

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша РАН

На правах рукописи

Ткачев Степан Сергеевич

**Исследование управляемого углового движения аппаратов с
ротирующими элементами**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
М.Ю.Овчинников

Москва - 2011

Введение.....	3
Глава 1. Системы координат и уравнения движения	8
1.1. Системы координат	8
1.2. Уравнения движения	10
1.3. Методы исследования уравнений управляемого движения.....	14
Глава 2. Исследование динамики спутника с трехосной маховичной системой ориентации	15
2.1. Постановка задачи и уравнения движения	15
2.2. Исследование переходных процессов	16
2.3. Исследование процессов насыщения маховиков в установившемся режиме.....	20
2.4. Учет возмущений, действующих на аппарат.....	23
2.4.1. Влияние внешних возмущений	26
2.4.2. Влияние недиагональных элементов тензора инерции	28
2.4.3. Влияние отклонения оси маховика от заданного положения	31
2.5. Анализ углового движения микроспутника “Чибис-М”	34
2.6. Лабораторные испытания системы ориентации микроспутника “Чибис-М”	38
Глава 3. Анализ динамики осесимметричного аппарата с трехосной маховичной системой ориентации без разгрузки.....	40
3.1. Постановка задачи.....	41
3.2. Уравнения движения	42
3.3. Исследование переходных процессов	47
3.4. Исследование эволюции кинетических моментов маховиков в стационарном режиме	61
3.5. Снижение информационно-вычислительных требований алгоритма	64
Глава 4. Динамика тела на вертикальной струне с управлением осевым вращением при помощи вентиляторов	72
4.1. Постановка задачи и уравнение движения	72
4.2. Исследование уравнений движения.....	74
4.3. Управление одноосным вращением тела	77
4.4. Лабораторные испытания макета.....	84
5. Заключение	90
Литература	91
Приложение 1. Лабораторный стенд для верификации маховичной системы управления и определения ориентации.	97
Описание макета	97
Имитатор геомагнитного поля	102
Имитатор Солнца	103
Аэродинамический подвес.....	104
Приложение 2. Лабораторный стенд для испытания макета воздушно-винтовой (вентиляторной) системы управления ориентацией.	105
Описание макета	105
Методика проведения испытаний	108

Введение

Классификацию систем управления ориентацией космических аппаратов можно проводить по разным критериям. Наверное, наиболее используемым можно назвать разделение на пассивные и активные системы. К пассивным относятся гравитационные, магнитные, аэродинамические, солнечные системы. К активным относятся маховичные системы, магнитные, где в качестве исполнительных элементов выступают токовые катушки, системы, использующие реактивные двигатели. Существует другое разделение – системы, использующие внешние поля и системы, не требующие наличия таких полей для своего функционирования. К первому типу относятся магнитные, гравитационные, аэродинамические, солнечные, ко второму – маховичные и системы ориентации с реактивными двигателями.

В настоящей работе рассматривается динамика и анализируются алгоритмы для двух типов активных систем ориентации.

Первый тип – маховичные системы ориентации космических аппаратов [1-5]. Они использовались, например, на спутнике “Электро (GOMS)”, спутниках серий “Метеор”, “Ресурс-О”, “Канопус”, спутнике “Татьяна-2”, поздних версиях “Meteosat”, малых спутниках “BIRD”, “SNAP”, “RapidEye” и других. Основным преимуществом маховичных систем является возможность использования в отсутствии внешних силовых полей или когда эти поля являются возмущающим фактором; также маховики не расходуют рабочее тело, как это делают реактивные двигатели. К недостаткам можно отнести более сложную динамику аппарата, а также насыщение маховиков (достижение предельной скорости собственного вращения или предельного кинетического момента), когда они не могут более разгоняться, а, следовательно, создавать требуемый управляющий момент. Обычно на космических аппаратах имеются механизмы разгрузки маховиков. Однако возникают ситуации, представляющие практический интерес, когда использование таких механизмов не представляется возможным (малые габариты аппарата, отсутствие или

слабость полей). Поэтому необходимо тщательно разработать конфигурацию маховичной системы управления, чтобы достичь требуемой длительности работы системы без применения механизмов разгрузки.

Существует ряд работ, посвящённых маховичным системам, в которых они рассматриваются в аналогичном ракурсе. В основном в качестве закона управления используется PD-регулятор, основанный на парировании рассогласования по отклонению и скорости. Такой тип управления широко применяется при активном маховичном управлении [8-16]. В качестве параметров, описывающих угловое движение, могут выступать параметры Родрига-Гамильтона (например, [6-9]), направляющие косинусы. В работе [17] представлено несколько вариантов параметризации движения относительно центра масс и записан закон управления в каждом из них. В представляемой работе ориентация задаётся матрицей направляющих косинусов (для общего случая) и набором углов (для исследования движения вблизи положения равновесия).

Важным вопросом является выбор коэффициентов пропорциональности PD-регулятора. В конечном итоге они определяют время разворота, энергопотребление и многое другое. В настоящей работе критерием выбора параметров является скорость протекания переходных процессов. В большинстве работ, посвящённых алгоритмам маховичных систем, вопрос выбора параметров либо опускается [10,12,15] и приводится лишь несколько примеров работы алгоритма, либо для их определения используются численные методы [11]. В настоящей работе реализована методика выбора параметров PD-регулятора с помощью максимизации степени устойчивости [18] характеристического полинома системы. Аналогичный подход уже использовался в работах [19-21], но в представляемой работе в силу специфики систем он претерпел ряд изменений.

Ещё одним вопросом, о котором идёт речь в работе, является эволюция кинетического момента маховиков на длительном интервале времени.

Маховичные системы управления ориентацией, как правило, имеют механизмы разгрузки (токовые катушки [22], реактивные двигатели, использование гравитационного момента [23]). Как уже было сказано, использование таких механизмов не всегда возможно, поэтому возникает необходимость в получении эволюции кинетических моментов маховиков на протяжении всей жизни спутника, чтобы определить требуемый запас кинетического момента маховика.

В работе рассматриваются трехосные маховичные системы ориентации. Несмотря на то, что в соответствующих главах говорится о трех маховиках, оси которых взаимно перпендикулярны, маховиков может быть больше и их расположение может отличаться от рассматриваемого в работе. В этом случае рассчитанный управляющий момент перераспределяется между маховиками. Вопрос расположения осей маховиков и распределения между ними этого момента изучен в литературе [24-28] и в диссертации он не затрагивается.

Второй тип – система ориентации, использующая вентиляторные двигатели. Такая система ориентации может применяться для объектов, движущихся в атмосфере, например, для управления ориентацией полезной нагрузки на воздушном баллоне. Воздушные баллоны широко используются для проведения научных исследований [29]. С недавнего времени эксперименты на воздушных баллонах стали применяться в образовательных целях. Примером является Европейская образовательная программа BEXUS [30], в рамках которой молодые исследователи приобретают навыки проведения натурных экспериментов, участвуют в создании служебных модулей и полезной нагрузки. При выполнении отдельных задач, решаемых полезной нагрузкой, требуется наведение прибора в заданную точку или отслеживание осью прибора выделенного направления на поверхности Земли. Для подобного рода объектов в качестве исполнительных органов системы ориентации используются маховики [31],[32]. Такие системы, хотя и являются довольно точными и надежными, обходятся недешево. В настоящей работе

предлагается в качестве исполнительных органов системы управления ориентацией использовать воздушно-винтовые (вентиляторные) двигатели. В этом случае удастся обеспечить необходимую ориентацию полезной нагрузки вокруг вертикали с помощью вентиляторов, а ориентацию прибора осуществлять в вертикальной плоскости основного блока полезной нагрузки. Такие системы просты в эксплуатации и относительно дешевы, в то же время для небольших высот над поверхностью Земли (конкретные высоты зависят от параметров двигателя) эти двигатели достаточно эффективны [33].

Вентиляторные двигатели могут быть использованы как в качестве исполнительных органов системы управления ориентацией полезной нагрузки, подвешенной к воздушному баллону, так и для безопасной имитации реактивных двигателей в учебной лаборатории.

В первой главе вводятся системы координат и выводятся уравнения движения, так же описываются методы исследования, которые используются в последующих главах.

Вторая глава посвящена исследованию движения микроспутника с системой ориентации, обеспечивающей его трехосную ориентацию на орбите Земли. С использованием методов, описанных в первой главе, вводится управление, и определяются его параметры. Основное внимание уделено влиянию возмущений на точность ориентации. При этом в качестве возмущений рассматриваются влияние моментов внешних сил и ошибки, возникающие при изготовлении аппарата и установке актюаторов. Для каждого вида возмущений выводятся конечные соотношения оценки точности ориентации и минимальной угловой скорости.

Предметом рассмотрения третьей главы является динамика вращающегося микроспутника с трехосной маховичной системой ориентации. Здесь особенностью является отсутствие механизмов разгрузки. Связано это с тем, что классические механизмы разгрузки (например, токовые катушки, реактивные двигатели или гравитационный момент) по разным причинам

использовать не представляется возможным. Так же номинальный (стационарный) режим движения предполагает ориентацию одной оси (оси симметрии) и вращение аппарата с относительно быстрой угловой скоростью вокруг этой оси. Здесь основное внимание уделено получению конечных отношений для параметров управления, обеспечивающих быстрое приведение в положение равновесия. Так же, аналогично, второй главе проведено исследование влияния возмущений на аппарат и предложен метод, позволяющий упростить вычисление управляющего момента на борту аппарата.

В четвертой главе согласно методу, описанному в первой главе, вводится закон управления для системы управления макета на вертикальной струне. В качестве актюаторов используются вентиляторные двигатели. В этой главе строится управление, обеспечивающее отслеживание некоторой траектории, исследуется динамика аппарата. Для подтверждения полученных результатов проводятся лабораторные исследования с использованием разработанного и созданного для этих целей макета.

Глава 1. Системы координат и уравнения движения

1.1. Системы координат

В работе используются следующие системы координат:

$OY_1Y_2Y_3$ – *невращающаяся система координат*: ось OY_2 направлена перпендикулярно плоскости эклиптики, OY_3 направлена в точку весеннего равноденствия, а OY_1 дополняет эту систему до правой ортогональной системы координат, начало координат – центр масс спутника;

$Ox_1x_2x_3$ – *связанная система координат*, оси которой являются главными центральными осями инерции аппарата;

$Oz_1z_2z_3$ – *полусвязанная система координат*: одна из осей этой системы совпадает с осью системы $Ox_1x_2x_3$, две другие вращаются относительно аппарата с некоторой угловой скоростью;

$OS_1S_2S_3$ – *солнечная система координат*: OS_2 направлена перпендикулярно плоскости эклиптики, OS_1 направлена на Солнце, ось OS_3 дополняет эту систему до правой.

$OX_1X_2X_3$ – *опорная система координат*, которая строится в зависимости от поставленной задачи. В работе этой системой, в частности, является *орбитальная система координат*: ось OX_3 направлена по вектору местной вертикали, OX_2 – по нормали к плоскости орбиты, OX_1 дополняет систему до правой ортонормированной системы координат.

Связь между системами координат $Ox_1x_2x_3$ и $OX_1X_2X_3$ задаётся двумя способами: набором углов α, β, γ (рис.1.1) (углы Крылова) и матрицей направляющих косинусов A .

В случае самолетных углов переход от системы $OX_1X_2X_3$ к системе $Ox_1x_2x_3$ происходит с помощью трех последовательных поворотов (рис.1.1). Первый поворот осуществляется относительно оси OX_2 на угол α , второй – вокруг Ox'_3 (ось в которую после первого поворота переходит OX_3) на угол β , третий – вокруг оси Ox_1 на угол γ .

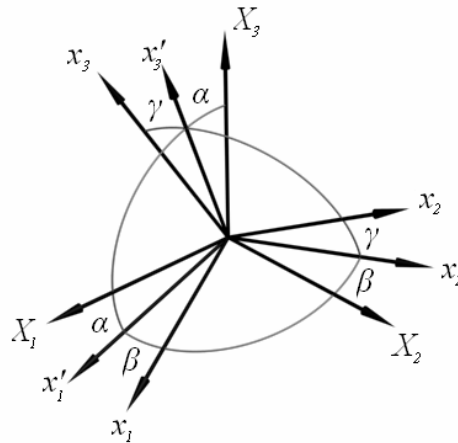


Рис.1.1. Самолетные углы

Матрица направляющих косинусов через углы Эйлера запишется в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Матрица описывает переход из системы координат $OX_1X_2X_3$ в связанную систему координат $Ox_1x_2x_3$.

Связь между $OX_1X_2X_3$ и инерциальной системой координат $OY_1Y_2Y_3$ задаётся матрицей, которая описывает переход от $OY_1Y_2Y_3$ к $OX_1X_2X_3$. Вид этой

матрицы зависит от движения опорной системы координат и в дальнейшем в каждом конкретном случае она будет введена.

При последующем изложении вектор в определенной системе координат будем обозначать как \mathbf{a}_Y , здесь индекс Y обозначает, что вектор записан в системе координат $OY_1Y_2Y_3$.

1.2. Уравнения движения

При создании математических моделей движения систем, исследуемых в работе, используется закон изменения кинетического момента (динамические уравнения Эйлера)

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_{вн} + \mathbf{M}_{унр}, \quad (1.1)$$

и кинематические уравнения:

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\mathbf{A}, \quad (1.2)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\ \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc}$ – кинетический момент аппарата; $\boldsymbol{\omega}_{abc} = \boldsymbol{\omega}_{отн} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0$ – вектор абсолютной угловой скорости; \mathbf{J} – тензор инерции тела; $\mathbf{M}_{вн}$ – момент внешних сил, $\mathbf{M}_{упр}$ – управляющий момент, $\boldsymbol{\omega}_{отн} = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости движения системы $Ox_1x_2x_3$ относительно $OX_1X_2X_3$, записанный в осях системы $Ox_1x_2x_3$, $\boldsymbol{\omega}_0$ – абсолютная угловая скорость системы координат $OX_1X_2X_3$, матрица \mathbf{W} имеет вид

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кинематические уравнения (1.2) используются при численном моделировании, а соотношения (1.3) – для проведения аналитических исследований, при этом набор углов выбирается таким образом, чтобы избежать вырождения в исследуемом положении равновесия.

Определим управление $\mathbf{M}_{упр}$ в (1.1). Будем строить такое управление, которое совмещает системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $OX_1X_2X_3$. Таким образом, управляющий момент $\mathbf{M}_{упр}$ должен создавать такое положение равновесия, в котором $\boldsymbol{\omega}_{отн} = 0$, а матрица \mathbf{A} – единичная (или, другими словами, $\alpha = \beta = \gamma = 0$) и обеспечивать его асимптотическую устойчивость. Будем строить управление, используя функцию Ляпунова V . В качестве кандидата на эту функцию используем выражение

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{отн}) + k_a [(1 - a_{11}) + (1 - a_{22}) + (1 - a_{33})]. \quad (1.4)$$

Здесь a_{ii} – диагональные элементы матрицы направляющих косинусов ($i=1, 2, 3$); $k_a > 0$ коэффициент пропорциональности (его размерность $[k_a] = H \cdot m$).

Функция (1.4) удовлетворяет требованиям, которые накладываются на функцию Ляпунова, а именно:

$V = 0$ при $\omega_{отн} = 0$ и единичной матрице \mathbf{A} ;

$V > 0$ при всех остальных значениях $\omega_{отн}$ и \mathbf{A} .

Запишем теперь \dot{V} , для этого воспользуемся соотношениями

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\omega_{abc},$$

$$\omega_{abc} = \omega_{отн} + \mathbf{A}\omega_0.$$

Здесь ω_0 – угловая скорость, с которой движется опорная система координат $Ox_1x_2x_3$. Итак,

$$\dot{V} = \left(\omega_{отн} \left[\mathbf{M}_{унр} + \mathbf{M}_{виш} - \omega_{abc} \times \mathbf{K} - \dot{\mathbf{A}}\omega_0 - \mathbf{A}\dot{\omega}_0 \right] \right) - k_a (\dot{a}_{11} + \dot{a}_{22} + \dot{a}_{33}).$$

Используя (1.2), исключим из правой части этого выражения производные по времени элементов матрицы направляющих косинусов

$$\dot{V} = \left(\omega_{отн} \left[\mathbf{M}_{унр} + \mathbf{M}_{виш} - \omega_{abc} \times \mathbf{K} - \mathbf{W}\mathbf{A}\omega_0 - \mathbf{A}\dot{\omega}_0 \right] \right) - k_a \left[\omega_1 (a_{32} - a_{23}) + \omega_2 (a_{13} - a_{31}) + \omega_3 (a_{21} - a_{12}) \right]$$

или, вводя вектор $\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32} \quad a_{31} - a_{13} \quad a_{12} - a_{21})^T$, получим

$$\dot{V} = \left(\boldsymbol{\omega}_{отн} \left[\mathbf{M}_{упр} + \mathbf{M}_{ви} - \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \mathbf{K} - \mathbf{W}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + k_a \mathbf{S} \right] \right). \quad (1.5)$$

Для того чтобы гарантировать выполнение условия $\dot{V} = 0$ при $\boldsymbol{\omega}_{отн} = 0$ и единичной матрице \mathbf{A} , $\dot{V} < 0$ при всех остальных значениях $\boldsymbol{\omega}_{отн}$ и \mathbf{A} , как того требует теорема Барбашина-Красовского, примем

$$\mathbf{M}_{упр} + \mathbf{M}_{ви} - \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \mathbf{K} - \mathbf{W}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + k_a \mathbf{S} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн}.$$

Здесь $k_\omega > 0$ – коэффициент пропорциональности, который является так же как и k_a параметром управления ($[k_\omega] = H \cdot м \cdot с$). Таким образом, управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость положения равновесия $\boldsymbol{\omega}_{отн} = 0$ и \mathbf{A} – единичная, имеет вид

$$\mathbf{M}_{упр} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} - k_a \mathbf{S} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \mathbf{W}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \mathbf{K} - \mathbf{M}_{ви}. \quad (1.6)$$

Подставляя полученное управление в (1.1), получим

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} + k_a \mathbf{S} = 0$$

Дополняя это уравнения кинематическими уравнениями, получаем систему уравнений, описывающую управляемое движение системы,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} + k_a \mathbf{S} &= 0, \\ \dot{\mathbf{A}} &= \mathbf{W}\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

При этом учитывается, что управление определяется соотношением (1.6). В работе во второй и третьей главе управляющий момент создается маховичной

системой ориентации, в четвертой – используются вентиляторные двигатели. Явные выражения для моментов получены в соответствующих главах.

1.3. Методы исследования уравнений управляемого движения

Исследование уравнений производится двумя способами: аналитическое исследование и численное моделирование [34]. Причем большее внимание уделяется именно аналитическим исследованиям, а численное моделирование используется лишь для подтверждения полученных при таких исследованиях выводов.

Движение можно разбить на два этапа – переходные процессы и номинальный режим. Целью исследования переходных процессов является определение параметров управления k_a и k_ω . Параметры подбираются таким образом, чтобы обеспечить максимальную степень устойчивости характеристического полинома линеаризованной системы (1.7). Степенью устойчивости полинома [18] называется действительная часть самого правого корня, взятая с обратным знаком. Эта величина может служить мерой быстроты протекания переходных процессов, и чем она больше, тем быстрее система приходит в асимптотически устойчивое положение равновесия. Исследование динамики системы в номинальном режиме проводится с целью получения эволюции кинетических моментов маховиков и оценок точности ориентации.

Глава 2. Исследование динамики спутника с трехосной маховичной системой ориентации

В настоящей главе исследуется движение спутника с активной маховичной системой ориентации. Примером такого спутника может являться аппарат “Чибис-М” [35]. Он относится к классу микроспутников, предназначен для детального исследования грозовых разрядов и требует трехосной ориентации в орбитальных осях.

В качестве исполнительных элементов ориентации спутника используются три взаимно ортогональные пары маховиков (для точной ориентации) и катушки (для предварительного успокоения и разгрузки маховиков). Задача системы ориентации – обеспечение “гравитационной ориентации”, то есть совмещение главных центральных осей инерции аппарата с соответствующими осями гравитационной системы координат (основной режим функционирования).

2.1. Постановка задачи и уравнения движения

В настоящей главе решается задача ориентации аппарата с помощью маховичной системы. Опорной системой координат $OX_1X_2X_3$ здесь является *орбитальная система координат*. Таким образом, угловая скорость опорной системы координат будет $\omega_0 = (0 \ \omega_{orb} \ 0)^T$, где ω_{orb} – угловая скорость орбитального движения.

Как уже было сказано, управляющий момент создается тремя взаимно ортогональными маховиками. В этом случае суммарный кинетический момент будет $\mathbf{K} = \mathbf{J}\omega_{abc} + \mathbf{H}$, где \mathbf{H} – вектор кинетического момента маховиков в

связанной системе координат. Тогда из (1.1) можно найти управляющий МОМЕНТ

$$\mathbf{M}_{упр} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{H}.$$

Управление строится так же, как и в п.1.2. В точности повторив все шаги этого пункта [36], получим замкнутую систему, описывающую движение аппарата

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_a \mathbf{S} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} &= 0, \\ \dot{\mathbf{H}} + (\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{отн}) \times \mathbf{H} &= \mathbf{M} + k_a \mathbf{S} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} + \\ &- \boldsymbol{\omega}_{отн} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{отн} - \boldsymbol{\omega}_{отн} \times \mathbf{J}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{отн} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \\ \dot{\mathbf{A}} &= \mathbf{W}\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32} \quad a_{31} - a_{13} \quad a_{12} - a_{21})^T$.

2.2. Исследование переходных процессов

Целью исследования является определение параметров закона управления k_a и k_ω , обеспечивающих максимальную степень устойчивости характеристического полинома линеаризованной системы. Перейдём к безразмерным величинам. Для этого сначала введём обозначения

$$H_0 = H_{\max}, \quad m = \dot{H}_{\max}, \quad t_0 = \frac{H_0}{m}. \quad (2.2a)$$

Здесь H_{\max} и \dot{H}_{\max} – характеристики маховиков – максимальный кинетический момент и максимальный реактивный момент, создаваемый маховиком, соответственно. Далее переходим к безразмерным величинам:

$$\omega_{\text{отн}} = \frac{1}{t_0} \mathbf{\Omega}, \mathbf{H} = H_0 \mathbf{h}, \dot{\mathbf{H}} = m \dot{\mathbf{h}}, t = t_0 \tau, \mathbf{I} = J_1 \text{diag}(1 \quad \theta_1 \quad \theta_2), \omega_0 = \omega_{\text{опб}} \mathbf{\Omega}_0. \quad (2.26)$$

В безразмерных величинах первое уравнение системы (2.1) запишется следующим образом:

$$\mathbf{I} \mathbf{\Omega}' + K_a \mathbf{S} + K_\omega \mathbf{\Omega} = 0. \quad (2.3)$$

Здесь введено обозначение $K_a = t_0^2 k_a / J_1$, $K_\omega = t_0 k_\omega / J_1$.

Линеаризуем уравнение (2.3) в окрестности положения равновесия

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{\Omega} = (0 \quad 0 \quad 0),$$

Тогда, дополняя уравнение (2.3) линеаризованными кинематическими соотношениями, получим систему

$$\begin{aligned} \Omega_1' + K_\omega \Omega_1 + 2K_a \gamma &= 0, \\ \theta_1 \Omega_2' + K_\omega \Omega_2 + 2K_a \alpha &= 0, \\ \theta_2 \Omega_3' + K_\omega \Omega_3 + 2K_a \beta &= 0, \\ \alpha' &= \Omega_2, \\ \beta' &= \Omega_3, \\ \gamma' &= \Omega_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Характеристический полином этой системы будет иметь вид:

$$(\lambda^2 + K_\omega \lambda + 2K_a)(\theta_1 \lambda^2 + K_\omega \lambda + 2K_a)(\theta_2 \lambda^2 + K_\omega \lambda + 2K_a) = 0.$$

Его корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}K_\omega \pm \frac{1}{2}\sqrt{K_\omega^2 - 8K_a},$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2}\frac{K_\omega}{\theta_1} \pm \frac{1}{2\theta_1}\sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_1 K_a},$$

$$\lambda_{5,6} = -\frac{1}{2}\frac{K_\omega}{\theta_2} \pm \frac{1}{2\theta_2}\sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a}.$$

Найдём такие соотношения параметров управления K_a и K_ω , чтобы самый правый корень характеристического полинома лежал как можно левее (достигалась максимальная степень устойчивости). Область параметров можно разделить на четыре части ($\theta_2 > \theta_1 > 1$):

$$0 < K_\omega^2 \leq 8K_a,$$

$$8K_a < K_\omega^2 \leq 8\theta_1 K_a,$$

$$8\theta_1 K_a < K_\omega^2 \leq 8\theta_2 K_a,$$

$$8\theta_2 K_a < K_\omega^2.$$

С учетом $\theta_2 > \theta_1 > 1$ и при выполнении условия $K_\omega^2 \leq 8K_a$, степень устойчивости определяется выражением

$$\xi_1 = \frac{K_\omega^2}{2\theta_2}.$$

В случае, когда $8\theta_2 K_a < K_\omega^2$, степень устойчивости определяется выражением

$$\xi_2 = -\frac{1}{2}K_\omega \pm \frac{1}{2}\sqrt{K_\omega^2 - 8K_a}.$$

При $8K_a < K_\omega^2 \leq 8\theta_2 K_a$ степень устойчивости будет либо ξ_1 , либо ξ_2 . Равенство $\xi_1 = \xi_2$ будет при условии

$$K_\omega^2 = \frac{8\theta_2^2}{2\theta_2 - 1} K_a.$$

На рис.2.1 представлены изолинии с одинаковыми степенями устойчивости, пунктирная линия – указанная выше парабола.

