

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

На правах рукописи

СБЫТОВА ЕКАТЕРИНА СЕРГЕЕВНА

**ДИНАМИКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА
С РЕЗОНАТОРОМ В ВИДЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН**

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

01.02.01 – Теоретическая механика

Научный руководитель:
доктор технических наук
профессор Подалков В.В.

Москва – 2014

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ДИНАМИКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА С РЕЗОНАТОРОМ В ВИДЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ.....	21
§1.1. Уравнения движения чувствительного элемента микромеханического гироскопа	21
§1.2. Влияние разночастотности на угловую скорость прецессии гироскопа, установленного на неподвижном основании.....	28
§1.3. Режим свободных малых колебаний чувствительного элемента микромеханического гироскопа в случае медленно меняющихся условий функционирования.....	31
§1.4. Решение дифференциальных уравнений движения, описывающих вынужденные колебания чувствительного элемента в случае медленно меняющихся условий функционирования.....	39
ГЛАВА 2. ДИНАМИКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ПРИ ПОСТОЯННОЙ, МАЛОЙ ПО СРАВНЕНИЮ С СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ КОЛЕБАНИЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ОСНОВАНИЯ.....	51
§2.1. Уравнения движения микромеханического гироскопа с учетом нелинейных эффектов.....	51
§2.2. Решение системы в новых переменных при линейной постановке исходной задачи	56
§2.3. Влияние нелинейности на прецессию гироскопа, установленного на неподвижном основании.....	57
§2.4. Влияние нелинейности на прецессию гироскопа, установленного на подвижном основании	61

ГЛАВА 3. ВЫНУЖДЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА С РЕЗОНАТОРОМ В ВИДЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН.....	83
§3.1. Исследование устойчивости стационарных режимов на неподвижном основании	86
§3.2. Исследование устойчивости стационарных режимов на подвижном основании	91
ГЛАВА 4. ДИНАМИКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ОСНОВАНИЯ.....	97
§4.1. Приведение системы дифференциальных уравнений к «нормальным» координатам	99
§4.2. Построение решения системы уравнений в «нормальных» координатах	104
§4.3. Уход гироскопа в условиях немалой угловой скорости основания	112
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	114
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	116

Введение

Перед человечеством всегда стояла проблема определения направления в пространстве. Издавна главным ориентиром мореплавателей и путешественников были небесные тела – Солнце и звезды. Первыми навигационными приборами можно считать астролябию, конструкция которой была описана еще в IV в. н.э., и компас, появившийся в Китае в XI веке.

В 1817 г. немецким ученым Иоганном Боненбергером было опубликовано «Описание машины для объяснения законов вращения Земли вокруг своей оси и изменения направления последней». Главной частью этой «машины» был вращающийся массивный шар в кардановом подвесе. Именно это устройство можно назвать первым гироскопом, хотя сам термин *гироскоп* был предложен позднее Леоном Фуко, французским физиком, астрономом и механиком, в 1852 г. усовершенствовавшим это устройство и использовавшим его как прибор, демонстрирующий вращение Земли вокруг своей оси.

На данный момент известно множество конструкций гироскопов, в основу которых положены различные явления и физические принципы [50]: поплавковые гироскопы [23, 71], динамически настраиваемые [74] и волоконно-оптические [89], волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) [38, 56], основанные на эффекте инертности упругих волн, и вибрационные (ВГ) [16], основанные на свойстве камертона сохранить плоскость колебаний своих ножек.

Предложенный в 1851 г. Л. Фуко прибор для доказательства вращения Земли, представляющий собой сферический маятник (*маятник Фуко*), можно считать одним из прототипов вибрационного гироскопа. Простейшими типами ВГ являются гироскопы балочного и камертонного типа [3, 77, 81].

ВГ можно разделить на два класса: роторные и осцилляторные (ОВГ) [16]. В свою очередь ОВГ делятся на ОВГ с сосредоточенными параметрами [17, 106] и на ОВГ с распределенными параметрами (это, например, уже упомянутые гироскопы балочного и камертонного типа и их конструктивное обобщение – ОВГ пластиночного типа [9]).

В настоящее время развитие получают микромеханические гироскопы (ММГ) – одноосные вибрационные гироскопы, изготовленные на базе кремниевых технологий. Они являются одной из составных частей МЭМС – микроэлектромеханических систем, объединяющих в себе механические и электрические электронные компоненты [77, 91].

По виду движения инерционной массы (ИМ) различают микрогироскопы *LL*-типа (*linear-linear*) – в них ИМ совершает поступательные перемещения, гироскопы *RR*-типа (*rotate-rotate*) – в них ИМ совершает вращательные перемещения, и *LR (RL)*-типа – в них имеют место различные комбинации поступательных и вращательных перемещений ИМ.

Несомненными преимуществами микромеханических гироскопов являются простота конструкции, малые габаритные размеры, малый вес и низкое энергопотребление, а также отсутствие вращающихся частей, что улучшает их эксплуатационные характеристики и уменьшает требования к обслуживанию.

Микромеханические гироскопы находят применение в различных областях: в медицине в качестве приборов для прецизионного позиционирования микроинструментов в хирургии, в интеллектуальных системах протезирования; в автомобилестроении для создания систем навигации в комплексе с другими источниками информации; в оборонной промышленности в системах управления боеприпасами и боевыми роботами, в беспилотных летательных аппаратах; в бытовой технике в мобильных телефонах, игровых консолях и различных тренажерах и др. [18, 77].

Разработка МЭМС ведется такими зарубежными компаниями как *Bosch* (<http://www.bosch-sensortec.com/>), *Analog Devices* (<http://www.analog.com/>), *STMicroelectronics* (<http://www.st.com/>), *Northrop Grumman Corporation* (<http://www.northropgrumman.com/>), *Silicon Sensing Systems* (<http://www.sssj.co.jp/>), *Charles Stark Draper Laboratory* (<http://www.draper.com/>) и др. [21, 22, 92] (рис. 1, 2).

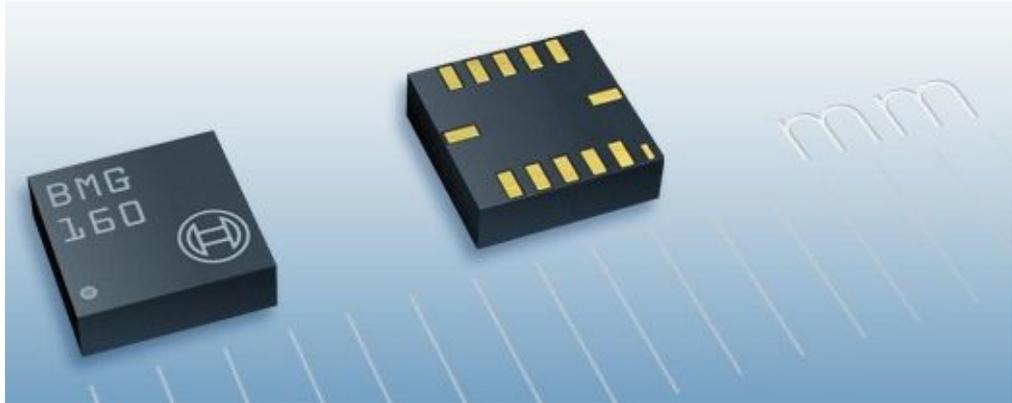


Рис. 1. Трехосный датчик угловой скорости *BMG160* фирмы *Bosch*

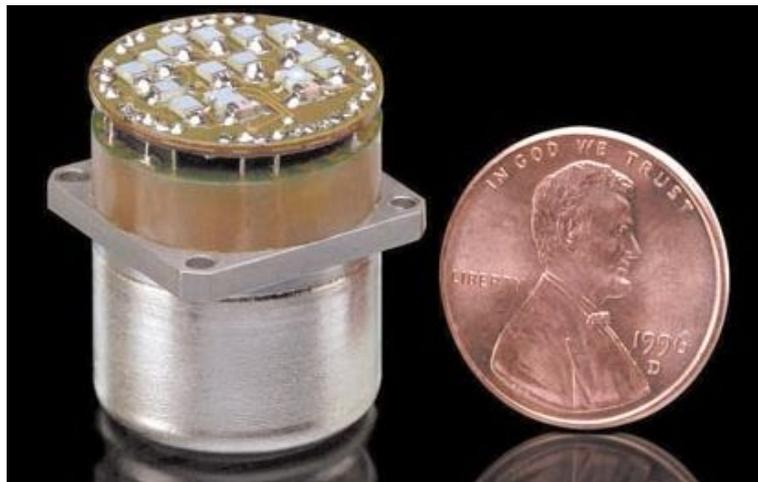


Рис. 2. Динамически настраиваемый гироскоп *G-2000* фирмы *Northrop Grumman Corporation*

Как показано в [28], разработка отечественных микромеханических приборов постепенно выходит на мировой уровень. К числу предприятий, занятых теоретическими работами в этом направлении, относятся ОАО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро» (Раменское, Московская обл.), НИИ Прикладной Механики им. академика В.И. Кузнецова (Москва), ЗАО «Гирооптика» (Санкт-

Петербург), ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (Санкт-Петербург) (рис. 3). В настоящее время ключевым моментом стала техническая реализация достигнутых теоретических результатов.

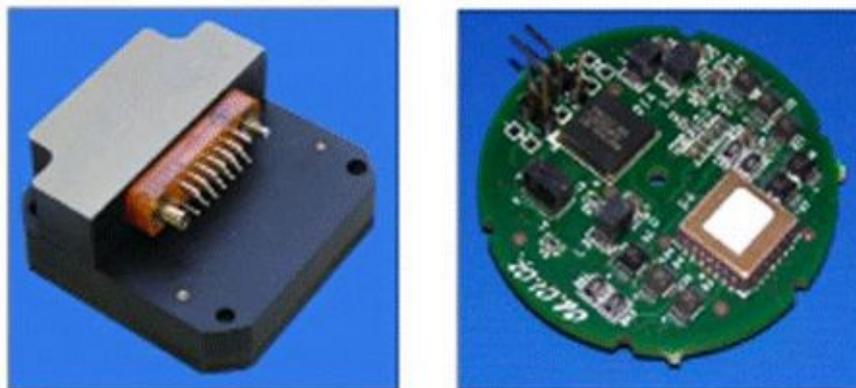


Рис. 3. Микромеханический гироскоп ММГ-2 производства ЦНИИ «Электроприбор»

К сожалению, как отмечается в [80], российский высокотехнологический сектор не готов к полномасштабному внедрению инноваций. Поэтому крайне необходимо создавать точные математические модели микромеханических приборов, с тем чтобы на этапе конструирования и непосредственного воплощения в виде МЭМС-систем на основе аналитических зависимостей повысить точность гироскопических датчиков и навигационных систем на их основе и улучшить, как следствие, их технические характеристики, и, тем самым, осуществить переход к «МЭМС высокого уровня» [2].

В связи с этим, в работе ставятся следующие задачи:

1. Разработка новой математической модели движения чувствительного элемента микромеханического гироскопа в виде четырех упругих пластин, учитывающей геометрию конструкции и различные виды граничных условий.

2. Исследование влияния медленно меняющихся условий функционирования на динамику прибора в режиме свободных и вынужденных колебаний.

3. Разработка методики компенсации уходов гироскопа, вызванных нелинейными эффектами из-за конструктивных особенностей чувствительного элемента микромеханического гироскопа.

Цели диссертационной работы соответствуют «Приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в Российской Федерации» по направлению «Транспортные и космические системы»; работа направлена на развитие технологий, входящих в «Перечень критических технологий Российской Федерации» по направлениям «Технологии информационных, управляющих, навигационных систем» и «Технологии наноустройств и микросистемной техники».

Методы исследования определялись спецификой изучаемого микромеханического гироскопа. В работе использовались методы теоретической механики, методы малого параметра, многих масштабов, теория дифференциальных уравнений и специальных функций, методы аналитических вычислений и математического моделирования с использованием системы символьных вычислений *Mathematica*.

Достоверность результатов исследования обеспечивается корректным применением соответствующих методов, а также подтверждается источниками, на которых базируются выводы данной работы.

Обзор предшествующих исследований. Существенный вклад в теорию инерциальной навигации, чье интенсивное развитие пришлось на вторую половину прошлого столетия, внесли такие ученые, как А.Ю. Ишлинский, В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов, Е.А. Девянин, И.В. Новожилов, В.А. Матвеев, В.Э. Джашитов, В.М. Панкратов и др.

Теоретические основы вибрационных гироскопов были изложены в работах таких авторов, как Л.И. Брозгуль, А.Ю. Ишлинский, Д.С. Пельпор, В.А. Матвеев, М.А. Павловский, А.В. Збруцкий, В.Я. Распопов, А.С. Неаполитанский, Б.В. Хромов и др. [16, 43, 70, 73, 74, 75, 77].

В статье В.Ф. Журавлева [37] показано, что фактически идея маятника Фуко реализована в таких гироскопах, как кольцевой гироскоп [38], волновой твердотельный гироскоп [56], квапазон (*Quarason*TM) [77] и некоторых других. При этом «все принципиальные вопросы теории подобного датчика инерциальной информации могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко». Именно поэтому весь класс таких приборов назван автором *обобщенным маятником Фуко*. В данной статье также получено, что принципиальной является погрешность вследствие нелинейности системы, вызывающая дополнительную прецессию. Показано, что работоспособный гироскоп может быть получен только при введении обратных связей, поддерживающих постоянной амплитуду r и равной нулю квадратуру k – это соответственно большая и малая оси эллипса, описываемого маятником в плоскости xu .

В работах [32, 34] того же автора исследуется влияние погрешностей на динамику обобщенного маятника Фуко и ставится задача их идентификации. В [34] рассматриваются свободные колебания маятника при наличии упругой анизотропии и анизотропии демпфирования. Показано, что величина дефекта от упругой анизотропии равна половине разности квадратов собственных частот, при этом главные оси жесткости могут быть определены по траектории маятника. В случае анизотропии демпфирования траектория маятника в пределе представляет собой эллипс, медленно разворачивающийся до совпадения большей полуоси с главной осью наименьшей диссипации. При этом определить положение главных осей жесткости по наблюдению предельного поведения управляемого по амплитуде маятника невозможно. В [32] решена задача компенсации дефектов при наличии тестового гармонического возбуждения. Вычислена погрешность идентификации в случае неточной информации об амплитуде и

частоте возбуждения. Показано, что качество идентификации можно повысить, если стабилизировать частоту возбуждения.

В статье [3] исследуется динамика ММГ камертонного типа, представляющего собой тонкий упругий стержень один край которого жестко закреплен на подвижном основании, а второй свободен. Найдено аналитическое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений движения чувствительного элемента гироскопа на вращающемся основании в режиме свободных колебаний.

Статьи [67, 72] посвящены технической реализации балочного пьезогироскопа. Проведена экспериментальная зависимость чувствительности прибора от разности собственных частот, описаны преимущества и недостатки данной конструкции.

В статье В.Э. Джашитова, В.М. Панкратова, М.А. Барулиной [26] представлен суперминиатюрный микромеханический датчик инерциальной информации, который состоит из чувствительного элемента, прикрепленного к корпусу с помощью одного или двух упругих элементов. Описана математическая модель температурных и технологических погрешностей. Показано, что данный датчик весьма чувствителен к этим видам дефектов.

В работах [24, 25] В.Э. Джашитовым и В.М. Панкратовым продолжено исследование этого микродатчика. В [24] изучено влияние переменных и постоянных поступательных и угловых вибраций. На основе численного эксперимента установлено, что наибольшее влияние оказывают поступательные вибрации по оси вторичных колебаний и угловые вибрации по оси измеряемой угловой скорости. Комбинация вибраций приводит к искажению выходного сигнала, изменению его амплитуды и появлению постоянных смещений во вторичных колебаниях. Постоянные угловые ускорения приводят к уменьшению с течением времени амплитуд первичных и вторичных колебаний. Статья [25] посвящена влиянию тепловых

воздействий. Компьютерный эксперимент проведен для трех тепловых режимов: ступенчатое изменение температуры окружающей среды и основания при отсутствии внутренних источников тепла, тепловыделение микроэлектромеханических структур, гармоническое изменение температуры окружающей среды и основания. Показано, что наличие даже незначительного тепловыделения внутренних источников в экстремальных эксплуатационных условиях может привести к недопустимым перегревам прибора и, как следствие, к его неработоспособности.

В статье В.Э. Джашитова, В.М. Панкратова, А.М. Лестева, И.В. Поповой [27] рассматривается влияние температурных и технологических погрешностей на дрейф ММГ камертонного типа со следующими конструкциями чувствительного элемента: две чувствительные массы, колеблющиеся в упругом подвесе; ММГ с кардановым подвесом чувствительного элемента; ММГ с дополнительной рамкой. На основе представленных математических моделей показано, что наибольшее число факторов, вызывающих температурный (или технологический) дрейф, возникает в ММГ камертонного типа.

В работе С.П. Тимошенкова и др. [85] представлены результаты разработки нового варианта конструкции микромеханического гироскопа *LL*-типа, позволяющей использовать его в системах управления высокодинамичными быстро вращающимися объектами. Полученные передаточные функции позволяют провести анализ динамики чувствительного элемента гироскопа и дать оценку чувствительности прибора.

В статье А.М. Лестева и А.В. Ефимовской [46] исследуется влияние нелинейных факторов (нелинейных сил упругости) на динамику ММГ *LL*-типа. Определены условия устойчивости периодических движений инерционной массы. Показано, что конструкция ММГ, содержащая две

инерционные массы, обладает большей стабильностью технических характеристик, чем конструкция с одной инерционной массой.

