально двукратное на семействе h, что предопределило выбор этого семейства для подробного изучения.

Напомним постановку задачи.

Пусть три точечных тела P_1, P_2 и P_3 движутся в одной плоскости под действием закона тяготения Ньютона. Тела P_1 и P_2 имеют массы m и m_2 соответственно, а масса тела P_3 настолько мала, что ее влиянием на тела P_1 и P_2 можно пренебречь. Будем говорить, что масса тела P_3 равна нулю. Тогда тело P_2 совершает кеплерово движение относительно тела P_1. Если тело P_2 движется по окружности, то задача о движении тела P_3 называется плоской круговой ограниченной задачей трех тел, коротко – ограниченной задачей.

Будем считать, что единицы массы, времени и расстояния выбраны так, что сумма $m + m_2$, гравитационная постоянная, расстояние P_1P_2 и угловая скорость P_2 относительно P_1 равны единице. Тогда единственный параметр – это $\mu = m_2/(m + m_2) \in [0, 1/2]$. Во вращающейся вместе с телом P_2 (синодической) системе координат с центром в P_1 положение x_1, x_2 тела P_3 описывается системой Гамильтона с двумя степенями свободы и одним параметром μ:

$$\dot{x}_j = \partial H/\partial y_j, \qquad \dot{y}_j = -\partial H/\partial x_j, \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} &H = H_0 + \mu R, \quad H_0 = \tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - r^{-1}, \\ &R = r^{-1} + x_1 - r_2^{-1}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

и точка над символом означает дифференцирование по времени t.

При $\mu \neq 0$ задача не интегрируется. При $\mu = 0$ задача интегрируется и можно описать все ее решения. Множество решений этой задачи при $\mu = 0$ устроено весьма сложно из-за столкновений тела P_3 с телом P_2. При $\mu > 0$ эти столкновения приводят к сингулярным возмущениям и дальнейшему усложнению множества решений. Периодические решения при фиксированном значении параметра μ образуют однопараметрические семейства, а при переменном μ – двупараметрические.

Система (8), (9) переходит в себя при подстановке

$$t, x_1, x_2, y_1, y_2 \longrightarrow -t, x_1, -x_2, -y_1, y_2, \tag{10}$$

которая является ее *симметрией*. При симметрии (10) плоскость $x_2 = y_1 = 0$ является инвариантной и называется *плоскостью симметрии* П. Решения системы (8), переходящие в себя при подстановке (10), являются *симметричными*. Симметричные периодические решения два раза ортогонально пересекают плоскость симметрии, и это является их характеристическим свойством. Здесь изучаются только такие решения (СПР).

В отличие от многих работ, посвященных ограниченной задаче, здесь массовый параметр μ учитывается как второй параметр на семействах СПР, т.е. семейства СПР изучаются как двупараметрические. Раньше их изучали и вычисляли либо для фиксированных значений параметра μ, либо для малых μ. Для $\mu = 1/2$ это сделано в работах Стремгрена (1935) и Бартлетта (1964). Для $\mu = \mu_M = 0.01215585$, соответствующего случаю Земля (P_1) – Луна (P_2), – в отчете Брука (1968). Для $\mu = \mu_J = 0.00095388$, соответствующего случаю Солнце (P_1) – Юпитер (P_2), – в работах Брюно (1993, 1996). Для $\mu = \mu_N = 5.178 \times 10^{-5}$, соответствующего случаю Солнце (P_1) – Нептун (P_2), – в работах Воятиса и Котулоса (2004, 2005). Для $\mu = 0$ (порождающие семейства) – в работах Брюно (1990 – 1996) и Хенона (1997, 2001). Некоторые специальные семейства изучались также для других значений μ.

Происхождение, структура и эволюция семейств СПР отслеживается от их порождающих семейств при $\mu = 0$ до максимального значения массового параметра $\mu = 1/2$. Попутно изучаются их бифуркации и возникающие особенности на семействах. Двупараметрический подход позволяет выявить неизвестные ранее закономерности строения семейств СПР, а также обнаружить некоторые их особенности коразмерности 2, которые не видны на однопараметрических подсемействах, и ранее были неизвестны.

В § 1 гл. III даются основные определения и вводятся 4 системы координат, удобные для графического представления большого объема данных. Изображать характеристики семейств СПР на плоскости П в естественных координатах x_1, y_2 не всегда целесообразно, ибо характеристики могут представлять собой очень тесно расположенные кривые. Поэтому в [5] были предложены четыре системы координат на плоскости симметрии: две глобальные – I система x_1, y_2 и II система $x_1, C = -2H$, где C – константа Якоби; и две локальные – III система $\tilde{a}, \tilde{e}$, связанная с телом P_1; и IV система w_1, y_2, связанная с телом P_2.

В § 2 гл. III обсуждаются некоторые аспекты организации вычислений (численные методы описаны в гл. IV). Вычислительные проблемы в ограниченной задаче чрезвычайно сложны, свидетельством чему является отсутствие сколько-нибудь подробных систематических работ, выполненных для этой задачи со времени отчета Брука (1968) до публикаций [4 – 9].