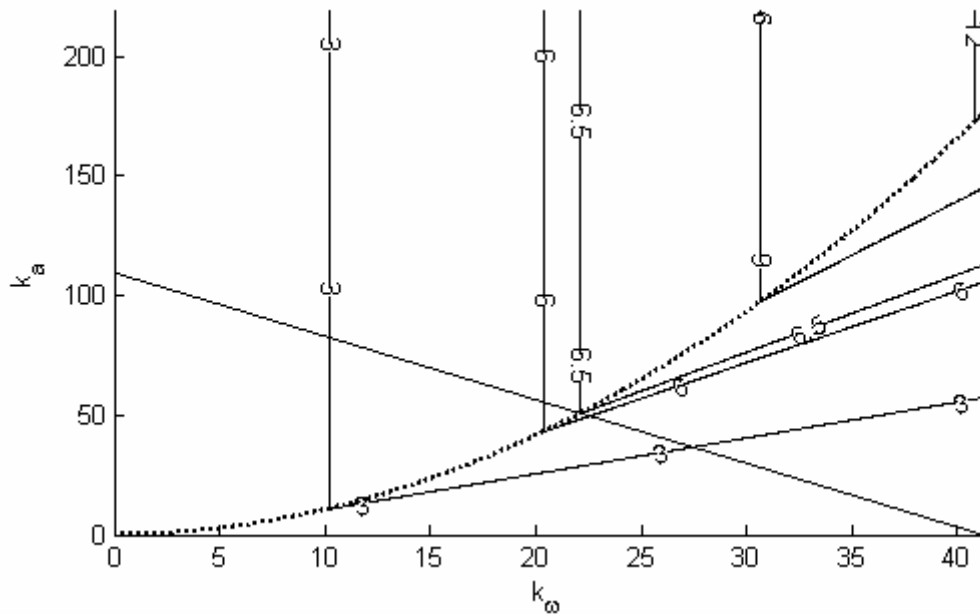


Рис.2.1. Ломаные – изолинии с одинаковой степенью устойчивости; прямая – ограничение на управление; пунктирная линия – парабола, на которой находятся искомые параметры управления

На рис.2.1 так же построена прямая, учитывающая ограничение по управляющему моменту

$$\frac{H_0 t_0}{J_1} = 2\delta_{\max} K_a + \Omega_{\max} K_\omega.$$

Здесь δ_{\max} и Ω_{\max} – максимальные отклонения по ориентации и угловой скорости. Все точки на плоскости (K_ω, K_a) должны лежать ниже (левее) этой прямой. Таким образом, искомые значения будут лежать на пересечении

кривой $K_\omega^2 = \frac{8\theta_2^2 K_a}{2\theta_2 - 1}$ и прямой $\frac{H_0 t_0}{J_1} = 2\delta_{\max} K_a + \Omega_{\max} K_\omega$. В этом случае

K_ω находится из выражения:

$$K_\omega = -\frac{2\Omega_{\max}}{\delta_{\max}} \frac{\theta_2^2}{2\theta_2 - 1} + \frac{1}{\delta_{\max}} \sqrt{\left(2\Omega_{\max} \frac{\theta_2^2}{2\theta_2 - 1}\right)^2 + 4 \frac{H_0 t_0}{J_1} \frac{\theta_2^2}{2\theta_2 - 1}}.$$

Таким образом, найдены параметры, обеспечивающие максимальную степень устойчивости.

2.3. Исследование процессов насыщения маховиков в установившемся режиме

В режиме гравитационной ориентации (оси связанной и орбитальной систем координат совпадают) в качестве внешних возмущающих моментов будем рассматривать аэродинамический и магнитный моменты, исследуем их влияние. Так как в этом случае

$$\boldsymbol{\omega}_{отн} = 0, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то кинематические и динамические уравнения обращаются в тождества. Запишем уравнение, описывающее эволюцию кинетических моментов маховиков при удержании аппарата в положении равновесия при действии магнитного момента, вызванного остаточной намагниченностью, и аэродинамического момента

$$\dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{H} = \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_a - \boldsymbol{\omega}_0 \times J\boldsymbol{\omega}_0. \quad (2.5)$$

В качестве моделей аэродинамического и магнитного моментов, примем следующие модели [37]:

$$\mathbf{M}_a = -\frac{1}{2}\rho C_x S v \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}, \mathbf{M}_m = \mathbf{L} \times \mathbf{B}.$$

Здесь $\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_m$ – аэродинамический и магнитный моменты соответственно; ρ – плотность атмосферы; C_x – коэффициент сопротивления, S – характерная площадь поперечного сечения; v – скорость орбитального движения; \mathbf{r}_a – радиус-вектор центра давления в связанной системе координат; \mathbf{L} – остаточный магнитный момент аппарата; \mathbf{B} – вектор индукции внешнего магнитного поля в связанной системе координат. Перепишем (2.5) в координатной форме.

$$\begin{aligned}
\dot{H}_1 + \omega_0 H_3 &= -2L_2 B_0 \sin \omega_0 t \sin i - L_3 B_0 \cos i, \\
\dot{H}_2 &= -\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 r_{a3} + L_3 B_0 \cos \omega_0 t \sin i + 2L_1 B_0 \sin \omega_0 t \sin i, \\
\dot{H}_3 - \omega_0 H_1 &= \frac{1}{2} \rho C_x S v^2 r_{a2} + L_1 B_0 \cos i - L_2 B_0 \cos \omega_0 t \sin i.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение этой системы запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_1 &= H_{10} \cos \omega_0 t + \left(\frac{L_1 B_0 \cos i}{\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S v^2 r_{a2}}{\omega_0} \right) (\cos \omega_0 t - 1) - \\
&\quad - \left(H_{30} + \frac{L_3 B_0 \cos i}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t - \frac{1}{2} L_2 B_0 t \sin \omega_0 t \sin i, \\
H_2 &= -\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 r_{a3} t - \frac{1}{\omega_0} L_3 B_0 \sin \omega_0 t \sin i + \frac{2}{\omega_0} L_1 B_0 \sin i (\cos \omega_0 t - 1) + H_{20}, \\
H_3 &= \left(H_{10} + \frac{\mathfrak{M}_1 B_0 \cos i}{\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S v^2 r_{a2}}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t + H_{30} \cos \omega_0 t + \\
&\quad + \frac{L_3 B_0 \cos i}{\omega_0} (\cos \omega_0 t - 1) + \frac{1}{2} L_2 B_0 t \cos \omega_0 t \sin i - \frac{3}{2} \frac{L_2 B_0 \sin \omega_0 t \sin i}{\omega_0}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Решение позволяет оценить время, за которое достигается насыщение маховичной системы (время, через которое надо производить разгрузку маховиков). Выпишем отдельно выражения для времени насыщения, обусловленного аэродинамическим моментом, и времени насыщения, обусловленного остаточной намагниченностью:

$$t_a = \frac{2H_0}{\rho C_x S v^2 r}, \quad t_m = \frac{2H_0}{LB \sin i}.$$

Эти формулы используются для оценки времени насыщения, в то время как выражения (2.7) описывают точную (при принятой модели возмущений) эволюцию кинетических моментов маховиков во времени.

2.4. Учет возмущений, действующих на аппарат

Запись закона управления (1.6) предполагает, что управляющий момент формируется с учетом величины момента внешних сил. Однако, как правило, этот момент либо неизвестен, либо его определение требует установки дополнительных датчиков и дополнительной нагрузки на бортовой компьютер. Кроме того, на движение аппарата могут влиять и другие возмущения, например, естественные неточности при изготовлении аппарата. Перепишем выражение (1.5) в виде

$$\dot{V} = (\omega_{отн}, [\mathbf{M}_{упр} - \omega_{абс} \times \mathbf{K} - \mathbf{W}\mathbf{A}\omega_0 - \mathbf{A}\dot{\omega}_0 + k_a \mathbf{S}]) + (\omega_{отн}, \mathbf{M}_{возм}), \quad (2.8)$$

где $\mathbf{M}_{возм}$ – возмущающий момент, появление которого может быть обусловлено как внешними воздействиями, так и внутренними факторами.

По аналогии с разделом 1.3 потребуем выполнения равенства

$$\mathbf{M}_{упр} - \omega_{абс} \times \mathbf{K} - \mathbf{W}\mathbf{A}\omega_0 - \mathbf{A}\dot{\omega}_0 + k_a \mathbf{S} = -k_\omega \omega_{отн},$$

тогда первое слагаемое будет меньше нуля. Отсюда управляющий момент

$$\mathbf{M}_{упр} = -k_\omega \omega_{отн} - k_a \mathbf{S} + \mathbf{A}\dot{\omega}_0 + \mathbf{W}\mathbf{A}\omega_0 + \omega_{абс} \times \mathbf{K}. \quad (2.9)$$

В этом случае управление формируется только с учетом информации о движении опорной системы координат $OX_1X_2X_3$ и данных о движении

связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно $OX_1X_2X_3$. Недостатком такого управления является то, что при приближении к положению равновесия уже не гарантируется $\dot{V} < 0$, а значит и асимптотическая устойчивость требуемого положения. Можно получить оценку минимальной угловой скорости, при которой еще гарантированно выполняется условие $\dot{V} < 0$. Запишем (2.8) в виде

$$\dot{V} = -k_{\omega} \omega_{отн}^2 + (\omega_{отн}, \mathbf{M}_{возм}).$$

Наихудший случай будет при $(\omega_{отн}, \mathbf{M}_{возм}) = \omega_{отн} M_{возм}$, тогда

$$-k_{\omega} \omega_{отн}^2 + \omega_{отн} M_{возм} < 0.$$

Отсюда получаем оценку

$$\omega_{отн} > \frac{M_{возм}}{k_{\omega}}.$$

Здесь речь идет об абсолютных величинах, $M_{возм}$ – максимальная величина возмущающего момента. При этом если угловая скорость достигает критического значения, то можно либо продолжать использовать тот же закон управления (2.9), либо переходить в другой режим, который зависит от движения опорной системы координат. Для оценки точности ориентации докажем одно утверждение.

Пусть имеется возмущенная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$(\mathbf{D}_0 + \varepsilon \mathbf{D}_1) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{E}_0 + \varepsilon \mathbf{E}_1) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{F}_0 + \varepsilon \mathbf{F}_1) \mathbf{q} = \varepsilon \mathbf{Q}.$$

Здесь $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1$ – матрицы с постоянными элементами, а \mathbf{Q} – вектор с постоянными компонентами, $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Кроме этого, известно, что характеристический многочлен невозмущенной системы

$$\mathbf{D}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{E}_0 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_0 \mathbf{q} = 0$$

устойчив. Тогда многочлен и для возмущенной системы при достаточно малом ε будет устойчивым, а новое асимптотически устойчивое положение равновесия будет $\mathbf{q}_0 = \varepsilon (\mathbf{F}_0 + \varepsilon \mathbf{F}_1)^{-1} \mathbf{Q} = \varepsilon \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{Q} + O(\varepsilon^2)$.

Докажем сначала устойчивость многочлена возмущенной системы. По условию многочлен невозмущенной системы

$$P_0(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

устойчив. Многочлен возмущенной системы будет иметь вид

$$P(\lambda) = [a_0 + \varepsilon f_0] \lambda^n + [a_1 + \varepsilon f_1] \lambda^{n-1} + \\ + [a_2 + \varepsilon f_2] \lambda^{n-2} + \dots + [a_{n-1} + \varepsilon f_{n-1}] \lambda + [a_n + \varepsilon f_n].$$

Здесь f_i – функция элементов матриц $\mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{F}_1$, а так же членов более высоких порядков малости по ε . Воспользуемся критерием Рауса-Гурвица для возмущенного многочлена. Главные миноры будут иметь вид $\Delta_i = \Delta_{0i} + \varepsilon \Delta_{1i}$, где Δ_{0i} – соответствующие главные миноры матрицы Гурвица невозмущенного многочлена. При достаточно малом ε знак Δ_i будет совпадать со знаком Δ_{0i} , а значит, по критерию Рауса-Гурвица возмущенный многочлен будет устойчив.

Положение равновесия возмущенной системы можно найти из алгебраической системы уравнений

$$(\mathbf{F}_0 + \varepsilon \mathbf{F}_1) \mathbf{q}_0 = \varepsilon \mathbf{Q}.$$

Выражая отсюда \mathbf{q}_0 , получим решение $\mathbf{q}_0 = \varepsilon \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{Q} + O(\varepsilon^2)$.

Рассмотрим влияние конкретных возмущений на точность ориентации.

2.4.1. Влияние внешних возмущений

Сначала рассмотрим влияние внешних возмущений на точность системы ориентации. В этом случае оценка минимального значения модуля вектора относительной угловой скорости

$$\omega_{\text{отн}} = \frac{M_{\text{max}}}{k_{\omega}}.$$

В качестве возмущающих моментов будем рассматривать те же моменты, что и в п.2.3, а именно, аэродинамический и магнитный моменты. Взяв максимальные значения обоих моментов, получим оценку минимальной угловой скорости

$$\omega_{\text{min}} = \frac{\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 r_a + LB}{k_{\omega}}.$$

Найдём теперь оценки точности ориентации. Движение системы описывается уравнениями

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{отн}} - K_a \mathbf{S} + K_{\omega} \boldsymbol{\Omega}_{\text{отн}} = \frac{t_0^2}{J_1} (\mathbf{M}_a + \mathbf{M}_m),$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{W}.$$

Линеаризуем эту систему в окрестности положения равновесия

$$\begin{aligned}
\gamma'' + K_\omega \gamma' + 2K_a \gamma &= -\frac{t_0^2}{J_1} \left(\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 (r_{a2} \alpha + r_{a3} \beta) + L_2 B_3 - L_3 B_2 + \right. \\
&\quad \left. + 3\omega_{op\sigma}^2 (J_3 - J_2) \gamma + \alpha L_2 B_1 + \beta L_3 B_1 - \gamma (L_3 B_3 + L_2 B_2) \right), \\
\theta_1 \alpha'' + K_\omega \alpha' + 2K_a \alpha &= \frac{t_0^2}{J_1} \left(\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 (r_{a1} \alpha - r_{a3} \beta) + L_3 B_1 - L_1 B_3 - \right. \\
&\quad \left. - 3\omega_{op\sigma}^2 (J_3 - J_1) \alpha - \alpha (L_3 B_3 + L_1 B_1) + \beta L_3 B_2 + \gamma L_1 B_3 \right), \\
\theta_2 \beta'' + K_\omega \beta' + 2K_a \beta &= \frac{t_0^2}{J_1} \left(\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 (r_{a2} + r_{a1} \beta) + L_1 B_2 - L_2 B_1 + \alpha L_1 B_3 - \right. \\
&\quad \left. - \beta (L_2 B_2 + L_1 B_1) + \gamma L_2 B_3 \right).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

В качестве модели поля будем использовать постоянное поле. Величины $\frac{t_0^2 \rho C_x S v^2}{2J_1}$ и $\frac{t_0^2 B_i}{J_1}$, $i=1, 2, 3$ являются малыми параметрами. По доказанному в начале раздела утверждению, асимптотически устойчивым положением равновесия будет положение

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t_0^2}{2K_a J_1} (L_2 B_3 - L_3 B_2) \\ -\frac{t_0^2}{2K_a J_1} \left(\frac{1}{2} r_{a3} \rho C_x S v^2 - L_3 B_1 + L_1 B_3 \right) \\ \frac{t_0^2}{2K_a J_1} \left(\frac{1}{2} r_{a2} \rho C_x S v^2 + L_1 B_2 - L_2 B_1 \right) \end{pmatrix}.$$

Значение минимальной угловой скорости будет

$$\omega_{\min} = \frac{\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 r_a + LB}{k_\omega}.$$

Таким образом, получены конечные формулы, позволяющие оценить точность ориентации, а так же минимально достижимую величину угловой скорости.

2.4.2. Влияние недиагональных элементов тензора инерции

Рассмотрим теперь случай, когда тензор инерции аппарата имеет недиагональные элементы. На практике такая ситуация возникает в силу того, что главные оси аппарата определяются с некоторой точностью, что приводит к ошибке при вычислении и реализации управления. В настоящем разделе рассматривается влияние такой ошибки на точность ориентации. Тензор инерции

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{12} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & J_3 \end{pmatrix}$$

представим в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{z\bar{1}} + \mathbf{J}_{\bar{1}\bar{2}},$$

где $\mathbf{J}_{z\bar{1}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$, а $\mathbf{J}_{\bar{1}\bar{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{12} & 0 & -J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & 0 \end{pmatrix}$. Будем считать, что

недиагональные элементы много меньше главных моментов инерции то есть

$$\mathbf{J} = J_1 (\mathbf{I}_{z\bar{1}} + \mu \mathbf{I}_{\bar{1}\bar{2}}).$$

Здесь обозначения аналогичны безразмерным величинам в (2.2б). В этом случае

$$\mathbf{K} = J_1 (\mathbf{I}_{2l} + \mu \mathbf{I}_{цб}) \boldsymbol{\omega}_{abc} + \mathbf{H}.$$

В дальнейшем, для простоты выкладок, будем считать, что

$$\frac{J_{12}}{J_1} = \frac{J_{13}}{J_1} = \frac{J_{23}}{J_1} = \mu.$$

Здесь $\mu \ll 1$. Уравнения движения в этом случае запишутся в виде

$$\begin{aligned} J_{2l} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_a \mathbf{S} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} &= -\mu J_1 \mathbf{I}_{цб} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{abc} - \mu \boldsymbol{\omega}_{abc} \times J_1 \mathbf{I}_{цб} \boldsymbol{\omega}_{abc}, \\ \dot{\mathbf{H}} + (\mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{отн}) \times \mathbf{H} &= k_a \mathbf{S} - \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J}_{2l} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} + \\ &- \boldsymbol{\omega}_{отн} \times \mathbf{J}_{2l} \boldsymbol{\omega}_{отн} - \boldsymbol{\omega}_{отн} \times \mathbf{J}_{2l} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J}_{2l} \mathbf{W} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J}_{2l} \boldsymbol{\omega}_{отн} - \mathbf{J}_{2l} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \\ \dot{\mathbf{A}} &= \mathbf{W} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

По аналогии с предыдущим пунктом получим оценку точности по угловой скорости. Для этого запишем \dot{V} :

$$\dot{V} = -k_\omega (\boldsymbol{\omega}_{отн}, \boldsymbol{\omega}_{отн}) - \mu (\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 \times J_1 \mathbf{I}_{цб} (\mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{отн}) + J_1 \mathbf{I}_{цб} (\dot{\mathbf{A}} \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0)).$$

Для того чтобы получить оценку сверху второго слагаемого, запишем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 \times J_1 \mathbf{I}_{цб} (\mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{отн}) + J_1 \mathbf{I}_{цб} (\dot{\mathbf{A}} \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0)) \leq \\ &\leq \omega_{отн} (|\mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 \times J_1 \mathbf{I}_{цб} (\mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{отн})| + |J_1 \mathbf{I}_{цб} (\dot{\mathbf{A}} \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0)|) \leq \\ &\leq \omega_{отн} \omega_0 |J_1 \mathbf{I}_{цб} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0| + \omega_{отн} \omega_0 |J_1 \mathbf{I}_{цб} \boldsymbol{\omega}_{отн}| + |J_1 \mathbf{I}_{цб} \mathbf{W} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_0| + |J_1 \mathbf{I}_{цб} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн}| + |J_1 \mathbf{I}_{цб} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0| \leq \\ &\leq \omega_{отн} \lambda_{\max} (\omega_0^2 + 2\omega_{отн} \omega_0 + |\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн}|_{\max} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0). \end{aligned}$$

Здесь λ_{\max} – максимальное по модулю собственное значение матрицы $\mathbf{I}_{цб}$.

Тогда, учитывая что

$$|\dot{\omega}_{отн}|_{\max} = \frac{\dot{H}_{\max}}{J_1},$$

а орбита круговая, получим

$$\omega_{\min} = \mu \frac{J_1 \omega_{орб}^2 + m}{J_1 (k_{\omega} - 2\mu \lambda_{\max} \omega_{орб})}.$$

Чтобы найти оценку точности ориентации при таком возмущении, перейдем к безразмерным величинам с помощью соотношений (2.2а, 2.2б), а затем линеаризуем систему (2.11) в окрестности положения равновесия. В итоге получим следующую систему:

$$\Omega'_1 + K_{\omega} \Omega_1 + 2K_a \gamma = \mu \frac{\omega_{орб}^2}{J_1} t_0^2 (-\beta - 1) + \mu \left(-\Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_1 \frac{\omega_{орб}^2}{J_1} t_0^2 \right),$$

$$\theta_1 \Omega'_2 + K_{\omega} \Omega_2 + 2K_a \alpha = \mu \frac{\omega_{орб}^2}{J_1} t_0^2 (\gamma + \beta) + \mu \left(-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_1 \frac{\omega_{орб}^2}{J_1} t_0^2 - \Omega_3 \frac{\omega_{орб}^2}{J_1} t_0^2 \right),$$

$$\theta_1 \Omega'_3 + K_{\omega} \Omega_3 + 2K_a \beta = \mu \frac{\omega_{орб}^2}{J_1} t_0^2 (1 - \gamma) + \mu \left(-\Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3 \frac{\omega_{орб}^2}{J_1} t_0^2 \right),$$

$$\alpha' = \Omega_2,$$

$$\beta' = \Omega_3,$$

$$\gamma' = \Omega_1.$$

Как и в предыдущем пункте, оценку точности ориентации определим из доказанного в начале утверждения. В итоге выражения для оценки примут вид:

$$\alpha_0 = 0,$$

$$\beta_0 = \mu \frac{\omega_{op\bar{b}}^2}{2J_1 K_a} t_0^2,$$

$$\gamma_0 = -\mu \frac{\omega_{op\bar{b}}^2}{2J_1 K_a} t_0^2.$$

или в размерных величинах

$$\alpha_0 = 0,$$

$$\beta_0 = \mu \frac{J_1 \omega_{op\bar{b}}^2}{2k_a},$$

$$\gamma_0 = -\mu \frac{J_1 \omega_{op\bar{b}}^2}{2k_a}.$$

Таким образом, получены конечные оценки точности ориентации в случае несовпадения конструкционных и главных осей инерции аппарата.

2.4.3. Влияние отклонения оси маховика от заданного положения

Изучим влияние наклона оси маховика относительно заданного положения на динамику углового движения аппарата. Пусть маховики отклонены от главных осей инерции тела. Для оценки будем считать, что углы эти малы (считаем, что величина ошибки установки невелика) и равны ν . Для определённости будем считать, что маховик, ось которого направлена по оси Ox_1 , отклонён в плоскости Ox_1x_2 , по Ox_2 – в плоскости Ox_2x_3 , по Ox_3 – в плоскости Ox_1x_3 . Тогда кинетический момент маховиков будет равен

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 \cos \nu + H_3 \sin \nu \\ H_2 \cos \nu + H_1 \sin \nu \\ H_3 \cos \nu + H_2 \sin \nu \end{pmatrix}.$$

С учётом малости угла отклонения, можно переписать кинетический момент маховиков в виде:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} H_3 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H}_0 + \nu \mathbf{H}_1.$$

В этом случае уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} J\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_a \mathbf{S} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} &= -\nu \dot{\mathbf{H}}_1 - \nu \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \mathbf{H}_1, \\ \dot{\mathbf{H}}_0 + (\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{отн}) \times \mathbf{H}_0 &= k_a \mathbf{S} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{отн} + \\ &\quad - \boldsymbol{\omega}_{отн} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{отн} - \boldsymbol{\omega}_{отн} \times \mathbf{J}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{отн} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \\ \dot{\mathbf{A}} &= \mathbf{W}\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Запишем \dot{V} :

$$\dot{V} = -k_\omega (\boldsymbol{\omega}_{отн}, \boldsymbol{\omega}_{отн}) - \nu (\boldsymbol{\omega}_{отн}, \dot{\mathbf{H}}_1 + \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \mathbf{H}_1),$$

Используя рассуждения, изложенные выше, получим ограничение точности по угловой скорости

$$\omega_{\min} = \nu \frac{\dot{H}_{\max} + \omega_{орб} H_{\max}}{k_\omega}.$$

Линеаризованные уравнения движения с учетом того, что компоненты $\omega_{отн}$ и α , β , γ имеют порядок малости ν , примут вид

$$\Omega'_1 + K_\omega \Omega_1 + 2K_a \gamma = \nu \left(h'_3 + \frac{\omega_{op\bar{\sigma}}}{J_1} t_0^2 h_2 \right),$$

$$\theta_1 \Omega'_2 + K_\omega \Omega_2 + 2K_a \alpha = \nu h'_1,$$

$$\theta_1 \Omega'_3 + K_\omega \Omega_3 + 2K_a \beta = \nu \left(h'_2 - \frac{\omega_{op\bar{\sigma}}}{J_1} t_0^2 h_3 \right),$$

$$\alpha' = \Omega_2,$$

$$\beta' = \Omega_3,$$

$$\gamma' = \Omega_1.$$

Здесь в качестве правой части воспользуемся результатами пункта 2.3. Решение однородной системы описывает затухающие колебания, поэтому главную роль будет играть частное решение неоднородной системы, которое имеет вид

$$\alpha = \nu \omega_{op\bar{\sigma}} \left(\frac{H_{10} \omega_{op\bar{\sigma}} k_\omega - H_{30} (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)}{k_\omega^2 \omega_{op\bar{\sigma}}^2 + (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)^2} \cos(\omega_{op\bar{\sigma}} t) - \frac{H_{30} \omega_{op\bar{\sigma}} k_\omega + H_{10} (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)}{k_\omega^2 \omega_{op\bar{\sigma}}^2 + (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)^2} \sin(\omega_{op\bar{\sigma}} t) \right),$$

$$\beta = -\nu \frac{\omega_{op\bar{\sigma}}}{J_1} t_0^2 \left(\frac{-H_{10} \omega_{op\bar{\sigma}} k_\omega + H_{30} (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)}{k_\omega^2 \omega_{op\bar{\sigma}}^2 + (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)^2} \cos(\omega_{op\bar{\sigma}} t) + \frac{H_{30} \omega_{op\bar{\sigma}} k_\omega + H_{10} (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)}{k_\omega^2 \omega_{op\bar{\sigma}}^2 + (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)^2} \sin(\omega_{op\bar{\sigma}} t) \right),$$

$$\gamma = \nu \omega_{op\bar{\sigma}} \left(\frac{H_{30} \omega_{op\bar{\sigma}} k_\omega + H_{10} (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)}{k_\omega^2 \omega_{op\bar{\sigma}}^2 + (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)^2} \cos(\omega_{op\bar{\sigma}} t) + \frac{H_{10} \omega_{op\bar{\sigma}} k_\omega - H_{30} (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)}{k_\omega^2 \omega_{op\bar{\sigma}}^2 + (2k_a - J_1 \omega_{op\bar{\sigma}}^2)^2} \sin(\omega_{op\bar{\sigma}} t) + \frac{\omega_{op\bar{\sigma}} H_{20}}{2k_a} \right).$$

Видно, что кроме зависимости точности ориентации от малого параметра, существует зависимость от значений кинетических моментов маховиков.