В работах И.Е. Лысенко, А.В. Лысенко [48, 49] описана конструкция и принцип функционирования одномассового микромеханического гироскопа-акселерометра *LR*-типа с двумя осями чувствительности. Получены уравнения движения его чувствительных элементов. Предложена методика выделения сигналов, несущих информацию исключительно о колебаниях чувствительных элементов под действием сил инерции Кориолиса.

Основные вопросы теории создания волновых твердотельных гироскопов нашли отражение в работах [19, 31, 36, 38, 56].

В монографии В.Ф. Журавлева и Д.М. Климова [38] приведен вывод уравнений кольцевого резонатора и исследуются динамические свойства упругого нерастяжимого и растяжимого кольца. Показано, что во вращающемся нерастяжимом кольце возбужденная форма колебаний поворачивается относительно инерциального пространства на угол, пропорциональный угловой скорости вращения кольца в своей плоскости (или, если угловая скорость есть медленная функция времени, то интегралу от этой функции), где коэффициент пропорциональности зависит от номера формы. Для растяжимого кольца рассматриваемый коэффициент зависит также от размеров кольца и характеристик его материала. Показано, что нелинейности, связанные с чисто геометрическими обстоятельствами, вносят погрешность в скорость прецессии стоячей волны колебаний, а диссипация в линейной постановке задачи приводит со временем только к уменьшению ее амплитуды.

В статьях В.Ф. Журавлева [31, 35, 36] отражены основные моменты теории ВТГ. В [36] изложены математическая формулировка эффекта инертности упругих волн, лежащего в основе этого гироскопа, и принципы управления волнами и их стабилизации. Сформулирована теорема о существовании единственной системы координат, в которой при некоторых

начальных условиях колебания кольца воспринимаются как стоячие волны. В [35] на базе полученной в [39] электрической модели ВТГ обсуждаются два алгоритма управления квадратурой (с помощью электростатических сил и электростатических компонент жесткости). Установлено, что разночастотность и разнодобротность приводят к уходу, имеющему постоянную составляющую и четвертую и восьмую гармоники по углу поворота основания. В [31] объектом исследования являются такие механические дефекты изготовления ВТГ, как неоднородность материала, переменность толщины резонатора и отклонение его формы от полусферы, неравномерность упругих характеристик. Получены аналитические формулы для максимального ухода при этих дефектах, из которых видно, что уход пропорционален произведению квадратуры на относительную величину дефекта.

Монография И.В. Меркурьева и В.В. Подалкова [56] посвящена нелинейным моделям микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. Для кольцевого резонатора показано, что нелинейные упругие свойства материала и ненулевые значения квадратурной волны колебаний приводят к дополнительной прецессии волновой картины колебаний и уходу гироскопа. Показано, что в режиме вынужденных колебаний может возникнуть до девяти стационарных режимов колебаний. Для резонатора ВТГ, выполненного в виде оболочки вращения, приведены зависимость масштабного коэффициента от неоднородности толщины резонатора и поправки к собственной частоте, в одномодовом приближении решена задача определения ухода гироскопа. Также исследовано влияние упругой анизотропии типа гексагонального и кубического кристалла и диссипации на динамику ВТГ. В статьях [4, 19] продолжены исследования по этому вопросу. Предложена методика калибровки параметров математической модели, основанная на методах разделения движений и наблюдаемости.

Н.В. Каленовой в статьях [44, 45] рассматривается резонатор ВТГ с массовым дефектом оболочки при угловой вибрации его основания. Показано, что по реакции волны на данный вид внешнего воздействия могут быть определены параметры массового дефекта, распределенного по поверхности резонатора.

Статьи М.А. Басараба, В.А. Матвеева и др. [8, 51] посвящены балансировке ВТГ. В [8] рассмотрен алгоритм балансировки с использованием сети Хопфилда. Описаны возможные альтернативные формулировки данной задачи. В [51] предложен новый алгоритм балансировки ВТГ путем удаления точечных масс, позволяющий сократить время балансировочного процесса и избежать сложных расчетов при определении удаляемых масс.

В работах Л.Я. Банах и А.Н. Никифорова [6, 7] рассмотрено поведение роторных гироскопических систем. Определен квазиустойчивый режим, вызванный действием сухого трения на кольце. Рассмотрены особенности виброгашения колебаний на одной заданной частоте.

В статье С.П. Тимошенко, В.Е. Плеханова и др. [86] проводится анализ влияния анизотропии материала и наличия упругого подвеса кольцевого резонатора численным методом конечных элементов. Приводятся методика и численное моделирование балансировки кольца.

В статьях [12, 13, 87] поведение ВТГ предлагается описывать не в терминах теории оболочек, что приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных, а в виде восьмиточечной (или шестнадцатиточечной [87]) модели. В работах рассматриваются вопросы построения математической модели, идентификации погрешностей, управления колебаниями, определения ухода неидеального резонатора, влияния угловой и линейной вибрации.

Статья В.Я. Распопова и др. [79] посвящена использованию микромеханических гироскопов на борту вращающихся по крену

беспилотных летательных аппаратов. Описана информационно-измерительная система ориентации с косоугольным измерительным базисом. Приведен алгоритм получения углов рыскания и тангажа.

Результаты испытаний инерциального измерительного модуля на базе триады микромеханических гироскопов и трех двухосных микромеханических акселерометров представлены в статьях [14, 15]. Произведено уточнение математической модели погрешностей для ММГ: углы неортогональности (характеризуют несовпадение измерительных осей каждого ММГ с осями модуля) вводятся как функционалы угловой скорости. Описан алгоритм коррекции влияния линейного ускорения на показания ММГ по данным с микромеханических акселерометров.

Вопросам проектирования микромеханических гироскопов, подбора конструкционных материалов и описанию технологии изготовления посвящен ряд работ [1, 5, 30, 47, 52, 76, 83]. Анализ шумов, обусловленных механической и электронной частями ММГ, проведен в [78]. Возможности обеспечения стойкости ММГ в условиях постоянных ускорений, линейной и угловой вибрации, а также при ударных воздействиях рассмотрены в [29]. Способ экспериментального определения масштабного коэффициента, передача сигналов стоячей волны и компенсация методических ошибок ВТГ с дифференцированием описаны в [40 - 42].

Ряд вышеизложенных научных задач нашел отражение в работах зарубежных авторов, таких как *V. Apostolyuk*, *K. Najafi*, *F. Ayazi*, *A. Trusov*, *A. Shkel* и др. [93 - 108].

Новыми научными результатами и положениями, выносимыми на защиту, являются теоретические вопросы проектирования новых типов микромеханических гироскопов, что дает возможность улучшить точностные характеристики датчиков инерциальной информации за счет создания точных математических моделей и аналитического представления уходов,

позволяющего применить алгоритмические методы компенсации систематических погрешностей в электронном контуре управления.

Теоретическая и практическая значимость результатов работы.

Модели, алгоритмы и обобщения, содержащиеся в диссертации, могут быть полезны для проектирования новых датчиков инерциальной информации и улучшения характеристик уже существующих приборов. В частности, на основе полученных аналитических формул может осуществляться компенсация уходов гироскопов в электронном контуре управления.

Результаты диссертации были выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00756-а, 09-08-01184-а, 12-01-00939-а, 12-08-01255-а), а также Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (программа «Участник молодежного научно-инновационного конкурса» У.М.Н.И.К., 2011-2012 гг.).

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования были представлены на

- заседаниях научного семинара кафедры теоретической механики и мехатроники МЭИ (Москва, 2010-2013 гг.);
- XVI международной научно-технической конференции "Радиоэлектроника, электротехника и энергетика" (Москва, 2010 г.);
- международной конференции "Седьмые Окуневские чтения" (Санкт-Петербург, 2011 г.);
- XXXV академических чтениях по космонавтике (Москва, 2011 г.);
- международной научно-практической конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы» (Москва, 2011 г.);
- XIII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением» (Санкт-Петербург, 2011 г.);
- конкурсе «Участник молодежного научно-инновационного конкурса» («У.М.Н.И.К.»), проводимом при поддержке фонда содействия развитию

малых форм предприятий в научно-технической сфере (Москва, 2011-2012 гг.);

- XVIII международной научно-технической конференции "Радиоэлектроника, электротехника и энергетика" (Москва, 2012 г.);
- XII всероссийской выставке научно-технического творчества молодежи НТТМ-2012 (Москва, 2012 г.);
- XIX международной научно-технической конференции "Радиоэлектроника, электротехника и энергетика" (Москва, 2013 г.);
- XXXVII академических чтениях по космонавтике (Москва, 2013 г.).
- 695-ом заседании семинара «Механика систем» имени академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем под руководством акад. В.Ф. Журавлева и акад. Д.М. Климова (Москва, 2013 г.).

Публикации. По результатам работы опубликовано 10 публикаций, в том числе 2 статьи [55, 58] в издании, рекомендованном ВАК Минобрнауки РФ, 1 реферат доклада [68] на конференции молодых ученых и 7 тезисов докладов на конференциях [53, 54, 57, 60, 61, 63, 64]. Зарегистрирована программа на ЭВМ [20]. Исследования в области МЭМС представлены также в [59, 62, 65, 82].

Личный вклад автора в совместных публикациях заключается в разработке новых математических моделей движения чувствительного элемента осцилляторного вибрационного гироскопа и проведении численных экспериментов, иллюстрирующих динамику микромеханического прибора, с использованием современных программных средств.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 108 наименований. Общий объем работы составляет 128 страниц и содержит 22 иллюстрации.

В первой главе диссертации исследована динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде четырех упругих пластин в линейной постановке задачи. Гироскоп помещен на основание, которое вращается с угловой скоростью, малой по сравнению с собственной частотой колебаний. В 1.1 с помощью вариационного принципа Гамильтона–Остроградского получена система интегро-дифференциальных уравнений, описывающих динамику прибора. Приведены функции нормального прогиба при различных граничных условиях для пластин. Применяя процедуру Бубнова–Галеркина, получены дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы. В 1.2 исследовано влияние разночастотности на угловую скорость прецессии гироскопа, помещенного на неподвижное основание. В 1.3 рассмотрена динамика гироскопа в режиме свободных колебаний в случае медленного изменения собственной частоты колебаний и угловой скорости вращения основания. В 1.4 получено точное решение дифференциальных уравнений для медленных переменных в режиме вынужденных колебаний при медленном изменении собственной частоты колебаний, угловой скорости вращения основания, амплитуды и частоты внешнего воздействия. Приведена оценка точности измерения угловой скорости основания.

Во второй главе изучены нелинейные свободные колебания микромеханического гироскопа при постоянных параметрах математической модели. В 2.1 приведены нелинейные дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы. С целью получения их точного решения осуществлен переход к новым переменным. В 2.2 приведено решение системы в новых переменных при линейной постановке исходной задачи. В 2.3 исследовано влияние нелинейности на прецессию гироскопа, установленного на неподвижном основании. Получена аналитическая формула для тангенса угла прецессии гироскопа. В 2.4 показано, что решение исходной системы дифференциальных уравнений в новых переменных

можно свести к эллиптическому интегралу. Изложена методика вычисления эллиптических интегралов данной задачи, получены аналитические формулы для тангенса угла прецессии гироскопа. Приведена оценка точности измерения угла поворота основания.

В третьей главе рассмотрены нелинейные вынужденные колебания микромеханического гироскопа с резонатором в виде четырех упругих пластин. В 3.1 исследована устойчивость по Ляпунову стационарных режимов, когда гироскоп помещен на неподвижное основание. Показано, что при определенных частотах внешнего воздействия существуют несколько асимптотически устойчивых стационарных режимов. В 3.2 изучена устойчивость по Ляпунову стационарных режимов, когда гироскоп помещен на основание, вращающееся с постоянной угловой скоростью, малой по отношению к собственной частоте колебаний резонатора. Показано, что в системе существует несколько устойчивых стационарных режимов, а увеличение угловой скорости основания приводит к изменению амплитудно-частотной характеристики, при этом наблюдается явление срыва колебаний и скачков амплитуд.

В четвертой главе исследована динамика микромеханического гироскопа, помещенного на основание, вращающееся с произвольной постоянной угловой скоростью. С использованием формализма Лагранжа получены нелинейные дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы. В 4.1 описана методика перехода от исходных переменных к так называемым «нормальным» координатам. В 4.2 приведено точное решение системы дифференциальных уравнений в «нормальных» координатах. В 4.3 получена аналитическая формула для тангенса угла прецессии гироскопа. Приведена оценка точности прибора.

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники Национального исследовательского университета "МЭИ" под руководством

профессора В.В. Подалкова, которому автор глубоко признателен за постановку интересных задач и плодотворные обсуждения рассматриваемых в настоящей работе вопросов.

Также автор от души благодарит всех преподавателей кафедры теоретической механики и мехатроники, особенно заведующего кафедрой И.В. Меркурьева, за обсуждение результатов работы, а также Г.В. Панкратьеву за совместную работу над материалами второй главы.

Глава 1. Динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин в линейной постановке задачи

В первой главе исследована динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде четырех упругих пластин в линейной постановке задачи. Гироскоп помещен на основание, которое вращается с угловой скоростью, малой по сравнению с собственной частотой колебаний. В 1.1 с помощью вариационного принципа Гамильтона–Остроградского получена система интегро-дифференциальных уравнений, описывающих динамику прибора. Приведены функции нормального прогиба при различных граничных условиях для пластин. Применяя процедуру Бубнова–Галеркина, получены дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы. В 1.2 исследовано влияние разночастотности на угловую скорость прецессии гироскопа, помещенного на неподвижное основание. В 1.3 рассмотрена динамика гироскопа в режиме свободных колебаний при медленно меняющихся условиях функционирования, таких как собственная частота и угловая скорость вращения основания. В 1.4 получено точное решение дифференциальных уравнений для медленных переменных в режиме вынужденных колебаний при медленном изменении собственной частоты, угловой скорости вращения основания, амплитуды и частоты внешнего воздействия. Приведена оценка точности измерения угловой скорости основания.

Основные материалы данной главы опубликованы в [57, 58, 61].

§1.1. Уравнения движения чувствительного элемента микромеханического гироскопа

Рассмотрим осцилляторный вибрационный гироскоп [9], чувствительный элемент которого – четыре одинаковые упругие пластины 1, закрепленные в рамке 2, соединенной упругими торсионами 3 с основанием

гироскопа (рис. 1.1). Геометрические размеры прямоугольных пластин обозначим через a и b . Под действием электростатической системы управления резонатор совершает периодическое движение, измерение которого позволяет определить вращение основания гироскопа в инерциальном пространстве.

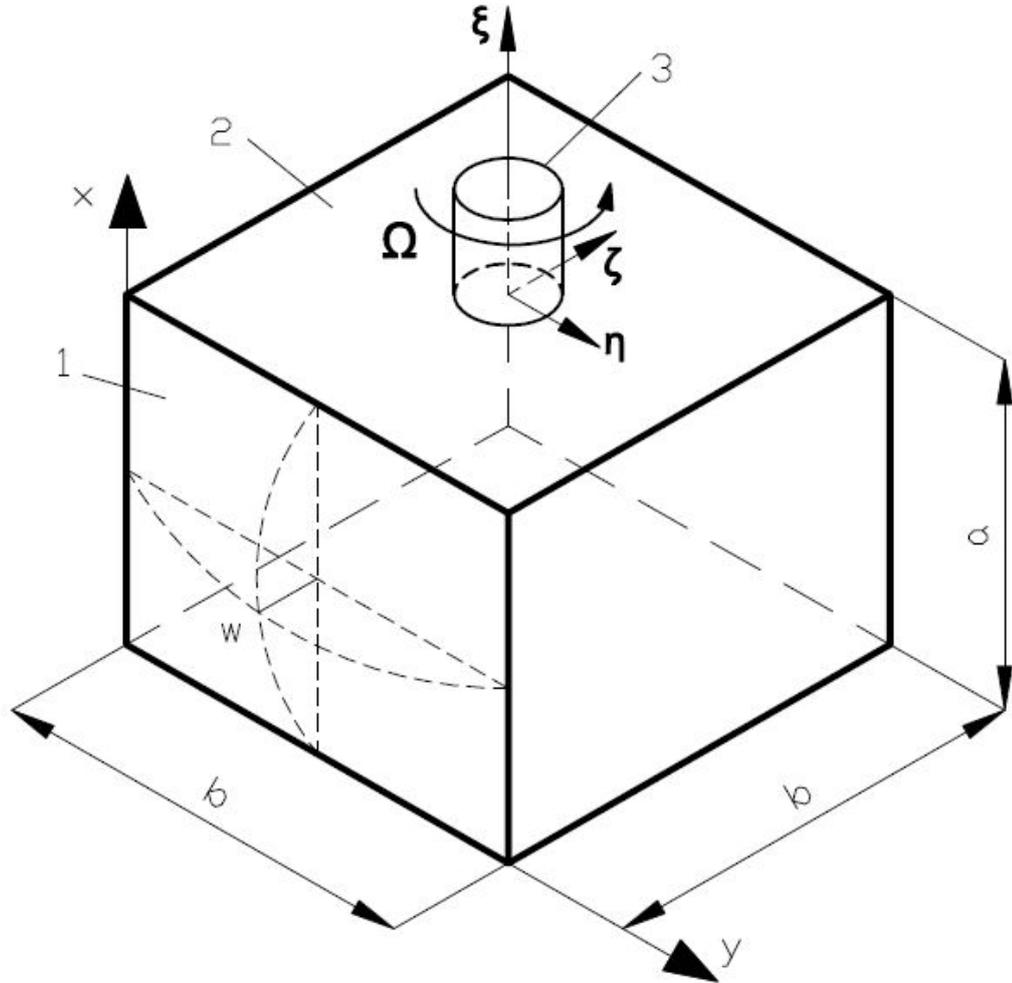


Рис. 1.1. Конструктивная схема микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин

Введем связанную с подвижной рамкой систему координат $\xi\eta\zeta$, при этом ось ξ является осью чувствительности гироскопа. Будем предполагать, что основание вращается вокруг оси ξ с угловой скоростью Ω , в общем случае являющейся некоторой функцией времени.