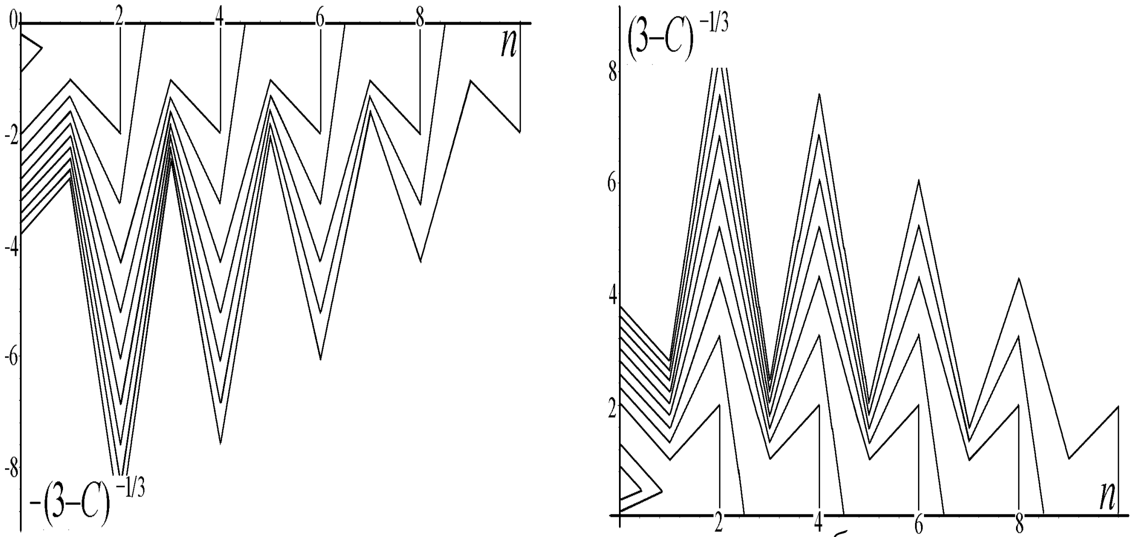
В § 3 гл. III определяются классы порождающих семейств СПР ограниченной задачи, которые служат основой для классификации всех семейств СПР. Если решение $x(t, \mu)$, существующее при некотором $\mu = \mu_0 > 0$, продолжается по параметру μ до произвольно малых $\mu > 0$, то его предел при $\mu \to 0$ называется *порождающим периодическим решением.* Очевидно, порождающее решение состоит из кусков решений задачи при $\mu = 0$. Эти решения подразделяются на два вида: первый вид состоит из решений, для которых тело P_3 не имеет столкновений с телом P_2; второй вид состоит из решений, для которых тело P_3 имеет столкновения с телом P_2. Решения первого вида – это решения задачи двух тел P_1 и P_3 в синодической (вращающейся) системе координат. Решения второго вида состоят из нескольких кусков решений задачи двух тел P_1 и P_3: каждый кусок начинается и заканчивается столкновением P_3 с P_2, и все куски имеют одинаковое значение гамильтониана H. Все эти куски, т.е. решения-отрезки, образуют счетное множество однопараметрических семейств A_i, B_j, C_{kl} (объединяемых в семейства S) и однопараметрические семейства T_N, которые детально изученны. Семейства S симметричных решений-отрезков были найдены Хеноном в 1968 г.

Отметим, что вычислять порождающие решения как правило значительно проще, чем близко расположенные к ним порожденные периодические решения, так как последние могут быть сильно неустойчивы. Теория сингулярных возмущений семейств СПР еще не создана, поэтому теория порождающих семейств СПР вместе с принципом Брука являются в настоящее время единственной теорией, объясняющей бифуркации СПР при малых $\mu > 0$.

В § 4 гл. III содержится наиболее полное к настоящему времени исследование семейства h периодических решений ограниченной задачи. Его эволюция описана в 4 системах координат, введенных в § 1 гл. III, начиная с его порождающего семейства при $\mu = 0$ и до значения массового параметра $\mu = 1/2$. Как следует из результатов § 4 гл. III, семейство h при росте μ не испытывает бифуркаций (самопересечений), т.е. оно взаимно однозначно проектируется на полосу

$$T > 0, \quad \mu \in [0, 1/2],$$

где T – период СПР, и унифицируется этими двумя параметрами как двупараметрическое семейство. Кроме того, при росте μ от 0 до 1/2 семейство h становится более однородным. Если при $\mu = 0$ оно состоит из кусков разных семейств с круговыми и эллиптическими орбитами, а также – семейств решений-отрезков с различным поведением периода и следов, что еще заметно при небольших значениях массового параметра, то при $\mu = 0.5$ на семействе h уже нельзя выделить куски с различным качественным поведением этих величин. Отметим также, что для $\mu > 0.3$ интервалы полной линейной устойчивости совпадают с интервалами плоской линейной устойчивости, т.е. вертикальная компонента не вносит дополнительной неустойчивости. В целом, при возрастании μ от нуля семейство h отходит от порождающего тем больше, чем дальше от тела P_1 (или P_2) находится орбита. Это справедливо как для координат орбит, так и для их следов. Для регулярных возмущений это согласуется с табл. 1, 2 Приложения в монографии А.Д. Брюно (1990).



а б

Рис. 5. Зигзагообразная структура правой характеристики порождающего семейства i. Верхний (а) и нижний (б) участки.

В § 5 гл. III изучаются порождающие семейства c и i (т.е. при $\mu = 0$). Показано, что порождающее семейство i имеет бесконечную циклическую структуру, состоящую из кусков семейств круговых и эллиптических орбит задачи двух тел и семейств решений-отрезков. Сложность описания структуры порождающего семейства i значительно возрастает с каждым новым циклом. Было установлено, что правая характеристика семейства i имеет зигзаги вдоль верхнего участка характеристики семейства решений-отрезков B_1 и нижней части характеристики тела P_2. Если раздуть участки характеристики семейства i, проходящие по характеристикам семейства B_1, то получим последовательности зигзагов, схематически показанные на рис. 5 для семейства B_1 (а) и характеристики тела P_2 (б). В этих рисунках по оси абсцисс откладывается номер n зигзага на характеристике, а по оси ординат $-1/(3-C)^{1/3}$ (рис. 5 (а)) и $1/(3-C)^{1/3}$ (рис. 5 (б)). Эта информация не содержится в описании порождающего семейства i, приведенном в книге Хенона (1997).