2.5. Анализ углового движения микроспутника “Чибиc-M”

Проиллюстрируем полученные результаты вычислениями для спутника “Чибиc-M” [35, 36]. Тензор инерции аппарата $J = \text{diag}(1.03 \quad 1.51 \quad 1.75) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Наклонение орбиты $i = 56.7^\circ$, её высота $h = 550 \text{ км}$. Так как производится предварительное успокоение, то на момент включения маховичной системы модуль начальной относительной угловой скорости не превышает $1^\circ/\text{сек}$. Параметры маховиков $H_0 = 0.072 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $m = 0.00023 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Вычислим сначала параметры управления. Для оценки максимальной угловой скорости будем использовать следующее выражение:

$$\omega_{\max} = \omega_{0\max} + \frac{H_0}{J_1}$$

или в безразмерных параметрах

$$\Omega_{\max} = \Omega_{0\max} + \frac{H_0}{J_1} t_0.$$

Для малых скоростей и отклонений $\delta_{\max} = 0.1 \text{ рад}$, $\omega_{\max} = 0.001 \text{ с}^{-1}$, что соответствует движению в окрестности положения равновесия

$$K_\omega = -\frac{2\Omega_{\max}}{\delta_{\max}} \frac{\theta_2^2}{2\theta_2 - 1} + \frac{1}{\delta_{\max}} \sqrt{\left(2\Omega_{\max} \frac{\theta_2^2}{2\theta_2 - 1}\right)^2 + 4 \frac{mt_0^2}{J_1} \frac{\theta_2^2}{2\theta_2 - 1}} \approx 22.1,$$

$$K_a \approx 50.8,$$

$$k_\omega \approx 0.07 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_a = 0.00053 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Эти параметры будут использованы для получения оценок. Для оценки точности примем следующие значения: $C_x = 2.1$, $S = 0.1 \text{ м}^2$. Будем считать, что центр давления смещён от центра масс на 10% от характерного размера, который определяется характерной площадью $r_a = 0.05 \text{ м}$. В качестве плотности берём среднее значение плотности для орбиты высотой 550 км $\rho = 2.86 \times 10^{-13} \text{ кг/м}^3$. Остаточный дипольный момент $\mathfrak{M} = 0.1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Напряжённость магнитного поля $B = 5 \times 10^{-5} \text{ Тл}$. Сначала оценим величины слагаемых, стоящих в правых частях уравнений системы (2.10) и содержащие α , β , γ ,

$$\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 r_a \approx 1.8 \times 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad \mathfrak{M} B \approx 5 \times 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Это существенно меньше слагаемых, стоящих в левых частях уравнений системы (2.10) и содержащих α , β , γ ($2k_a \approx 1 \times 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$). Вычислим оценки, полученные в п.2.4.1,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2k_a} \left(\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 r_a + \mathfrak{M} B \right) \approx 0.25^\circ,$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2k_a} \left(\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 r_a + \mathfrak{M} B \right) \approx 0.25^\circ,$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2k_a} \mathfrak{M} B \approx 0.25^\circ.$$

Значение минимальной угловой скорости

$$\omega_{отн} = \frac{\frac{1}{2} \rho C_x S v^2 r_a + \mathfrak{M}B}{k_\omega} \approx 7 \times 10^{-5} \text{ c}^{-1}.$$

Рассчитаем теперь оценки, полученные в п.2.4.2 при значении $\mu = 0.01$.

$$\alpha_0 = 0,$$

$$\beta_0 = \mu \frac{J_1 \omega_{орб}^2}{2k_a} \approx 5 \times 10^{-4} \text{ }^\circ,$$

$$\gamma_0 = -\mu \frac{J_1 \omega_{орб}^2}{2k_a} \approx -5 \times 10^{-4} \text{ }^\circ.$$

$$\omega_{отн} = \mu \frac{J_1 \omega_{орб}^2 + m}{J_1 (k_\omega - 2\mu J_{\max} \omega_{орб})} \approx 4 \times 10^{-5} \text{ c}^{-1}$$

Для оценок, полученных в п.2.4.3,

$$\omega_{отн} = \nu \frac{\dot{H}_{\max} + \omega_{орб} H_{\max}}{k_\omega} \approx 4 \times 10^{-5} \text{ c}^{-1}$$

Для оценки точности ориентации будем считать, что

$$H_{30} = J_{\max} \omega_{01} = 0.029 \text{ H} \cdot \text{м} \cdot \text{с},$$

где $J_{\max} = 1.75 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\omega_{01} = 0.017 \text{ c}^{-1}$. В этом случае точность ориентации составляет величину порядка 5×10^{-4} радиан. Для расчетов использовалось значение $\nu = 0.01$.

Найдем теперь время, за которое происходит насыщение маховиков из-за моментов внешних сил. С учетом того, что устанавливаемые маховики имеют

максимальный кинетический момент $H_{\max} = 0.072 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, время насыщения будет $t_m \approx 8 \text{ ч}$, $t_a \approx 4.5 \text{ сут}$. На рис.2.2 приведены графики, иллюстрирующие эволюцию кинетических моментов маховиков (2.7) на длительном интервале времени.

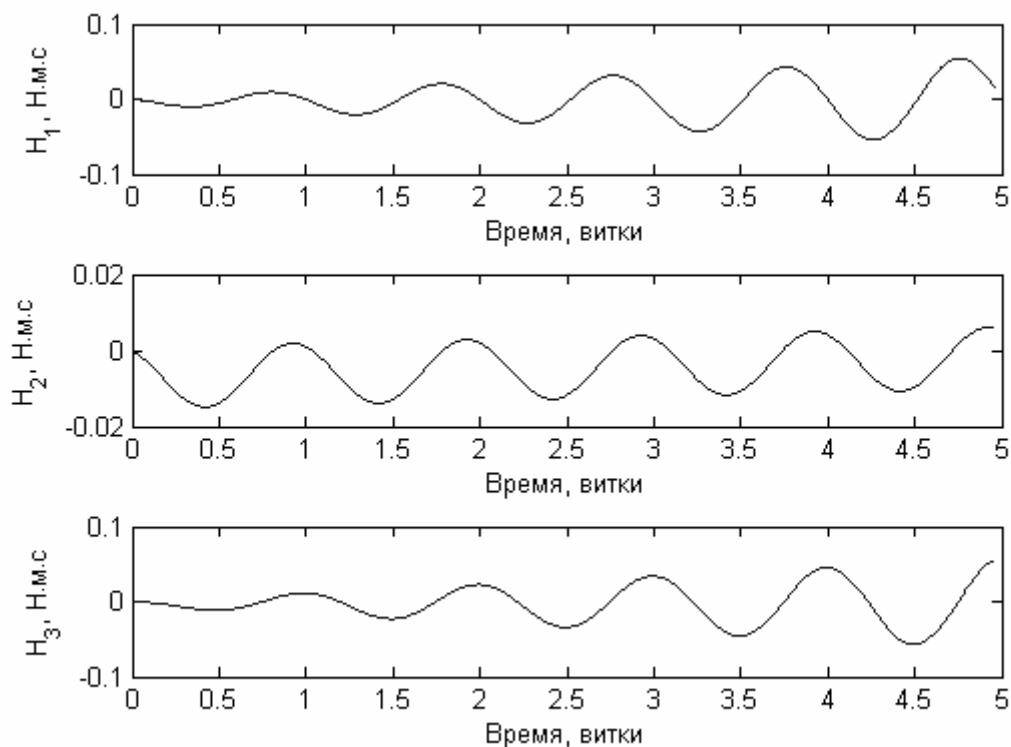


Рис.2.2. Эволюция кинетических моментов маховиков в установившемся режиме под действием аэродинамического момента

Ясно, что время достижения максимального кинетического момента маховиками мало, это связано со слишком большой величиной остаточного магнитного момента. Выйти из этой ситуации можно, например, скомпенсировав его моментом, создаваемым токовыми катушками.

2.6. Лабораторные испытания системы ориентации микроспутника “Чибис-М”

Для верификации алгоритма проведены лабораторные испытания. Описание лабораторной установки дано в Приложении 1. Здесь лишь отметим, что она представляется собой макет системы ориентации и имитатор внешней среды. Далее на рис.2.3-2.4 приведены результаты лабораторных испытаний.

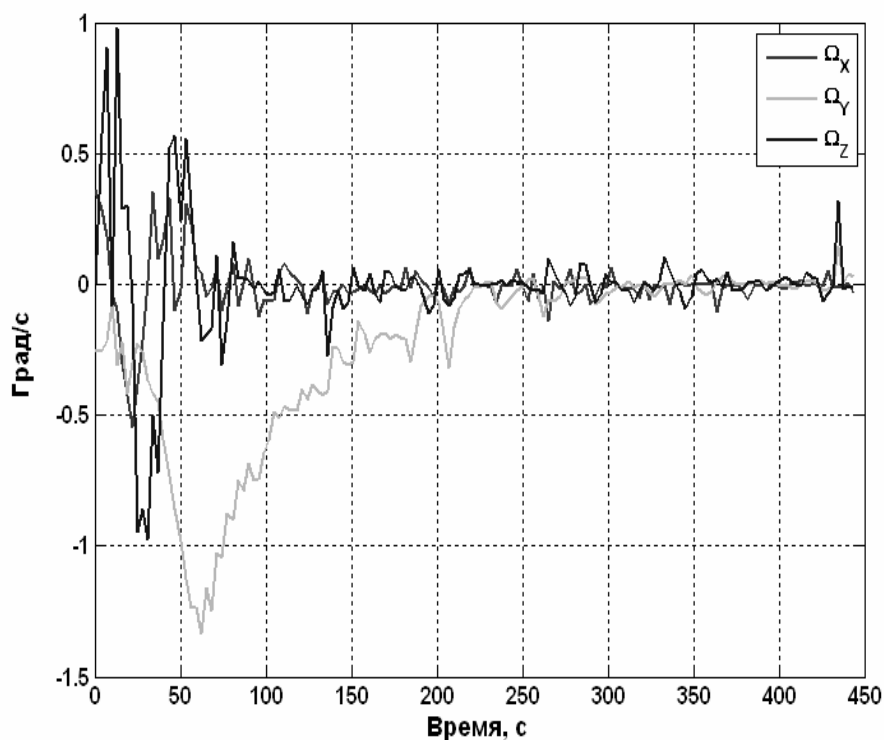


Рис.2.3. Эволюция угловой скорости

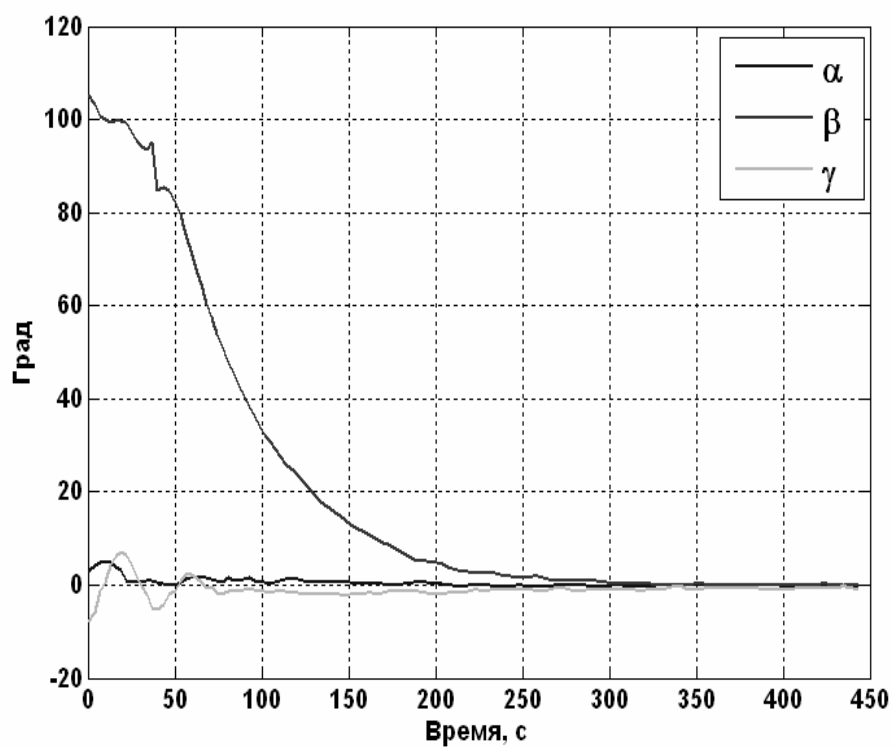


Рис.2.4. Эволюция углов

На приведенных рисунках представлен поворот макета вокруг вертикали в требуемое положение (начальный угол 105°).

Глава 3. Анализ динамики осесимметричного аппарата с трехосной маховичной системой ориентации без разгрузки

В настоящей главе анализируется динамика аппарата с маховичной системой ориентации, состоящей из трёх маховиков, оси которых взаимно перпендикулярны (рис.3.1), без системы разгрузки. Количество маховиков может быть и больше. В этом случае нужно, зная вектор кинетического момента маховиков, перераспределить его между реальными маховиками [24-26, 28].

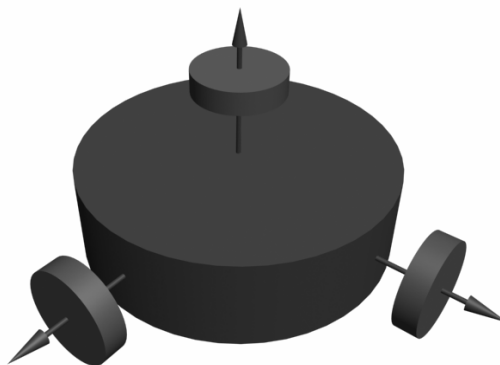


Рис.3.1. Конфигурация маховиков

Следует сказать несколько слов о том, как возникла рассматриваемая в настоящей работе постановка задачи, тогда станут понятными те специфические требования, которые предъявляются к системе. В 2007 году в Институте космической физики (г. Кируна, Швеция) прорабатывался проект марсианского микроспутника [38-42]. В качестве исполнительных органов системы ориентации этого аппарата рассматривались две системы: двигатели малой тяги и маховики. Это связано в первую очередь с тем, что Марс имеет очень слабое магнитное поле, и использовать активную магнитную систему ориентации не представляется возможным. Расчётное время автономного существования аппарата – один марсианский год. Из-за малых размеров и массы аппарата было необходимо сократить до минимума

количество элементов системы ориентации. Поэтому совместное использование маховиков и двигателей малой тяги исключалось. Для обеспечения энергетических нужд аппарата планировалось использовать солнечные батареи. Кроме того, для функционирования полезной нагрузки требовалась его закрутка с постоянной угловой скоростью вокруг оси, направленной на Солнце. Величина этой угловой скорости $0.07c^{-1}$. Естественным было сделать аппарат осесимметричным. Система отделения спутника устроена так, что в момент отделения он мог получить незначительную закрутку в плоскости, лежащей перпендикулярно оси симметрии ($<2^\circ/\text{сек}$), а ориентация аппарата в момент отделения была произвольной.

Таким образом, система ориентации должна развернуть аппарат осью симметрии на Солнце, закрутить его вокруг оси симметрии с заданной угловой скоростью и удерживать в этом положении в течение марсианского года (около 687 земных суток). В настоящей работе исследуется, можно ли использовать на таком аппарате трёхосную маховичную систему ориентации. Как уже было сказано, аппарат вместе с закреплёнными в нём маховиками является динамически осесимметричным.

Итак, рассматривается задача ориентации аппарата на Солнце и его раскрутка до заданной угловой скорости. Причем считаем, что механизмы разгрузки отсутствуют, а номинальный режим функционирования предполагает наличие внешнего возмущающего момента.

3.1. Постановка задачи

В этом разделе опорной системой координат $OX_1X_2X_3$ является система координат, ось OX_1 которой совпадает с осью OS_1 солнечной системы координат, а две других совершают вращение с постоянной угловой скоростью

ω_{01} . Задача системы ориентации состоит в том, чтобы совместить ось симметрии Ox_1 аппарата и ось OX_1 опорной системы координат и удерживать её в этом положении длительное время.

Основными задачами исследования являются определение параметров управления k_a и k_ω , обеспечивающих максимальную степень устойчивости, определение связи между начальными условиями и значениями кинетических моментов маховиков после протекания переходных процессов и исследование эволюции этих моментов на длительных интервалах времени.

В требуемом положении превалирующим возмущением будет гравитационный момент, поэтому в качестве возмущения рассматривается только он. Вся необходимая для работы системы ориентации информация о текущей ориентации считается известной. Параметры орбиты так же считаются известными. Значения, которые будут использоваться для иллюстраций следующие: эксцентриситет $e = 0.57$, $a = 8550$ км, наклонение $i = 77^\circ$. Они соответствуют спутнику, о котором шла речь выше. Орбита считается кеплеровой. Все численные оценки так же относятся к этому спутнику.

3.2. Уравнения движения

Исследование динамики системы удобно проводить в полусвязанной системе координат $Oz_1z_2z_3$, ось Oz_1 которой совпадает с осью симметрии Ox_1 , а две другие вращаются с постоянной угловой скоростью ω_{01} . Запишем уравнения (1.1-1.3) в этой системе. Матрица направляющих косинусов примет вид

$$A = GC, \tag{3.1a}$$

где $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$. Элементы матрицы \mathbf{C} зависят

только от α и β . Видно, что кроме связей, налагаемых на элементы матрицы направляющих косинусов, на матрицу \mathbf{C} налагается дополнительное условие $c_{31} = 0$. Относительная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_z$ в $Oz_1z_2z_3$ запишется как

$$\boldsymbol{\omega}_z = \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\omega}. \quad (3.16)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_z$ – вектор относительной угловой скорости в системе $Oz_1z_2z_3$, а $\boldsymbol{\omega}$ – в связанной системе координат. В этом случае кинематические соотношения можно записать как

$$\dot{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{z3} & -\omega_{z2} \\ -\omega_{z3} & 0 & \omega_{z1} - \dot{\gamma} \\ \omega_{z2} & -\omega_{z1} + \dot{\gamma} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C}.$$

Перейдем теперь к динамическим уравнениям. Как уже было сказано, управляющий момент создается тремя взаимно ортогональными маховиками. В этом случае суммарный кинетический момент будет $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} + \mathbf{H}$, где \mathbf{H} – вектор кинетического момента маховиков в связанной системе координат. Тогда из (1.1) можно найти управляющий момент

$$\mathbf{M}_{упр} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{H}.$$

Перейдем к полусвязанным осям в уравнении (1.1), сделав кроме замен (3.1), еще замену $\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{H}_z$ (\mathbf{H}_z – вектор кинетического момента в полусвязанной системе координат)

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{z,abc} + \mathbf{J}\mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{z,abc} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{H}}_z + \mathbf{G}\dot{\mathbf{H}}_z + \mathbf{G}\boldsymbol{\omega}_{z,abc} \times (\mathbf{J}\mathbf{G}\boldsymbol{\omega}_{z,abc} + \mathbf{G}\mathbf{H}_z) = \mathbf{M}_{ви}. \quad (3.2)$$

В силу того, что тензор инерции имеет диагональный вид и $J_2 = J_3$, матричные произведения $\mathbf{J}\mathbf{G}$ и $\mathbf{J}\dot{\mathbf{G}}$ коммутативны, поэтому после умножения уравнения слева на матрицу \mathbf{G}^{-1} , получим

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{z,abc} + \dot{\mathbf{H}}_z + \boldsymbol{\omega}_{z,abc} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{z,abc} + \mathbf{H}_z) - \begin{pmatrix} \omega_{1z} - \dot{\alpha} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{z,abc} + \mathbf{H}_z) = \mathbf{M}_{z,ви}.$$

Здесь абсолютная угловая скорость равна $\boldsymbol{\omega}_{z,abc} = \boldsymbol{\omega}_{z,отн} + \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_{01} \quad \omega_{02} \cos \omega_{01}t \quad -\omega_{02} \sin \omega_{01}t)^T$, ω_{02} угловая скорость годового движения Марса. Таким образом, система разделяется на две подсистемы. Одна из них описывает эволюцию угла поворота вокруг оси симметрии, другая – остальное движение. Уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{z,abc} + \dot{\mathbf{H}}_z + \boldsymbol{\omega}_{z,abc} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{z,abc} + \mathbf{H}_z) - \begin{pmatrix} \omega_{1z} - \dot{\alpha} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{z,abc} + \mathbf{H}_z) = \mathbf{M}_{z,ви}, \quad (3.3)$$

$$\dot{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{z3} & -\omega_{z2} \\ -\omega_{z3} & 0 & \dot{\alpha} \sin \beta \\ \omega_{z2} & -\dot{\alpha} \sin \beta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C},$$

$$\dot{\gamma} = \omega_{1z} - \dot{\alpha} \sin \beta. \quad (3.4)$$

В дальнейшем будем заниматься исследованием движения только системы (3.3).

Требуемое положение равновесия для системы (3.3) будет $c_{11}=1$, $\omega_{z,отн}=0$, поэтому вместо функции (1.4) в качестве кандидата на функцию Ляпунова возьмем функцию

$$V = \frac{1}{2}(\omega_{отн}, \mathbf{J}\omega_{отн}) + k_a(1 - c_{11}). \quad (3.5)$$

Проделав преобразования, аналогичные п.1.2, получим

$$\dot{V} = \left(\omega_{отн}, \left[\mathbf{M}_{z,ви} - \dot{\mathbf{H}}_z - \omega_{z,abc} \times (\mathbf{J}\omega_{z,abc} + \mathbf{H}_z) + \begin{pmatrix} \omega_{1z} - \dot{\alpha} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{J}\omega_{z,abc} + \mathbf{H}_z) - \mathbf{JWC}\omega_0 - \mathbf{JC}\dot{\omega}_0 + k_a\mathbf{S} \right] \right)$$

Или, если учесть, что

$$\left(\omega_{отн}, \omega_{отн} \times (\mathbf{J}\omega_{z,abc} + \mathbf{H}_z) \right) = 0 \text{ и } \left(\omega_{отн}, \begin{pmatrix} \omega_{1z} - \dot{\alpha} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{J}\omega_{z,отн} \right) = 0,$$

$$\dot{V} = \left(\omega_{отн}, \left[\mathbf{M}_{z,ви} - \dot{\mathbf{H}}_z - C\omega_0 \times (\mathbf{J}\omega_{z,abc} + \mathbf{H}_z) + \begin{pmatrix} \omega_{1z} - \dot{\alpha} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{JC}\omega_0 + \mathbf{H}_z) - \mathbf{JWC}\omega_0 - \mathbf{JC}\dot{\omega}_0 + k_a\mathbf{S} \right] \right).$$

Здесь $\mathbf{S} = (0 \quad c_{31} \quad -c_{21})^T$. Отсюда получаем закон управления

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_z = k_a \mathbf{S} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{z,omh} + \begin{pmatrix} \omega_{1z} - \dot{\alpha} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{J}\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{H}_z) - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{H}_z + \\ + \mathbf{M}_{z,ви} - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{z,abc} - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J}\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений, описывающая движение системы, запишется в виде

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{z,omh} + k_a \mathbf{S} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{z,omh} - \begin{pmatrix} \omega_{1z} - \dot{\alpha} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{z,omh} + \boldsymbol{\omega}_{z,omh} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{z,abc} + \mathbf{H}_z) = 0$$

,

$$\dot{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{z3} & -\omega_{z2} \\ -\omega_{z3} & 0 & \dot{\alpha} \sin \beta \\ \omega_{z2} & -\dot{\alpha} \sin \beta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_z = \mathbf{M}_{z,ви} + k_a \mathbf{S} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{z,omh} + \begin{pmatrix} \omega_{1z} - \dot{\alpha} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{J}\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{H}_z) - \\ - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{z,abc} + \mathbf{H}_z) - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J}\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение системы задает управление, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость требуемого положения, так как функция (3.5) удовлетворяет всем требованиям, накладываемых теоремой Барбашина-Красовского на V . Однако, очевидно, что такое управление нельзя использовать в общем случае (вырождение самолетных углов при $\beta = \pi/2$ и, как следствие, невозможность определить $\dot{\alpha}$). Покажем, что при переходе к связанным осям, в которых и должен вычисляться управляющий момент на борту:

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M} + k_a \begin{pmatrix} 0 \\ a_{31} \\ -a_{21} \end{pmatrix} + k_\omega \boldsymbol{\omega} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} + \mathbf{H}) - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0.$$

Видно, что в законе управления отсутствуют члены, которые приводили бы к бесконечным величинам управляющего момента. Дополнив закон управления уравнениями движения, получим систему, описывающую движение аппарата в общем случае,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_a \begin{pmatrix} 0 \\ a_{31} \\ -a_{21} \end{pmatrix} + k_\omega \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{отн} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} + \mathbf{H}) &= 0, \\ \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M} + k_a \begin{pmatrix} 0 \\ a_{31} \\ -a_{21} \end{pmatrix} + k_\omega \boldsymbol{\omega} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} + \mathbf{H}) - \mathbf{W}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\mathbf{A}.$$

Эта система используется для численного анализа системы. Систему (3.6) удобно использовать для аналитического исследования движения вблизи положения равновесия.