Для описания колебаний пластины введем функцию прогиба поверхности тонкой упругой пластины $w = w(t, x, y)$, зависящую от времени t

и координат x и y , связанных с пластиной. Пусть β – малый угол поворота рамки относительно основания гироскопа. В этом случае кинетическая энергия системы «упругие пластины – рамка» имеет вид:

$$T = 2\rho h \iint_S \mathbf{V}^2 dS + \frac{1}{2} J_0 (\Omega + \dot{\beta})^2, \quad (1.1)$$

где ρ – плотность материала пластины, h – ее толщина, J_0 – момент инерции рамки относительно оси ξ . В (1.1) интегрирование проводится по площади срединной поверхности S пластин, точкой обозначено дифференцирование по времени t , \mathbf{V} – вектор абсолютной скорости точки пластины:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r},$$

где

$$\dot{\mathbf{u}} = [0 \quad 0 \quad \dot{w}]^T,$$

$$\boldsymbol{\Omega} = [\Omega + \dot{\beta} \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$\mathbf{r} = \left[x \quad y - \frac{b}{2} \quad w + \frac{b}{2} \right]^T.$$

Таким образом, имеем

$$T = 2\rho h \iint_S \left\{ (\Omega + \dot{\beta})^2 \left(w + \frac{b}{2} \right)^2 + \left[\dot{w} + (\Omega + \dot{\beta}) \left(y - \frac{b}{2} \right) \right]^2 \right\} dS + \frac{1}{2} J_0 (\Omega + \dot{\beta})^2. \quad (1.2)$$

Потенциальная энергия системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi = 2D \iint_S & \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2(1 - \nu_0) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dS + \frac{1}{2} c_0 \beta^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_0^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга,

ν_0 – коэффициент Пуассона, c_0 – жесткость упругих торсионов рамки.

Введем действие по Гамильтону

$$U = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt. \quad (1.4)$$

Здесь t_1, t_2 – начальный и конечный моменты времени, в которых вариации $\delta w, \delta \beta$ равны нулю.

Согласно принципу Гамильтона–Остроградского [88], вариация от действия по Гамильтону δU равна нулю. Таким образом, подставляя в (1.4) выражения для кинетической и потенциальной энергий (1.2), (1.3) и варьируя, получаем

$$\begin{aligned} \delta U = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ 4 \left(-\rho h \ddot{w} - D \nabla^4 w - \rho h y (\dot{\Omega} + \ddot{\beta}) + \rho h (\Omega + \dot{\beta})^2 \left(w + \frac{b}{2} \right) \right) \delta w + \right. \\ \left. + (-J(\dot{\Omega} + \ddot{\beta}) - c_0 \beta - 4\rho h \iint_S \left[2\dot{w} \left(w + \frac{b}{2} \right) (\Omega + \dot{\beta}) + \right. \right. \\ \left. \left. + w(w + b)(\dot{\Omega} + \ddot{\beta}) + y\ddot{w} \right] dS \right) \delta \beta \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Так как вариации $\delta w, \delta \beta$ не зависят друг от друга, то выражения, стоящие при них в (1.5), следует приравнять к нулю. Таким образом, получаем систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающих динамику гироскопа:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{w} + D_* \nabla^4 \dot{w} + D \nabla^4 w + \rho h y (\dot{\Omega} + \ddot{\beta}) - \rho h (\Omega + \dot{\beta})^2 \left(w + \frac{b}{2} \right) = 0, \\ J(\dot{\Omega} + \ddot{\beta}) + \kappa \dot{\beta} + c_0 \beta + 4\rho h \iint_S \left[2\dot{w} \left(w + \frac{b}{2} \right) (\Omega + \dot{\beta}) + \right. \\ \left. + w(w + b)(\dot{\Omega} + \ddot{\beta}) + y\ddot{w} \right] dS = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $J = J_0 + \frac{4\rho h a b^3}{3}$ – обобщенный момент инерции системы,

$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор. В (1.6) учтено

внутреннее трение по модели Кельвина–Фойгта [84] и введены обозначения

$D_* = \frac{E_* h^3}{12(1-\nu_0^2)}$ – коэффициент внутренних потерь при колебаниях пластин,

E_* – вязкоупругий модуль материала пластин, характеризующий внутреннее трение в материале, κ – коэффициент вязкого трения торсионов. Полагая, что резонатор находится в вакуумированной полости, внешними потерями при колебаниях будем пренебрегать.

Для дальнейшего исследования будем предполагать, что угловая скорость основания Ω мала по сравнению с характерной частотой собственных колебаний чувствительного элемента ω , то есть,

$$\frac{\Omega}{\omega} \ll 1,$$

причем $\frac{1}{\omega} \frac{d\Omega}{dt}$ второго порядка малости по сравнению с $\frac{\Omega}{\omega}$.

Рассмотрим следующие граничные условия для пластин.

1. Заделка по четырем сторонам. Функция нормального прогиба w имеет вид [88]:

$$w = \alpha(t) \frac{8b\pi^2}{(\pi-4)^2} \left[\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right] \left[\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi y}{b} \right]. \quad (1.7)$$

Здесь α – искомая функция формы колебаний, характеризующая прогиб в середине пластины; $\alpha \ll 1$.

2. Шарнирное опирание по четырем сторонам. Функция нормального прогиба w

$$w = \frac{1}{2} \alpha(t) b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (1.8)$$

Здесь α – искомая функция формы колебаний, характеризующая прогиб в середине пластины; $\alpha \ll 1$.

3. Консольное закрепление пластин (см. рис. 1.2). Предполагая в первом приближении цилиндрический изгиб, имеем следующую функцию нормального прогиба

$$w = \frac{\alpha(t)b}{4(1 + \operatorname{ch} r_1 \sin r_1)} \left[(\operatorname{sh} r_1 + \sin r_1) \left(\operatorname{ch} \left(r_1 \frac{x}{a} \right) - \cos \left(r_1 \frac{x}{a} \right) \right) - (\operatorname{ch} r_1 + \cos r_1) \left(\operatorname{sh} \left(r_1 \frac{x}{a} \right) - \sin \left(r_1 \frac{x}{a} \right) \right) \right]. \quad (1.9)$$

Здесь α – искомая функция формы колебаний, характеризующая прогиб на конце пластины; $\alpha \ll 1$.

В (1.9) $r_1 = 1.8751$ – первый корень трансцендентного уравнения $\operatorname{sh} r \cos r = -1$ [88].

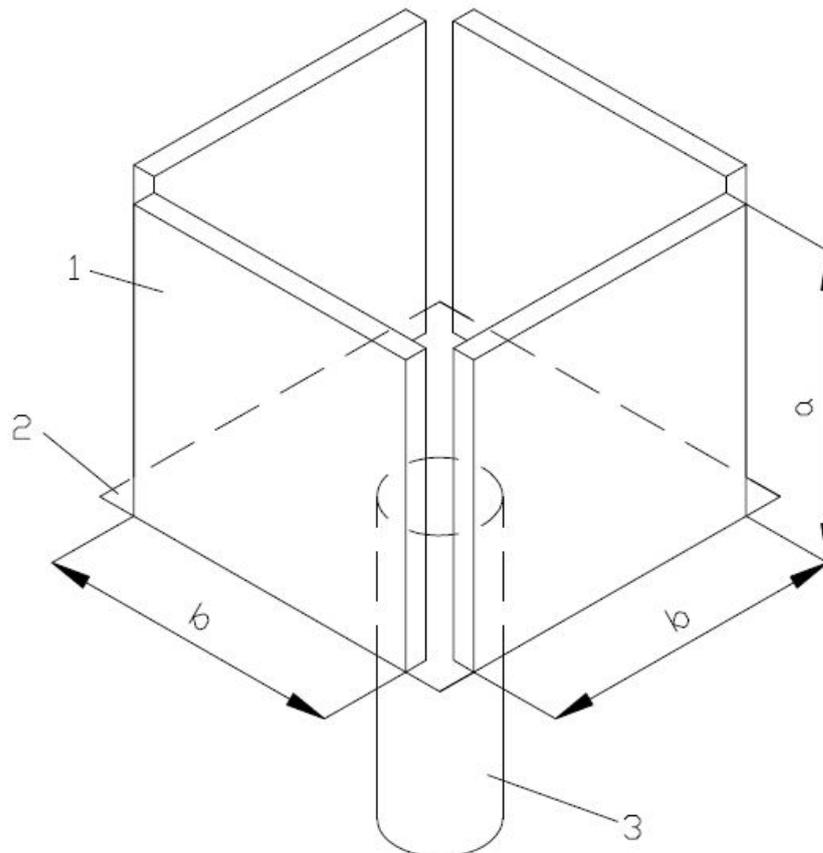


Рис. 1.2. Конструктивная схема микромеханического гироскопа в случае консольного закрепления пластин

Применяя процедуру Бубнова–Галеркина, получим дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы, сохраняя в правой части слагаемые одного порядка малости:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha &= -d_* \dot{\alpha} + 2b_1 \Omega \dot{\beta} + b_1 \dot{\beta}^2 + \alpha \dot{\beta}^2, \\ \ddot{\beta} + \omega_2^2 \beta &= -\kappa_* \dot{\beta} - 2b_2 \Omega \dot{\alpha} - 2b_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} - 2b_2 \alpha \dot{\beta} - \frac{b_2}{b_1} \alpha^2 \ddot{\beta} - 2 \frac{b_2}{b_1} \alpha \dot{\alpha} \dot{\beta}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

В формуле (1.10) введены следующие обозначения: $\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{c_0}{J}$ – квадраты собственных частот колебаний резонатора на неподвижном основании; $d_*, \kappa_* = \frac{\kappa}{J}$ – коэффициенты демпфирования; b_1, b_2 – коэффициенты при гироскопических слагаемых в математической модели движения.

При этом для граничных условий 1-3 имеем соответственно следующие значения параметров системы $\omega_1^2, d_*, b_1, b_2$

$$\begin{aligned}1. \quad \omega_1^2 &= \frac{5D\pi^4}{\rho h a^4 b^4} \left[\frac{3(a^4 + b^4)(\pi^2 - 8)}{\pi^4 + 15\pi^2 - 240} + \frac{10a^2 b^2 (5\pi^2 - 48)^2}{(\pi^4 + 15\pi^2 - 240)^2} \right], \\ d_* &= \frac{5D_* \pi^4}{\rho h a^4 b^4} \left[\frac{3(a^4 + b^4)(\pi^2 - 8)}{\pi^4 + 15\pi^2 - 240} + \frac{10a^2 b^2 (5\pi^2 - 48)^2}{(\pi^4 + 15\pi^2 - 240)^2} \right], \\ b_1 &= \frac{25\pi^2 (\pi^2 - 12)^2 (\pi - 4)^2}{16(\pi^4 + 15\pi^2 - 240)^2}, \quad b_2 = \frac{4\rho h a b^3 (\pi^2 - 12)^2}{9\pi^2 (\pi - 4)^2 J}, \\ 2. \quad \omega_1^2 &= \frac{D\pi^4}{\rho h} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2, \quad d_* = \frac{D_* \pi^4}{\rho h} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2, \quad b_1 = \frac{16}{\pi^2}, \\ b_2 &= \frac{4\rho h a b^3}{\pi^2 J}, \\ 3. \quad \omega_1^2 &= 12.3624 \frac{D}{\rho h a^4}, \quad d_* = 12.3624 \frac{D_*}{\rho h a^4}, \quad b_1 = 1.566, \\ b_2 &= 0.392 \frac{\rho h a b^3}{J}.\end{aligned}$$

Числовой пример. Рассмотрим гироскоп, чувствительный элемент которого представляет собой квадратные пластины размером $a = b = 10$ мм и толщиной $h = 1$ мм, изготовленные из плавленного кварца. Для данного материала плотность $\rho = 2201$ кг/м³, модуль Юнга $E = 7.3 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_0 = 0.17$. Обобщенный момент инерции примем равным $J = 6 \cdot 10^{-8}$ кг·м². Одним из требований, предъявляемым к конструкции микромеханического гироскопа, является совмещение частот собственных колебаний. Поэтому жесткость торсионов c_0 подбирается так, чтобы $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Таким образом, для граничных условий 3 (консольное закрепление пластин) имеем $c_0 = 206.5$ Н·м, $\omega = 59317$ рад/с (или 9441 Гц), $b_1 = 1.566$, $b_2 = 0.147$.

§1.2. Влияние разночастотности на угловую скорость прецессии гироскопа, установленного на неподвижном основании

Рассмотрим случай, когда резонатор находится на неподвижном основании ($\Omega = 0$). Без учета нелинейных слагаемых уравнения (1.10) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha &= -d_* \dot{\alpha}, \\ \ddot{\beta} + \omega_2^2 \beta &= -\kappa_* \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Пусть собственные частоты близки, но не равны, то есть $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \tilde{\Delta}$, где $\tilde{\Delta} \ll \omega$. Введем также коэффициенты демпфирования $d_* = \kappa_* = 2\gamma_0\omega$, где $\gamma_0 \ll 1$. Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha &= -2\gamma_0\omega \dot{\alpha}, \\ \ddot{\beta} + (\omega + \tilde{\Delta})^2 \beta &= -2\gamma_0\omega \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Решение для α и β с точностью до величин первого порядка малости будем искать в следующем виде

$$\begin{aligned}\alpha &= e^{-\gamma_0 \omega t} (A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t), \\ \beta &= e^{-\gamma_0 \omega t} (B_1 \sin(\omega + \tilde{\Delta})t + B_2 \cos(\omega + \tilde{\Delta})t),\end{aligned}\quad (1.13)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные, определяемые начальными условиями.

Перейдем от переменных α и β к медленным переменным p_1, q_1, p_2, q_2 Ван-дер-Поля посредством замены

$$\begin{aligned}\alpha &= p_1 \sin \omega t + q_1 \cos \omega t, \\ \beta &= p_2 \sin \omega t + q_2 \cos \omega t.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Сравнивая (1.13) и (1.14), получаем, что p_1, q_1, p_2, q_2 определяются через постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 и $\tilde{\Delta}$ следующим образом

$$\begin{aligned}p_1 &= A_1 e^{-\gamma_0 \omega t}, \quad q_1 = A_2 e^{-\gamma_0 \omega t}, \\ p_2 &= e^{-\gamma_0 \omega t} (B_1 \cos \tilde{\Delta} t - B_2 \sin \tilde{\Delta} t), \\ q_2 &= e^{-\gamma_0 \omega t} (B_1 \sin \tilde{\Delta} t + B_2 \cos \tilde{\Delta} t).\end{aligned}\quad (1.15)$$

Поведение гироскопа удобно представить в орбитальных координатах θ, χ, r, k [37], переход к которым осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}p_1 &= -r \cos \theta \sin \chi - k \sin \theta \cos \chi, \\ q_1 &= r \cos \theta \cos \chi - k \sin \theta \sin \chi, \\ p_2 &= -r \sin \theta \sin \chi + k \cos \theta \cos \chi, \\ q_2 &= r \sin \theta \cos \chi + k \cos \theta \sin \chi.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Поясним, что означают переменные θ, χ, r, k . На неподвижном основании ($\Omega = 0$) в плоскости $\alpha\beta$ любая фазовая траектория представляет собой эллипс с полуосями $|r|$ и $|k|$, повернутый на угол θ (рис. 1.3); χ представляет собой фазу, характеризующую изменение частоты колебаний.

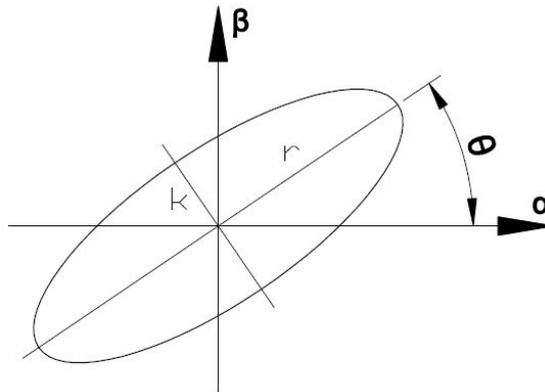


Рис. 1.3. Фазовая траектория на подвижном основании

Из соотношений (1.16) получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned}\hat{E} &= p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2 = r^2 + k^2, \\ X &= 2(p_2q_1 - p_1q_2) = 2rk, \\ \operatorname{tg}2\theta &= \frac{2(p_1p_2 + q_1q_2)}{p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2}, \\ \operatorname{tg}2\chi &= \frac{2(p_1q_1 + p_2q_2)}{p_1^2 - q_1^2 + p_2^2 - q_2^2}.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Величина \hat{E} есть сумма квадратов амплитуд колебаний по двум обобщенным координатам. $X = 0$ означает, что происходит только колебание пластин (возникает так называемая «стоячая волна» колебаний).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, & \hat{g} &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \\ \sin\phi_0 &= \frac{A_1}{\hat{f}}, & \sin\psi_0 &= \frac{B_2}{\hat{g}}.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Тогда выражение для угла прецессии θ будет:

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\hat{f}\hat{g} \sin(\tilde{\Delta}t + \phi_0 + \psi_0)}{\hat{f}^2 - \hat{g}^2} \right), \quad (1.19)$$

а для угловой скорости прецессии

$$\dot{\theta} = \frac{\tilde{\Delta} \hat{f} \hat{g} (\hat{f}^2 - \hat{g}^2) \cos(\tilde{\Delta}t + \phi_0 + \psi_0)}{(\hat{f}^2 - \hat{g}^2)^2 + 4\hat{f}^2 \hat{g}^2 \sin^2(\tilde{\Delta}t + \phi_0 + \psi_0)}. \quad (1.20)$$

Для оптимального функционирования гироскопов требуется, чтобы амплитуда вторичных колебаний (в нашем случае – по второй обобщенной координате β) была минимальной, то есть \hat{g} должно быть много меньше \hat{f} . Тогда угловая скорость прецессии определяется следующей формулой

$$\dot{\theta} = \frac{\tilde{\Delta} \hat{g}}{\hat{f}} \cos(\tilde{\Delta}t + \phi_0 + \psi_0). \quad (1.21)$$

Таким образом, на неподвижном основании при линейной постановке задачи, когда неточно совмещены частоты колебаний по двум обобщенным

координатам, возникает прецессия волновой картины колебаний гироскопа, определяемая формулой (1.19). Это приводит к дополнительным погрешностям в измерении угла поворота основания в режиме свободных колебаний. Вязкое трение не влияет на прецессию гироскопа, а приводит к медленному изменению амплитуд колебаний.