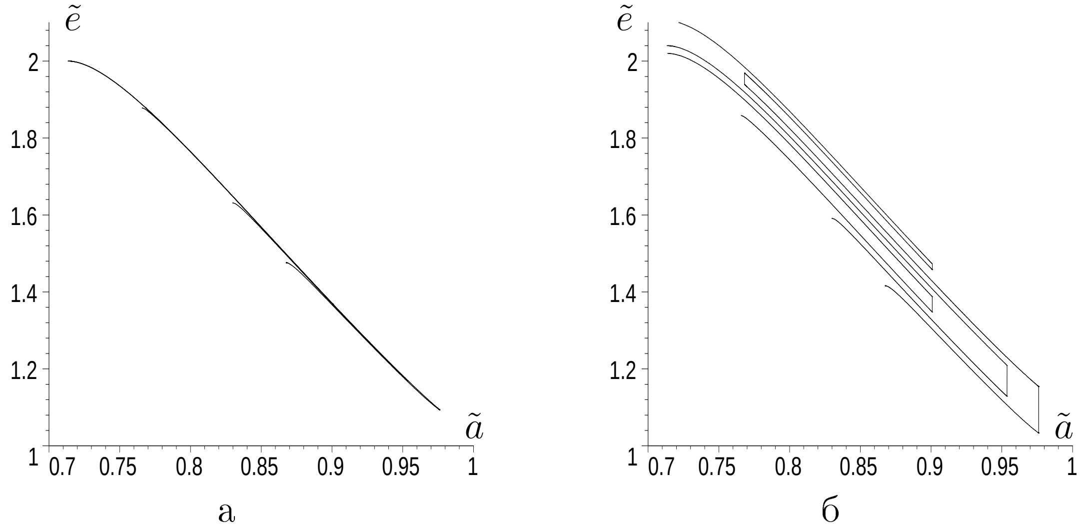


Рис. 6. Зигзагообразная структура правой верхней характеристики семейства i вблизи характеристики семейства B_1 при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$.

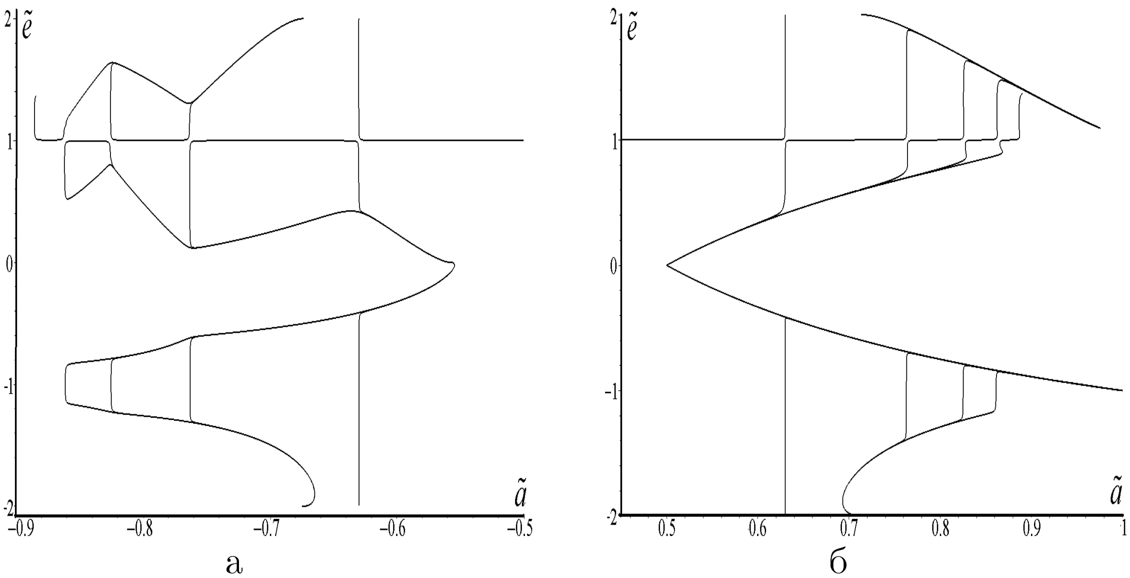


Рис. 7. Левая (а) и правая (б) характеристики семейства i при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$.

В § 6 гл. III семейства c и i изучаются при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$. Это значение массового параметра выбрано таким образом, что с одной стороны оно достаточно мало, так что вычисленные семейства весьма близки к порождающим, описанным в § 5 гл. III. Это позволило подтвердить существование предсказанной циклической структуры семейства i с зигзагообразным поведением их правых характеристик вдоль характеристик семейства B_1 и тела P_2. С другой стороны – это значение массового параметра оказалось достаточно большим, чтобы обнаружить новые свойства плоского и вертикального следов, но недостаточно большим для полного разрушения циклической структуры семейства i (см. § 7 гл. III).

На рис. 6 (а) показан фрагмент правой характеристики семейства i, проходящий вблизи характеристики семейства B_1 в координатах $\tilde{a}$, $\tilde{e}$, а на рис. 6 (б) показан тот же фрагмент, но с растяжением каждого зигзага по оси $\tilde{e}$ от экстремальных точек. Весь вычисленный участок семейства i (4 цикла) представлен характеристиками в координатах $\tilde{a}$, $\tilde{e}$ на рис. 7. При этом рис. 7 (а) соответствует левой половине плоскости симметрии, а рис. 7 (б) – правой.