3.3. Исследование переходных процессов

Основными задачами исследования переходных процессов являются нахождение зависимости кинетических моментов маховиков после протекания переходных процессов от начальных условий и определение параметров закона управления k_a и k_ω , для которых степень устойчивости характеристического многочлена линеаризованной системы максимальна. Как уже было сказано, аппарат отделяется так, что вектор начальной угловой скорости лежит в

плоскости Ox_2x_3 . В силу осесимметричности аппарата без ограничения общности направим вектор начальной угловой скорости по оси Oz_3 полусвязанной системы координат, то есть $\boldsymbol{\omega}_{z,отн0} = (0; 0; \omega_{30})$, а в качестве кинетических моментов маховиков выберем их проекции на эти оси.

Найдём сначала зависимость значений кинетических моментов маховиков от начальных условий после протекания переходных процессов. Будем считать, что управляющий момент, создаваемый маховиками, много больше гравитационного момента (например, для указанной орбиты Марса $M_{grav} \leq 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_{упр} \approx 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$). Поэтому можно считать, что во время переходных процессов вектор кинетического момента сохраняется в инерциальном пространстве. Запишем вектор кинетического момента в этой системе координат

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} + \mathbf{H} = const.$$

Перепишем это выражение в полусвязанных осях

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_1^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{C}^T (\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{отн} + \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0) + \mathbf{H}) = const. \quad (3.8)$$

Здесь \mathbf{D}_1 матрица перехода от $OY_1Y_2Y_3$ к $OS_1S_2S_3$ (поворот на угол $\omega_{02}t$ вокруг оси OY_2), \mathbf{D}_2 – матрица перехода от $OS_1S_2S_3$ к $OX_1X_2X_3$ (поворот на угол $\omega_{01}t$ вокруг оси OS_1).

Найдём теперь зависимость между начальными условиями и конечными значениями кинетических моментов маховиков. Естественно считать, что в начальный момент времени маховики не раскручены, т.е. $\mathbf{H} = 0$. В конечный момент времени \mathbf{C} – единичная матрица, а относительная угловая скорость равна нулю. Запишем (3.8) в начальный момент времени ($t_0 = 0$) и конечный момент времени t

$$\mathbf{D}_1^T(t_0)\mathbf{D}_2^T(t_0)\mathbf{C}^T(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{\text{омн}}|_{t=0} + \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0) = \mathbf{D}_1^T(t)\mathbf{D}_2^T(t)(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{H}). \quad (3.9)$$

За время протекания переходных процессов можно пренебречь изменением направления на Солнце, поэтому считаем, что $\mathbf{D}_1^T(t_0) = \mathbf{D}_1^T(t)$. Перейдем к безразмерным кинетическим моментам и угловым скоростям по формулам

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_{01} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \cos \omega_{01} t & -\varepsilon \sin \omega_{01} t \end{pmatrix}^T = \omega_{01} \boldsymbol{\Omega}_0, \mathbf{J} = J_1 \text{diag}(1 \quad \theta \quad \theta) = J_1 \mathbf{I}, \\ \mathbf{H} &= J_1 \omega_{01} \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_{\text{омн}} = \omega_{01} \boldsymbol{\Omega}_{\text{омн}}, \tau = \omega_{01} t. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Величина $\varepsilon \ll 1$ (в нашем случае $\varepsilon = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \sim 10^{-6}$), т.е. считаем, что угловая скорость собственного вращения намного превышает скорость годового движения планеты. Поэтому пренебрегаем слагаемыми, содержащими этот множитель. Таким образом, (3.9) переписется в виде

$$\mathbf{C}^T(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}_{\text{омн}} + \mathbf{I}\mathbf{C}\boldsymbol{\Omega}_0) = \mathbf{D}_2^T(\tau - \tau_0)(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{h})$$

или в скалярной форме

$$\begin{aligned} h_{S1} &= -1 + \Omega_{10} \cos \alpha \cos \beta - \theta \Omega_{20} \cos \alpha \sin \beta + \theta \Omega_{30} \sin \alpha, \\ h_{S2} &= \Omega_{10} \sin \beta + \theta \Omega_{20} \cos \beta, \\ h_{S3} &= -\Omega_{10} \sin \alpha \cos \beta + \theta \Omega_{20} \sin \alpha \sin \beta + \theta \Omega_{30} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Здесь h_{S2}, h_{S3} – проекции вектора кинетического момента маховиков на оси солнечной системы координат. Для иллюстрации приведем графики, отражающие зависимости кинетических моментов маховиков от начальных условий для марсианского аппарата. Как уже было сказано выше, в силу особенностей отделения, а также в силу осевой симметрии, можно считать, что

$\Omega_{10} = \Omega_{20} = 0$, тогда зависимость кинетических моментов маховиков от начальных условий будет:

$$h_{S1} = -1 + \theta\Omega_{30} \sin \alpha,$$

$$h_{S2} = 0,$$

$$h_{S3} = \theta\Omega_{30} \cos \alpha.$$

На рис.3.2 для иллюстрации приведены зависимости кинетических моментов от начального угла α , и $\omega_{30} = 0.035 \text{ сек}^{-1}$.

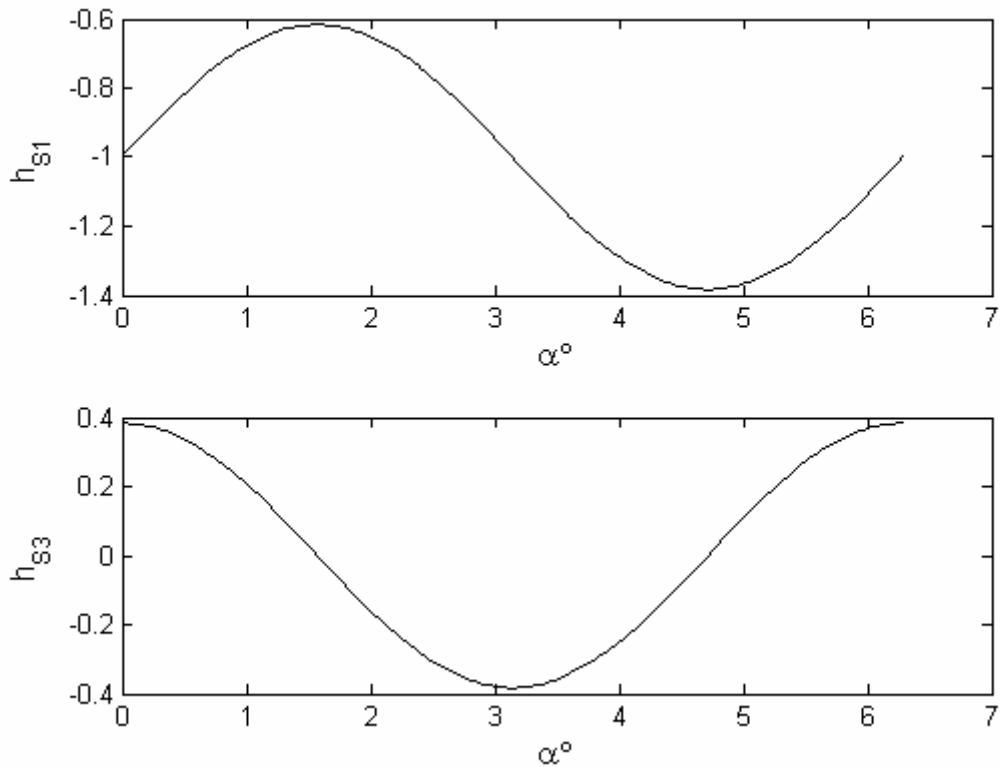


Рис.3.2. Зависимость кинетических моментов маховиков от начального угла α

Оценка сверху величин кинетических моментов маховиков по оси симметрии и перпендикулярной ей по всем возможным начальным ориентациям (все значения α и β) при указанных значениях моментов

инерции и максимальной начальной угловой скорости $\Omega_{30} = 0.5$ ($\omega_{30} = 0.035c^{-1}$)
 дает

$$\begin{aligned} h_{S1} &= 1.38 \quad (H_1 = 0.08 H \cdot m \cdot c), \\ h_{S3} &= 0.38 \quad (H_{S3} = 0.02 H \cdot m \cdot c). \end{aligned} \tag{3.11}$$

При этом распределение кинетического момента в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, между двумя реальными маховиками зависит от времени переходных процессов. Можно так подобрать параметры управления k_a и k_ω , чтобы равномерно распределить этот момент между двумя маховикам. Параметры управления зависят от начальных условий, а вычисления довольно ресурсоемкие, чтобы проводить их на борту. С другой стороны, Марс достаточно удален, чтобы проводить вычисления на Земле. Поэтому хоть эта задача и является принципиально разрешимой, ее решение в настоящей работе не рассматривается. В дальнейшем найденные оценки кинетических моментов маховиков будут использоваться в численных примерах.

Перейдем теперь в модели (3.6) к безразмерным переменным $\mathbf{\Omega}$, \mathbf{h} и безразмерному времени τ по формулам (3.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\mathbf{\Omega}'_{z,отн} + K_a \mathbf{S} + K_\omega \mathbf{\Omega}_{z,отн} - \begin{pmatrix} \Omega_{1z} - \frac{\alpha'}{\omega_{01}} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{I}\mathbf{\Omega}_{z,отн} + \\ + \mathbf{\Omega}_{z,отн} \times (\mathbf{I}\mathbf{\Omega}_{z,абс} + \mathbf{h}_z) = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{z3} & -\Omega_{z2} \\ -\Omega_{z3} & 0 & \frac{\alpha'}{\omega_{01}} \sin \beta \\ \Omega_{z2} & -\frac{\alpha'}{\omega_{01}} \sin \beta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C},$$

$$\mathbf{h}'_z = K_a \mathbf{S} + K_\omega \boldsymbol{\Omega}_{z,omh} + \begin{pmatrix} \Omega_{1z} - \frac{\alpha'}{\omega_{01}} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{I} \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{h}_z) -$$

$$- \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}_0 \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_{z,abc} + \mathbf{h}_z) - \mathbf{I} \mathbf{W} \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}_0 - \mathbf{I} \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}'_0.$$

Здесь штрихом обозначена производная по безразмерному времени τ ; $K_a = k_a / J_1 \omega_{01}^2$, $K_\omega = k_\omega / J_1 \omega_{01}$ – безразмерные параметры управления. Как уже было сказано выше, будем пренебрегать слагаемыми порядка ε . Линеаризуем систему в окрестности положения равновесия

$$\boldsymbol{\Omega}_z = (0, 0, 0), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда линеаризованная система запишется так:

$$\mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}'_{z,omh} + K_a \mathbf{S} + K_\omega \boldsymbol{\Omega}_{z,omh} + \boldsymbol{\Omega}_{z,omh} \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{h}_z) = 0$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{z3} & -\Omega_{z2} \\ -\Omega_{z3} & 0 & 0 \\ \Omega_{z2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{h}'_z = K_a \mathbf{S} + K_\omega \boldsymbol{\Omega}_{z,omh} + \begin{pmatrix} \Omega_{1z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{h}_z) - \\ - \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{I} \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_{z,omh} - \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{h}_z - \mathbf{I} \mathbf{W} \boldsymbol{\Omega}_0 - \mathbf{I} \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}'_0.$$

Как видно из выражений (3.11), величина кинетического момента маховиков значительна по сравнению с другими слагаемыми в (3.12а) и пренебрегать ей нельзя. Из последнего уравнения системы (3.12а) ясно, что вектор \mathbf{h}_z меняется быстро (благодаря слагаемым вида $\mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{h}_z$). Это изменение связано с тем, что спутник вращается вокруг своей оси симметрии со значительной скоростью. Перейдем в систему координат, где этого вращения нет. Этой системой будет солнечная система координат $OS_1S_2S_3$. Как уже отмечалось выше, переход между системами запишется в виде $\mathbf{h}_z = \mathbf{D}_2 \mathbf{h}_s$. Запишем последнее уравнение системы (3.12а) в новой системе координат

$$\mathbf{h}'_s = K_a \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + K_\omega \boldsymbol{\Omega}_{s,omh} + \begin{pmatrix} \Omega_{1s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{h}_s \right) - \mathbf{C}_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{I} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{I} \mathbf{C}_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_{z,omh} - \begin{pmatrix} -\psi h_{s3} - \varphi h_{s2} \\ \varphi h_{s1} \\ \psi h_{s1} \end{pmatrix} \times \mathbf{h}_z - \mathbf{I} \mathbf{W} \boldsymbol{\Omega}_0 - \mathbf{I} \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}'_0. \quad (3.13)$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{C}_s = \mathbf{D}_2^T \mathbf{C} \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\varphi \\ -\psi & 1 & 0 \\ \varphi & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \alpha \cos \tau - \beta \sin \tau, \\ \psi &= \alpha \sin \tau + \beta \cos \tau.\end{aligned}$$

Как видно из (3.13), вектор \mathbf{h}_s меняется медленно (производная пропорциональна величинам первого порядка малости), поэтому представим его в виде

$$\mathbf{h}_s = \mathbf{h}_{s0} + \mathbf{g}_s,$$

где \mathbf{h}_{s0} – некоторый постоянный вектор (который зависит от начальных условий отделения), а \mathbf{g}_s – переменный вектор первого порядка малости (имеет тот же порядок малости, что и Ω_s). Запишем, с учетом всего выше сказанного, первые два уравнения системы (3.12а) в скалярном виде

$$\begin{aligned}\Omega'_{s1} + K_\omega \Omega_{s1} + h_{s3} \Omega_{s2} - h_{s2} \Omega_{s3} &= 0, \\ \theta \Omega'_{s2} + K_\omega \Omega_{s2} - h_{s3} \Omega_{s1} + (h_{s1} + \theta + 1) \Omega_{s3} + K_a \varphi &= 0, \\ \theta \Omega'_{s3} - K_\omega \Omega_{s3} + h_{s2} \Omega_{s1} - (h_{s1} + \theta + 1) \Omega_{s2} + K_a \psi &= 0, \\ \varphi' &= \Omega_{s2} - \psi, \\ \psi' &= \Omega_{s3} + \varphi.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\theta^2 \lambda^5 + (\theta^2 + 2\theta) K_\omega \lambda^4 + (\theta^2 + (h_{s2}^2 + h_{s3}^2) \theta + (\theta + h_{s1} + 1)^2 + \\ + K_\omega^2 + 2\theta K_\omega^2 + 2K_a \theta) \lambda^3 + (2K_a \theta + (h_{s2}^2 + h_{s3}^2) + (\theta + h_{s1} + 1)^2 + \\ + \theta^2 + 2K_a + K_\omega^2 + 2\theta) K_\omega \lambda^2 + ((\theta + h_{s1} + 1 - K_a)^2 + (h_{s2}^2 + h_{s3}^2)(K_a + \theta) + \\ + 2K_a K_\omega^2 + K_\omega^2 + 2\theta K_\omega^2) \lambda + K_\omega ((\theta + h_{s1} + 1 - K_a)^2 + h_{s2}^2 + h_{s3}^2 + K_\omega^2) = 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Для определения параметров управления K_a и K_ω , обеспечивающих максимальную степень устойчивости, сначала рассмотрим случай

$$h_{s2} = h_{s3} = 0.$$

Тогда характеристическое уравнение (3.14) примет вид

$$\begin{aligned} & \theta^2 \lambda^5 + (\theta^2 + 2\theta)K_\omega \lambda^4 + (\theta^2 + (\theta + h_{s1} + 1)^2 + K_\omega^2 + 2\theta K_\omega^2 + 2K_a \theta) \lambda^3 + \\ & + (2K_a \theta + (\theta + h_{s1} + 1)^2 + \theta^2 + 2K_a + K_\omega^2) K_\omega \lambda^2 + ((\theta + h_{s1} + 1 - K_a)^2 + \\ & + 2K_a K_\omega^2 + K_\omega^2 + 2\theta K_\omega^2) \lambda + K_\omega ((\theta + h_{s1} + 1 - K_a)^2 + K_\omega^2) = 0. \end{aligned}$$

или, учитывая что $\lambda = -K_\omega$ – корень, выделим сомножитель $(\lambda + K_\omega)$:

$$\begin{aligned} & [\theta^2 \lambda^4 + 2\theta K_\omega \lambda^3 + (K_\omega^2 + 2K_a \theta + (1 + h_{s1} + \theta)^2 + \theta^2) \lambda^2 + \\ & + (2K_a K_\omega + 2\theta K_\omega) \lambda + (\theta - K_a + 1 + h_{s1})^2 + K_\omega^2] (\lambda + K_\omega) = 0. \end{aligned} \quad (3.14a)$$

Проведём теперь исследование устойчивости многочлена (выражение во втором сомножителе не повлияет на устойчивость полинома)

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & \theta^2 \lambda^4 + 2\theta K_\omega \lambda^3 + (K_\omega^2 + 2K_a \theta + (1 + h_{s1} + \theta)^2 + \theta^2) \lambda^2 + \\ & + (2K_a K_\omega + 2\theta K_\omega) \lambda + (\theta - K_a + 1 + h_{s1})^2 + K_\omega^2. \end{aligned}$$

Очевидно, что все коэффициенты положительны, а, значит, выполняется необходимое условие устойчивости. Воспользуемся критерием Лъенара-Шипара, чтобы проверить выполнение достаточного условия. Для этого запишем главные нечетные миноры определителя Гурвица и убедимся, что они больше нуля

$$\Delta_1 = 2\theta K_\omega > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2\theta K_\omega & 2K_a K_\omega + 2K_\omega \theta & 0 \\ \theta^2 & K_\omega^2 + 2K_a \theta + (1 + h_{s1} + \theta)^2 + \theta^2 & (\theta - K_a + h_{s1} + 1)^2 + K_\omega^2 \\ 0 & 2\theta K_\omega & 2K_a K_\omega + 2K_\omega \theta \end{vmatrix} =$$

$$= 4K_\omega^2 (K_a + \theta) [K_\omega^2 + (1 + h_{s1} + \theta)^2 + k_a \theta] > 0.$$

Уравнение $P(\lambda) = 0$ можно переписать в виде

$$(\theta \lambda^2 + K_\omega \lambda + K_a - 1 - \theta - h_{s1})^2 = -((1 + h_{s1} + 2\theta)\lambda + K_\omega)^2.$$

Тогда его корнями будут две пары комплексно-сопряженных корней с отрицательными действительными частями

$$\lambda_{1,3} = -\frac{K_\omega}{2\theta} \pm \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{K_\omega^2 - 4K_a \theta - (h_{s1} + 1)^2 + f(K_a, K_\omega)}{2}} +$$

$$+ i \left(\frac{h_{s1} + 1 + 2\theta}{2\theta} \pm \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{f(K_a, K_\omega) - (K_\omega^2 - 4K_a \theta - (h_{s1} + 1)^2)}{2}} \right),$$

$$\lambda_{2,4} = -\frac{K_\omega}{2\theta} \pm \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{K_\omega^2 - 4K_a \theta - (h_{s1} + 1)^2 + f(K_a, K_\omega)}{2}} +$$

$$+ i \left(-\frac{h_{s1} + 1 + 2\theta}{2\theta} \pm \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{f(K_a, K_\omega) - (K_\omega^2 - 4K_a \theta - (h_{s1} + 1)^2)}{2}} \right),$$

где $f(K_a, K_\omega) = \sqrt{(K_\omega^2 - 4K_a \theta - (h_{s1} + 1)^2)^2 + 4K_\omega^2 (h_{s1} + 1)^2}$.

Будем искать такие параметры, для которых степень устойчивости многочлена максимальна. Прежде чем перейти к поиску, нужно указать ещё одно ограничение на параметры K_a и K_ω , которое следует из закона управления (последнее уравнение 3.6) и свойств маховиков. Каждый маховик имеет предельное значение управляющего момента. Тогда можно записать следующее неравенство:

$$h'_{\max} \geq K_a + \Omega_{\max} K_\omega. \quad (3.15)$$

Здесь h'_{\max} и Ω_{\max} – максимальный момент, создаваемый маховиком, и максимальная начальная угловая скорость, соответственно. Неравенство (3.15) задаёт полуплоскость, лежащую ниже прямой

$$K_\omega = -\frac{1}{\Omega_{\max}}(K_a - h'_{\max}). \quad (3.15a)$$

Вернёмся теперь к характеристическому уравнению (3.14). Действительные части его корней имеют вид

$$\begin{aligned} \text{real } \lambda_{1,2} &= -\frac{K_\omega}{2\theta} + \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{K_\omega^2 - 4K_a\theta - (h_{s1} + 1)^2 + f(K_a, K_\omega)}{2}}, \\ \text{real } \lambda_{3,4} &= -\frac{K_\omega}{2\theta} - \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{K_\omega^2 - 4K_a\theta - (h_{s1} + 1)^2 + f(K_a, K_\omega)}{2}}. \end{aligned}$$

Ясно, что первая пара корней лежит правее второй (для всех $K_\omega > 0$), поэтому можно ограничиться нахождением зависимости значения действительной части от параметров управления первой пары корней характеристического уравнения (3.14a). На рис.3.3 представлена зависимость действительной части первой пары корней от параметров управления K_a и K_ω . Прямая линия (3.15a) ограничивает область допустимых значений этих параметров (как уже было сказано K_a и K_ω – положительные числа, поэтому интересующая нас область лежит внутри треугольника, образованного прямой (3.15a) и прямыми $K_a = 0$ и $K_\omega = 0$). Кривые – это изолинии с одинаковым значением действительной части первой пары корней характеристического уравнения.

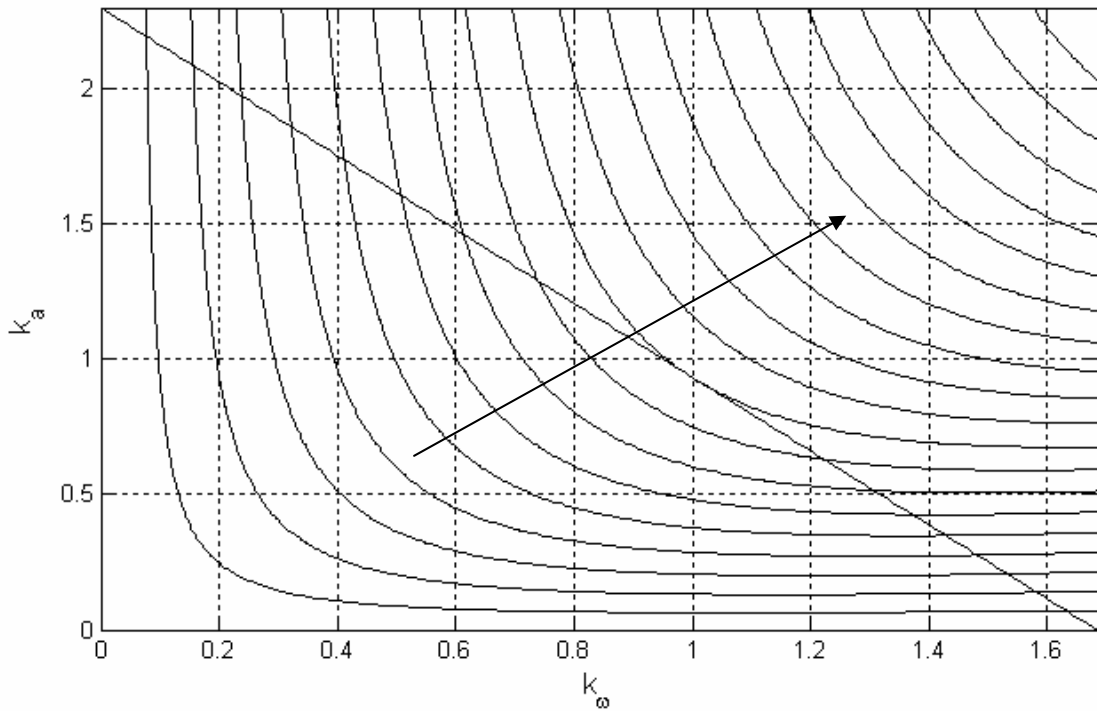


Рис.3.3. Зависимость действительных частей первой пары корней характеристического уравнения от параметров управления (стрелкой показано направление уменьшения действительных частей)

На рис.3.3 изолинии (линии одинаковых значений действительных частей) с уменьшением действительной части корней уравнения смещаются в направлении, указанном стрелкой. Поэтому параметрами, обеспечивающими максимальную степень устойчивости, будут те, которые находятся в точке касания кривых-изолиний и прямой (3.15а). Для того чтобы их определить, запишем уравнение кривых, изображённых на рис.3.3,

$$K_a = \frac{1}{4\theta} \left[K_\omega^2 - (h_{s1} + 1)^2 - (2\theta\mu + K_\omega)^2 + \frac{K_\omega^2 (h_{s1} + 1)^2}{(2\theta\mu + K_\omega)^2} \right].$$

Здесь μ – такое значение действительной части корня, при котором происходит касание. Так как прямая (3.15а) является касательной, то для

нахождения K_a , K_ω , μ нужно решить следующую алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dK_a}{dK_\omega} &= \frac{1}{4\theta} (2K_\omega - 2(2\theta\mu + K_\omega) + \frac{2K_\omega(h_{s1} + 1)^2}{(2\theta\mu + K_\omega)^2} - \frac{2K_\omega^2(h_{s1} + 1)^2}{(2\theta\mu + K_\omega)^3}) = -\Omega_{\max}, \\ \frac{1}{4\theta} (K_\omega^2 - (h_{s1} + 1)^2 - (2\theta\mu + K_\omega)^2 + \frac{K_\omega^2(h_{s1} + 1)^2}{(2\theta\mu + K_\omega)^2}) &= K_a, \\ -\Omega_{\max} K_\omega + h'_{\max} &= K_a. \end{aligned}$$

Решая эту систему численно относительно K_ω , K_a , μ , находим значения параметров.