§1.3. Режим свободных малых колебаний чувствительного элемента микромеханического гироскопа в случае медленно меняющихся условий функционирования

Для исследования свободных колебаний в линейной постановке задачи пренебрежем квадратичными и кубическими слагаемыми в системе (1.10). Рассматриваться будет одночастотная система, то есть $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega^2$, в которой собственная частота $\omega = \omega(\tau)$ и угловая скорость вращения основания $\Omega = \Omega(\tau)$ являются функциями медленного времени $\tau = \varepsilon t$, где $\varepsilon \ll 1$ – малый положительный параметр. При этом Ω мала по сравнению с собственной частотой колебаний ω . Введем коэффициенты демпфирования $d_* = \kappa_* = 2\gamma$, $\gamma \ll \omega$ – коэффициент вязкого трения. Его малость определяется хорошей добротностью колебательного контура.

Таким образом, система (1.10) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2(\tau)\alpha &= -2\gamma\dot{\alpha} + 2b_1\Omega(\tau)\dot{\beta}, \\ \ddot{\beta} + \omega^2(\tau)\beta &= -2\gamma\dot{\beta} - 2b_2\Omega(\tau)\dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Покажем характерный масштаб изменения медленных параметров системы на следующем примере:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega(\tau)}{dt} &= \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau}, \\ \frac{d^2\omega(\tau)}{dt^2} &= \varepsilon^2 \frac{d^2\omega(\tau)}{d\tau^2}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Следуя [69], решение для одночастотной системы (1.22) с медленно изменяющимися параметрами будем искать в виде

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0(t, \tau) + \alpha_1(t, \tau), \\ \beta &= \beta_0(t, \tau) + \beta_1(t, \tau).\end{aligned}\quad (1.24)$$

Причем $|\alpha_1| \ll |\alpha_0|$, $|\beta_1| \ll |\beta_0|$ и

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= p_1(\tau) \sin \eta(\tau) + q_1(\tau) \cos \eta(\tau), \\ \beta_0 &= p_2(\tau) \sin \eta(\tau) + q_2(\tau) \cos \eta(\tau).\end{aligned}\quad (1.25)$$

Здесь $\dot{\eta} = \omega(\tau)$.

Запишем выражения обобщенных скоростей и ускорений, дифференцируя формулы (1.24), с точностью до величин второго порядка малости:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} \sin \eta(\tau) + p_1 \omega(\tau) \cos \eta(\tau) + \varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} \cos \eta(\tau) - \\ &- q_1 \omega(\tau) \sin \eta(\tau) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \\ \dot{\beta} &= \varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} \sin \eta(\tau) + p_2 \omega(\tau) \cos \eta(\tau) + \varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} \cos \eta(\tau) - \\ &- q_2 \omega(\tau) \sin \eta(\tau) + \frac{\partial \beta_1}{\partial t}.\end{aligned}\quad (1.26)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= 2\varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} \omega(\tau) \cos \eta(\tau) + p_1 \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \cos \eta(\tau) - \omega^2(\tau) \sin \eta(\tau) \right] - \\ &- 2\varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} \omega(\tau) \sin \eta(\tau) - q_1 \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \sin \eta(\tau) + \omega^2(\tau) \cos \eta(\tau) \right] + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2}, \\ \ddot{\beta} &= 2\varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} \omega(\tau) \cos \eta(\tau) + p_2 \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \cos \eta(\tau) - \omega^2(\tau) \sin \eta(\tau) \right] - \\ &- 2\varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} \omega(\tau) \sin \eta(\tau) - q_2 \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \sin \eta(\tau) + \omega^2(\tau) \cos \eta(\tau) \right] + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (1.27)$$

Подставляя в систему (1.22) формулы (1.24), (1.26), (1.27) и приравнивая величины одного порядка малости, получим систему дифференциальных уравнений для первого приближения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + \omega^2 \alpha_1 &= \{-2\varepsilon\omega(\tau) \frac{dp_1}{d\tau} - \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + 2\gamma\omega(\tau) \right] p_1 + \\
+ 2b_1\Omega(\tau)\omega(\tau)p_2\} \cos \eta(\tau) &+ \{2\varepsilon\omega(\tau) \frac{dq_1}{d\tau} + \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + 2\gamma\omega(\tau) \right] q_1 - \\
- 2b_1\Omega(\tau)\omega(\tau)q_2\} \sin \eta(\tau), & \\
\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + \omega^2 \beta_1 &= \{-2\varepsilon\omega(\tau) \frac{dp_2}{d\tau} - \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + 2\gamma\omega(\tau) \right] p_2 - \\
- 2b_2\Omega(\tau)\omega(\tau)p_1\} \cos \eta(\tau) &+ \{2\varepsilon\omega(\tau) \frac{dq_2}{d\tau} + \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + 2\gamma\omega(\tau) \right] q_2 + \\
+ 2b_2\Omega(\tau)\omega(\tau)q_1\} \sin \eta(\tau). &
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Чтобы избежать появления резонансных слагаемых в решении (1.28), приравняем коэффициенты при $\cos \eta(\tau)$ и $\sin \eta(\tau)$ к нулю. В результате получим систему дифференциальных уравнений для медленно меняющихся переменных

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) p_1 - b_1\Omega(\tau)p_2 &= 0, \\
\frac{dq_1}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) q_1 - b_1\Omega(\tau)q_2 &= 0, \\
\frac{dp_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) p_2 + b_2\Omega(\tau)p_1 &= 0, \\
\frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) q_2 + b_2\Omega(\tau)q_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Для построения решения системы (1.29) введем функции комплексных переменных

$$\begin{aligned}
z_1 &= p_1 + iq_1, \\
z_2 &= p_2 + iq_2.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Умножим второе уравнение системы (1.29) на мнимую единицу i и сложим его с первым уравнением. Аналогично, сделаем преобразования двух оставшихся уравнений. В результате получим дифференциальные уравнения в новых переменных z_1, z_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) z_1 - b_1 \Omega(\tau) z_2 &= 0, \\ \frac{dz_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) z_2 + b_2 \Omega(\tau) z_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Решение (1.31) ищем в виде:

$$z_1 = C e^{\lambda(\tau)}, \quad z_2 = D e^{\lambda(\tau)}. \quad (1.32)$$

Подставим (1.32) в (1.31). Получим систему уравнений для констант C и D , представимую в матричном виде:

$$\mathbb{A} \mathbb{X} = 0, \quad (1.33)$$

где

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) & -b_1 \Omega(\tau) \\ b_2 \Omega(\tau) & \frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение $\det(\mathbb{A}) = 0$

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) \right)^2 + b_1 b_2 \Omega^2(\tau) = 0. \quad (1.35)$$

Решение его дает два корня

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau) &= \ln \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} - \gamma t - i \sqrt{b_1 b_2} \int_0^t \Omega(\tau) dt, \\ \lambda_2(\tau) &= \ln \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} - \gamma t + i \sqrt{b_1 b_2} \int_0^t \Omega(\tau) dt. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 e^{\lambda_1(\tau)} + C_2 e^{\lambda_2(\tau)}, \\ z_2 &= D_1 e^{\lambda_1(\tau)} + D_2 e^{\lambda_2(\tau)}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Здесь C_1, D_1, C_2, D_2 – комплексные константы.

Найдем в (1.37) связь между константами C_1, D_1 и C_2, D_2 . Для этого подставим в первое уравнение системы (1.33) значение первого корня. Отсюда получим связь между C_1 и D_1 . Далее подставив в первое уравнение значение второго корня, получим связь между C_2 и D_2 .

Таким образом, общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 e^{\lambda_1(\tau)} + C_2 e^{\lambda_2(\tau)}, \\ z_2 &= -i \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} C_1 e^{\lambda_1(\tau)} + i \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} C_2 e^{\lambda_2(\tau)}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Выделяя в (1.38) действительную и мнимую часть и подставляя для поиска констант начальные условия $p_{i0} = p_i(0)$, $q_{i0} = q_i(0)$ ($i = 1, 2$), получаем решение системы дифференциальных уравнений (1.29)

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)}} e^{-\gamma t} (\sqrt{b_2} q_{10} \cos \theta - \sqrt{b_1} q_{20} \sin \theta) / \sqrt{b_2}, \\ p_1(\tau) &= \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)}} e^{-\gamma t} (\sqrt{b_2} p_{10} \cos \theta - \sqrt{b_1} p_{20} \sin \theta) / \sqrt{b_2}, \\ q_2(\tau) &= \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)}} e^{-\gamma t} (\sqrt{b_1} q_{20} \cos \theta + \sqrt{b_2} q_{10} \sin \theta) / \sqrt{b_1}, \\ p_2(\tau) &= \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)}} e^{-\gamma t} (\sqrt{b_1} p_{20} \cos \theta + \sqrt{b_2} p_{10} \sin \theta) / \sqrt{b_1}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где θ – функция времени, определяемая решением дифференциального уравнения $\dot{\theta} = -\sqrt{b_1 b_2} \Omega(\tau)$. Коэффициент $K = \sqrt{b_1 b_2}$ называется масштабным коэффициентом гироскопа.

Числовой пример. Проведем сравнение масштабных коэффициентов для трех граничных условий пластин с геометрическими размерами $a = b = 10$ мм и толщиной $h = 1$ мм, изготовленных из плавленого кварца. Момент инерции рамки задан формулой

$$J_0 = I \cdot \rho h a b^3.$$

Здесь I – некоторый безразмерный коэффициент.

Тогда для масштабных коэффициентов соответственно имеем

$$1. \quad K_3 = \frac{5(\pi^2 - 12)^2}{6(\pi^4 + 15\pi^2 - 240)^2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 + 3I}}, \quad (1.40)$$

$$2. \quad K_{ш} = \frac{8}{\pi^2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 + 3I}}, \quad (1.41)$$

$$3. \quad K_k = 0.783 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 + 3I}}. \quad (1.42)$$

На рисунке 1.4 приведены зависимости масштабных коэффициентов (1.40) – (1.42) от I (штрихпунктирная линия – граничные условия «заделка», пунктирная линия – шарнирное опирание, сплошная линия – консольное закрепление пластин).

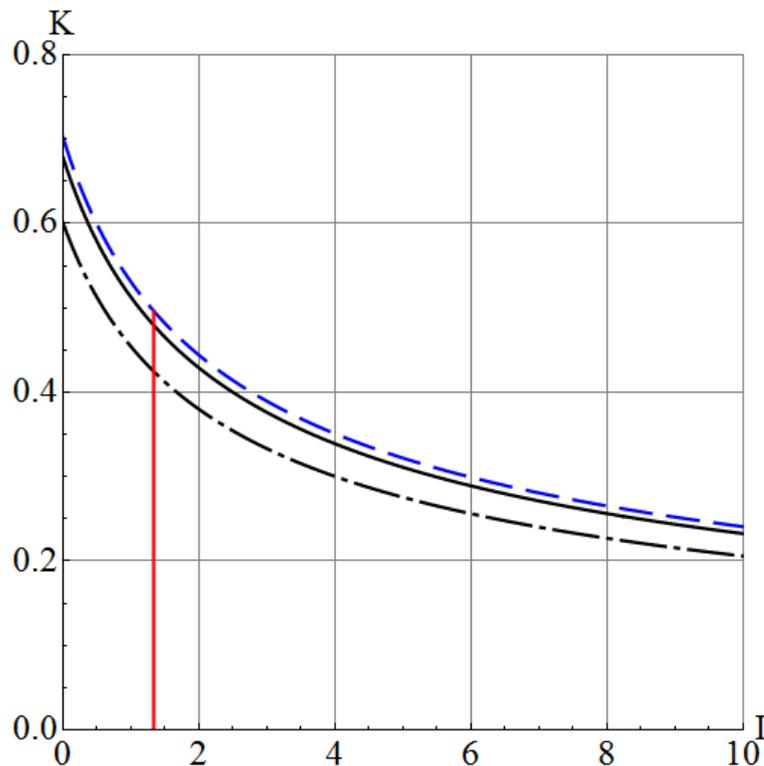


Рис. 1.4. Зависимость масштабного коэффициента гироскопа от момента инерции рамки (штрихпунктирная линия – граничные условия «заделка», пунктирная линия – шарнирное опирание, сплошная линия – консольное закрепление пластин)

Как видно из приведенных графиков, наибольший масштабный коэффициент (что требуется при проектировании данных приборов) имеет конструкция с шарнирным опиранием пластин по краям. На практике реализовать этот вид граничных условий сложно, поэтому далее в работе будет рассматриваться следующий вид граничных условий – консольное закрепление пластин.

Выбранному в параграфе 1.1 значению обобщенного момента инерции $J = 6 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ соответствует $I = 4/3$. В этом случае значения масштабных коэффициентов равны (на рисунке 1.4 этот случай обозначен вертикальной линией)

1. $K_3 = 0.4247$,
2. $K_{\text{ш}} = 0.4964$,
3. $K_{\text{к}} = 0.4795$.

Согласно (1.39) [56], для определения угла прецессии гироскопа достаточно составить дробно-рациональное выражение для тангенса угла из медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 :

$$\text{tg}(2\theta + \theta_0) = \frac{2\sqrt{b_1 b_2}(q_1 q_2 + p_1 p_2)}{b_2(q_1^2 + p_1^2) - b_1(q_2^2 + p_2^2)}, \quad (1.43)$$

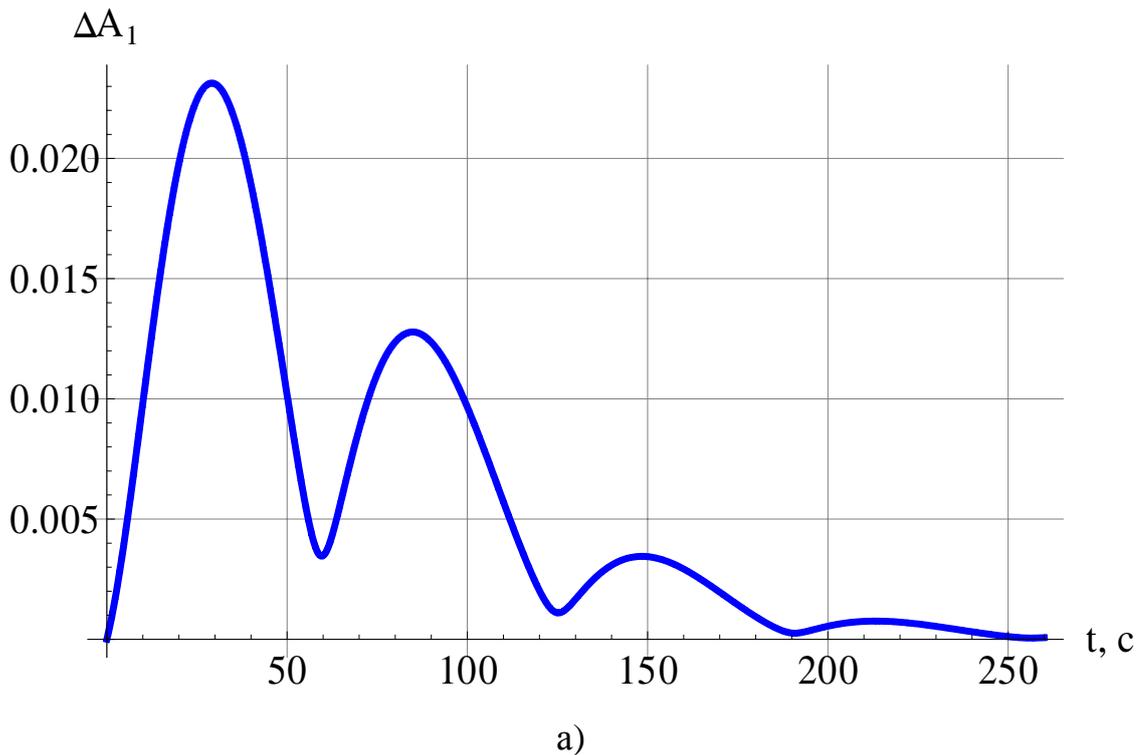
где

$$\text{tg}(\theta_0) = \frac{2\sqrt{b_1 b_2}(q_{10} q_{20} + p_{10} p_{20})}{b_2(q_{10}^2 + p_{10}^2) - b_1(q_{20}^2 + p_{20}^2)}.$$

Таким образом, по измерениям медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 вычисляется угол прецессии θ , пропорциональный углу поворота основания. В режиме свободных колебаний гироскоп является интегрирующим.