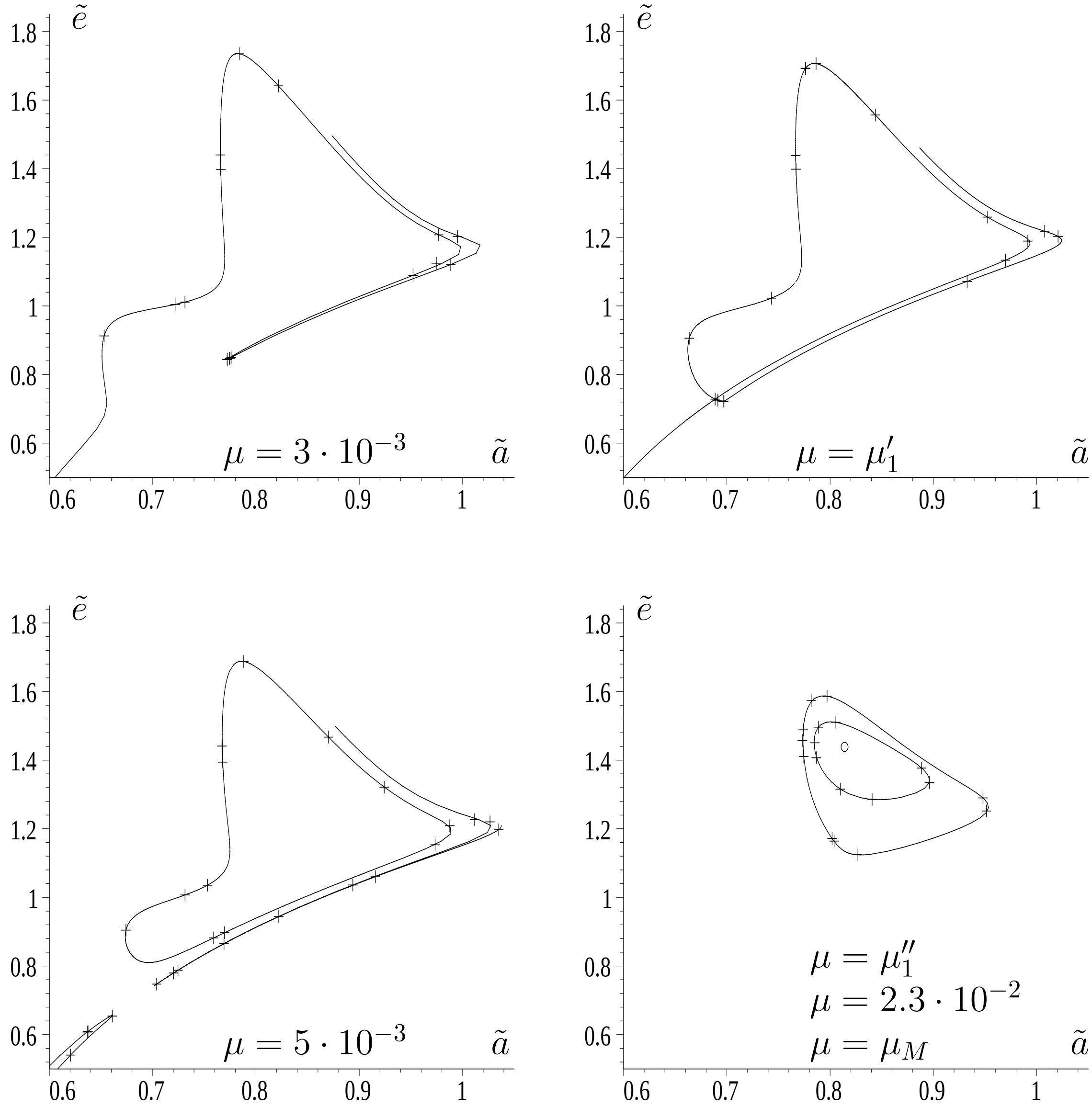


Рис. 8. Эволюция первого цикла в координатах $\tilde{a}$, $\tilde{e}$.

Вычислительные трудности при отслеживании семейства i вблизи его порождающего семейства при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ оказались столь велики, что их удалось преодолеть только с привлечением новых вычислительных технологий (см. гл. IV). При этом удалось продвинуться на один цикл дальше, чем при теоретическом описании порождающего семейства i в § 5 гл. III.