Итак, были рассмотрены две пары комплексно-сопряженных корней уравнения (3.14а), теперь вернёмся к исходному уравнению пятой степени. Может получиться так, что самым правым корнем окажется $\lambda = -K_\omega$, тогда найденные выше параметры уже не будут обеспечивать максимальную степень устойчивости. Это произойдёт тогда, когда

$$-K_\omega \geq -\frac{K_\omega}{2\theta} + \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{K_\omega^2 - 4K_a\theta - (h_{s1} + 1)^2 + f(K_a, K_\omega)}{2}}.$$

Решим это неравенство. Перепишем его в виде

$$\sqrt{\frac{K_\omega^2 - 4K_a\theta - (h_{s1} + 1)^2 + f(K_a, K_\omega)}{2}} \leq K_\omega(1 - 2\theta).$$

Для выполнения неравенства необходимо выполнение $1 - 2\theta \geq 0$. Равенство $\theta = 1/2$ при ограничениях, наложенных на параметры управления, не выполняется. Неравенство же $\theta < 1/2$ противоречит условию физической

реализуемости тела (неравенству треугольника для моментов инерции). То есть корень $\lambda = -K_\omega$ лежит левее самого правого корня уравнения четвёртой степени при всех допустимых значениях параметров системы.

Перейдём теперь к исходному уравнению. Его можно переписать в виде

$$a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\left(1 + \frac{(h_{s2}^2 + h_{s3}^2)\theta}{a_2}\right)\lambda^3 + a_3\left(1 + \frac{h_{s2}^2 + h_{s3}^2}{a_3}\right)\lambda^2 + \\ + a_4\left(1 + \frac{(h_{s2}^2 + h_{s3}^2)(K_a + \theta)}{a_4}\right)\lambda + a_5\left(1 + \frac{h_{s2}^2 + h_{s3}^2}{a_5}\right) = 0.$$

Здесь $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ – коэффициенты исходного полинома. В общем случае параметры управления будут зависеть от кинетических моментов маховиков и, как следствие, от начальных условий, что потребует расчета этих параметров при отделении. Сделать это точно в условиях ограниченных вычислительных возможностей бортового компьютера и времени до включения системы ориентации проблематично. Однако, учитывая малость кинетического момента маховиков после протекания переходных процессов, можно сказать, что корни уравнения (3.14) будут мало отличаться от корней уравнения (3.14а) (все корни различные, поэтому, согласно [43], корни будут аналитичны по малому параметру). Следовательно, параметры управления для любых значений кинетических моментов маховиков будут близки к тем, что были получены выше. Например, при $h_{s1} = -0.8$ ($h_{s2} = h_{s3} = 0$) – $K_a \approx 0.68$, $K_\omega \approx 1.18$, а при $h_{s1} = -0.8$ ($h_{s2} = h_{s3} = 0.2$) – $K_a \approx 0.74$, $K_\omega \approx 1.15$. При этом степень устойчивости будет при этих параметрах $\mu = 0.5734$, а при параметрах $K_a \approx 0.68$, $K_\omega \approx 1.18$ – $\mu = 0.5704$. Видно, что степень устойчивости незначительно отличается от максимальной.

Итак, исследование переходных процессов, в первую очередь, продемонстрировало, какие параметры управления K_a и K_ω необходимо выбирать с точки зрения быстроты протекания переходных процессов, а во-

вторых, дало возможность получить зависимости конечных значений кинетических моментов маховиков от начальных условий.

3.4. Исследование эволюции кинетических моментов маховиков в стационарном режиме

Для исследования насыщения маховиков в течение длительного времени исследуем стационарный режим. Запишем закон управления, описывающий изменение кинетических моментов маховиков в установившемся режиме. Ясно, что в этом случае

$$\Omega_{отн} = 0, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\mathbf{h}'_z + \Omega_0 \times \mathbf{h}_z = \frac{\mathbf{M}_z}{J_1 \omega_{01}^2} - \Omega_0 \times \mathbf{I} \Omega_0 - \mathbf{I} \Omega'_0 \quad (3.16)$$

Перейдем в систему $OS_1S_2S_3$, матрица перехода от системы $OS_1S_2S_3$ к $Oz_1z_2z_3$ имеет вид

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tau & \sin \tau \\ 0 & -\sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix}.$$

Переход в новую систему координат осуществляется по формулам

$$\mathbf{h}_z = \mathbf{D}_2 \mathbf{h}_s, \quad \mathbf{\Omega}_{z0} = \mathbf{D}_2 \mathbf{\Omega}_{s0}$$

После такой замены переменных уравнения (3.16) в скалярной форме будут иметь вид (как уже говорилось, в качестве момента внешних сил рассматривается только гравитационный момент)

$$\begin{aligned} h'_{s1} + \varepsilon h_{s3} &= 0, \\ h'_{s2} &= 3 \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2} (1 + e \cos \mathcal{G})^3 (1 - \theta) e_{s1} e_{s3}, \\ h'_{s3} - \varepsilon h_{s1} &= 3 \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2} (1 + e \cos \mathcal{G})^3 (\theta - 1) e_{s2} e_{s3}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь \mathcal{G} – истинная аномалия., e_{s1} , e_{s2} , e_{s3} – компоненты вектора местной вертикали в осях $OS_1S_2S_3$ и они равны:

$$\begin{pmatrix} e_{s1} \\ e_{s2} \\ e_{s3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varepsilon\tau) \cos u \cos i - \cos(\varepsilon\tau) \sin u \\ -\sin i \cos u \\ \sin(\varepsilon\tau) \sin u + \cos(\varepsilon\tau) \cos i \cos u \end{pmatrix}.$$

Выражение для момента, стоящее в правой части (3.17), при подстановке в него компонент e_{s1} , e_{s2} , e_{s3} и раскрытии скобок даст в решении резонансный член

$$\begin{aligned} h_{s1} &= f_{s1}(t) + \frac{3}{16} \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2} (1 - \theta) \sin 2i \cos(\varepsilon\tau) \varepsilon\tau, \\ h_{s2} &= f_{s2}(t), \\ h_{s3} &= f_{s3}(t) + \frac{3}{16} \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2} (\theta - 1) \sin 2i \sin(\varepsilon\tau) \varepsilon\tau, \end{aligned}$$

где $f_{s1}(t), f_{s2}(t), f_{s3}(t)$ – периодические функции. Тогда, переходя к системе $Oz_1z_2z_3$, получим

$$\begin{aligned} h_{z1} &= f_{z1}(t) + \frac{3}{16} \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2} (1 - \theta) \sin 2i \cos(\varepsilon\tau) \varepsilon\tau, \\ h_{z2} &= f_{z2}(t) + \frac{3}{16} \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2} (\theta - 1) \sin 2i \sin \tau \sin(\varepsilon\tau) \varepsilon\tau, \\ h_{z3} &= f_{z3}(t) + \frac{3}{16} \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2} (\theta - 1) \sin 2i \cos \tau \sin(\varepsilon\tau) \varepsilon\tau. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Видно, что в решении (3.18) имеются члены, пропорциональные времени, однако коэффициенты при них малы. Это позволяет избежать насыщения маховиков в течение длительного времени. Более того, коэффициенты в этих слагаемых содержат $\sin 2i$, который обращается в нуль при значениях $i = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Если есть возможность выбора орбиты, то следует выбирать орбиту спутника, либо лежащую в плоскости эклиптики, либо перпендикулярную ей. Для определения требуемого запаса кинетического момента, перейдем в (3.18) к размерным величинам:

$$\begin{aligned} H_{z1} &= F_{z1}(t) + \frac{3}{16} \omega_0^2 (J_1 - J_2) \sin 2i \cos(\omega_{02}t) \omega_{02}t, \\ H_{z2} &= F_{z2}(t) + \frac{3}{16} \omega_0^2 (J_2 - J_1) \sin 2i \sin(\omega_{01}t) \sin(\omega_{02}t) \omega_{02}t, \\ H_{z3} &= F_{z3}(t) + \frac{3}{16} \omega_0^2 (J_2 - J_1) \sin 2i \cos(\omega_{01}t) \sin(\omega_{02}t) \omega_{02}t. \end{aligned}$$

На рис.3.4 представлены графики зависимостей кинетических моментов маховиков от времени при параметрах орбиты $T=24000\text{с}$, $e=0.57$, $a=8500\text{км}$, $i=77^\circ$ (параметры орбиты, на которую должен быть выведен спутник).

Начальные значения кинетических моментов маховиков выбирались в соответствии с соотношениями (3.11).

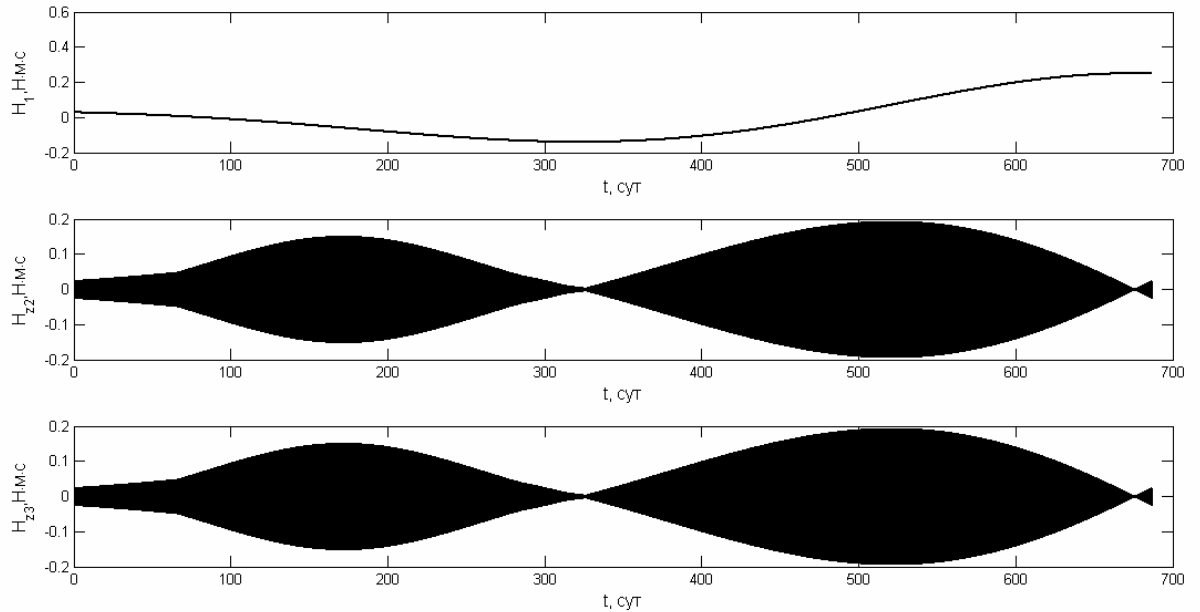


Рис.3.4. Зависимость кинетических моментов маховиков от времени

Из графиков видно, что для эффективного управления в течение марсианского года необходим запас кинетического момента каждого маховика порядка $0.2 \text{ H} \cdot \text{m} \cdot \text{c}$ (например, для маховика массой 0.96 кг Microwheel 10SP-M фирмы SSTL эта величина составляет $0.42 \text{ H} \cdot \text{m} \cdot \text{c}$).

3.5. Снижение информационно-вычислительных требований алгоритма

Применим методику, описанную в п.2.4, для оценки минимальной угловой скорости, в случае, если исключить из управления (последнее уравнение 3.6) гравитационный момент. Повторив шаги, описанные в п.2.4, получим оценку минимальной относительной угловой скорости

$$\omega_{\min} > \frac{M}{k_{\omega}}.$$

Как уже было не раз отмечено, в качестве внешнего момента рассматривается только гравитационный момент, поэтому оценка угловой скорости для рассматриваемой орбиты и при найденном ранее значении k_ω будет $\omega_{отн} \sim 10^{-4} c^{-1}$. Если угловая скорость становится меньше, то предложенное управление уже не гарантирует асимптотическую устойчивость требуемого положения равновесия и даже может способствовать уходу аппарата из этого положения. По этой причине будем использовать следующий алгоритм:

$$\mathbf{h}'_z = \frac{\mathbf{M}_{z,ви}}{J_1 \omega_{01}^2} + K_d \mathbf{S} + K_\omega \boldsymbol{\Omega}_{z,отн} + \begin{pmatrix} \Omega_{1z} - \frac{\dot{\alpha}}{\omega_{01}} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{I} \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{H}_z) - \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}_0 \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_{z,abc} + \mathbf{H}_z) - \mathbf{I} \dot{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Omega}_0 - \mathbf{I} \mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}'_0, \text{ если } \Omega_{отн} > \Omega_{мин};$$

$$h_{z1} = h_{z10},$$

$$h_{z2} = h_{z20} \cos \tau + h_{z30} \sin \tau, \text{ если } \Omega_{отн} < \Omega_{мин}.$$

$$h_{z3} = -h_{z30} \sin \tau + h_{z20} \cos \tau,$$

Последние три уравнения системы обеспечивают перераспределение кинетического момента между маховиками, находящимися в плоскости, перпендикулярной оси симметрии аппарата.

Как видно из условия переключения, вектор относительной угловой скорости достаточно мал. Поэтому можно линеаризовать систему в окрестности положения равновесия (аналогично п.3.3)

$$\begin{aligned}
& \mathbf{I}\Omega'_{z,omn} + \mathbf{h}'_z + \Omega_{z,omn} \times \mathbf{I}\Omega_0 + \Omega_0 \times \mathbf{I}\Omega_{z,omn} + \mathbf{C}\Omega_0 \times \mathbf{I}\mathbf{C}\Omega_0 + \\
& + \mathbf{I}\mathbf{C}'\Omega_0 + \mathbf{I}\mathbf{C}\Omega'_0 + \Omega_{z,abc} \times \mathbf{h}_z - \begin{pmatrix} \Omega_{1z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times (\mathbf{I}\Omega_0 + \mathbf{h}_z) = \frac{\mathbf{M}_{z,omn}}{J_1\omega_{01}^2},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{z3} & -\Omega_{z2} \\ -\Omega_{z3} & 0 & 0 \\ \Omega_{z2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим движение системы, когда управление выражается тремя последними уравнениями алгоритма (3.19). Перейдем в систему координат $OS_1S_2S_3$ по формулам

$$\mathbf{h}_z = \mathbf{D}_2\mathbf{h}_s, \quad \Omega_{z0} = \mathbf{D}_2\Omega_{s0}.$$

Тогда уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned}
\Omega'_{s1} &= -\Omega_{s2}h_{s3} + \Omega_{s3}h_{s2} + \varphi h_{s2} + \psi h_{s3}, \\
\theta\Omega'_{s2} &= -\Omega_{s3}(h_{s1} - \theta + 1) - \varphi(1 + h_{s1}) + 3\frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2}(1 + e\cos\mathcal{D})^3(1 - \theta)e_{s1}e_{s3} + h_{s3}, \\
\theta\Omega'_{s3} &= \Omega_{s2}(h_{s1} - \theta + 1) - \psi(1 + h_{s1}) - 3\frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2}(1 + e\cos\mathcal{D})^3(1 - \theta)e_{s1}e_{s2} - h_{s3}, \\
\psi' &= \Omega_{s3} + \varphi, \\
\varphi' &= \Omega_{s2} - \psi.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned}
\varphi &= \alpha \cos \tau - \beta \sin \tau, \\
\psi &= \alpha \sin \tau + \beta \cos \tau.
\end{aligned}$$

Первое уравнение системы (3.20) может быть рассмотрено после исследования остальных уравнений. Остальные уравнения (3.20) перепишем в виде

$$\theta\varphi'' + (h_1 + 1)\psi' + \theta\varphi = 3\frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2}(1 + e\cos\mathcal{D})^3(1 - \theta)e_{s1}(\mathcal{D}, \varphi, \psi)e_{s3}(\mathcal{D}, \varphi, \psi) + h_{s3},$$

$$\theta\psi'' - (h_1 + 1)\varphi' + \theta\psi = -3\frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2}(1 + e\cos\mathcal{D})^3(1 - \theta)e_{s1}(\mathcal{D}, \varphi, \psi)e_{s2}(\mathcal{D}, \varphi, \psi) - h_{s2}.$$

Отношение $\mu = \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2} \ll 1$ является малым параметром. Решим систему при условии $\mu = 0$. В этом случае решение будет иметь вид

$$\varphi = (h_1 + 1)\lambda_1 A_1 \cos(\lambda_1 t + \delta_1) + (h_1 + 1)\lambda_2 A_2 \cos(\lambda_2 t + \delta_2) + \frac{h_{s3}}{\theta},$$

$$\psi = -\theta(1 - \lambda_1^2)A_1 \sin(\lambda_1 t + \delta_1) - \theta(1 - \lambda_2^2)A_2 \sin(\lambda_2 t + \delta_2) - \frac{h_{s2}}{\theta}.$$

Здесь

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{(h_1 + 1)\sqrt{(h_1 + 1)^2 + 4\theta^2} - (2\theta^2 + (h_1 + 1)^2)}{2\theta^2}}.$$

Будем использовать это решение в качестве порождающего для возмущенной системы. Сделаем замену переменных по формулам

$$\varphi = (h_1 + 1)\lambda_1 A_1 \cos \delta_1 + (h_1 + 1)\lambda_2 A_2 \cos \delta_2 + \frac{h_{s3}}{\theta},$$

$$\psi = -\theta(1 - \lambda_1^2)A_1 \sin \delta_1 - \theta(1 - \lambda_2^2)A_2 \sin \delta_2 - \frac{h_{s2}}{\theta},$$

$$\begin{aligned}\varphi' &= (h_1 + 1)\lambda_1 A_1' \cos \delta_1 + (h_1 + 1)\lambda_2 A_2' \cos \delta_2 - \\ &\quad - (h_1 + 1)\lambda_1^2 A_1' \sin \delta_1 - (h_1 + 1)\lambda_2^2 A_2' \cos \delta_2, \\ \psi' &= -\theta(1 - \lambda_1^2) A_1' \sin \delta_1 - \theta(1 - \lambda_2^2) A_2' \sin \delta_2 \\ &\quad - \theta(1 - \lambda_1^2) A_1 \lambda_1 \cos \delta_1 - \theta(1 - \lambda_2^2) A_2 \lambda_2 \cos \delta_2.\end{aligned}$$

В этом случае движение можно разделить на медленное и быстрое. Интерес представляет эволюция амплитуд, которая после усреднения по δ_1 и δ_2 принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\bar{A}_1'}{A_1} &= \mu \frac{(1 - \theta)e_{s_2}(\mathcal{G})e_{s_3}(\mathcal{G})}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\theta(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2) + (h_1 + 1)), \\ \frac{\bar{A}_2'}{A_2} &= \mu \frac{(\theta - 1)e_{s_2}(\mathcal{G})e_{s_3}(\mathcal{G})}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} (\theta(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2) + (h_1 + 1)).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Эволюция истинной аномалии \mathcal{G} будет иметь вид

$$\mathcal{G}' = \sqrt{\mu}(1 + e \cos \mathcal{G})^2.$$

То есть является быстрой по отношению к амплитудам переменной. После усреднения уравнений (3.21) по \mathcal{G} , получим

$$\begin{aligned}\frac{\bar{A}_1'}{A_1} &= \mu \frac{2 + 3e^2}{16} \frac{(\theta - 1) \sin 2i}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\theta(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2) + (h_1 + 1)), \\ \frac{\bar{A}_2'}{A_2} &= -\mu \frac{2 + 3e^2}{16} \frac{(\theta - 1) \sin 2i}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\theta(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2) + (h_1 + 1)).\end{aligned}$$

Таким образом, эволюция будет медленной, порядка μ , что позволяет использовать рассматриваемый режим на значительных интервалах времени.

Все эти выводы верны для случая, когда $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \neq 0$. Используя явный вид для λ_1 и λ_2 , получим, с учетом $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = \mu \ll 1$, что $h_1 + 1 \approx \frac{\mu}{2} + O(\mu^2)$. Тогда уравнения со второго по пятое системы (3.20) представимы в виде

$$\begin{aligned}\theta\varphi'' + \theta\varphi &= 3\mu(1 + e\cos\mathcal{G})^3(1 - \theta)e_{s1}(\mathcal{G}, \varphi, \psi)e_{s3}(\mathcal{G}, \varphi, \psi) + h_{s3} - \frac{\mu}{2}\psi', \\ \theta\psi'' + \theta\psi &= -3\mu(1 + e\cos\mathcal{G})^3(1 - \theta)e_{s1}(\mathcal{G}, \varphi, \psi)e_{s2}(\mathcal{G}, \varphi, \psi) - h_{s2} + \frac{\mu}{2}\varphi'.\end{aligned}$$

В этом случае замена будет иметь вид

$$\begin{aligned}\varphi &= A_1 \cos\delta + \frac{h_3}{\theta}, \quad \varphi' = -A_1 \sin\delta, \\ \psi &= A_2 \cos(\delta + \xi) - \frac{h_2}{\theta}, \quad \psi' = -A_2 \sin(\delta + \xi).\end{aligned}$$

Тогда уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned}A_1' &= -\frac{M_2}{\theta} \sin\delta - \frac{\mu}{2\theta} A_2 \sin(\delta + \xi) \sin\delta, \\ A_2' &= -\frac{M_3}{\theta} \sin(\delta + \xi) + \frac{\mu}{2\theta} A_1 \sin\delta \sin(\delta + \xi), \\ \delta' &= 1 - \frac{1}{A_1} \left(\frac{M_2}{\theta} \cos\delta + \frac{\mu}{2\theta} A_2 \sin(\delta + \xi) \cos\delta \right), \\ \xi' &= \frac{1}{A_2} \left(\frac{M_3}{\theta} - \frac{\mu}{2\theta} A_1 \sin\delta \right) \cos(\delta + \xi) - \frac{1}{A_1} \left(\frac{M_2}{\theta} + \frac{\mu}{2\theta} A_2 \sin(\delta + \xi) \right) \cos\delta.\end{aligned}$$

Здесь быстрая переменная одна – δ . Выпишем осредненные уравнения для переменных A_1' и A_2' .

$$\bar{A}'_1 = \frac{1-\theta}{2\theta} \mu e_{s_2}(\vartheta) e_{s_3}(\vartheta) \bar{A}_2 \sin \xi - \frac{1}{4\theta} \mu \bar{A}_2 \cos \xi,$$

$$\bar{A}'_2 = -\frac{1-\theta}{2\theta} \mu e_{s_2}(\vartheta) e_{s_3}(\vartheta) \bar{A}_1 \sin \xi + \frac{1}{4\theta} \mu \bar{A}_1 \cos \xi.$$

Умножая первое уравнение на \bar{A}_1 , а второе на \bar{A}_2 и складывая результаты, получим:

$$\bar{A}'_1 \bar{A}_1 + \bar{A}'_2 \bar{A}_2 = 0$$

или

$$\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 = const.$$

Таким образом, амплитуда колебаний не будет увеличиваться.

Далее представлены графики, иллюстрирующие эволюцию амплитуды в нерезонансном случае.