Как видно из решения (1.39), медленное изменение во времени собственной частоты колебаний $\omega(\tau)$ приводит к медленному изменению амплитуд и фаз колебаний резонатора и не влияет на угол прецессии гироскопа.

Числовой пример. Рассмотрим гироскоп на подвижном основании, геометрические размеры которого приведены в числовом примере параграфа 1.1. Коэффициент вязкого трения $\gamma = 0.03$ 1/с. Угловую скорость основания зададим равной $\Omega = 0.1$ рад/с. Пусть собственная частота колебаний изменяется по закону $\omega = \omega_0(1 - \sigma_0 t)$, где $\omega_0 = 59317$ рад/с, $\sigma_0 = 10^{-3}$ 1/с. На рисунке 1.5 приведено изменение амплитуд колебаний резонатора $\Delta A_1 = \Delta\sqrt{q_1^2 + p_1^2}$, $\Delta A_2 = \Delta\sqrt{q_2^2 + p_2^2}$, показывающее, насколько отличается амплитуда при медленно меняющейся частоте собственных колебаний от случая постоянных параметров модели. Таким образом, медленное изменение частоты колебаний резонатора приводит к неравномерному изменению амплитуд колебаний, зависящему от добротности колебательного контура и угловой скорости основания.



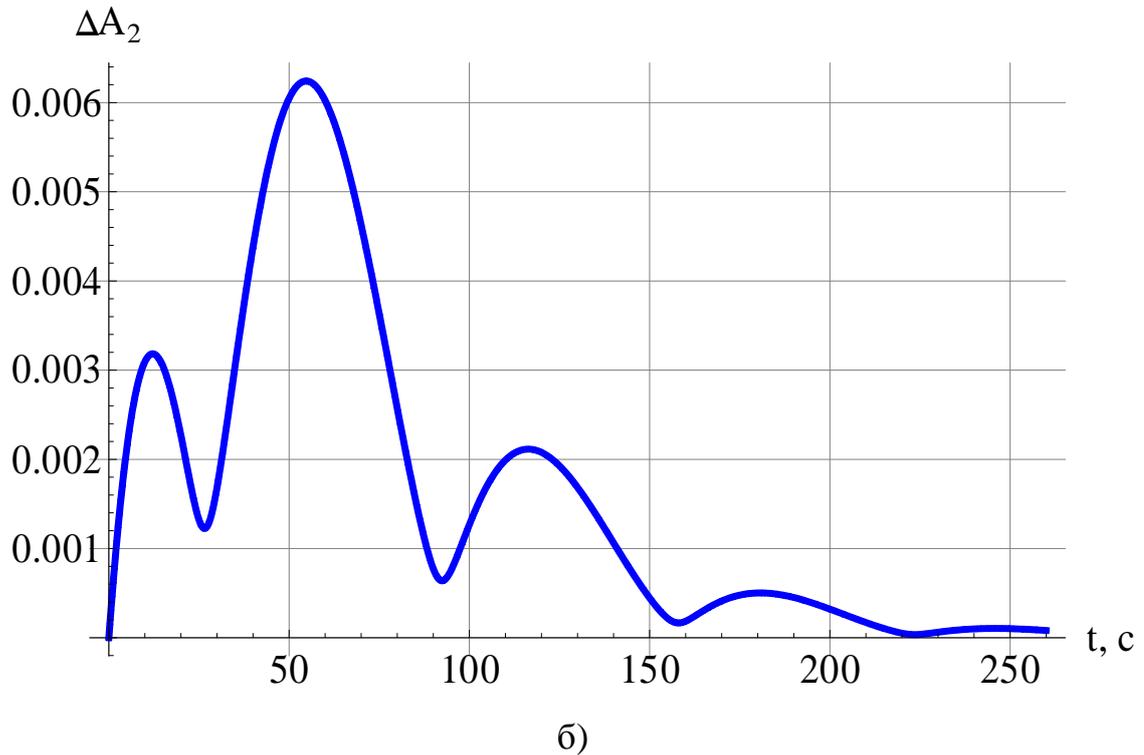


Рис. 1.5. График изменения амплитуд первичных (а) и вторичных (б) колебаний

§1.4. Решение дифференциальных уравнений движения, описывающих вынужденные колебания чувствительного элемента в случае медленно меняющихся условий функционирования

Исследование вынужденных колебаний в линейной постановке задачи сводится к построению решения системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2(\tau)\alpha &= -2\gamma\dot{\alpha} + 2b_1\Omega(\tau)\dot{\beta} + \hat{A}(\tau) \sin \sigma(\tau), \\ \ddot{\beta} + \omega^2(\tau)\beta &= -2\gamma\dot{\beta} - 2b_2\Omega(\tau)\dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

В (1.44) точкой обозначено дифференцирование по времени t ; $\hat{A}(\tau)$ – амплитуда внешнего воздействия, $\hat{A}(\tau) \ll [\omega(\tau)]^2$; $\sigma(\tau)$ – настраиваемая фаза внешнего воздействия. В режиме мягкого резонансного воздействия частота

внешнего воздействия $\omega_B(\tau) = \dot{\sigma}$ должна быть близка к собственной частоте колебаний гироскопа, то есть, например,

$$\omega_B(\tau) = \omega(\tau) - \tilde{\nu}(\tau), \quad (1.45)$$

где $|\tilde{\nu}(\tau)| \ll \omega(\tau)$.

Перейдем к новым переменным $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ сделав замену

$$\alpha = \sqrt{b_1} \hat{\alpha}, \quad \beta = \sqrt{b_2} \hat{\beta}. \quad (1.46)$$

Тогда система (1.44) примет вид (знак « $\hat{}$ » опущен)

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2(\tau)\alpha &= -2\gamma\dot{\alpha} + \mu(\tau)\dot{\beta} + \hat{A}_0(\tau) \sin \sigma(\tau), \\ \ddot{\beta} + \omega^2(\tau)\beta &= -2\gamma\dot{\beta} - \mu(\tau)\dot{\alpha}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $\hat{A}_0(\tau) = \frac{\hat{A}(\tau)}{\sqrt{b_1}}$, $\mu(\tau) = 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega(\tau)$.

Учитывая малость правой части системы уравнений (1.47) и резонансный режим работы прибора, будем искать решение системы (1.47) в виде [69]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0(t, \tau) + \alpha_1(t, \tau), \\ \beta &= \beta_0(t, \tau) + \beta_1(t, \tau). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Причем $|\alpha_1| \ll |\alpha_0|$, $|\beta_1| \ll |\beta_0|$ и

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= p_1(\tau) \sin \sigma(\tau) + q_1(\tau) \cos \sigma(\tau), \\ \beta_0 &= p_2(\tau) \sin \sigma(\tau) + q_2(\tau) \cos \sigma(\tau). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Запишем выражения обобщенных скоростей и ускорений, дифференцируя формулы (1.48), с точностью до величин второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} \sin \sigma(\tau) + p_1 \omega_B(\tau) \cos \sigma(\tau) + \\ &+ \varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} \cos \sigma(\tau) - q_1 \omega_B(\tau) \sin \sigma(\tau) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \\ \dot{\beta} &= \varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} \sin \sigma(\tau) + p_2 \omega_B(\tau) \cos \sigma(\tau) + \\ &+ \varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} \cos \sigma(\tau) - q_2 \omega_B(\tau) \sin \sigma(\tau) + \frac{\partial \beta_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} &= 2\varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} \omega_B(\tau) \cos \sigma(\tau) + p_1 \left[\varepsilon \frac{d\omega_B(\tau)}{d\tau} \cos \sigma(\tau) - \omega_B^2(\tau) \sin \sigma(\tau) \right] - \\
&- 2\varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} \omega_B(\tau) \sin \sigma(\tau) - q_1 \left[\varepsilon \frac{d\omega_B(\tau)}{d\tau} \sin \sigma(\tau) + \omega_B^2(\tau) \cos \sigma(\tau) \right] + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2}, \\
\ddot{\beta} &= 2\varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} \omega_B(\tau) \cos \sigma(\tau) + p_2 \left[\varepsilon \frac{d\omega_B(\tau)}{d\tau} \cos \sigma(\tau) - \omega_B^2(\tau) \sin \sigma(\tau) \right] - \\
&- 2\varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} \omega_B(\tau) \sin \sigma(\tau) - q_2 \left[\varepsilon \frac{d\omega_B(\tau)}{d\tau} \sin \sigma(\tau) + \omega_B^2(\tau) \cos \sigma(\tau) \right] + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Подставляя (1.48), (1.49), (1.50) и (1.51) в (1.47), учитывая (1.45) и оставляя слагаемые одного порядка малости, получим систему уравнений для определения искомых функций $\alpha_1(t, \tau)$ и $\beta_1(t, \tau)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + \omega^2(\tau) \alpha_1 &= \left\{ -2\varepsilon \omega(\tau) \frac{dp_1}{d\tau} - \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + 2\gamma \omega_B(\tau) \right] p_1 - \right. \\
&- \left. (\omega^2(\tau) - \omega_B^2(\tau)) q_1 + \omega(\tau) \mu(\tau) p_2 \right\} \cos \sigma(\tau) + \\
&+ \left\{ 2\varepsilon \omega(\tau) \frac{dq_1}{d\tau} + \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + 2\gamma \omega(\tau) \right] q_1 - \right. \\
&- \left. (\omega^2(\tau) - \omega_B^2(\tau)) p_1 - \omega(\tau) \mu(\tau) q_2 + \hat{A}_0(\tau) \right\} \sin \sigma(\tau), \\
\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + \omega^2(\tau) \beta_1 &= \left\{ -2\varepsilon \omega(\tau) \frac{dp_2}{d\tau} - \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + 2\gamma \omega(\tau) \right] p_2 - \right. \\
&- \left. (\omega^2(\tau) - \omega_B^2(\tau)) q_2 - \omega(\tau) \mu(\tau) p_2 \right\} \cos \sigma(\tau) + \\
&+ \left\{ 2\varepsilon \omega(\tau) \frac{dq_2}{d\tau} + \left[\varepsilon \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + 2\gamma \omega(\tau) \right] q_2 - \right. \\
&- \left. (\omega^2(\tau) - \omega_B^2(\tau)) p_2 + \omega(\tau) \mu(\tau) q_1 \right\} \sin \sigma(\tau).
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Чтобы избежать появления резонансных слагаемых в решении системы (1.52), приравняем к нулю коэффициенты при $\cos \sigma(\tau)$ и $\sin \sigma(\tau)$. В результате преобразований получим систему дифференциальных уравнений для медленно меняющихся переменных $p_1(\tau)$, $q_1(\tau)$, $p_2(\tau)$, $q_2(\tau)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) p_1 + \tilde{v}(\tau) q_1 - \frac{\mu(\tau)}{2} p_2 &= 0, \\
\frac{dp_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) p_2 + \tilde{v}(\tau) q_2 + \frac{\mu(\tau)}{2} p_1 &= 0, \\
\frac{dq_1}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) q_1 - \tilde{v}(\tau) p_1 - \frac{\mu(\tau)}{2} q_2 &= -\check{A}_0(\tau), \\
\frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) q_2 - \tilde{v}(\tau) p_2 + \frac{\mu(\tau)}{2} q_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{1.53}$$

здесь $\check{A}_0(\tau) = \frac{\hat{A}_0(\tau)}{2\omega(\tau)}$.

Для построения решения системы (1.53) введем функции комплексных переменных

$$\begin{aligned}
z_1 &= p_1 + iq_1, \\
z_2 &= p_2 + iq_2.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Умножим третье уравнение системы (1.53) на мнимую единицу i и сложим его с первым уравнением. Аналогично, проделаем преобразования двух оставшихся уравнений системы. В результате получим дифференциальные уравнения в новых переменных z_1, z_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) z_1 - i\tilde{v}(\tau) z_1 - \frac{\mu(\tau)}{2} z_2 &= -i\check{A}_0(\tau), \\
\frac{dz_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) z_2 - i\tilde{v}(\tau) z_2 + \frac{\mu(\tau)}{2} z_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Сначала рассмотрим решение однородной системы ($\check{A}_0 = 0$).

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) z_1 - i\tilde{v}(\tau) z_1 - \frac{\mu(\tau)}{2} z_2 &= 0, \\
\frac{dz_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) z_2 - i\tilde{v}(\tau) z_2 + \frac{\mu(\tau)}{2} z_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Ищем решение в виде:

$$z_1 = Ce^{\lambda(\tau)}, \quad z_2 = De^{\lambda(\tau)}. \tag{1.57}$$

Подставим (1.57) в (1.56). Получим систему уравнений для констант C и D , представимую в матричном виде:

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = 0, \quad (1.58)$$

где

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) - i\tilde{\nu}(\tau) & -\frac{\mu(\tau)}{2} \\ \frac{\mu(\tau)}{2} & \frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) - i\tilde{\nu}(\tau) \end{bmatrix}, \quad (1.59)$$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение $\det(\mathbb{A}) = 0$

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{dt} + 2\gamma \right) - i\tilde{\nu}(\tau) \right)^2 + \frac{\mu^2(\tau)}{4} = 0. \quad (1.60)$$

Решение его дает два корня

$$\lambda_1(\tau) = \ln \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} - \gamma t + i \int_0^t \kappa_1(\tau) dt, \quad (1.61)$$

$$\lambda_2(\tau) = \ln \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} - \gamma t + i \int_0^t \kappa_2(\tau) dt,$$

где $\kappa_1(\tau) = \tilde{\nu}(\tau) - \mu(\tau)/2$, $\kappa_2(\tau) = \tilde{\nu}(\tau) + \mu(\tau)/2$.

Итак, имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 e^{\lambda_1(\tau)} + C_2 e^{\lambda_2(\tau)}, \\ z_2 &= D_1 e^{\lambda_1(\tau)} + D_2 e^{\lambda_2(\tau)}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Найдем в (1.62) связь между константами C_1 , D_1 и C_2 , D_2 . Для этого подставим в первое уравнение системы (1.58) значение первого корня. Отсюда получим связь между C_1 и D_1 . Далее подставив в первое уравнение значение второго корня, получим связь между C_2 и D_2 .

Таким образом, общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 e^{\lambda_1(\tau)} + C_2 e^{\lambda_2(\tau)}, \\ z_2 &= -iC_1 e^{\lambda_1(\tau)} + iC_2 e^{\lambda_2(\tau)}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Вынужденное решение системы (1.55) будем искать методом вариации произвольных постоянных, то есть в решении (1.63) принимаем $C_i = C_i(t)$, $i = 1, 2$.

Имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1(t) e^{\lambda_1(\tau)} + C_2(t) e^{\lambda_2(\tau)}, \\ z_2 &= -iC_1(t) e^{\lambda_1(\tau)} + iC_2(t) e^{\lambda_2(\tau)}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Подставляя (1.64) в систему (1.55), получаем систему уравнений для определения C_1 и C_2

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} e^{\lambda_1(\tau)} + \frac{dC_2}{dt} e^{\lambda_2(\tau)} &= -i\check{A}_0(\tau), \\ \frac{dC_1}{dt} e^{\lambda_1(\tau)} - \frac{dC_2}{dt} e^{\lambda_2(\tau)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Решение системы (1.65)

$$\begin{aligned} C_1(\tau) &= -\frac{i}{2} \int_0^t \check{A}_0(\tau) e^{-\lambda_1(\tau)} dt, \\ C_2(\tau) &= -\frac{i}{2} \int_0^t \check{A}_0(\tau) e^{-\lambda_2(\tau)} dt. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем частное решение для p_1 , q_1, p_2, q_2

$$\begin{aligned} p_1^y &= \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} e^{-\gamma t} \left(\hat{C}_1 \cos \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) - \check{C}_1 \sin \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) + \right. \\ &\left. + \hat{C}_2 \cos \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) - \check{C}_2 \sin \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) \right), \end{aligned}$$

$$q_1^y = \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} e^{-\gamma t} \left(\hat{C}_1 \cos \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) + \check{C}_1 \sin \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) + \right. \\ \left. + \hat{C}_2 \cos \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) + \check{C}_2 \sin \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) \right), \quad (1.67)$$

$$p_2^y = \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} e^{-\gamma t} \left(\hat{C}_1 \cos \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) + \check{C}_1 \sin \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) - \right. \\ \left. - \hat{C}_2 \cos \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) - \check{C}_2 \sin \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) \right),$$

$$q_2^y = \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} e^{-\gamma t} \left(-\hat{C}_1 \cos \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) + \check{C}_1 \sin \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) + \right. \\ \left. + \hat{C}_2 \cos \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) - \check{C}_2 \sin \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) \right).$$

В (1.67) значения \hat{C}_i, \check{C}_i

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} \check{A}_0(\tau) e^{\gamma t} \sin \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) \right\} dt,$$

$$\check{C}_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} \check{A}_0(\tau) e^{\gamma t} \cos \left(\int_0^t \kappa_1(\tau) dt \right) \right\} dt,$$

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} \check{A}_0(\tau) e^{\gamma t} \sin \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) \right\} dt,$$

$$\check{C}_2 = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \left[\frac{\omega(0)}{\omega(\tau)} \right]^{1/2} \check{A}_0(\tau) e^{\gamma t} \cos \left(\int_0^t \kappa_2(\tau) dt \right) \right\} dt.$$

Стационарный режим. Для записи общего решения неоднородной задачи необходимо найти начальные условия. Для этого рассмотрим

стационарный режим. Считая все параметры в системе (1.53) постоянными, имеем

$$\begin{aligned}
 p_1^{(0)} &= \frac{\tilde{v}\ddot{A}_0(\tilde{v}^2 + \gamma^2 - \mu^2/4)}{W^2}, \\
 q_1^{(0)} &= -\frac{\gamma\ddot{A}_0(\tilde{v}^2 + \gamma^2 + \mu^2/4)}{W^2}, \\
 p_2^{(0)} &= -\frac{\tilde{v}\mu\gamma\ddot{A}_0}{W^2}, \\
 q_2^{(0)} &= \frac{\mu\ddot{A}_0(-\tilde{v}^2 + \gamma^2 + \mu^2/4)}{2W^2}.
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

Здесь $W^2 = (\tilde{v}^2 + \mu\tilde{v} + \gamma^2 + \mu^2/4)(\tilde{v}^2 - \mu\tilde{v} + \gamma^2 + \mu^2/4)$.