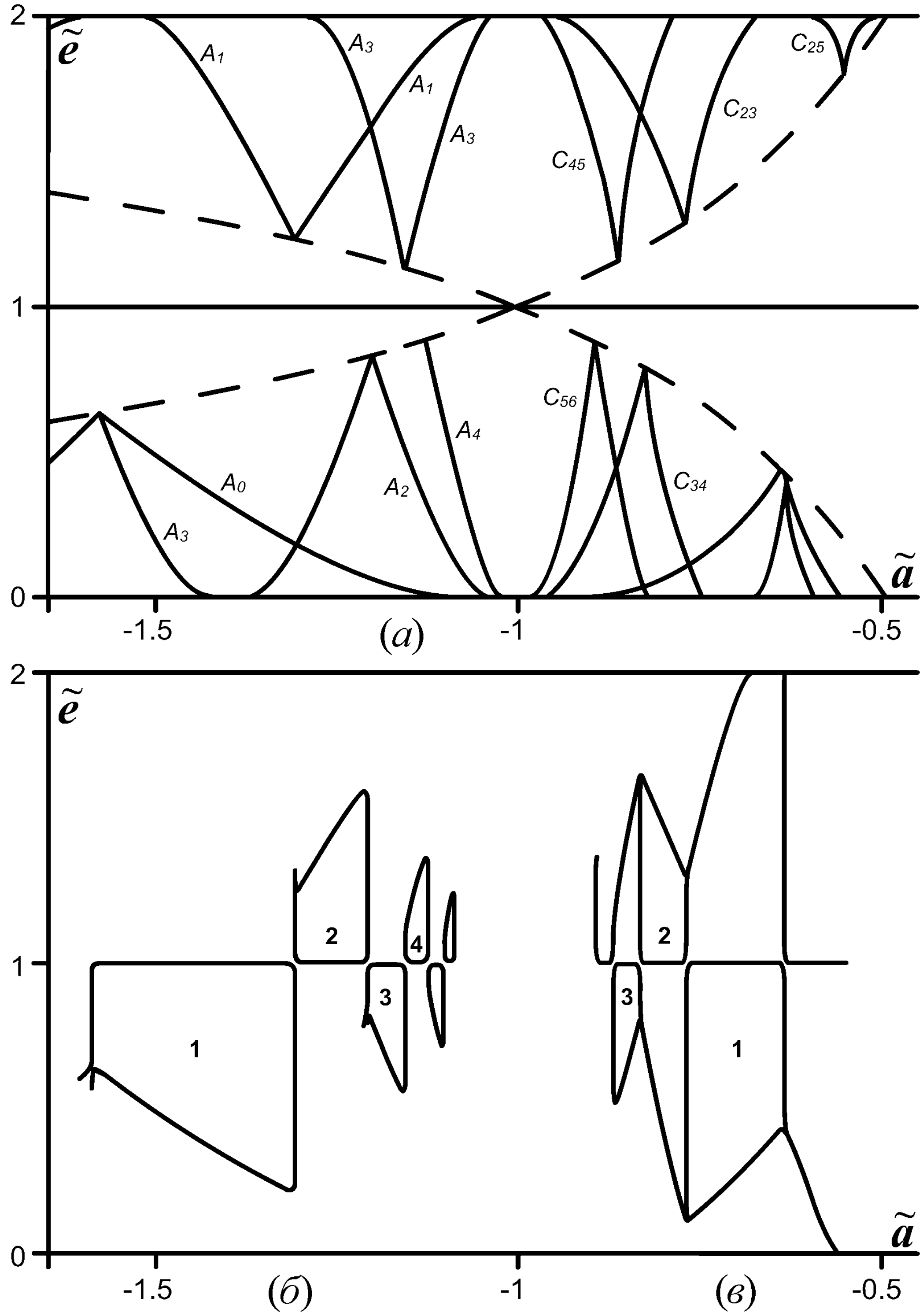


Рис. 9. Части плоскости симметрии П с частями характеристик семейств A_j, $C_{k,l}$ и Id для $\mu = 0$ (а); части характеристик семейств СПР для $\mu = 5.178 \times 10^{-5}$ (б); части характеристик семейства i для $\mu = 5 \times 10^{-5}$ (в).

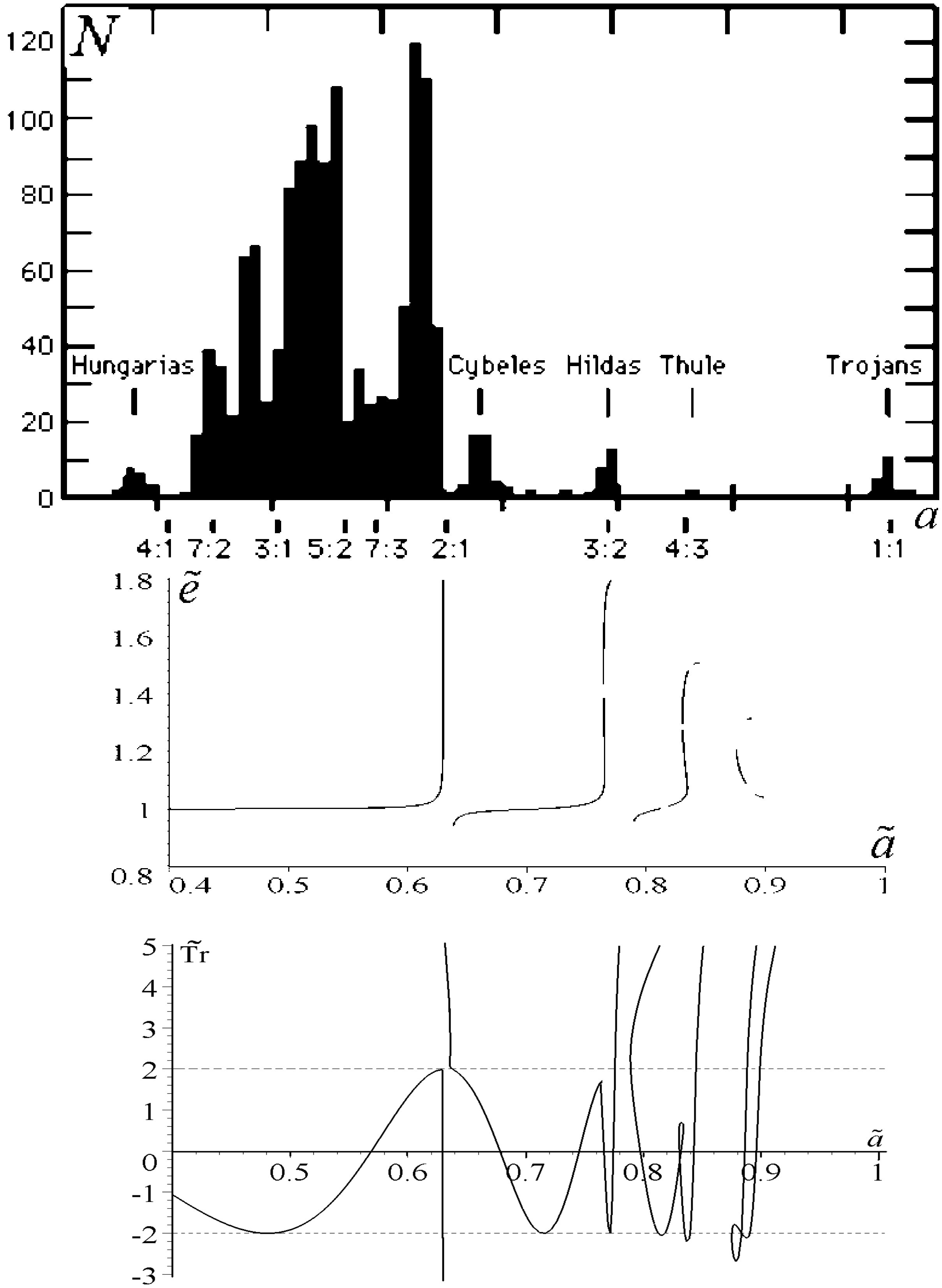


Рис. 10. Распределение астероидов главного пояса в сравнении с расчетами.