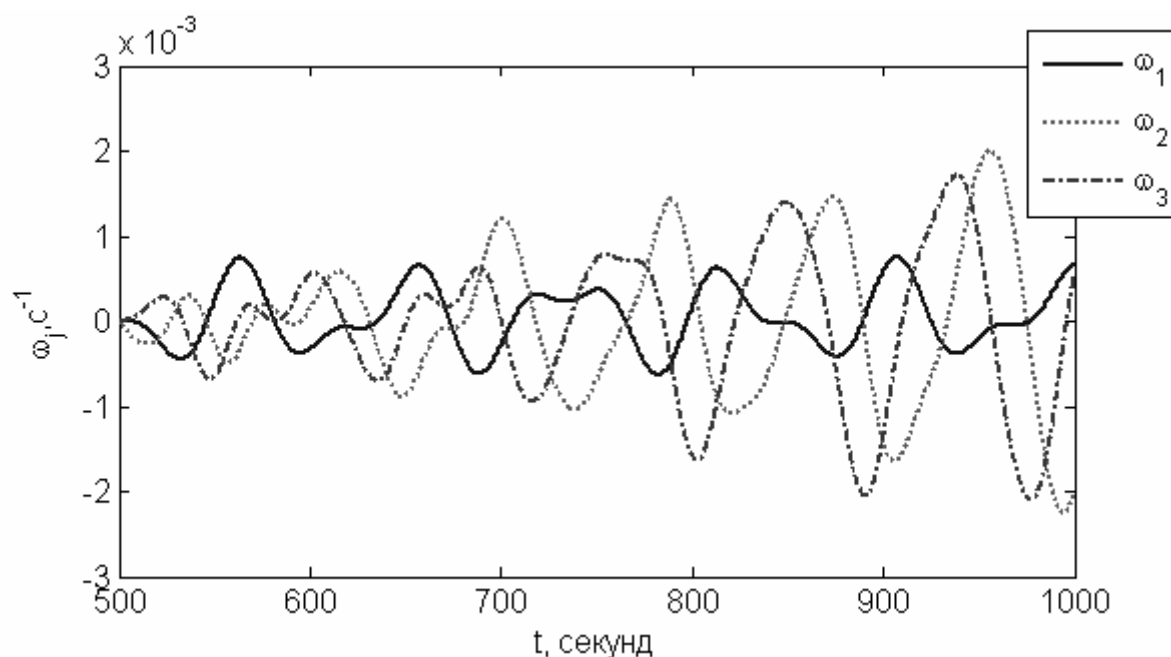


Рис.3.5. Изменение компонент вектора относительной угловой скорости

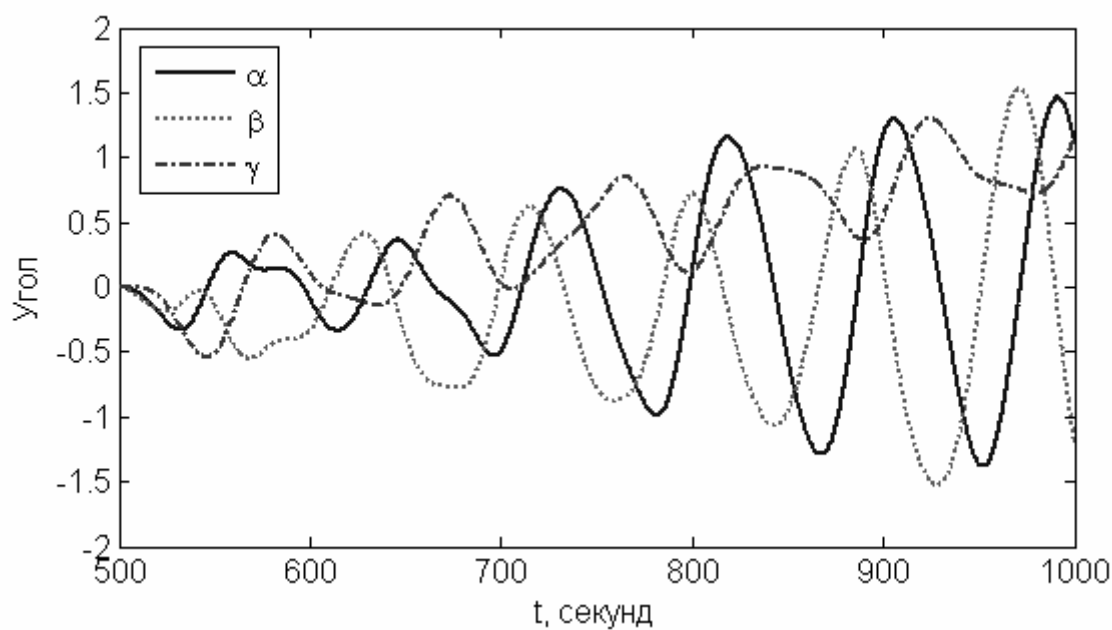


Рис.3.6. Изменение ориентации аппарата (самолетные углы)

Как видно из графиков, что происходит уход аппарата из требуемого положения, но этот уход медленный. Это позволяет спутнику значительное время находиться в режиме управления ориентацией, который задается тремя последними уравнениями (3.19).

Глава 4. Динамика тела на вертикальной струне с управлением осевым вращением при помощи вентиляторов

В настоящей главе рассматривается вопрос управления макета на вертикальной струне с помощью вентиляторных двигателей [44]. Такая система может выступать в качестве системы управления ориентацией полезной нагрузки, подвешенной на воздушном баллоне. При выполнении отдельных задач, решаемых полезной нагрузкой, может потребоваться наведение прибора в заданную точку или отслеживание осью прибора выделенной траектории на поверхности Земли. Глава посвящена разработке алгоритма управления и анализу динамики твердого тела с системой одноосной ориентации, использующей вентиляторные двигатели в качестве исполнительных элементов, в лабораторных условиях.

4.1. Постановка задачи и уравнение движения

Рассматривается твердое тело, подвешенное на вертикальной струне. Верхний конец струны неподвижно закреплен. Управление его движением относительно центра масс осуществляется с помощью двух вентиляторных двигателей, реализующих разнонаправленные управляющие моменты вокруг вертикальной оси. Информация о текущей ориентации и угловой скорости поступает, соответственно, с фотодиодов и оптоволоконного датчика угловой скорости. Решаемые системой управления ориентацией задачи – это торможение осевого вращения, поворот на заданный угол вокруг вертикали, а также выход на заданное угловое движение вокруг вертикали, которое может задаваться как программное движение, так и зависеть от текущей ориентации тела. Рассматривается управляемое вращательное движение тела вокруг вертикали. Тело подвержено линейному по углу поворота моменту от упругости струны и линейному по угловой скорости моменту вязкого трения от

сопротивления атмосферы. Считается, что вентиляторный двигатель мгновенно набирает номинальные обороты. Одновременно может работать только один двигатель. Влияние работающего двигателя на движение центра масс тела не учитывается и не рассматривается. Атмосфера считается однородной и неподвижной.

Получим выражение для управляющего момента, который создается двигателями. Сила, действующая на аппарат со стороны одного двигателя, $F = S\Delta p$, где S – площадь круга, закрываемого лопастями вентилятора, Δp – разность давлений воздуха на вентиляторе. Используя уравнение Бернулли для обоих состояний

$$p_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2, \quad p_2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_e^2,$$

можно найти эту разность давлений. Здесь p_1, p_2 – соответственно давления воздуха до и после прохождения вентилятора, p_0 – статическое давление, v – скорость воздуха до входа в вентилятор, v_e – скорость воздуха после выхода из вентилятора, ρ – плотность воздуха. Тогда управляющий момент M определяется выражением

$$M = \frac{1}{2}RS\rho(v_e^2 - v^2),$$

где R – расстояние от оси вращения тела вокруг вертикали до вентилятора. Считаем, что размер лопастей вентилятора значительно меньше R . Уравнения, описывающие осевое вращение тела, имеют вид

$$J\dot{\omega} + \delta\omega + \sigma\alpha = \pm \frac{1}{2}RS\rho(v_e^2 - v^2), \quad \dot{\alpha} = \omega. \quad (4.1)$$

Здесь J – момент инерции тела, относительно оси вращения; δ – коэффициент вязкого трения тела о воздух; σ – коэффициент упругости струны. Знак “+” или “–” выбирается в зависимости от того, положительный или отрицательный момент создается двигателями.

В силу предположения о неподвижности атмосферы $v = |\omega R|$, поэтому первое уравнение системы (4.1) можно записать так:

$$\dot{\omega} + \frac{\delta}{J}\omega \pm \frac{1}{2} \frac{\rho S R^3}{J} \omega^2 + \frac{\sigma}{J} \alpha = \pm \frac{1}{2} \frac{\rho S R v_e^2}{J} \quad (4.2)$$

Перейдем к безразмерным угловой скорости Ω и времени τ по формулам $\omega = v_e/R \Omega$, $t = R/v_e \tau$ и введем безразмерные параметры

$$k = \pm \frac{1}{2} \frac{\rho S R^3}{J}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\delta R}{J v_e}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma R^2}{J v_e^2}.$$

Тогда уравнение (4.2) принимает вид

$$\Omega' + \varepsilon_1 \Omega + k \Omega^2 + \varepsilon_2 \alpha = k. \quad (4.3)$$

Перейдем к решению уравнения (4.3) в частных случаях.

4.2. Исследование уравнений движения

Будем считать, что

$$|k| \gg \varepsilon_1, \varepsilon_2, \quad (4.4)$$

то есть в присутствии управления пренебрегаем моментом вязкого трения тела о воздух и моментом от скручивания струны. В этом случае уравнение (4.3) принимает вид

$$\Omega' = k - k\Omega^2. \quad (4.5)$$

Его решение записывается следующим образом:

$$\Omega = \frac{\tilde{C} \exp(2k\tau) - 1}{\tilde{C} \exp(2k\tau) + 1}.$$

Переходя обратно к размерным величинам и переменным, имеем

$$\omega = \frac{v_e}{R} \frac{C \exp(2k \frac{v_e}{R} t) - 1}{C \exp(2k \frac{v_e}{R} t) + 1}. \quad (4.6)$$

Здесь $C = \frac{v_e + \omega_0 R}{v_e - \omega_0 R}$. Заметим, что если плотность атмосферы зависит от времени, что может иметь место при исследовании динамики тела, закрепленного на меняющей высоту полета воздушном баллоне [45] (тогда плотность зависит от высоты и, в конечном итоге, от времени), то $k(t) = \pm \frac{SR^3 \rho(t)}{2J}$. В этом случае решение уравнения (4.5) можно записать так:

$$\omega = \frac{V_e}{R} \frac{C \exp \left\{ \pm \frac{SR^2 v_e}{J} \int_0^t \rho(t') dt' \right\} - 1}{C \exp \left\{ \pm \frac{SR^2 v_e}{J} \int_0^t \rho(t') dt' \right\} + 1}.$$

Если ввести обозначения $A = v_e/R$, $B = kv_e/R$, то выражение (4.6)

принимает вид

$$\omega = A \frac{C \exp(2Bt) - 1}{C \exp(2Bt) + 1}. \quad (4.7)$$

Перейдем к другому частному случаю – отсутствию управляющего воздействия от вентилятора. Это предположение отвечает условию $k=0$ в уравнении (4.3). Тогда его решение соответствует углу поворота тела при свободных затухающих колебаниях, выражение для которого имеет вид

$$\alpha = \alpha_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{2} \tau\right) \cos\left(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}} \tau\right) + \frac{\Omega_0 + \frac{\varepsilon_1}{2} \alpha_0}{\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{2} \tau\right) \sin\left(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}} \tau\right),$$

эволюция угловой скорости при этом задается выражением

$$\Omega = -\frac{\alpha_0 \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \Omega_0}{\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{2} \tau\right) \sin\left(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}} \tau\right) + \Omega_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{2} \tau\right) \sin\left(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}} \tau\right).$$

При переходе к размерной скорости, получим

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{\alpha_0 \frac{V_e}{R} \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \omega_0}{\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{2} \frac{V_e}{R} t\right) \sin\left(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}} \frac{V_e}{R} t\right) + \\ & + \omega_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{2} \frac{V_e}{R} t\right) \sin\left(\sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4}} \frac{V_e}{R} t\right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Введем следующие обозначения:

$$\theta = \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{4} \frac{v_e}{R}}, \quad \xi = \varepsilon_1 \frac{v_e}{R}.$$

Обратный переход осуществляется по формулам

$$\varepsilon_1 = \xi \frac{R}{v_e}, \quad \varepsilon_2 = \frac{R^2}{v_e^2} \left(\theta^2 + \frac{\xi^2}{4} \right).$$

В новых обозначениях выражение (4.8) принимает вид

$$\omega = -\frac{(\theta^2 + \frac{\xi^2}{4})\alpha_0 + \frac{\xi}{2}\omega_0}{\theta} \exp(-\frac{\xi}{2}t) \sin(\theta t) + \omega_0 \exp(-\frac{\xi}{2}t) \sin(\theta t). \quad (4.9)$$

Это выражение дает связь между угловой скоростью и параметрами затухающих колебаний, которые можно определить, например, методом наименьших квадратов, обрабатывая результаты измерений.

4.3. Управление одноосным вращением тела

Проинтегрируем (4.7), считая $\omega = \dot{\alpha}$,

$$\alpha = -At + \frac{A}{B} \ln \frac{1 + C \exp(2Bt)}{1 + C} + \alpha_0. \quad (4.10)$$

Выразим из (4.7) время t и подставим его в (4.10). Получим

$$\alpha = \frac{A}{2B} \ln \frac{A^2 - \omega_0^2}{A^2 - \omega^2} + \alpha_0. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) дает два семейства кривых на фазовой плоскости (α, ω) : для положительного вращения ($k > 0$, а следовательно, и $B > 0$) и для отрицательного ($k < 0$, $B < 0$).

Задача поворота на заданный угол и/или торможения – это переход из одной точки фазовой плоскости (α, ω) в другую. Пример задачи, в рамках которой осуществляется переход из точки 1 в точку 2, приведен на рис.4.1. На рисунке пунктирная кривая соответствует положительному значению параметра B , а сплошная – отрицательному.

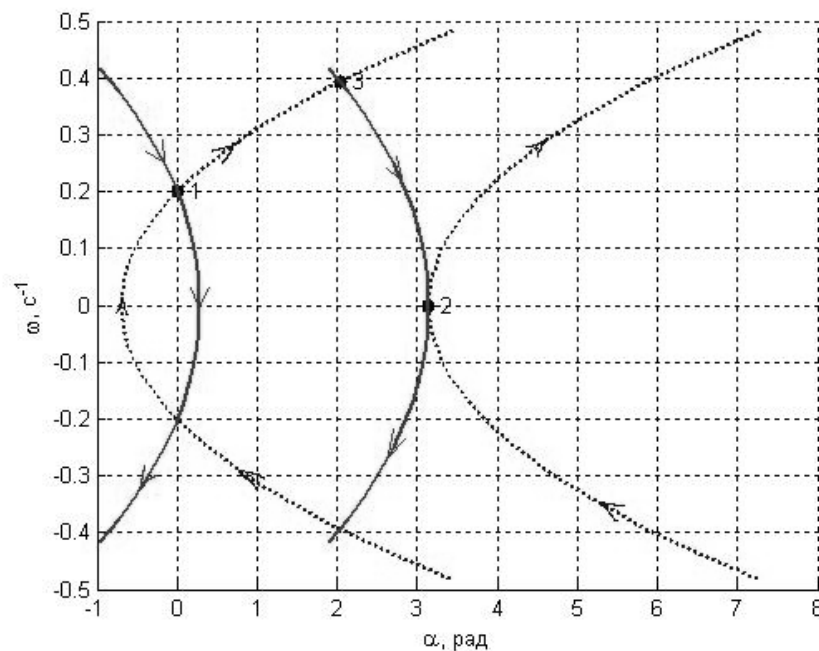


Рис.4.1. Фазовые кривые в задаче о повороте тела на заданный угол (переход из точки 1 в точку 2)

На рис.4.1 видно, что сначала происходит движение по пунктирной кривой вверх до точки пересечения со сплошной линией, а затем по сплошной линии вниз до точки 2. Это значит, что сначала работает один двигатель, а когда достигается определенное начальными условиями и точкой на фазовой

плоскости значение угловой скорости, происходит переключение, выключается первый двигатель и включается второй. Второй двигатель отключается при достижении нулевой скорости.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда двигатели не идентичны и величины параметров A и B различны. Введём тогда обозначения для двигателя, создающего положительный момент, $A_1, B_1 > 0$, а для двигателя, создающего отрицательный момент, $A_2, B_2 < 0$. Выражение для кривой переключения будет иметь вид

$$f(\alpha, \omega) = \begin{cases} \alpha - \frac{A_2}{2B_2} \ln \frac{A_2^2 - \omega^2}{A_2^2}, & \alpha \leq 0, \\ \alpha - \frac{A_1}{2B_1} \ln \frac{A_1^2 - \omega^2}{A_1^2}, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Обе ветви получаются подстановкой в (4.11) $\omega = 0$ и $\alpha = 0$ при разных значениях параметров A и B (график этой функции изображен на рис.4.2, пунктирная линия соответствует параметрам A_1 и B_1 , сплошная – A_2 и B_2).

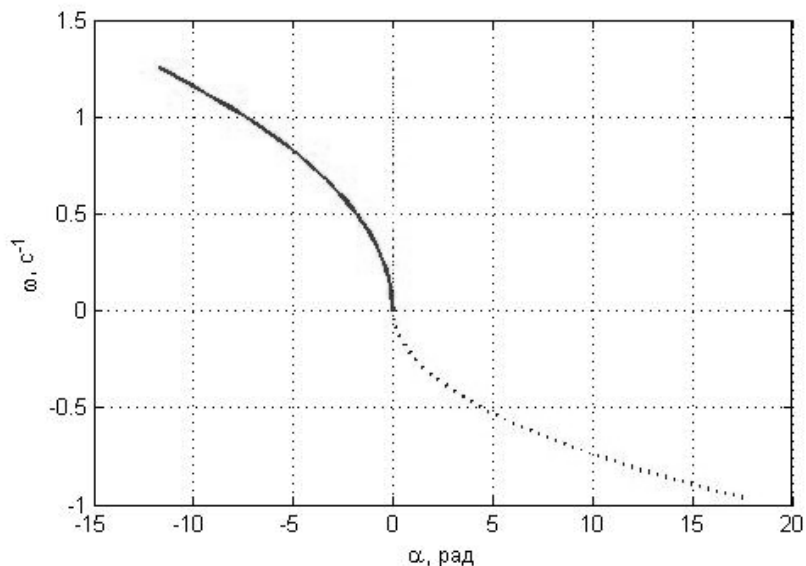


Рис.4.2. Кривая переключения. Пунктирная линия – часть кривой, соответствующая двигателю с B_1 ($B_1 > 0$), а сплошная – двигателю с B_2 ($B_2 < 0$)

Алгоритм переключения работает так:

1. Определяется начальное фазовое состояние (α_0, ω_0) , при этом выделяется ветвь кривой переключения:

$$\alpha_0 \leq 0 \Rightarrow f = \alpha - \frac{A_2}{2B_2} \ln \frac{A_2^2 - \omega^2}{A_2^2},$$

$$\alpha_0 > 0 \Rightarrow f = \alpha - \frac{A_1}{2B_1} \ln \frac{A_1^2 - \omega^2}{A_1^2}.$$

Если же задана величина поворота $\Delta\alpha$, то

$$\Delta\alpha \geq 0 \Rightarrow f = \alpha - \frac{A_2}{2B_2} \ln \frac{A_2^2 - \omega^2}{A_2^2},$$

$$\Delta\alpha < 0 \Rightarrow f = \alpha - \frac{A_1}{2B_1} \ln \frac{A_1^2 - \omega^2}{A_1^2}.$$

2. Вычисляется $f(\alpha_0, \omega_0)$. Если $f(\alpha_0, \omega_0) > 0$, то работает двигатель с A_2, B_2 , а если $f(\alpha_0, \omega_0) < 0$, то работает двигатель с A_1, B_1 .

3. Измеряются (α, ω) , и определяется знак выражения $\Delta f = |f(\alpha, \omega) - f_0|$; здесь f_0 – допустимое значение отклонения от расчетной кривой. При изменении знака Δf производится переключение двигателей.

4. Осуществляется движение вдоль кривой переключения. При этом проводится проверка $|\omega| < \omega_1$ (ω_1 – точность определения угловой скорости). Если эта проверка проходит успешно, т.е. достигается малое значение угловой скорости, то проводится проверка $|f(\alpha, \omega)| < \alpha_1$ (α_1 – точность по углу). Если и эта проверка оказывается успешной, то это значит, что система пришла в нужное положение и цикл управления заканчивается, если нет, то повторяются пункты 1÷4.

Рассмотрим теперь задачу выхода на заданную фазовую траекторию углового движения. Пусть зависимости угла и угловой скорости от времени определяются выражениями

$$\alpha_{np} = \alpha_0(t), \quad \omega_{np} = \omega_0(t) = \dot{\alpha}_0(t).$$

Система управления должна осуществлять выход на эту фазовую траекторию и обеспечивать асимптотическую устойчивость движения вдоль этой траектории. Будем строить управление с помощью функции Ляпунова, выбранной в следующем виде:

$$V = \frac{1}{2} \omega_{отн}^2 + \frac{1}{2} k_a \alpha_{отн}^2.$$

Воспользовавшись соотношениями $\omega = \omega_{отн} + \omega_0$ и $\alpha = \alpha_{отн} + \alpha_0$, уравнение движения (4.1) можно переписать так:

$$J(\dot{\omega}_{отн} + \dot{\omega}_0) + \delta(\omega_{отн} + \omega_0) + \sigma(\alpha_{отн} + \alpha_0) = Jk(A^2 - v^2). \quad (4.13)$$

Считаем, что можно управлять скоростью вращения вентиляторов, т.е. изменять v_e , а, следовательно, параметр A . Кроме того, также можно переключать двигатели, т.е. осуществлять выбор между $k > 0$ и $k < 0$. Тогда, с учетом уравнений движения, \dot{V} будет иметь вид

$$\dot{V} = -\delta\omega_{отн}^2 + \omega_{отн} \left(Jk(A^2 - \omega^2) - \sigma\alpha - \delta\omega_0 - J\dot{\omega}_0 + k_a\alpha_{отн} \right).$$

Для асимптотической устойчивости движения $\omega_{отн} = 0, \alpha_{отн} = 0$ потребуем выполнения условия

$$k(A^2 - \omega^2) - \sigma\alpha - \delta\omega_0 - J\dot{\omega}_0 + k_a\alpha_{отн} = -k_\omega\omega_{отн},$$

где $k_\omega > 0$. Введем обозначение

$$Q = \sigma\alpha + \delta\omega_0 + J\dot{\omega}_0 - k_a\alpha_{отн} - k_\omega\omega_{отн}$$

и выразим из этого условия

$$A = \sqrt{\frac{Q}{Jk} + \omega^2}. \quad (4.14)$$

Так как A должно быть вещественным, то условие переключения имеет вид

$$A = \sqrt{\frac{Q}{Jk} + \omega^2}, \begin{cases} k > 0, \text{ если } \frac{Q}{J|k|} + \omega^2 \geq 0 \\ k < 0, \text{ если } \frac{Q}{J|k|} + \omega^2 < 0 \end{cases}.$$

Подставив (4.14) в (4.13), получим

$$J\dot{\omega}_{отн} + (\delta + k_\omega)\omega_{отн} + k_a\alpha_{отн} = 0. \quad (4.15)$$

На практике, как правило $A \leq A_{\max}$, поэтому возникает ограничение на возможные траектории. Рассмотрим ситуацию, когда задача выхода на траекторию уже решена, т.е. $\omega_{отн} = 0$ и $\alpha_{отн} = 0$. В этом случае, получаем ограничение на возможные траектории

$$\frac{\sigma\alpha_0 + \delta\omega_0 + J\dot{\omega}_0}{Jk} + \omega_0^2 \leq A_{\max}^2. \quad (4.16)$$

Для иллюстрации приведем пример выхода на траекторию $\alpha_0 = \cos(0.1t)$, $\omega_0 = -0.1\sin(0.1t)$ (рис.4.3).

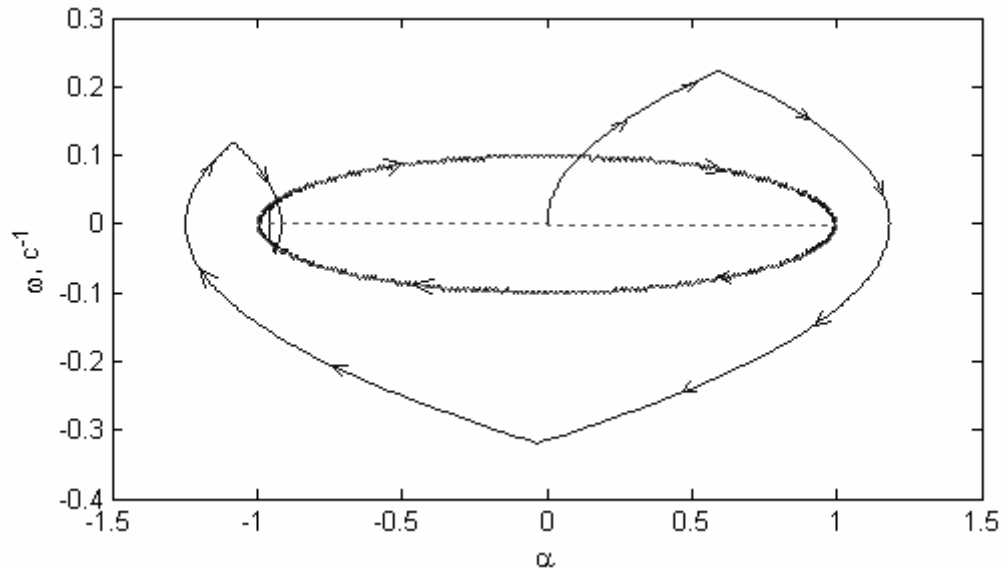


Рис.4.3. Пример выхода на заданную траекторию на фазовой плоскости

Параметры k_ω и k_γ выберем таким образом, чтобы максимизировать степень устойчивости [18] корней характеристического полинома уравнения (15)

$$J\lambda^2 + (\delta + k_\omega)\lambda + k_a\lambda = 0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\delta + k_\omega) \pm \sqrt{(\delta + k_\omega)^2 - 4Jk_a}}{2J}.$$

Максимальная степень устойчивости будет достигаться в случае, когда подкоренное выражение равно нулю:

$$(\delta + k_\omega)^2 - 4Jk_a = 0,$$

т.е. $k_{\omega} = \sqrt{4Jk_a} - \delta$. В противном случае один из корней будет ближе к мнимой оси, и уже он будет определять степень устойчивости. Таким образом, остается один независимый параметр управления k_a . Его нужно выбирать исходя из ограничений, наложенных на управляющий момент (например, в виде неравенства (4.16)).