Запишем выражения для амплитуд колебаний резонатора по двум обобщенным координатам $A = \sqrt{(q_1^{(0)})^2 + (p_1^{(0)})^2}$, $B = \sqrt{(q_2^{(0)})^2 + (p_2^{(0)})^2}$

$$A = \frac{\ddot{A}_0\sqrt{\tilde{v}^2 + \gamma^2}}{W}, \quad B = \frac{\ddot{A}_0\mu}{2W}. \tag{1.69}$$

Анализ приведенных зависимостей показывает, что на неподвижном основании ($\mu = 0$) в резонансном случае ($\tilde{v} = 0$) максимальное стационарное значение амплитуды колебаний по первой обобщенной координате равно \ddot{A}_0/γ . Установлено, что на неподвижном основании отношение амплитуд A и B пропорционально угловой скорости основания, т.е. гироскоп является датчиком угловой скорости:

$$\mu = \frac{2B\sqrt{\tilde{v}^2 + \gamma^2}}{A}. \tag{1.70}$$

Числовой пример. Рассмотрим осцилляторный вибрационный гироскоп (рис. 1.2), параметры которого приведены в примере параграфа 1.1. Исследуем такой режим его работы, при котором происходит медленное изменение частоты вынуждающей силы. Остальные параметры считаются постоянными и равными: $\omega = \omega_0 = 59317$ рад/с, $\mu = 24$ рад/с, $\gamma = \ddot{A}_0 = 120$ 1/с.

Примем в качестве закона изменения частоты вынуждающей силы следующий: $\omega_B = \omega_0(0.979 + \sigma_0 t)$. Здесь $\sigma_0 = 2.4 \cdot 10^{-6}$ 1/с.

На рисунках 1.6 и 1.7 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для амплитуды колебаний A по первой обобщенной координате и амплитуды колебаний B по второй обобщенной координате (полужирная линия). Тонкой линией на графиках изображены амплитудно-частотные характеристики в стационарном режиме.

Заметим, что выбранный закон изменения частоты вынуждающей силы означает «движение» по графику справа налево.

Анализируя представленные на рисунках 1.6 и 1.7 зависимости, можно сделать следующие выводы:

1. Наличие угловой скорости основания ($\mu \neq 0$) приводит к раздвоению кратной собственной частоты на две близкие частоты. На стационарной кривой для амплитуды первичных колебаний отчетливо видны два пика, в то время как амплитуда вторичных колебаний оказывается менее чувствительной к раздвоению частот.
2. Для амплитуды A наблюдается увеличение первого максимума на 1.5 % и уменьшение второго на 6.6 % («движение» по графику справа налево).
3. Для амплитуды B наблюдается увеличение максимума амплитуды на 4.4 %.
4. Максимумы амплитуд на обоих графиках смещены относительно максимумов стационарной кривой.
5. До первого максимума и после прохождения второго максимума наблюдаются биения амплитуд.

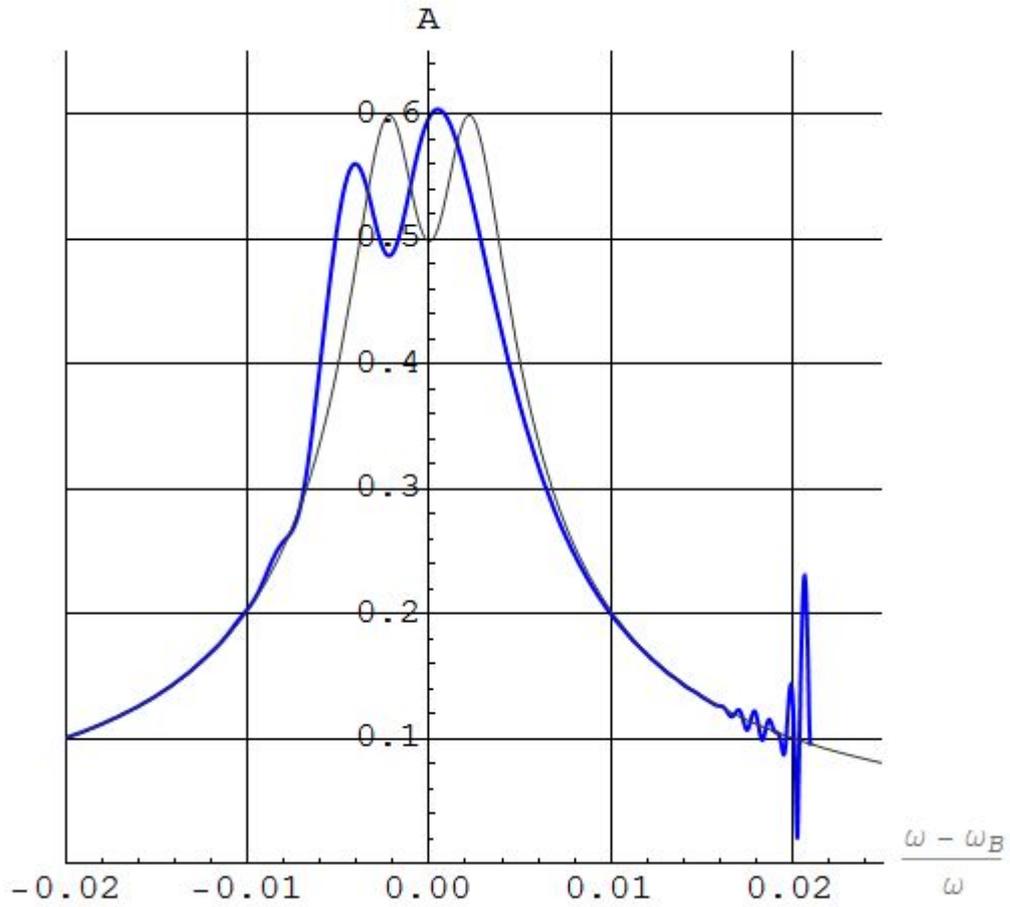


Рис. 1.6. АЧХ колебаний по первой обобщенной координате
 (тонкая сплошная линия – стационарный режим,
 полужирная линия – в случае $\omega_B = \omega_0(0.979 + \sigma_0 t)$)

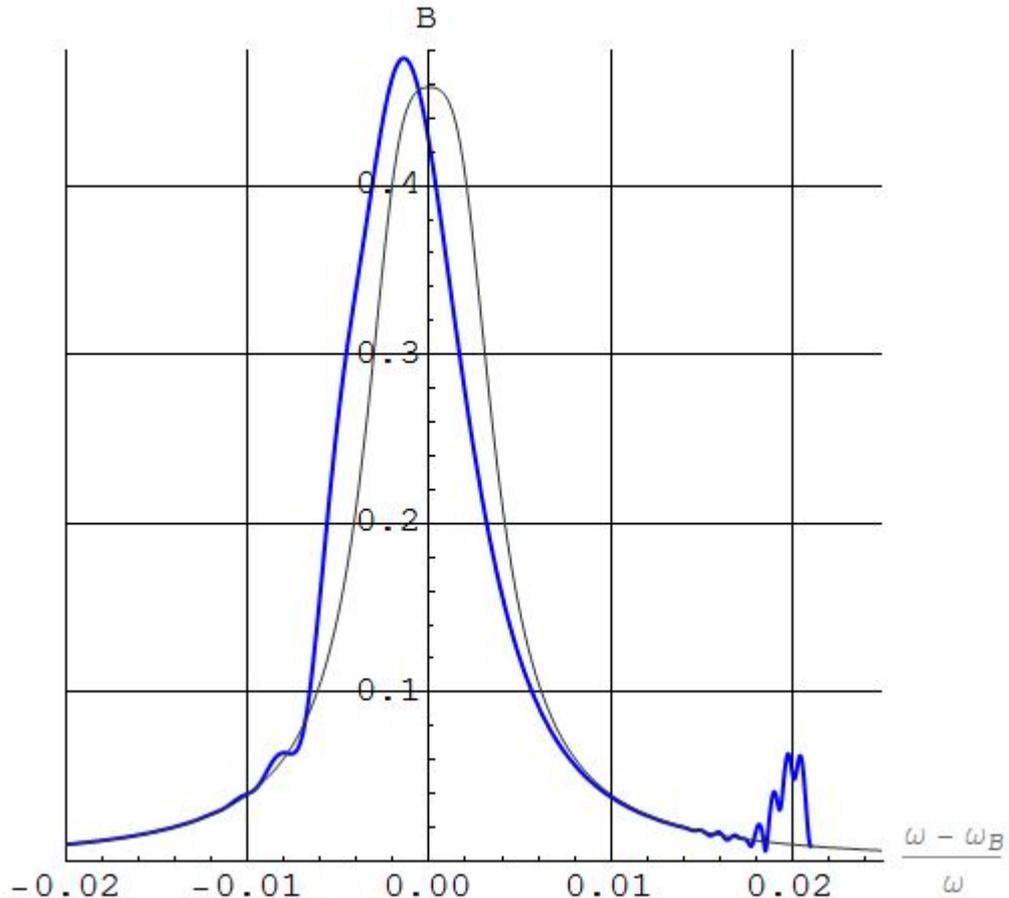


Рис. 1.7. АЧХ колебаний по второй обобщенной координате
(тонкая сплошная линия – стационарный режим,
полужирная линия – в случае $\omega_B = \omega_0(0.979 + \sigma_0 t)$)

Найдем ошибку $\tilde{\mu}$ измерения угловой скорости основания (1.70) при медленно меняющейся частоте вынуждающей силы в зависимости от относительной частотной расстройки. График ошибки приведен на рисунке 1.8.

Таким образом, вблизи резонанса при медленно меняющейся частоте вынуждающей силы существует точка, в которой амплитуды совпадают со своими стационарными значениями, следовательно, для измерения угловой скорости основания можно пользоваться формулой (1.70). Здесь этому соответствует значение относительной частотной расстройки $\frac{\omega - \omega_B}{\omega} = 0.001$.

Максимальное значение ошибки вблизи резонанса составляет 50 %.

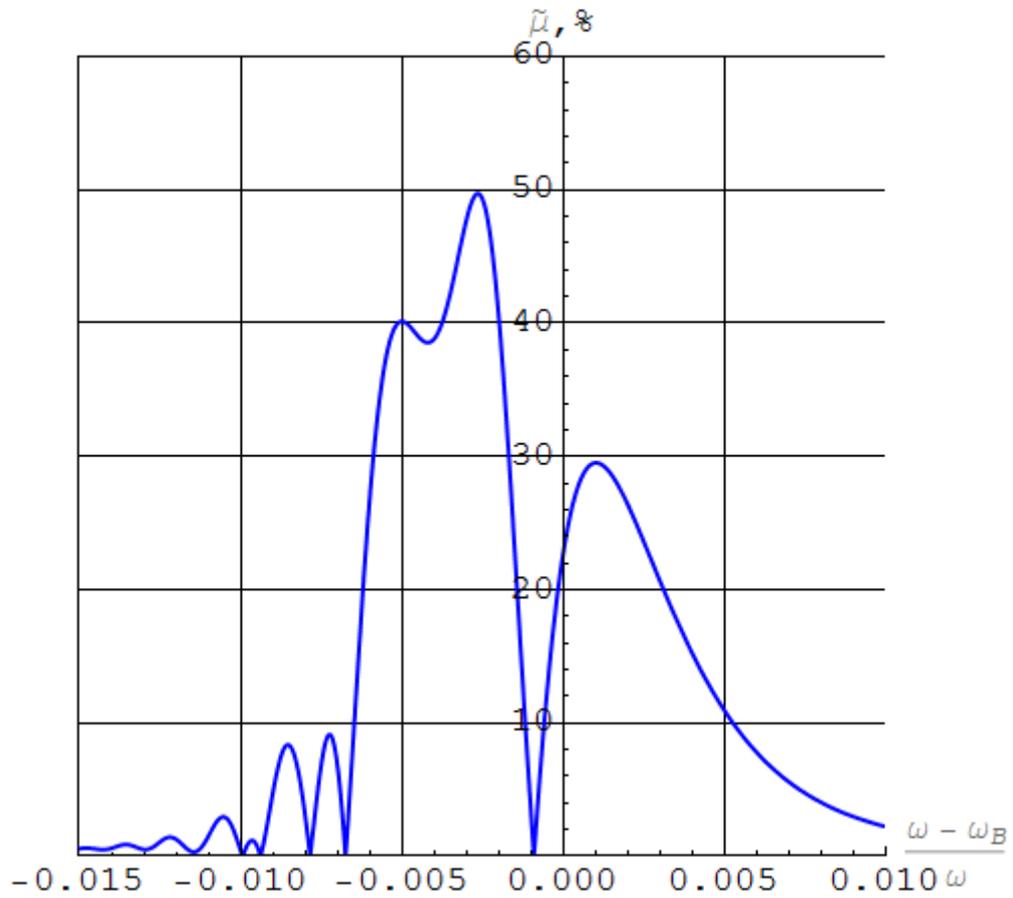


Рис. 1.8. График зависимости ошибки измерения угловой скорости основания от относительной частотной расстройки

Глава 2. Динамика микромеханического гироскопа в нелинейной постановке задачи при постоянной, малой по сравнению с собственной частотой колебаний угловой скорости основания

Во второй главе изучены нелинейные колебания микромеханического гироскопа в случае постоянных параметров функционирования. В 2.1 приведены нелинейные дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы. С целью получения их точного решения осуществлен переход к новым переменным [33]. В 2.2 приведено решение системы в новых переменных при линейной постановке исходной задачи. В 2.3 исследовано влияние нелинейности на прецессию гироскопа, установленного на неподвижном основании. Получена аналитическая формула для тангенса угла прецессии гироскопа. В 2.4 показано, что решение исходной системы дифференциальных уравнений в новых переменных можно свести к эллиптическому интегралу. Изложена методика вычисления эллиптических интегралов данной задачи, получены аналитические формулы для тангенса угла прецессии гироскопа. Приведена оценка точности измерения угла поворота основания.

Постановка задачи и основные результаты опубликованы в [55].

§2.1. Уравнения движения микромеханического гироскопа с учетом нелинейных эффектов

Перейдем к рассмотрению нелинейной системы (1.10) без трения, в которой совмещены частоты собственных колебаний и все параметры являются постоянными:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha &= 2b_1 \Omega \dot{\beta} + b_1 \dot{\beta}^2 + \alpha \dot{\beta}^2, \\ \ddot{\beta} + \omega^2 \beta &= -2b_2 \Omega \dot{\alpha} - 2b_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} - 2b_2 \alpha \ddot{\beta} - \frac{b_2}{b_1} \alpha^2 \ddot{\beta} - 2 \frac{b_2}{b_1} \alpha \dot{\alpha} \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем безразмерное время $t_* = \omega t$. Система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \alpha &= 2b_1\mu\dot{\beta} + b_1\dot{\beta}^2 + \alpha\dot{\beta}^2, \\ \ddot{\beta} + \beta &= -2b_2\mu\dot{\alpha} - 2b_2\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2b_2\alpha\dot{\beta} - \frac{b_2}{b_1}\alpha^2\dot{\beta} - 2\frac{b_2}{b_1}\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Здесь $\mu = \frac{\Omega}{\omega} \ll 1$ – безразмерная угловая скорость основания. Точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени t^* (далее знаки * опущены). Заметим, что нелинейные слагаемые в правой части этой системы дифференциальных уравнений малы в виду малости α и β .

Решение для одночастотной системы (2.2) будем искать методом двух масштабов [69]

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0(t, \tau) + \alpha_1(t, \tau), \\ \beta &= \beta_0(t, \tau) + \beta_1(t, \tau),\end{aligned}\quad (2.3)$$

где $|\alpha_1| \ll |\alpha_0|$, $|\beta_1| \ll |\beta_0|$ и

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= p_1(\tau) \sin t + q_1(\tau) \cos t, \\ \beta_0 &= p_2(\tau) \sin t + q_2(\tau) \cos t.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ – медленное безразмерное время.