В § 7 гл. III изучаются разрушение циклической структуры семейства i при малых значениях массового параметра μ и ответвившиеся от семейства i замкнутые семейства СПР. Замкнутые семейства СПР образуются в результате бесконечного каскада бифуркаций семейства i при $\mu \to 0$ и существуют только в ограниченных интервалах значений μ. Вычислен начальный участок этого каскада, который соответствует четырем циклам семейства i, описанным в § 6 гл. III. Показано, что существуют две монотонно убывающие последовательности μ'_k и μ''_k, $\mu'_k < \mu''_k$, $k = 1, 2, \ldots$, такие что замкнутое семейство СПР i_k ответвляется от семейства i при $\mu = \mu'_k$. Семейства i_k существуют только в интервалах значений $\mu \in [\mu'_k, \mu''_k]$; при $\mu = \mu''_k$ семейство i_k стягивается в одну орбиту. Была также найдена эмпирическая асимптотика этих последовательностей при $k \to \infty$.

На картинках рис. 8 показано образование семейства i_1, его эволюция при увеличении μ и исчезновение при стягивании в одну орбиту. Крестиками отмечены критические орбиты. Эволюция последующих замкнутых семейств $i_2, \ldots$ принципиально не отличается от эволюции семейства i_1.

Вырожденные семейства СПР, состоящие из одной орбиты, не были известны, как и бифуркации, приводящие к образованию замкнутых семейств i_k. Для вычисления бифуркаций и вырожденных семейств СПР использовались методы, развитые в гл. I.

На рис. 9 (а), заимствованном из книги А.Д. Брюно, показаны части характеристик порождающих семейств Id, A_k и $C_{k,k+1}$. На рис. 9 (б), любезно предоставленном проф. Г. Воятисом (Греция), показаны характеристики некоторых семейств СПР, вычисленных им для $\mu = 5.178 \times 10^{-5}$, соответствующего внешнему участку семейства Id (случай Солнце–Нептун–тело пояса Койпера).

Рис. 9 (в) соответствует левой характеристике семейства i при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ (см. рис. 7 (а)), соответствующего внутреннему участку семейства Id (случай Солнце–Юпитер–астероид). Горизонтальные части на рис. 9 (б) и (в) соответствуют характеристикам частей семейств Id на рис. 9 (а); вертикальные части на рис. 9 (б) и (в) соответствуют характеристикам частей семейств $E_N^{\pm}$ (не показанным на рис. 9 (а)); наконец, наклонные участки на рис. 9 (б) соответствуют частям семейств A_i, а на рис. 9 (в) – частям семейств решений-отрезков $C_{k,k+1}$.

Из рис. 9 видно, что сверху и снизу от горизонтали $\tilde{e} = 1$ характеристики семейств СПР образуют определенные структуры, называемые нами *пузырями* (они помечены номерами $k = 1, \ldots$). Как показано в § 7 гл. III (для рис. 9 (в)), эти пузыри образуют замкнутые семейства СПР i_k. Рис. 9 (б) почти симметричен рис. 9 (в) по отношению к вертикали $\tilde{a} = -1$, и показывает некоторые замкнутые семейства СПР в процессе их образования. Таким образом, образование замкнутых семейств СПР является довольно типичным явлением. Тем более удивительно, что соответствующие им бифуркации ранее не вычислялись.

Одной из нерешенных задач в астрономии является проблема объяснения щелей и скоплений в главном поясе астероидов. Эти щели (люки Кирквуда) соответствуют резонансным значениям отношений периода обращения Юпитера и астероидов вокруг Солнца. Однако другим резонансным значениям соответствуют не щели, а наоборот, скопления астероидов. Попытки объяснить это явление до сих пор не увенчались успехом. В настоящее время считается, что модель ограниченной задачи слишком проста для этого и следует учитывать диссипативные явления, трехмерность, влияние других планет солнечной системы и т.п. Тем не менее, результаты, полученные в третьей главе диссертации, в значительной степени объясняют распределение основной массы астероидов в главном поясе, оставаясь в рамках ограниченной задачи. Разумеется, речь идет не о детальном объяснении наблюдений, а о картине в целом.

До работ [5 – 9] и результатов гл. III наиболее подробно семейство i и ответвившиеся замкнутые семейства СПР ограниченной задачи для $\mu = \mu_J$ изучались в работе Коломбо, Франклина и Манфорда (1968). Однако там использовалось менее точное значение массового параметра Юпитера μ_J, чем известное в настоящее время. Кроме того, в их работе не были посчитаны границы устойчивости семейств, а также в то время не было исчерпывающей информации об ответвившихся семействах СПР, существующих при $\mu = \mu_J$. Вся эта информация теперь доступна. На рис. 10 показаны три картинки, которые суммируют накопленные данные о распределении астероидов и результаты наших расчетов.