4.4. Лабораторные испытания макета

В рамках программы создания лабораторного практикума для студентов в Лаборатории “Управление и динамика сложных информационно-механических систем” МФТИ [46-48] проведены полунатурные испытания динамики макета для подтверждения правильности предположения (4.4), для определения параметров двигателей, струны и макета, а также для проверки работоспособности алгоритма.

Приведем результаты испытаний. На рис.4.4-4.5 изображены аналитические (полученные по конечным формулам) и экспериментальные кривые в случае, когда работает один из двигателей. Разница в графиках связана с тем, что на рис.4.4 показаны результаты для двигателя, раскручивающего макет по часовой стрелке (отрицательный момент), а на рис.4.5. – против часовой стрелки (положительный момент). Рис.4.6 содержит экспериментальные данные и аналитический результат в случае свободных колебаний (4.9).

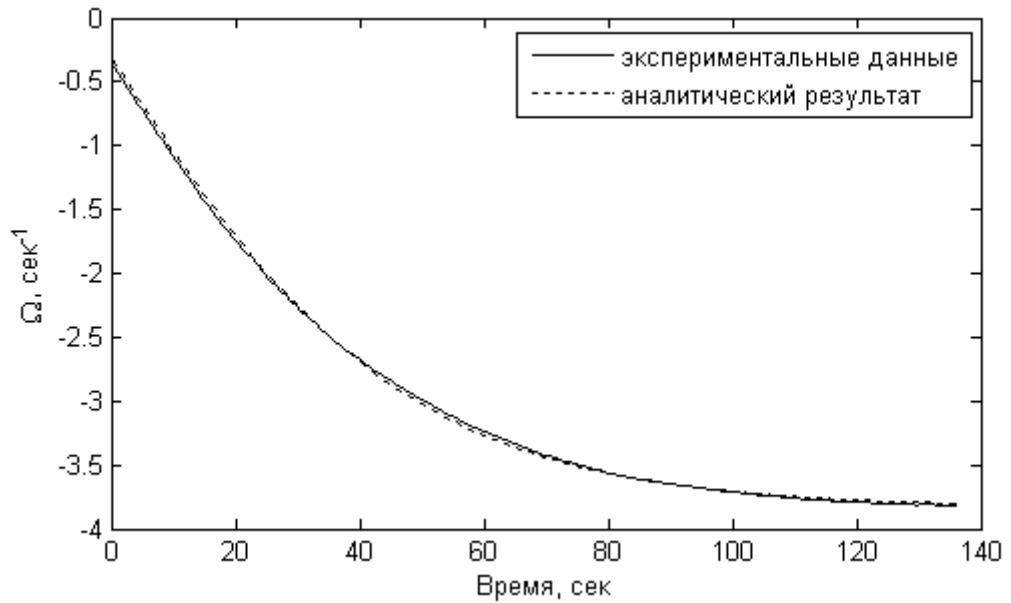


Рис.4.4. Экспериментальная и аналитическая зависимости угловой скорости от времени (аналитическая кривая построена с параметрами, найденными методом наименьших квадратов) с включенным двигателем, создающим отрицательный момент

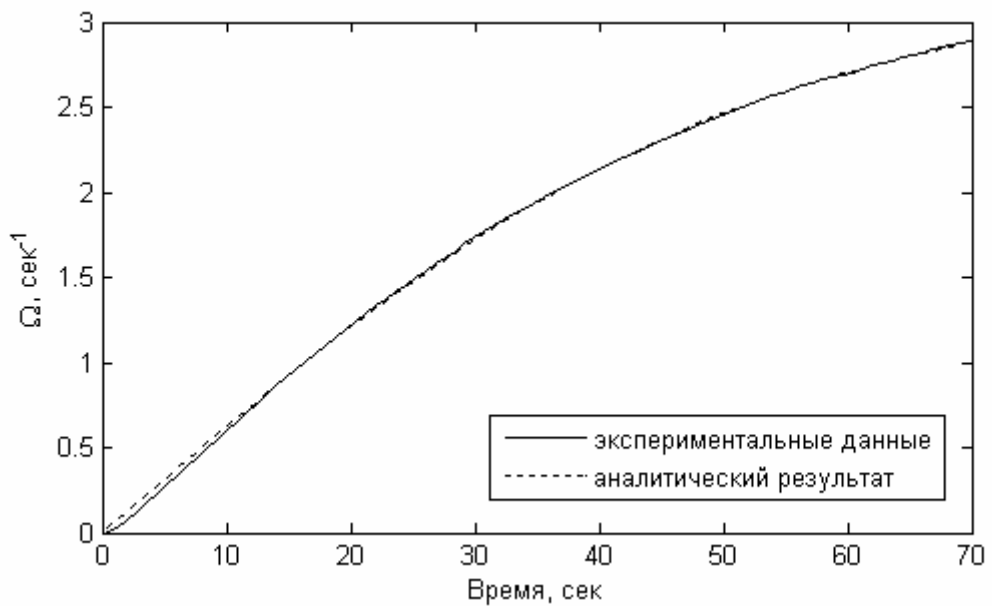


Рис.4.5. Экспериментальная и аналитическая зависимости угловой скорости от времени (аналитическая кривая построена с параметрами, найденными методом наименьших квадратов) с включенным двигателем, создающим положительный момент

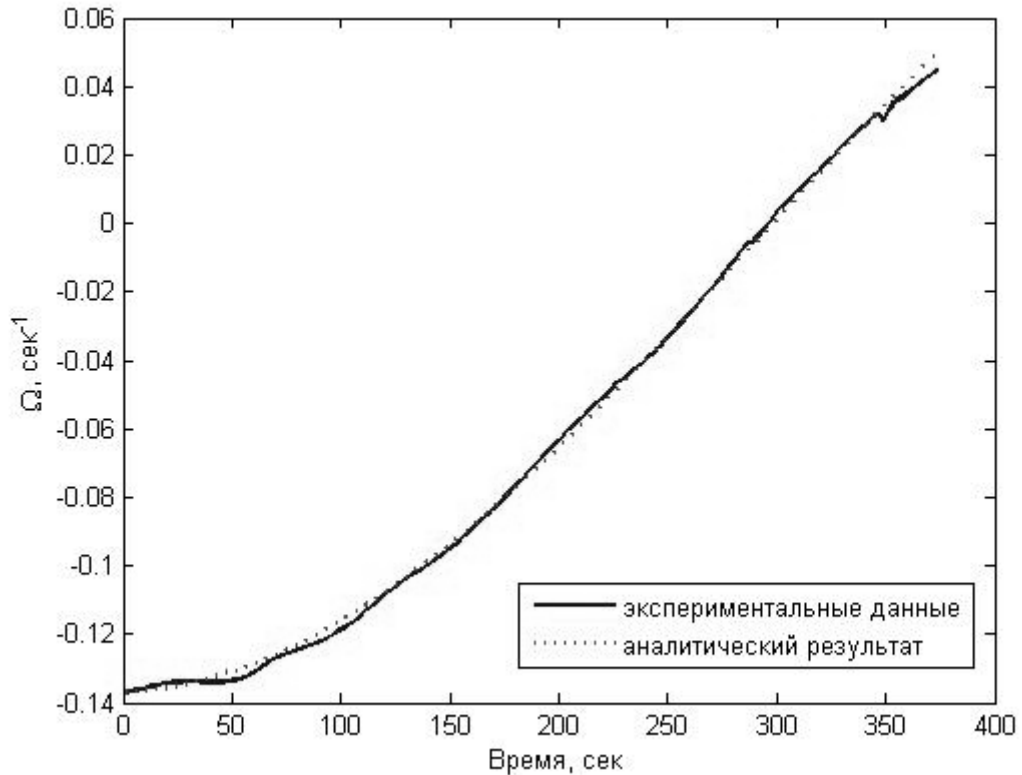


Рис.4.6. Экспериментальная зависимость угловой скорости от времени, а так же кривая, построенная по (4.8), с параметрами, найденными с помощью метода наименьших квадратов

Графики показывают хорошее совпадение теоретических и экспериментальных кривых, поэтому предложенная модель удовлетворительно описывает поведение системы.

В ходе испытаний была подтверждена достоверность предположения (4.4), а так же определены параметры двигателей, которые оказались следующими:

$$A_1 = 3.30 c^{-1}, B_1 = 0.0385 c^{-1}, k_1 = 0.012;$$

$$A_2 = 3.83 c^{-1}, B_2 = -0.0397 c^{-1}, k_2 = -0.010;$$

$$\varepsilon_1 = 2.1 \times 10^{-4}, \varepsilon_2 = 1.6 \times 10^{-4}.$$

Видно, что параметры двигателей k_1 и k_2 на два порядка больше, чем ε_1 и ε_2 , что соответствует предположению (4.4).

Далее приведены результаты работы алгоритма в случае поворота на заданный угол. Параметры двигателей A_1, A_2, B_1, B_2 определяются по методике, описанной выше. На рис.4.7 представлен пример разворота макета на угол 360° . Пунктирная и жирная сплошные линии – теоретические кривые, тонкая сплошная линия – реальное движение. На рис.4.8 и рис.4.9 представлены зависимости угла и угловой скорости во время разворота.

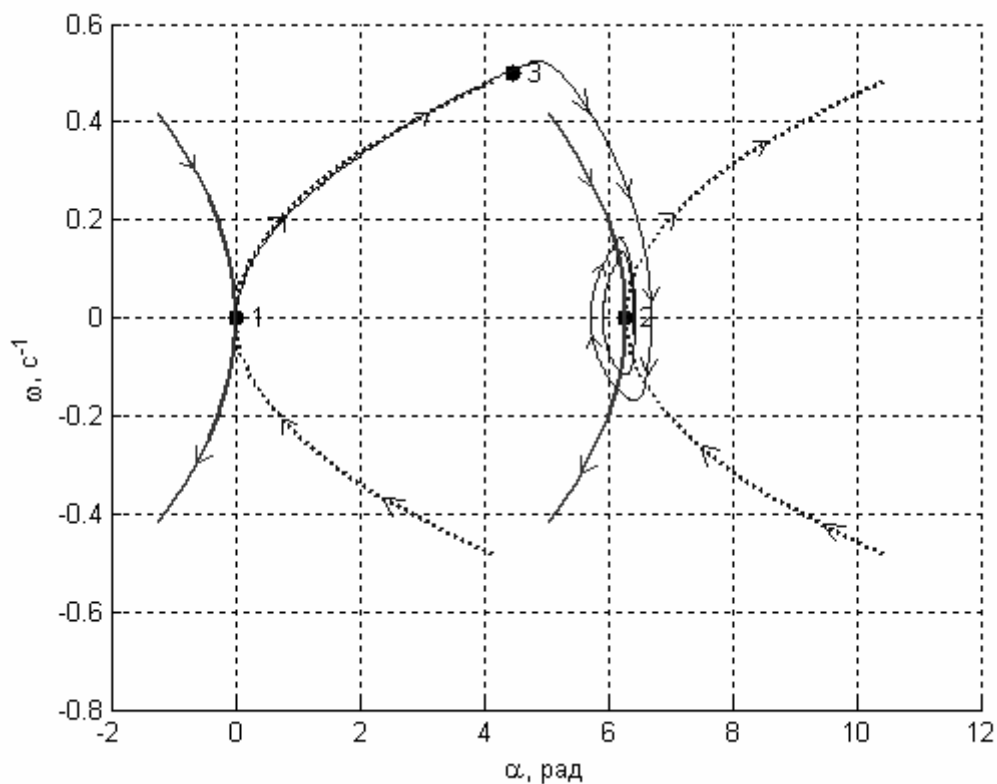


Рис.4.7. Фазовая траектория при развороте макета

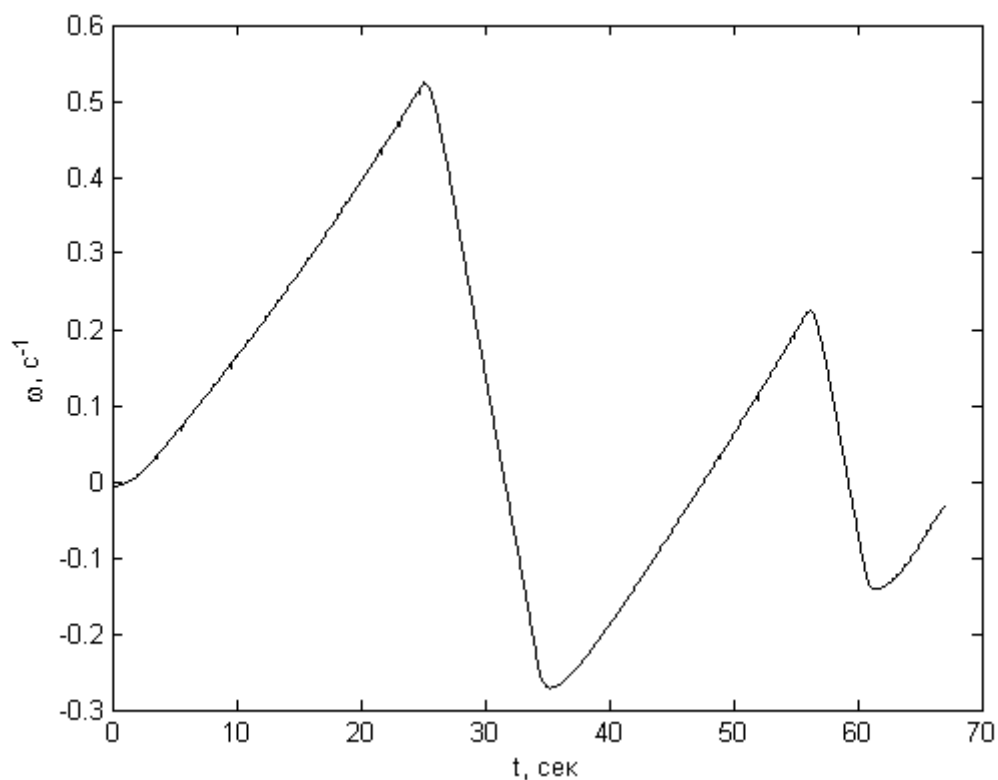


Рис.4.8. Зависимость угловой скорости от времени

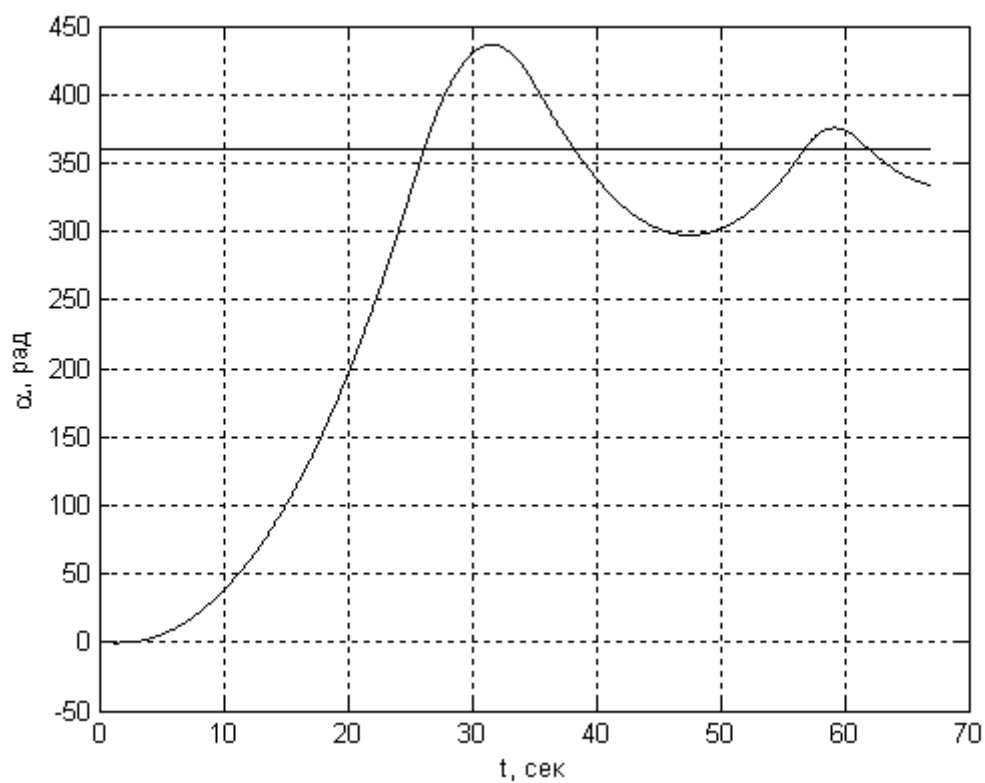


Рис.4.9. Зависимость угла от времени. Прямая линия – конечное значение угла, кривая – экспериментальная зависимость от времени

Как видно на рис.4.7 из-за ошибок управления фазовая траектория отклоняется от расчетной, однако алгоритм построен таким образом, что если система не достигает заданной точки, то выполняется дополнительный цикл управления (на рисунке видно три таких цикла).

Алгоритм обработки измерений выбран аналогичным алгоритму, приведенному в [49].

5. Заключение

В работе построен и реализован комплексный подход к исследованию динамики подвижных объектов с ротирующими элементами, входящими в состав систем управления ориентацией. Решены задачи синтеза алгоритма управления, реализующего программное движение и обеспечивающего его асимптотическую устойчивость, выбора параметров управления, оценки точности ориентации при действующих возмущениях. Подход применен к исследованию углового управляемого движения реальных систем.

В рамках исследования динамики микроспутника с трехосной маховичной системой ориентации синтезирован алгоритм управления, реализующий требуемое движение и его асимптотическую устойчивость; получены параметры алгоритма; получены оценки точности ориентации в виде конечных формул при действии внешних возмущений, при наличии ошибок в установке исполнительных элементов и определении главных осей инерции аппарата. Проведена лабораторная верификация полученных результатов.

Для осесимметричного вращающегося аппарата с маховичным управлением синтезирован алгоритм управления; построена, обоснована и реализована методика определения параметров управления; найдены конечные соотношения, описывающие эволюцию кинетических моментов маховиков на длительных интервалах времени; предложена модификация алгоритма управления, снижающая требования к информационно-вычислительному обеспечению спутника.

Для воздушно-винтовой (вентиляторной) системы ориентации макета на вертикальной струне проведена верификация принятой модели управляющего момента, включая лабораторные испытания, экспериментально определены параметры управления, синтезирован алгоритм работы вентиляторных двигателей, реализующий требуемый программный режим разворота вокруг вертикальной оси.

Литература

1. Б.В.Раушенбах, Е.Н.Токарь. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974, 600с.
2. P.C.Hughes, Spacecraft attitude dynamics, Mineola, New York, Dover publications, Inc., 2004, 570p.
3. M.J.Sidi, Spacecraft dynamics and control, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 409p.
4. J.R.Wertz, Spacecraft Attitude determination and control, Dordrecht/Boston, London, 1990, 863p.
5. B.Wie, Space vehicle dynamics and control, Reston, Virginia, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 1998, 661p.
6. В.Н.Бранец, И.П.Шмыглевский. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. М.: Наука, 1973, 320с.
7. В.Н.Бранец, И.П.Шмыглевский. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992, 280с.
8. B.Wie, J.Lu, Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.18, №6, 1995, pp.1372-1379.
9. B.Wie, P.M.Barba, Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. Journal of Guidance Control, and Dynamics, Vol.8, №3, 1985, pp.360-365.
10. S.Kim, Y.Kim, Spin-axis stabilization of a rigid spacecraft using two reaction wheels, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.24, №5, 2001, pp.1046-1049.
11. B.J.Kim, H.Lee, S.D.Choi, Three-axis reaction wheel attitude control system for Kitsat-3 microsatellite, http://satrec.kaist.ac.kr/english/res_kitsat3.html.
12. A.A.Zaher, Nonlinear control of systems with multiple equilibria and unknown sinusoidal disturbance, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 12, 2007, pp.1518-1533.

13. A.M.SiMohammed, M.Benyettou, Y.Bentoutou, A.Boudjemai, Y.Hashida, M.N.Sweeting, Three-axis active control system for gravity gradient stabilised microsatellite, *Acta Astronautica*, 64, 2009, pp.796-809.
14. S.Ding, S.Li, Stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with external disturbances using finite-time control techniques, *Aerospace Science and Technology*, 13, 2009, pp.256-265.
15. M.A.Karami, F.Sassani, Spacecraft Momentum Dumping Using Fewer than Three External Control Torques, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.32, №1, 2009, pp.242-247.
16. Y.Aoustin, A.Formal'sky, Yu.Martynenko, Stabilization of Unstable Equilibrium Postures of a Two-Link Pendulum Using a Flywheel, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, Vol.45, №2, 2006, pp.204–211.
17. P.Tsitorias, New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies, *Proceedings of 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Palo Alto, CA, 1994, pp.316-321.
18. Я.З.Цыпкин, П.В.Бромберг. О степени устойчивости линейных систем. *Известия АН СССР. ОТН.*, №12, 1945, С.1163–1168.
19. С.А.Мирер, В.А.Сарычев. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа. *Космические исследования*, Т.35, №6, 1997, С.651–658.
20. В.А.Сарычев, В.И.Пеньков, Н.И.Яковлев. Оптимизация параметров линейных систем. Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1975, №124.
21. В.А.Сарычев, В.В.Сазонов. Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников. *Космические исследования*, Т.14, №2, 1976, С.198–208.
22. А.П.Коваленко. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975, С.96-124.

23. А.И.Игнатов, В.В.Сазонов. Оценка остаточных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации. Препринт института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 2009, №65, .
24. Е.Н.Токарь. О рациональном построении систем гиросиловых стабилизаторов // Космические исследования. Т.16, №1, 1978, С.22-30.
25. Е.Н.Токарь, В.П.Легостаев, М.В.Михайлов, В.Н.Платонов. Управление избыточными гиросиловыми системами. Космические исследования. Т.18, №2, 1980, С.152-157.
26. А.Д.Беленький, В.Н.Васильев, М.Е.Семенов. Управление избыточной системой электродвигателей-маховиков. Труды ВНИИЭМ, М., Т.102, 2005, С.107-115.
27. Z.Ismail, R.Varatharajoo, A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control, Advances in Space Research, 45, 2010, pp.750-759.
28. А.И.Игнатов, А.А.Давыдов, В.В.Сазонов. Анализ динамических возможностей систем управления малым космическим аппаратом, построенных на базе двигателей-маховиков. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005, №47.
29. J.Esper, The Rocket Balloon (Rocketball): Applications to Science, and Education. Digest of the 7th International Symposium of IAA “Small Satellites for Earth Observation”, Berlin, Germany, Walter De Gruyter Publ., 2009, pp.517-520.
30. <http://www.ssc.se/?id=7114>
31. M.B.Quadrelli, J.M.Cameron, V.Kerzhanovich, Multibody dynamics of parachute and balloon flight systems for planetary exploration. Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.27, №4, 2004, pp.564-571.
32. J.E.White, J.R.Ettert, Linear-Quadratic-Regulator Pointing Control System for a High-Altitude Balloon Payload. Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.13, №4, 1990, pp.615-623.

33. J.Shin, S.Ji, W.Shon, H.Lee, K.Cho, S.Park, Indoor Hovering Control of Small Ducted-fan Type OAV Using Ultrasonic Positioning System, Journal of Intelligent and Robotic Systems, 61, 2011, pp.15-27.
34. С.С.Ткачев. Методика построения и исследования алгоритма управления ориентацией малых подвижных объектов. Труды 53-й научной конференции МФТИ “Современные проблемы фундаментальных наук”. Часть VII. Управление и прикладная математика. М.: МФТИ, 2010, С.64-65.
35. <http://chibis.cosmos.ru/>
36. М.Ю.Овчинников, С.О.Карпенко, С.С.Ткачев. Исследование алгоритма трехосной маховичной системы управления ориентацией. Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXV Академических чтений по космонавтике. Москва, январь 2011г. Под общей редакцией А.К.Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2011, С.142.
37. В.А.Сарычев. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Серия “Исследование космического пространства”. ВИНТИ. Т.11. 1978.
38. T.Ott, Technical Pre-Phase, A study of a spinning microsatellite for Martian missions, Master thesis report, Lulea University of Technology, Department of Space Science, Kiruna, 2007, 70p.
39. М.Ю.Овчинников, С.С.Ткачев. Маховичная система управления для наноспутников. Труды XLII Чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э.Циолковского. Секция “Проблемы ракетной и космической техники”. Калуга, сентябрь 2007, Казань: Издательство Казанского государственного технического университета, 2008, С.201-211.
40. Н.В.Куприянова, М.Ю.Овчинников, С.С.Ткачев. Алгоритмы управления ориентацией малых спутников с ограниченными энергетическими возможностями. Сборник трудов V Научно-практической конференции

“Микротехнологии в авиации и космонавтике”, Москва, сентябрь 2007, М.: РНИИ КП, 2007, 10с.