Запишем выражения обобщенных скоростей и ускорений, дифференцируя формулы (2.3), (2.4), с точностью до величин второго порядка малости

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} \sin t + p_1 \cos t + \varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} \cos t - q_1 \sin t + \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \\ \dot{\beta} &= \varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} \sin t + p_2 \cos t + \varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} \cos t - q_2 \sin t + \frac{\partial \beta_1}{\partial t}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= 2\varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} \cos t - p_1 \sin t - 2\varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} \sin t - q_1 \cos t + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2}, \\ \ddot{\beta} &= 2\varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} \cos t - p_2 \sin t - 2\varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} \sin t - q_2 \cos t + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Подставим (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) в (2.2). Приравнявая коэффициенты слева и справа при слагаемых одного порядка малости, получаем систему дифференциальных уравнений для первого приближения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + \alpha_1 &= A + S_1^\alpha \sin t + C_1^\alpha \cos t + S_2^\alpha \sin 2t + \\
&+ C_2^\alpha \cos 2t + S_3^\alpha \sin 3t + C_3^\alpha \cos 3t, \\
\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + \beta_1 &= S_1^\beta \sin t + C_1^\beta \cos t + S_2^\beta \sin 2t + \\
&+ C_2^\beta \cos 2t + S_3^\beta \sin 3t + C_3^\beta \cos 3t.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} b_1 (p_2^2 + q_2^2), \\
S_1^\alpha &= 2\varepsilon \frac{dq_1}{d\tau} + \frac{1}{4} (3q_2^2 + p_2^2) p_1 - \frac{1}{2} p_2 q_1 q_2 - 2b_1 \mu q_2, \\
C_1^\alpha &= -2\varepsilon \frac{dp_1}{d\tau} + \frac{1}{4} (3p_2^2 + q_2^2) q_1 - \frac{1}{2} p_1 p_2 q_2 + 2b_1 \mu p_2, \\
S_2^\alpha &= b_1 p_2 q_2, \quad C_2^\alpha = \frac{b_1}{2} (p_2^2 - q_2^2), \\
S_3^\alpha &= \frac{1}{4} (p_2^2 - q_2^2) p_1 - \frac{1}{2} p_2 q_1 q_2, \\
C_3^\alpha &= \frac{1}{4} (p_2^2 - q_2^2) q_1 + \frac{1}{2} p_1 p_2 q_2, \\
S_1^\beta &= 2\varepsilon \frac{dq_2}{d\tau} + \frac{b_2}{4b_1} (3q_1^2 + p_1^2) p_2 - \frac{b_2}{2b_1} p_1 q_1 q_2 + 2b_2 \mu q_1, \\
C_1^\beta &= -2\varepsilon \frac{dp_2}{d\tau} + \frac{b_2}{4b_1} (3p_1^2 + q_1^2) q_2 - \frac{b_2}{2b_1} p_1 p_2 q_1 - 2b_2 \mu p_1, \\
S_2^\beta &= 2b_2 (p_1 q_2 + p_2 q_1), \quad C_2^\beta = 2b_2 (q_1 q_2 - p_1 p_2), \\
S_3^\beta &= \frac{3b_2}{2b_1} p_1 q_1 q_2 + \frac{3b_2}{4b_1} (q_1^2 - p_1^2) p_2, \\
C_3^\beta &= -\frac{3b_2}{2b_1} p_1 p_2 q_1 + \frac{3b_2}{4b_1} (q_1^2 - p_1^2) q_2.
\end{aligned}$$

Чтобы избежать появления резонансных слагаемых в решении системы (2.7), приравняем коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ к нулю. Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений для p_1, q_1, p_2, q_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= b_1 \mu p_2 + \frac{1}{8} (p_2^2 + q_2^2) q_1 + \frac{1}{4} p_2 (p_2 q_1 - p_1 q_2), \\
\frac{dq_1}{dt} &= b_1 \mu q_2 - \frac{1}{8} (p_2^2 + q_2^2) p_1 + \frac{1}{4} q_2 (p_2 q_1 - p_1 q_2), \\
\frac{dp_2}{dt} &= -b_2 \mu p_1 + \frac{b_2}{8b_1} (p_1^2 + q_1^2) q_2 - \frac{b_2}{4b_1} p_1 (p_2 q_1 - p_1 q_2), \\
\frac{dq_2}{dt} &= -b_2 \mu q_1 - \frac{b_2}{8b_1} (p_1^2 + q_1^2) p_2 - \frac{b_2}{4b_1} q_1 (p_2 q_1 - p_1 q_2).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

При этом решение системы (2.7) имеет вид

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= A - \frac{S_2^\alpha}{3} \sin 2t - \frac{C_2^\alpha}{3} \cos 2t - \frac{S_3^\alpha}{8} \sin 3t - \frac{C_3^\alpha}{8} \cos 3t, \\
\beta_1 &= -\frac{S_2^\beta}{3} \sin 2t - \frac{C_2^\beta}{3} \cos 2t - \frac{S_3^\beta}{8} \sin 3t - \frac{C_3^\beta}{8} \cos 3t.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Для дальнейшего исследования системы (2.8) удобно ввести замену:

$$p_2 = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} p_2^*, \quad q_2 = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} q_2^*. \tag{2.10}$$

С учетом (2.10) система (2.8) примет вид (индекс * опущен):

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= \frac{1}{8} [8\nu p_2 + j(p_2^2 + q_2^2) q_1 + 2j p_2 (p_2 q_1 - p_1 q_2)], \\
\dot{q}_1 &= \frac{1}{8} [8\nu q_2 - j(p_2^2 + q_2^2) p_1 + 2j q_2 (p_2 q_1 - p_1 q_2)], \\
\dot{p}_2 &= \frac{1}{8} [-8\nu p_1 + j(p_1^2 + q_1^2) q_2 - 2j p_1 (p_2 q_1 - p_1 q_2)], \\
\dot{q}_2 &= \frac{1}{8} [-8\nu q_1 - j(p_1^2 + q_1^2) p_2 - 2j q_1 (p_2 q_1 - p_1 q_2)].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Точкой в системе (2.11) обозначена производная по безразмерному времени; $j = \frac{b_2}{b_1}$, $\nu = \sqrt{b_1 b_2} \mu$.

Отметим, что функция (см. (1.17))

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \hat{E} = \frac{1}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \tag{2.12}$$

является первым интегралом системы (2.11).

Согласно переходу к орбитальным координатам по формулам (1.16), далее для определенности в качестве начальных условий выберем некоторые характерные значения переменных:

$$p_1(0) = r_0, q_1(0) = 0, p_2(0) = 0, q_2(0) = -k_0, \quad (2.13)$$

где $k_0 > 0, r_0 > 0, k_0 \ll r_0$ ($r_0 = r(0), k_0 = k(0)$).

Для решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (2.11) перейдем к новым переменным x_1, x_2, y_1, y_2 , предложенным академиком В.Ф. Журавлевым в статье [33]

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} \tilde{E}, & y_2 &= \frac{1}{2} (p_1 p_2 + q_1 q_2), \\ x_1 &= \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{q_1 + q_2}{2\sqrt{y_1 + y_2}} + \arcsin \frac{q_1 - q_2}{2\sqrt{y_1 - y_2}} \right], \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{q_1 + q_2}{2\sqrt{y_1 + y_2}} - \arcsin \frac{q_1 - q_2}{2\sqrt{y_1 - y_2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Заметим, что y_1 есть константа, определяемая начальными условиями (2.13): $y_1 = \frac{1}{4} (p_{10}^2 + q_{10}^2 + p_{20}^2 + q_{20}^2)$; $p_{i0} = p_i(0), q_{i0} = q_i(0)$ ($i = 1, 2$).

Согласно (2.13), начальные условия для новых переменных будут

$$\begin{aligned} y_1(0) &= \frac{1}{4} (r_0^2 + k_0^2), y_2(0) = 0, x_1(0) = 0, \\ x_2(0) &= -\arcsin \frac{k_0}{\sqrt{r_0^2 + k_0^2}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Исходные переменные p_1, q_1, p_2, q_2 находятся через новые переменные по формулам

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{y_1 + y_2} \cos(x_1 + x_2) + \sqrt{y_1 - y_2} \cos(x_1 - x_2), \\ p_2 &= \sqrt{y_1 + y_2} \cos(x_1 + x_2) - \sqrt{y_1 - y_2} \cos(x_1 - x_2), \\ q_1 &= \sqrt{y_1 + y_2} \sin(x_1 + x_2) + \sqrt{y_1 - y_2} \sin(x_1 - x_2), \\ q_2 &= \sqrt{y_1 + y_2} \sin(x_1 + x_2) - \sqrt{y_1 - y_2} \sin(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Продифференцируем формулы (2.14) в силу уравнений (2.11), принимая во внимание формулы замены (2.16). Имеем уравнения в новых переменных

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0, \\ \dot{x}_1 &= v \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2}} \sin(2x_2) - \frac{3j}{4} y_1 \sin^2(2x_2), \\ \dot{x}_2 &= -v \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2}} \sin(2x_2) + \frac{3j}{8} y_2 \left(\frac{1}{3} - \cos(4x_2) \right), \\ \dot{y}_2 &= -2v \sqrt{y_1^2 - y_2^2} \cos(2x_2) + \frac{3j}{4} (y_1^2 - y_2^2) \sin(4x_2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Заметим, что переменная y_1 сохраняет постоянное значение, а уравнения для x_2, y_2 , таким образом, отделяются. Итак, в дальнейшем будем рассматривать следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -v \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2}} \sin(2x_2) + \frac{3j}{8} y_2 \left(\frac{1}{3} - \cos(4x_2) \right), \\ \dot{y}_2 &= -2v \sqrt{y_1^2 - y_2^2} \cos(2x_2) + \frac{3j}{4} (y_1^2 - y_2^2) \sin(4x_2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

§2.2. Решение системы в новых переменных при линейной постановке исходной задачи

Рассмотрим линейную постановку задачи для медленно изменяющихся переменных p_1, q_1, p_2, q_2 . Для этого в формулах (2.18), согласно (2.11), отбросим слагаемые с коэффициентом j . Имеем

$$\dot{x}_2 = -v \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2}} \sin(2x_2), \quad \dot{y}_2 = -2v \sqrt{y_1^2 - y_2^2} \cos(2x_2). \quad (2.19)$$

Система уравнений (2.19) имеет первый интеграл

$$\sqrt{y_1^2 - y_2^2} \sin(2x_2) = C. \quad (2.20)$$

Здесь C определяется начальными условиями (2.15): $C = -r_0 k_0 / 2$.

Запишем согласно (2.20) $\cos(2x_2)$:

$$\cos(2x_2) = \sqrt{1 - \frac{C^2}{y_1^2 - y_2^2}} \quad (2.21)$$

и подставим его в последнее уравнение (2.19). Имеем дифференциальное уравнение для y_2 с нулевым начальным условием:

$$\dot{y}_2 = -2\nu \sqrt{y_1^2 - y_2^2 - C^2}, \quad y_2(0) = 0. \quad (2.22)$$

Решением (2.22) будет функция

$$y_2 = \sqrt{y_1^2 - C^2} \sin(-2\nu t). \quad (2.23)$$

Как было показано в параграфе 1.2, выражение для тангенса угла прецессии определяется соотношением (1.17)

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2(p_1 p_2 + q_1 q_2)}{p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2}.$$

Подставляя в эту формулу замену (2.16), получим

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2} \cos(2x_2)}. \quad (2.24)$$

Принимая во внимание (2.21) и (2.23), находим выражение для угла прецессии θ :

$$\theta = -\nu t, \quad (2.25)$$

что согласуется с результатами параграфа 1.3.

§2.3. Влияние нелинейности на прецессию гироскопа, установленного на неподвижном основании

Рассмотрим динамику гироскопа на неподвижном основании ($\nu = 0$). Таким образом, исследоваться будет следующая система

$$\dot{x}_2 = \frac{3j}{8} y_2 \left(\frac{1}{3} - \cos(4x_2) \right), \quad \dot{y}_2 = \frac{3j}{4} (y_1^2 - y_2^2) \sin(4x_2). \quad (2.26)$$

Данная система уравнений имеет первый интеграл

$$(y_1^2 - y_2^2) \left(\frac{1}{3} - \cos(4x_2) \right) = C, \quad (2.27)$$

где C определяется начальными условиями (2.15):

$$C = -\frac{1}{24} (r_0^4 + k_0^4 - 10r_0^2 k_0^2). \quad (2.28)$$

Из (2.27) имеем

$$\sin(4x_2) = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{C}{(y_1^2 - y_2^2)} \right)^2}. \quad (2.29)$$

Знак в формуле (2.29) определяется начальными условиями по x_2 (см. формулу (2.15)).

Подставляя (2.29) в дифференциальное уравнение для y_2 из (2.26) и проведя необходимые преобразования, получаем

$$\dot{y}_2 = -\frac{j}{\sqrt{2}} \sqrt{\hat{a}^2 - y_2^2} \sqrt{\hat{b}^2 - y_2^2}. \quad (2.30)$$

В формуле (2.30) для констант \hat{a} и \hat{b} при $k_0 \ll r_0$ справедливо соотношение $\hat{a} < \hat{b}$ и в соответствии с начальными условиями

$$\hat{a}^2 = \frac{3}{4} r_0^2 k_0^2, \quad \hat{b}^2 = \frac{3}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2.$$

Из уравнения (2.30) определим время t как функцию переменной y_2 с помощью эллиптического интеграла первого рода

$$t = -\frac{\sqrt{2}}{j} \int_0^{y_2} \frac{dy_2}{\sqrt{\hat{a}^2 - y_2^2} \sqrt{\hat{b}^2 - y_2^2}}$$

Обращение этого интеграла дает нам решение дифференциального уравнения (2.30), то есть y_2 как функцию времени t :

$$y_2 = -\hat{a} \operatorname{sn} \left(\frac{j\hat{b}}{\sqrt{2}} t, \frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right), \quad (2.31)$$

где $\operatorname{sn} u$ – эллиптическая функция Якоби (эллиптический синус) [90]. Отметим, что это решение справедливо до тех пор, пока x_2 не обратится в 0 и знак производной \dot{y}_2 не изменится. Минимальное значение переменной y_2 достигается при $x_2 = 0$ и, в соответствии с интегралом (2.27), равно

$$y_2^{\min} = -\sqrt{y_1^2 + \frac{3}{2}C} = -\frac{\sqrt{3}}{2} r_0 k_0 = -\hat{a}.$$

Таким образом, y_2 есть двоякопериодическая функция, четверть периода которой определяется полным эллиптическим интегралом $\mathbf{K}(m)$ первого рода

$$t = -\frac{\sqrt{2}}{j} \int_0^{-\hat{a}} \frac{dy_2}{\sqrt{\hat{a}^2 - y_2^2} \sqrt{\hat{b}^2 - y_2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{j\hat{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\hat{a}^2}{\hat{b}^2} \sin^2 \varphi}} = \frac{\sqrt{2}}{j\hat{b}} \mathbf{K} \left(\frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right).$$

Найдем прецессию гироскопа. Подставим в (2.24) найденное значение y_2 (2.31), где также из полученных выше соотношений следует положить

$$\cos(2x_2) = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{C}{2(y_1^2 - y_2^2)}}. \text{ Таким образом, получаем}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{\hat{a}\sqrt{3} \operatorname{sn} \left(\frac{j\hat{b}}{\sqrt{2}} t, \frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right)}{\hat{b}\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\hat{a}^2}{\hat{b}^2} \operatorname{sn}^2 \left(\frac{j\hat{b}}{\sqrt{2}} t, \frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right)}}. \quad (2.32)$$

Как следует из (2.32), даже на неподвижном основании возникает прецессия гироскопа из-за нелинейных эффектов, вызванных конечными

колебаниями конструкции прибора. При этом при «идеальных» начальных условиях ($k_0 = 0$) уход равен нулю.

Полученная формула тангенса угла прецессии может быть использована для компенсирования уходов гироскопа с целью улучшения его точностных характеристик.

Числовой пример. Рассмотрим гироскоп, параметры которого приведены в числовом примере параграфа 1.1 (консольное закрепление пластин). Примем для начальных условий (2.13) $r_0 = \sqrt{\varepsilon}$, $k_0 = 0.001\sqrt{\varepsilon}$, где $\varepsilon = 10^{-5}$, что соответствует максимальному прогибу пластин 16 мкм.

На рисунке 2.1 приведен график зависимости угла прецессии θ от безразмерного времени t , построенный по формуле (2.32).

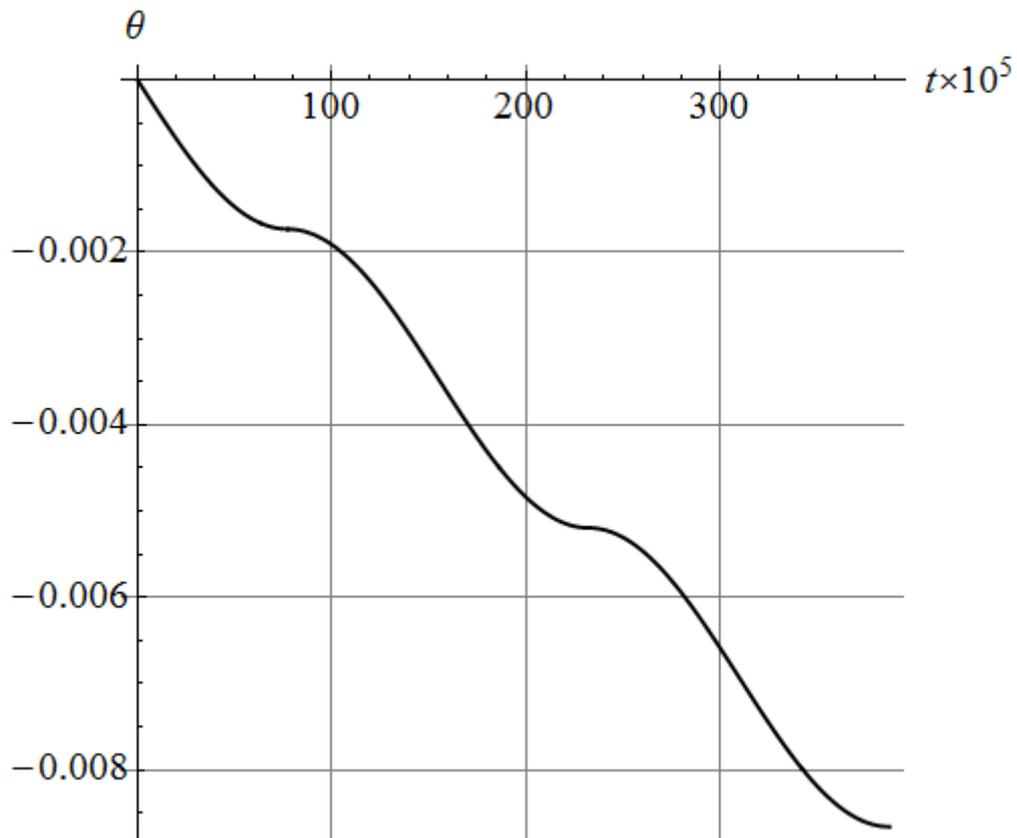


Рис. 2.1. Изменение угла прецессии во времени t

Анализ приведенной зависимости показывает, что на интервале наблюдения 1 минута уход гироскопа составляет 3.94 угл. мин. То есть

ненулевое значение начальных условий по углу поворота рамки k_0 оказывает существенное влияние на точность гироскопа.