Верхняя картинка рис. 10, заимствованная из *Encyclopaedia Britannica* 2006, показывает число астероидов крупнее 50 км. в диаметре в главном поясе в зависимости от величины главной полуоси a их орбиты. На диаграмме также указаны места резонансных значений периодов обращения астероидов и обозначены отдельные группы астероидов. Из этой диаграммы видно, что основная масса астероидов сосредоточена между резонансами 4:1 и 2:1. На второй картинке рис. 10 показаны вычисленные участки семейства i, где периодические решения устойчивы. Ордината $\tilde{a}$, соответствующая главной полуоси эллиптической орбиты, находится в соответствии с ординатой верхней картинки рис. 10. Участок верхней диаграммы рис. 10 между резонансами 4:1 и 2:1 соответствует самому большому участку семейства i устойчивых решений, который заканчивается люком Кирквуда с резонансом 2:1. Этот люк в точности соответствует участку семейства i, где решения сильно неустойчивы, что видно из третьей картинки рис. 10, где показан модифицированный след матрицы монодромии СПР в зависимости от $\tilde{a}$. Два скопления астероидов *Hildas* и *Thule* соответствуют резонансам 3:2 и 4:3. Эти участки совпадают, соответственно, с фрагментом семейства i и ответвившемся от него замкнутым семейством СПР, где периодические решения устойчивы, что видно из второй картинки рис. 10. Из третьей картинки рис. 10 видно, что между резонансам 2:1 и 3:2 также находится большой участок семейства i с устойчивыми решениями, и там наблюдаются группы астероидов. Между резонансами 3:2 и 4:3 напротов – фрагмент устойчивых решений невелик и астероиды почти не наблюдаются. Последний фрагмент устойчивых решений принадлежит последнему замкнутому семейству СПР, существующему при $\mu = \mu_J$. Там также имеются астероиды, относящиеся к резонансу 5:4, хотя на верхней диаграмме они не показаны. Наконец, отсутствие астероидов между резонансами 5:4 и 1:1, которое объяснялось сильным влиянием Юпитера, можно объяснить отсутствием каких-либо фрагментов семейства i или ответвившихся от него семейств СПР на этом участке. Этот последий факт ранее не был известен. Он следует из анализа бифуркаций семейства i, проведенного в этой работе.

Можно заключить, что ограниченная задача играет более важную роль, чем ей отводилась ранее, в объяснении распределения астероидов. Это позволяет надеятся на применении развитых методов к изучению структуры колец Сатурна, однако это предмет будущих исследований.

Основные результаты третьей главы.

1. Проведено наиболее полное к настоящему времени исследование двупараметрического семейства h периодических решений ограниченной задачи. Структура и эволюция семейства h описывается в 4 системах координат, начиная с его порождающего семейства при $\mu = 0$ и до значения массового параметра $\mu = 1/2$.

2. Дано полное описание циклической структуры порождающего семейства i периодических решений ограниченной задачи. Обнаружено ранее неизвестное зигзагообразное поведение его характеристик вблизи характеристик семейства решений-отрезков B_1. Семейство i периодических решений ограниченной задачи вычислено при значении массового параметра $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ на протяжении четырех циклов. Эти расчеты подтвердили теоретически предсказанную циклическую структуру семейства i.

3. Изучены бифуркации (самопересечения) семейства i при изменении массового параметра μ и образование замкнутых семейств СПР. Обнаружены две монотонно убывающие последовательности μ'_k и μ''_k, $\mu'_k < \mu''_k$, $k = 1, 2, \ldots$, такие что при $\mu = \mu'_k$ от семейства i ответвляется замкнутое семейство СПР i_k, которое существует только в интервале значений $\mu \in [\mu'_k, \mu''_k]$. При $\mu = \mu''_k$ семейство i_k стягивается в одну орбиту. Как бифуркации семейства i при μ'_k, так и вырожденные семейства i_k при $\mu = \mu''_k$ вычисляются с помощью вариаций системы (8), (9), т.е. без интерполяции. Значения величин μ'_k и μ''_k найдены с не менее чем 16 десятичными разрядами. Была найдена эмпирическая асимптотика этих последовательностей при $k \to \infty$. Сравнение порождающих семейств СПР с некоторыми семействами СПР при малых μ позволило сделать вывод о том, что образование замкнутых семейств СПР является типичным явлением в ограниченной задаче.

4. В рамках плоской ограниченной круговой задачи трех тел дано объяснение распределению астероидов главного пояса вблизи резонансов 2:1, 3:2, 4:3, и расположению внешней границы главного пояса астероидов вблизи резонанса 5:4.

В четвертой главе дается краткое изложение основ построения численных методов без насыщения для линейных краевых задач для систем ОДУ на конечном интервале. Решение нелинейных краевых задач ничем принципиально не отличается от решения линейных краевых задач, кроме того, что линейные задачи решаются за одну итерацию, а решение нелинейной задачи требует нескольких ньютоновских итераций для линейных дифференциальных операторов, полученных из уравнений в вариациях. Методы без насыщения обладают контролируемой точностью и нечувствительны к неустойчивости решений в обычном понимании.

Основной результат четвертой главы.

1. Применение методов без насыщения позволило преодолеть некоторые трудности принципиального характера при вычислении семейств СПР при малых μ, а именно: близость характеристик разных семейств СПР друг к другу, а также вычислить части семейств СПР, где индекс неустойчивости превышает 10^{20}, т.е. где обычные численные методы не применимы ввиду полной потери значащих цифр.

Работы автора по теме диссертации из перечня ВАК

1 *Афендиков А.Л., Варин В.П.* О потере устойчивости и бифуркации автоколебательных режимов, близких к течению Пуазейля // Изв. АН СССР. 1991. МЖГ. №2. С. 41–48.

2 *Афендиков А.Л., Варин В.П.* Исследование автоколебательных режимов, близких к течению Пуазейля в плоском канале // Докл. АН СССР. 1991. Т. 13. N 6. С. 1407–1412.

3 *А.Л. Афендиков, В.П.Варин* Вырожденная бифуркация рождения цикла в многопараметрических задачах гидродинамики // ПММ, Том 62, Вып. 2, 1998, с. 216-222.

4 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малом отношении масс // Прикл. матем. и механ. 2007. Т. 71. N 6. С. 1034-1066.

5 *Брюно А.Д., Варин В.П.* О семействах периодических решений ограниченной задачи трех тел // Астрон. вестн. 2008. Т. 42. N 3. С. 163-185.

6 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейство h периодических решений ограниченной задачи при малых μ // Астрон. вестн. 2009. Т. 43. N 1. С. 4-27.

7 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейство h периодических решений ограниченной задачи при больших μ // Астрон. вестн. 2009. Т. 43. N 2. С. 167-186

8 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейства c и i периодических решений ограниченной задачи при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ // Астрон. вестн. 2009. Т. 43. N 1. С. 28-43.