41. С.С.Ткачёв. Алгоритмы маховичной системы управления ориентацией для наноспутников. Труды 50-й научной конференции МФТИ “Современные проблемы фундаментальных наук”. Часть VII. Управление и прикладная математика. М.: МФТИ, 2007, С.48-50.

42. М.Ю.Овчинников, С.С.Ткачев. Исследование алгоритма трёхосной маховичной системы ориентации. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, №25, 2010, 32с.

43. И.Г.Малкин. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956, 491с.

44. Д.С.Иванов, М.Ю.Овчинников, С.С.Ткачев. Управление ориентацией твердого тела, подвешенного на струне с использованием вентиляторных двигателей. Известия РАН. Теория и системы управления, №1, 2011, С.127-139.

45. В.Барабаш, Д.С.Иванов, М.Ю.Овчинников, С.С.Ткачев. Система ориентации полезной нагрузки на воздушном шаре. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, №15, 2010, 26с.

46. М.Ю.Овчинников, С.С.Ткачёв. Компьютерное и полунатурное моделирование динамики управляемых систем. Препринт Института прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН, №50, 2008, 28с.

47. М.Ю.Овчинников, С.А.Мирер, А.А.Дегтярев, С.С.Ткачев. Полунатурное моделирование как элемент подготовки специалистов по механике и управлению. Сборник научно-методических статей “Теоретическая механика”, М.: Издательство Московского университета, №27, 2009, С.137-142.

48. М.Ю.Овчинников, Д.С.Иванов. Использование одноосного гироскопа для определения ориентации макета в лабораторных условиях. Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, №11, 2008, 32с.

49. М.Ю.Овчинников, С.С.Ткачев. Определение параметров относительного движения с помощью траекторных измерений. Космические исследования, Т.46, №6, 2008, С.553-558.

Приложение 1. Лабораторный стенд для верификации маховичной системы управления и определения ориентации.

Исследование работы алгоритмов определения ориентации на основе фильтра Калмана проводилось на лабораторном стенде, разработанном в ИТЦ «СканЭкс». Общий вид стенда изображен на рис.1. В состав стенда входят:

- макет системы ориентации космического аппарата (МКА);
- имитатор магнитного поля;
- имитатор Солнца;
- аэродинамический подвес.



Рис.1. Внешний вид стенда

Описание макета

Макет системы ориентации МКА состоит из системы ориентации и стабилизации, одноплатного компьютера с беспроводным каналом связи,

аккумуляторов, системы балансировки платформы, на которой установлены все системы.

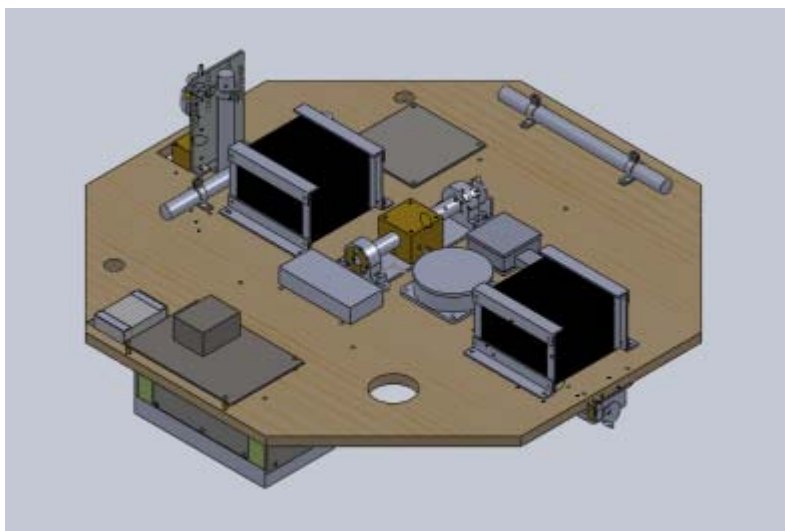


Рис.2. Макет МКА в базовой конфигурации

Система ориентации и стабилизации состоит из датчиков определения ориентации, исполнительных органов и блока управления системой ориентации.

В качестве датчиков определения ориентации в составе макета используются магнитометр HMR 2300R (рис.3), солнечный датчик DSS3 (рис.4) и датчики угловой скорости ADIS 16130 (рис.5). Основные характеристики датчиков приведены в табл.№1.



Рис.3. Магнитометр HMR 2300R

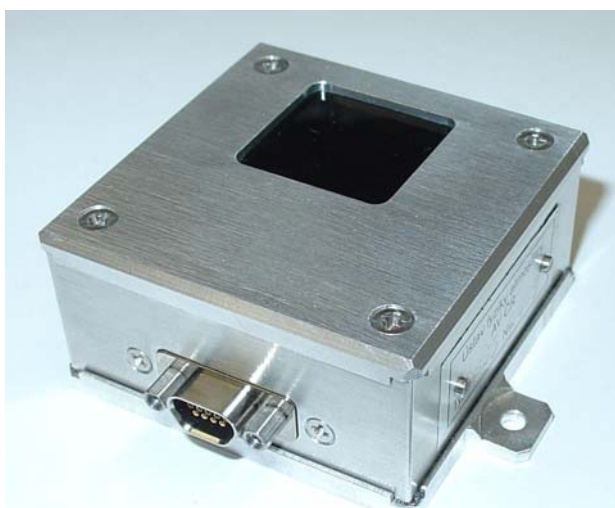


Рис.4. Солнечный датчик DSS3



Рис.5. Датчик угловой скорости ADIS 16130

Таблица № 1. Характеристики датчиков

Характеристика \ датчик	Магнитометр	Солнечный датчик	Датчик угловой скорости
Диапазон измерения	$\pm 200\ 000$ нТл	$\pm 45^\circ$	± 250 °/с
Случайное отклонение (шум)	± 50 нТл	$0,1^\circ$	± 0.01 °/с

В качестве исполнительных элементов системы управления ориентацией на макете используются электромагнитные катушки (рис.6) и управляющие двигатели-маховики (рис.7).



Рис.6. Токсовая катушка

Токсовые катушки индуцируют управляемый магнитный момент, который при взаимодействии с внешним магнитным полем создаёт управляющий механический момент. Катушки представляют собой соленоид с обмоткой из медной проволоки и пермалловым сердечником. Максимальный магнитный момент катушек составляет $3.2 \text{ А}\cdot\text{м}^2$.

Двигатели-маховики выполнены на основе бесконтактного двигателя постоянного тока с управляемым моментом (рис.7) и предназначены для

использования в качестве исполнительного органа в системах ориентации и стабилизации малых космических аппаратов. Электродвигатель обеспечивает вращение ротора-маховика, его торможение. Величина создаваемого им вращающего (управляющего) момента может плавно меняться в заданном диапазоне в соответствии с сигналом управления, подаваемым на вход двигателя-маховика. Механический момент от управляющих двигателей маховиков создаётся при изменении скорости их вращения и изменяется в диапазоне $[-0.030, +0.030]$ $H \cdot m \cdot c$ в лабораторных условиях. Скорость вращения маховиков при этом изменяется в диапазоне $[-20000, +20000]$ об/мин в лабораторных условиях.



Рис.7. Управляющие двигатели-маховики

Блок управления системой ориентации и стабилизации является связующим элементом между датчиками и органами управления, а также между системой ориентации и стабилизации и внешними устройствами управления. Основными функциями блока являются сбор и обработка показаний датчиков системы с помощью алгоритмов определения ориентации, выработка с помощью алгоритмов управления команд для элементов системы стабилизации, приём команд от внешнего бортового контроллера управления МКА, передача данных в каналы телеметрии спутника. Основной составной частью является бортовой компьютер, который основан на плате LPCN2294,

содержащей процессор, внешнюю ОЗУ размером 1 Мб, энергонезависимую флэш-память емкостью 4 Мб.



Рис.8. Внешний вид блока управления системой ориентации

Имитатор геомагнитного поля

Для имитации магнитного поля в составе стенда используется система из трёх пар квадратных катушек установленных взаимно перпендикулярно (клетка Гельмгольца). Стороны квадратов катушек – 2м, 1,9м, 1,8м. Данная система способна создавать практически однородное магнитное поле в заданной области.

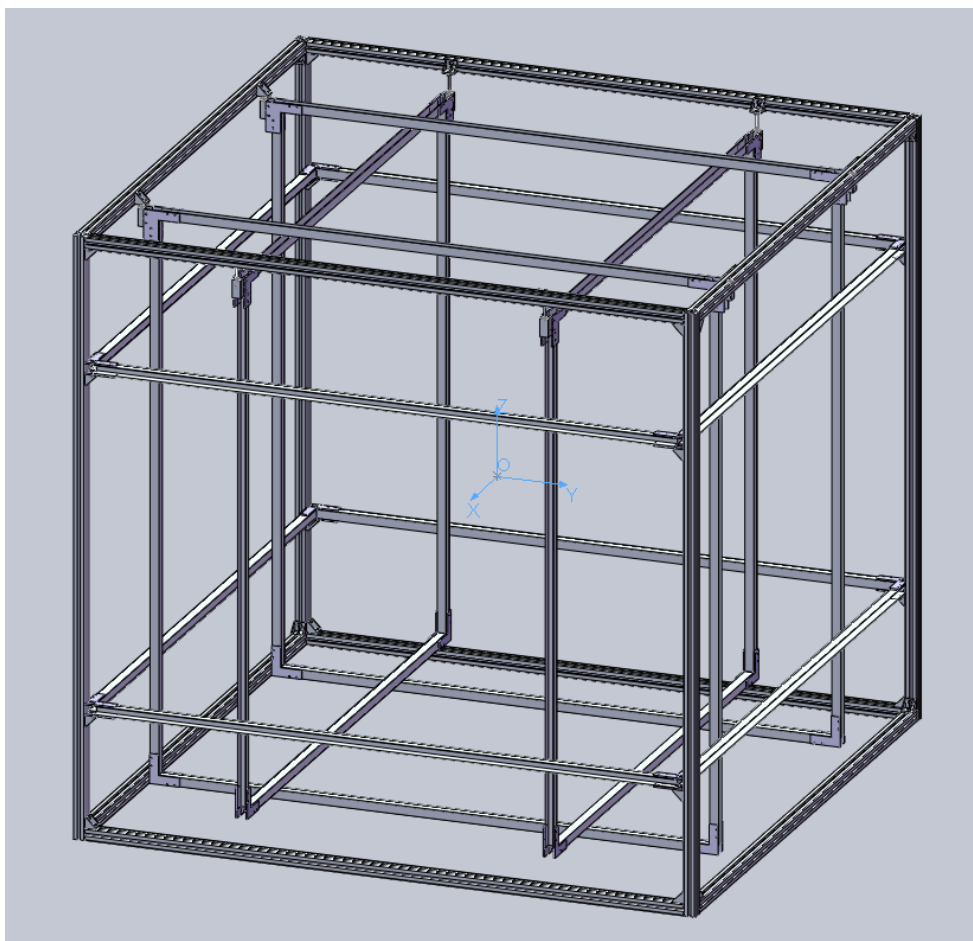


Рис.9. Имитатор геомагнитного поля

Имитатор Солнца

Имитатор солнца создает постоянный параллельный световой поток на расстоянии до 1.5 м, мощностью не менее 80000 лк. В качестве имитатора Солнца был выбран прожектор PAR-64 с лампой Philips 1000W230V PAR64 CP61 EXD NSP (рис.10).



Рис.10. Имитатор Солнца

Аэродинамический подвес

Аэродинамический подвес обеспечивает движению макета 3 степени свободы, а именно вращение вокруг трёх осей с минимальным трением. По одной оси (вертикальной) существует возможность поворота на 360° , по двум горизонтальным – на $\pm 30^\circ$. Максимальная грузоподъемность подвеса – 25 кг.

Аэродинамический подвес состоит из пьедестала (рис.11) и подшипника в виде полусферы (рис.12). Подшипник крепится к макету МКА.



Рис.11. Аэродинамический подвес



Рис.12. Подшипник

Приложение 2. Лабораторный стенд для испытания макета воздушно-винтовой (вентиляторной) системы управления ориентацией.

Описание макета

Макет состоит из следующих элементов: бортовой компьютер (одноплатный компьютер JРex); два вентиляторных двигателя; система управления исполнительными элементами; плата питания; аккумуляторные батареи; одноосный оптоволоконный датчик вращения (VG-910D); набор фотодиодов; одноосный МЭМС датчик угловой скорости; Wi-Fi адаптер (рис.1).

При включении питания макета от аккумуляторных батарей подается ток на все его системы с помощью преобразователей напряжения, входящих в состав платы питания. С компакт-флеш-диска бортового вычислителя загружается операционная система Windows XP Embedded. Далее, с помощью утилиты Remote Desktop (Удаленный рабочий стол) персонального компьютера управления стендом осуществляется подключение к бортовому компьютеру макета через Wi-Fi. После этого можно приступать к проведению испытаний. Схема макета представлена на рис.2.

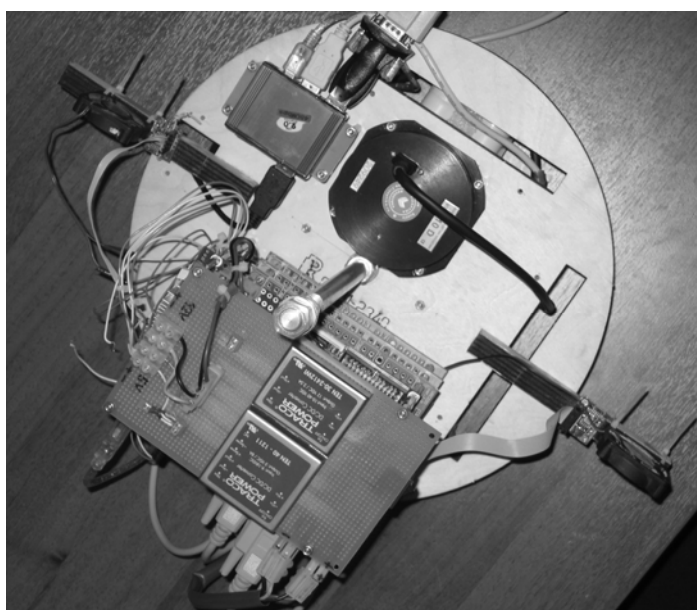


Рис.1. Внешний вид макет (вид сверху)

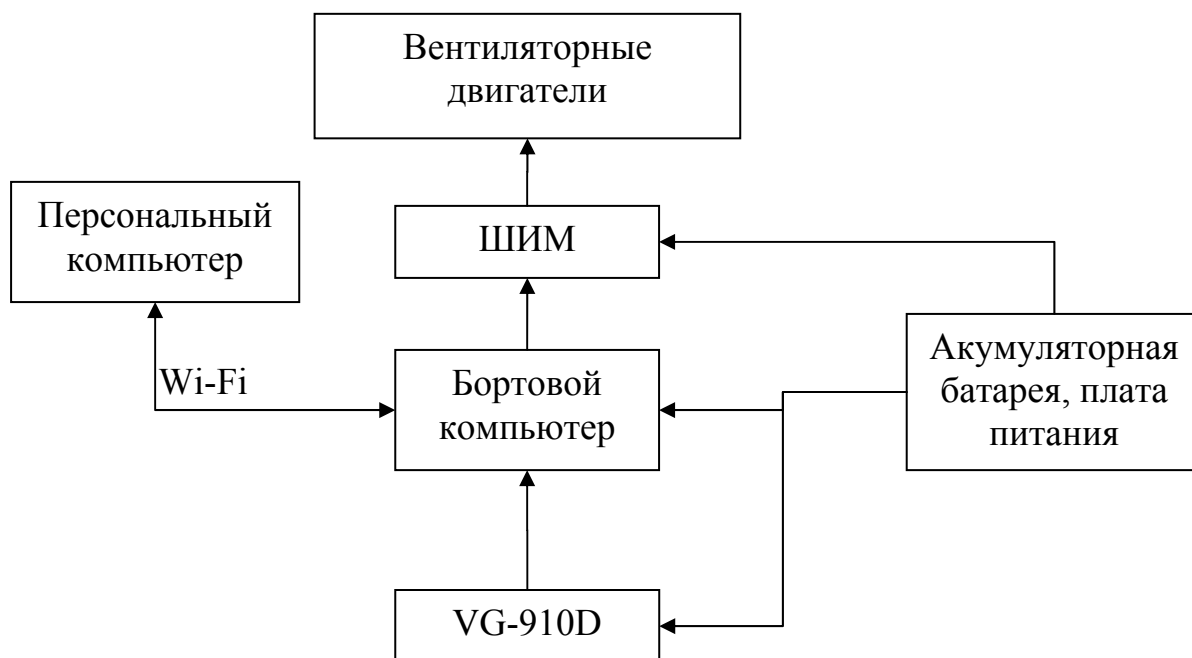


Рис.2. Схема макета

Программное обеспечение макета. Программное обеспечение (ПО) – это программа, работающая на бортовом компьютере макета, осуществляющая считывание информации с датчиков, ее обработку, принятие решения об управлении и сохранение результатов в файл. Программа написана в среде C++ Builder 6. Система управления и определения ориентации работает следующим образом. С датчиков поступает цифровой сигнал, который преобразуется в угловую скорость и значение угла поворота (рис.3). Значения угловой скорости и угла поворота за несколько измерений суммируются, после чего эта сумма делится на количество измерений, таким образом, на выходе получаем среднеарифметические значения. Цель усреднения – снизить влияние шума измерений и уменьшить число вычислений программы в единицу времени.

Далее усредненная угловая скорость поступает на вход фильтра Калмана, построенного на модели движения тела, подвешенного на струне. На выходе фильтра получаем вектор состояния тела на фазовой плоскости. Зная начальное и текущее состояние тела, программа определяет ветвь кривой переключения (4.12), в результате чего принимается решение о включении того или иного

двигателя. После включения двигателя, тело начинает вращаться под управлением одного из вентиляторов до тех пор, пока фазовая траектория не достигнет кривой переключения. После этого включается обратное управление, тело начинает тормозить до тех пор, пока не остановится. В это время управление выключается. Однако вследствие неточного определения параметров управления, шума датчиков, случайных факторов, неизбежны ошибки исполнения управления. Поэтому после окончания сеанса управления сравнивается требуемое положение с текущим. Если тело находится вне допустимой окрестности заданной точки, вычисляется величина отклонения и производится еще один корректировочный сеанс управления. Таким образом, программа реализует замкнутый цикл управления, который сохраняет свою работоспособность и в случае действия внешних возмущений. Общая схема работы системы ориентации изображена на рис.3. Главное окно программы содержит две области (рис.4):

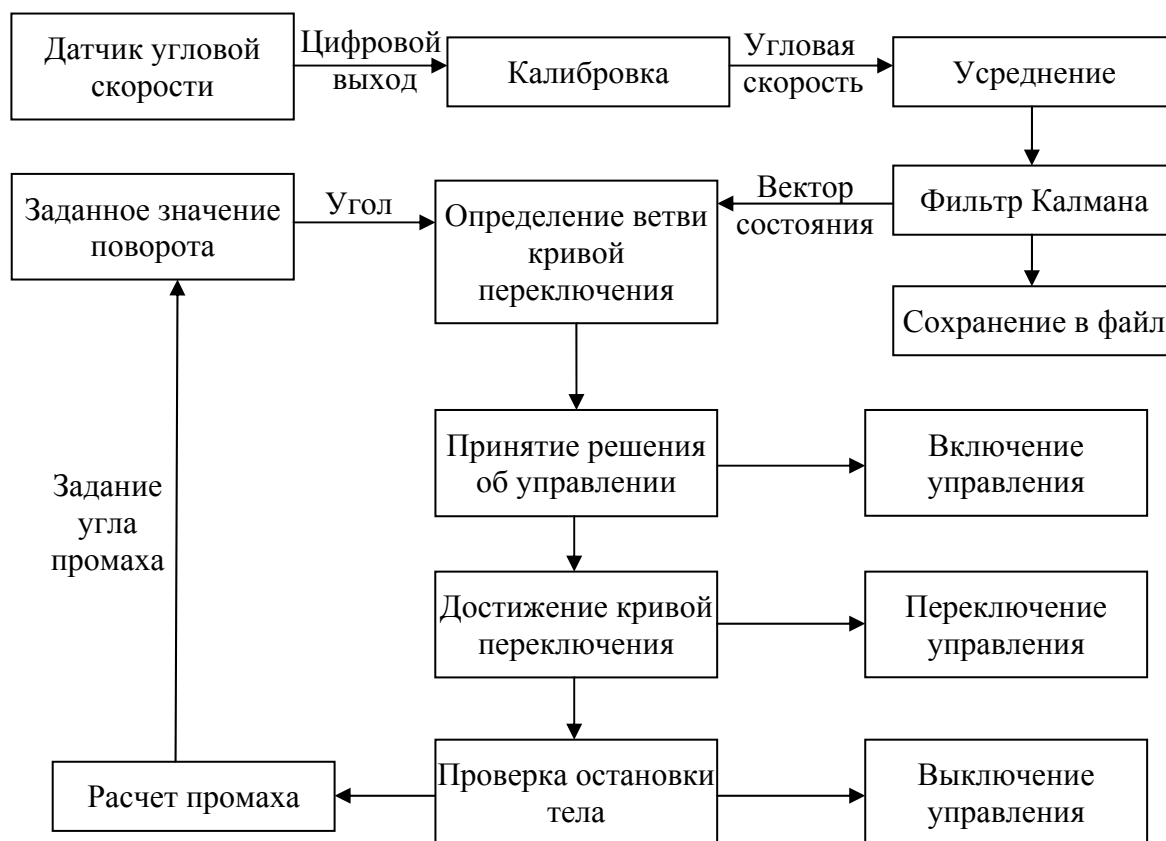


Рис.3. Схема работы программы

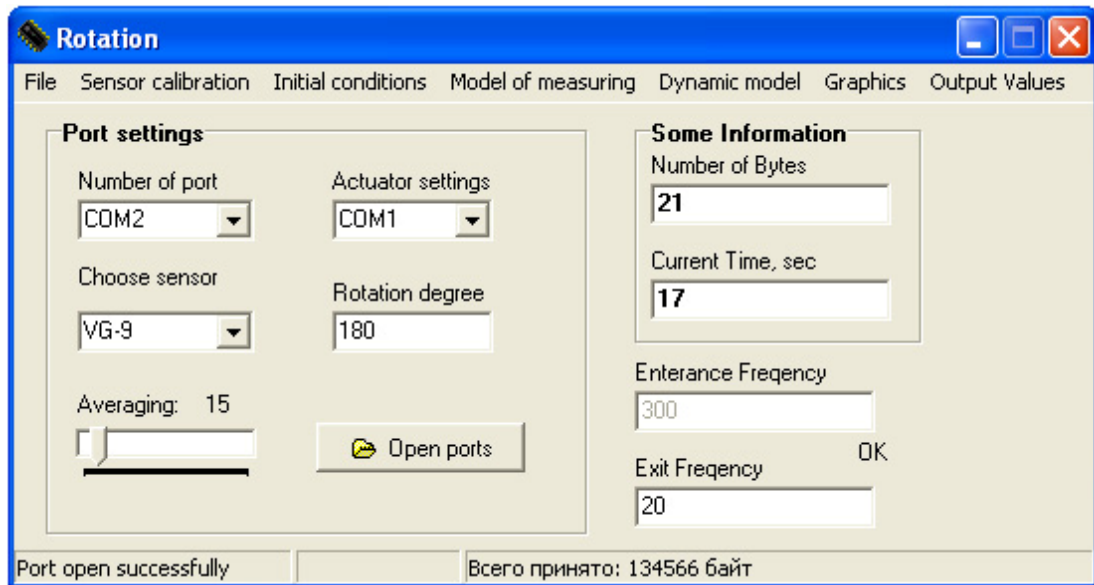


Рис.4. Интерфейс программы

Методика проведения испытаний

Проводится калибровка двигателей, и определяются параметры макета и струны. Определение параметров каждого двигателя проводится независимо друг от друга по следующей схеме:

1. Макет приводится в положение покоя.
2. Производится включение двигателя на время около двух минут.
3. В модели движения (4.6) выбирается начальное условие $\omega_0 = 0$.
4. Методом наименьших квадратов определяются параметры A , B .

Определение параметров макета и струны проводится по следующей схеме.

1. Закручивается струна на заданный угол.

2. Макет разарретируется и проводится серия измерений угловой скорости за период колебаний (~20 мин).
3. Находится момент прохождения положения равновесия, когда угловая скорость максимальна.
4. В качестве начальных условий в модели (4.9) выбираются $\alpha_0 = 0, \omega_0 = \omega_{\max}$.
5. Находятся параметры θ, ξ в модели (4.9) по методу наименьших квадратов.

В качестве начальных условий выбираются указанные значения в силу того, что модель (4.9) при $\alpha_0 = 0, \omega_0 = \omega_{\max}$ имеет наиболее простую зависимость от искомых параметров θ, ξ .