9 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Замкнутые семейства периодических решений ограниченной задачи трех тел // Астрон. вестн. 2009. Т. 43. N 3. С. 265-288.

10 *Варин В.П.* Отображения последования некоторых полиномиальных систем дифференциальных уравнений // Мат. Сборник, т. 195, N 7, с. 3-20, 2004.

11 *Варин В.П.* Изолированные порождающие периодические решения уравнения Белецкого // Космические исследования, 2007, т. 45, N 1, с. 1-8.

12 *Varin V.P.* Degeneracies of periodic solutions to the Beletsky equation // Regular and Chaotic Dynamics, 2000, **5**(3), p. 313–328.

Прочие работы автора

13 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Первая предельная задача для уравнения колебаний спутника // Препр. N 124 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М.; 1995.

14 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Вторая предельная задача для уравнения колебаний спутника // Препр. N 128 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М.; 1995.

15 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Фрактальная структура периодических колебаний спутника // Чебышевские чтения. Материалы конф., посвященной 175 год. П.Л. Чебышева, М.: МГУ, 1996, Т.1, с. 75-77.

16 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Классы семейств обобщенных периодических решений уравнения Белецкого // Препр. N 64 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М.; 2002, 21 с.

17 *Брюно А.Д., Варин В.П.* О семействах периодических решений ограниченной задачи трех тел // Препр. N 10 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М.; 2005, 20 с.

18 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейство h периодических решений ограниченной задачи при больших μ // Препр. N 64. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2005. 31 с.

19 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейство h периодических решений ограниченной задачи при малых μ // Препр. N 67. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2005. 31 с.

20 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Порождающее семейство i периодических решений ограниченной задачи // Препр. N 36. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. 27 с.

21 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых μ // Препр. N 34. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2007. 30 с.

22 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Сложные семейства периодических решений ограниченной задачи // Препр. N 35. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2007. 27 с.

23 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Порождающее семейство c периодических решений ограниченной задачи // Препр. N 51 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2007. 14 с.

24 *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейства c и i периодических решений ограниченной задачи при $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ // Препр. N 22 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2008. 26 с.

25 *Варин В.П.* Критические семейства периодических решений уравнения колебаний спутника // Препр. Института прикл. матем. N 101, М.; 1996.

26 *Варин В.П.* Критические подсемейства семейства K_0 периодических решений уравнения колебаний спутника // Препр. Института прикл. матем. N 20, М.; 1997.

27 *Варин В.П.* Обобщенные периодические решения уравнения колебаний спутника // Препр. Института прикл. матем. N 97, М.; 1997.

28 *Варин В.П.* Локализация вырождений на семействах периодических решений ОДУ и их регуляризация // Препр. Инст. прикл. мат. N 22, М.; 1999.

29 *Варин В.П.* Периодические решения уравнения Белецкого и их вырождения // Препр. Института прикл. матем. N 23, М.; 1999.

30 *Варин В.П.* Симметричная аномалия и ее вычислительное применениие // Препр. Института прикл. матем. N 57, М.; 2000.

31 *Варин В.П.* Проблема центра–фокуса и уравнения в вариациях // Препр. N 9 Института прикл. матем. им. М.В. Келдыша, М., 2001.

32 *Варин В.П.* Условия центра для систем близких к гамильтоновым // Препр. N 48 Института прикл. матем. им. М.В. Келдыша, М., 2001.

33 *Варин В.П.* Асимптотика отображение последования для некоторых полиномиальных систем ОДУ // Препр. N 34 Института прикл. матем. им. М.В. Келдыша, М., 2001, 23 с.

34 *Варин В.П.* Вырожденная бифуркация периодических решений ОДУ обусловленная симметрией // Препр. N 51 Института прикл. матем. им. М.В. Келдыша, М., 2002.

35 *Варин В.П.* Замкнутые семейства периодических решений ограниченной задачи трех тел // Препр. N 16. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2008. 27 с.

36 *Варин В.П., Петров А.Г.* Математическая модель слуховой улитки человека // Препр. N 96. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2008. 26 с.

37 *Afendikov A.L., Varin V.P.* An analysis of periodic flows in the vicinity of the plane Poiseille flow // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1991. V. 10, №6. P. 577-603.

38 *Afendikov A.L., Varin V.P.* Bifurcations of some viscous fluid flow and transition to turbulence // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1991. V. 10, №2. Suppl. P. 13-18.

39 *Bruno A.D., Varin V.P.* Singularities of oscillations of a satellite on highly eccentric elliptic orbits // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 30:4 (1997) 2541-2546.

40 *Bruno A.D., Varin V.P.* The limit problems for the equation of oscillations of a satellite // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **67**, 1997, N^o1, 1–40.

41 *Bruno A.D., Varin V.P.* The fractal structure of periodic oscillations of a satellite // First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace (Daytona Beach, FL, 1996). Embri-Riddle Aeronaut. Univ. Press, Daytona Beach, FL, 1998, p. 61-66.

42 *Bruno A.D., Varin V.P.* Generalized periodic solutions to the equation of oscillations of a satellite // ZAMM 79: Supplement 2 (1999) S283-S284.

43 *Bruno A.D., Varin V.P.* Classes of families of generalized periodic solutions to the Beletsky equation // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **88**, 2004, 324–341.

44 *Bruno A.D., Varin V.P.* On families of periodic solutions of the restricted three-body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2006. V. 95. N. 1. P. 27-54.

45 *Varin V.P.* Variational equations of higher order in the center-focus problem // Progress In Analysis, Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress, (Eds. Heinrich G W Begehr, Robert Pertsch Gilbert, Man Wah Wong), 2001, Volum II, pp. 1161-1169.

46 *Varin V.P.* Methods without saturation for boundary value problems // Preprint N 1, Keldysh Institute of Applied Math., Moscow, 2008, p. 14.