§2.4. Влияние нелинейности на прецессию гироскопа, установленного на подвижном основании

Итак, перейдем к рассмотрению системы (2.18)

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -v \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2}} \sin(2x_2) + \frac{3j}{8} y_2 \left(\frac{1}{3} - \cos(4x_2) \right), \\ \dot{y}_2 &= -2v \sqrt{y_1^2 - y_2^2} \cos(2x_2) + \frac{3j}{4} (y_1^2 - y_2^2) \sin(4x_2).\end{aligned}$$

Введем новую переменную

$$f = \sqrt{y_1^2 - y_2^2} \sin(2x_2). \quad (2.33)$$

В результате дифференцирования переменной f в силу уравнений (2.18) получим

$$\dot{f} = -\frac{j}{2} y_2 \sqrt{y_1^2 - y_2^2} \cos(2x_2). \quad (2.34)$$

Предполагая, что $x_2 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, из формулы (2.33) выразим

$$\cos(2x_2) = \frac{\sqrt{y_1^2 - y_2^2 - f^2}}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2}}, \quad \sin(4x_2) = 2f \frac{\sqrt{y_1^2 - y_2^2 - f^2}}{y_1^2 - y_2^2}. \quad (2.35)$$

Тогда для переменных f, y_2 справедлива система уравнений

$$\begin{aligned}\dot{f} &= -\frac{j}{2} y_2 \sqrt{y_1^2 - y_2^2 - f^2}, \\ \dot{y}_2 &= \frac{3}{2} j \left(f - \frac{4v}{3j} \right) \sqrt{y_1^2 - y_2^2 - f^2}.\end{aligned} \quad (2.36)$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = \frac{1}{4}(r_0^2 + k_0^2), y_2(0) = 0, f(0) = -\frac{1}{2}r_0k_0. \quad (2.37)$$

Система уравнений (2.36) имеет первый интеграл

$$y_2^2 + 3f^2 - 8\frac{v}{j}f = C, \quad (2.38)$$

где константа

$$C = \frac{3}{4}r_0^2k_0^2 + 4\frac{v}{j}r_0k_0. \quad (2.39)$$

Из интеграла (2.38) имеем

$$y_2 = -\sqrt{-3f^2 + 8\frac{v}{j}f + C}. \quad (2.40)$$

Следует выбрать знак "-", так как производная переменной y_2 в силу уравнений (2.36) при начальных условиях (2.37) отрицательна.

Кроме того из (2.38) следует, что

$$\sqrt{y_1^2 - y_2^2 - f^2} = \sqrt{2f^2 - 8\frac{v}{j}f + y_1^2 - C}. \quad (2.41)$$

Тогда уравнение для переменной f можно записать в виде

$$\dot{f} = \frac{j}{2} \sqrt{-3f^2 + 8\frac{v}{j}f + C} \sqrt{2f^2 - 8\frac{v}{j}f + y_1^2 - C}. \quad (2.42)$$

Решение уравнения (2.42) сводится к вычислению эллиптического интеграла

$$\int_{f(0)}^f \frac{df}{\sqrt{-3f^2 + 8\frac{v}{j}f + C} \sqrt{2f^2 - 8\frac{v}{j}f + y_1^2 - C}} = \frac{j}{2}t. \quad (2.43)$$

Обозначим многочлены, стоящие под корнем в знаменателе (2.43)

$$\begin{aligned}
 G_1(f) &= -3f^2 + 8\frac{\nu}{j}f + C, \\
 G_2(f) &= 2f^2 - 8\frac{\nu}{j}f + y_1^2 - C.
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

Если из (2.43) удастся определить переменную f как функцию времени, тогда задача определения угла прецессии гироскопа будет решена.

Согласно (2.40), (2.44) для y_2 получим

$$y_2 = -\sqrt{G_1(f)}. \tag{2.45}$$

Для угла прецессии θ , определяемого формулой (2.24), в соответствии с выражениями (2.35) и (2.41), будем иметь

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 - y_2^2 - f^2}} = -\frac{\sqrt{G_1(f(t))}}{\sqrt{G_2(f(t))}}. \tag{2.46}$$

Вычисление эллиптических интегралов

Вернемся к интегралу (2.43). Известно [10], что с помощью замены переменной он может быть приведен к эллиптическому интегралу первого рода

$$\int \frac{df}{\sqrt{G_1(f)}\sqrt{G_2(f)}} = \nu \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{2.47}$$

Вид замены переменных, значения константы ν и модуля эллиптического интеграла k определяются соотношениями между корнями многочленов под корнем и интервалом изменения переменной f .

Вычислим корни многочленов $G_1(f)$ и $G_2(f)$. Многочлен $G_1(f)$ имеет действительные различные корни

$$\alpha_1 = \frac{8\nu}{3j} + \frac{1}{2}r_0k_0, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}r_0k_0. \tag{2.48}$$

Корни многочлена $G_2(f)$ могут быть действительными, если дискриминант

$$\begin{aligned}
 D &= 4 \left(\frac{v}{j} \right)^2 + \frac{1}{2} (C - y_1^2) = \\
 &= \left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 \right)^2 - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

положителен. В этом случае они равны

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 &= 2 \frac{v}{j} + \sqrt{\left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 \right)^2 - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2}, \\
 \alpha_4 &= 2 \frac{v}{j} - \sqrt{\left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 \right)^2 - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Если дискриминант (2.49) многочлена $G_2(f)$ отрицателен, то его корни комплексно сопряженные

$$\alpha_{3,4} = 2 \frac{v}{j} \pm i \sqrt{\frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2 - \left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 \right)^2}. \tag{2.51}$$

В случае равенства дискриминанта нулю, многочлен $G_2(f)$ имеет кратные действительные корни.

Соотношение между корнями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ определяется параметрами $\frac{v}{j}, r_0, k_0$. Возможны следующие случаи.

1⁰. Первый интервал для v/j

Если

$$\frac{v}{j} \in \left(0, \frac{1}{8\sqrt{2}} (r_0^2 - k_0^2) - \frac{1}{4} r_0 k_0 \right), \tag{2.52}$$

корни многочлена G_2 комплексно сопряженные

$$\alpha_{3,4} = g \pm ic, \tag{2.53}$$

где

$$g = 2\frac{v}{j}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{32}(r_0^2 - k_0^2)^2 - \left(2\frac{v}{j} + \frac{1}{2}r_0k_0\right)^2}. \quad (2.54)$$

Замечание.

Интервал (2.52) для параметра $\frac{v}{j}$ существует для величин k_0 , таких, что,

$$\frac{1}{8\sqrt{2}}(r_0^2 - k_0^2) - \frac{1}{4}r_0k_0 > 0, \text{ или, соответственно,}$$

$$k_0 < r_0(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \approx 0.31 r_0. \quad (2.55)$$

С помощью замены переменных

$$f = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \frac{s - \cos \varphi}{1 - s \cos \varphi} \quad (2.56)$$

на интервале $f \in (\alpha_2, \alpha_1)$ интеграл (2.47) может быть приведен к каноническому виду.

В самом деле, из (2.56), (2.44) следует, что

$$df = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - s^2) \sin \varphi}{2(1 - s \cos \varphi)^2} d\varphi, \quad (2.57)$$

$$G_1 = -3(f - \alpha_1)(f - \alpha_2) = \frac{3(\alpha_1 - \alpha_2)^2(1 - s^2) \sin^2 \varphi}{4(1 - s \cos \varphi)^2}. \quad (2.58)$$

Для преобразования многочлена G_2 введем вспомогательные параметры

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\alpha_1 - g}{c}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{\alpha_2 - g}{c}. \quad (2.59)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
G_2(f) &= 2[(f - g)^2 + c^2] = G_2(\varphi) = \\
&= 2 \left\{ \frac{c^2}{4} \left[(\operatorname{tg}\vartheta_1 + \operatorname{tg}\vartheta_2) - (\operatorname{tg}\vartheta_1 - \operatorname{tg}\vartheta_2) \frac{s - \cos \varphi}{1 - s \cos \varphi} \right]^2 + c^2 \right\} = \\
&= \frac{c^2}{2(1 - s \cos \varphi)^2} \{ 4 + [\operatorname{tg}\vartheta_1(1 - s) + \operatorname{tg}\vartheta_2(1 + s)]^2 + \\
&+ 2 \cos \varphi [\operatorname{tg}^2\vartheta_1(1 - s)^2 - \operatorname{tg}^2\vartheta_2(1 + s)^2 - 4s] + \\
&+ \cos^2 \varphi [(\operatorname{tg}\vartheta_1(1 - s) - \operatorname{tg}\vartheta_2(1 + s))^2 + 4s^2] \}. \tag{2.60}
\end{aligned}$$

В выражении (2.60) коэффициент при $\cos \varphi$ будет равен нулю, если взять

$$s = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_1} - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_1} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_2}} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}. \tag{2.61}$$

Подставляя (2.61) в (2.60), получим

$$G_2(\varphi) = \frac{8c^2(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_1)(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_2)(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_1} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_2})^2 (1 - s \cos \varphi)^2}, \tag{2.62}$$

где константа k^2 равна

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \operatorname{tg}\vartheta_1 \operatorname{tg}\vartheta_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_1} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_2}} \right) = \sin^2 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}. \tag{2.63}$$

Принимая во внимание, что

$$1 - s^2 = \frac{4\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_1} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_2}}{(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_1} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_2})^2}, \tag{2.64}$$

запишем (2.62) в виде

$$G_2(\varphi) = \frac{2c^2(1 - s^2)(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 (1 - s \cos \varphi)^2}. \tag{2.65}$$

Подставляя результаты (2.57), (2.58), (2.65) в (2.43), имеем

$$\begin{aligned} \frac{j}{2}t &= \int_{-\frac{1}{2}r_0k_0}^f \frac{df}{\sqrt{G_1(f)}\sqrt{G_2(f)}} = -\frac{(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)^{1/2}}{\sqrt{6}c} \int_{\pi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)^{1/2}}{\sqrt{6}c} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)^{1/2}}{\sqrt{6}c} \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi, k). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Откуда, в результате обращения эллиптического синуса, получим

$$\sin \varphi = \operatorname{sn}(Bt, k), \quad (2.67)$$

где

$$B = B_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{jc}{(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)^{1/2}}. \quad (2.68)$$

Тогда для угла прецессии θ из соотношений (2.46), (2.58), (2.65), (2.67), следует

$$\operatorname{tg} 2\theta = -A_1 \frac{\operatorname{sn}(B_1 t, k_1)}{(1 - k_1^2 \operatorname{sn}^2(B_1 t, k_1))^{1/2}}, \quad (2.69)$$

где

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)^{1/2}}{c}. \quad (2.70)$$

Согласно (2.59), из (2.63), (2.68), (2.70) получим

$$k^2 = k_1^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{c^2 + (\alpha_1 - g)(\alpha_2 - g)}{(c^2 + (\alpha_1 - g)^2)^{1/2} (c^2 + (\alpha_2 - g)^2)^{1/2}} \right], \quad (2.71)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{(c^2 + (\alpha_1 - g)^2)^{1/4} (c^2 + (\alpha_2 - g)^2)^{1/4}}, \quad (2.72)$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} j (c^2 + (\alpha_1 - g)^2)^{1/4} (c^2 + (\alpha_2 - g)^2)^{1/4}. \quad (2.73)$$

Принимая во внимание выражения (2.48), (2.53), (2.54) корней многочленов через параметры $\frac{v}{j}$, r_0 , k_0 , получим

$$k_1^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2 - \left(2\frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0\right) \left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0\right)}{\frac{1}{4\sqrt{2}} (r_0^2 - k_0^2) \left(\frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2 - \frac{4v}{3j} \left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0\right)\right)^{1/2}} \right],$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3} \left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0\right)}{\sqrt[4]{2} (r_0^2 - k_0^2)^{1/2} \left(\frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2 - \frac{4v}{3j} \left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0\right)\right)^{1/4}}, \quad (2.74)$$

$$B_1 = \frac{j\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{2}} (r_0^2 - k_0^2)^{1/2} \left(\frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2 - \frac{4v}{3j} \left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0\right)\right)^{1/4}.$$

Рассмотрим случай «идеальных начальных условий», то есть $k_0 = 0$.

Угол прецессии в этом случае будет задаваться формулой (2.69).

Значения констант будут

$$k_{1,0}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\frac{1}{32} r_0^4 - \frac{16}{3} \left(\frac{v}{j}\right)^2}{\frac{1}{4\sqrt{2}} r_0^2 \left(\frac{1}{32} r_0^4 - \frac{32}{9} \left(\frac{v}{j}\right)^2\right)^{1/2}} \right],$$

$$A_{1,0} = \frac{\frac{8v}{\sqrt{3}j}}{\sqrt[4]{2} r_0 \left(\frac{1}{32} r_0^4 - \frac{32}{9} \left(\frac{v}{j}\right)^2\right)^{1/4}}, \quad (2.75)$$

$$B_{1,0} = \frac{j\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{2}} r_0 \left(\frac{1}{32} r_0^4 - \frac{32}{9} \left(\frac{v}{j}\right)^2\right)^{1/4}.$$

Проведем контроль правильности решения (2.69). Рассмотрим случай неподвижного основания. Это означает, что в формулах (2.74) следуют положить $v = 0$, что соответствует крайней левой точке рассматриваемого интервала для параметра $\frac{v}{j}$. Из (2.74) для модуля эллиптического интеграла в этом случае получим

$$k_1^2 = 8 \frac{r_0^2 k_0^2}{(r_0^2 - k_0^2)^2}. \quad (2.76)$$

Коэффициент при t будет

$$B_1^{\text{л}} = j \frac{\sqrt{3}}{8} (r_0^2 - k_0^2). \quad (2.77)$$

Для угла прецессии θ , из (2.69) и (2.74)

$$\operatorname{tg} 2\theta = -A_1^{\text{л}} \frac{\operatorname{sn}(B_1^{\text{л}} t, k_1)}{(1 - k_1^2 \operatorname{sn}^2(B_1^{\text{л}} t, k_1))^{1/2}}, \quad A_1^{\text{л}} = 2\sqrt{3} \frac{r_0 k_0}{r_0^2 - k_0^2}. \quad (2.78)$$

Эти результаты совпадают с полученными ранее результатами параграфа 2.3.

При $k_0 = 0$ соотношения (2.76) - (2.78) дают для угла прецессии нулевое решение.

Рассмотрим предельный случай

$$\frac{\nu}{j} \rightarrow \frac{1}{8\sqrt{2}} (r_0^2 - k_0^2) - \frac{1}{4} r_0 k_0, \quad c \rightarrow 0.$$

Этот случай соответствует крайней правой точке рассматриваемого интервала для параметра $\frac{\nu}{j}$. В рассматриваемом предельном случае многочлен $G_2(f)$ имеет кратные действительные корни, в соответствии с (2.71) при $c \rightarrow 0$

$$k_1^2 \rightarrow \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\alpha_1 - g)(\alpha_2 - g)}{|\alpha_1 - g||\alpha_2 - g|} \right] = 1. \quad (2.79)$$

То есть модуль эллиптического интеграла $k_1 \rightarrow 1$.

Известно [90], что при модуле, равном 1

$$\operatorname{sn}(Bt, 1) = \operatorname{th}(Bt), \quad \operatorname{cn}(Bt, 1) = \operatorname{dn}(Bt, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch}(Bt)}. \quad (2.80)$$

Здесь $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$ – эллиптические функции Якоби (эллиптический косинус и дельта амплитуда соответственно) [90].

Для угла прецессии θ , из (2.69) при $k_1 \rightarrow 1$ получим

$$\operatorname{tg}2\theta = -A_1^{\text{np}} \operatorname{sh}(B_1^{\text{np}} t), \quad (2.81)$$

где, как следует из (2.72), (2.73)

$$A_1^{\text{np}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{|\alpha_1 - g|^{1/2} |\alpha_2 - g|^{1/2}}, \quad (2.82)$$

$$B_1^{\text{np}} = \sqrt{\frac{3}{2}} j |\alpha_1 - g|^{1/2} |\alpha_2 - g|^{1/2}.$$

Или, в соответствии с (2.48), (2.54),

$$A_1^{\text{np}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0\right)}{\left(\frac{2v}{3j} + \frac{1}{2} r_0 k_0\right)^{1/2} \left(2\frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0\right)^{1/2}}, \quad (2.83)$$

$$B_1^{\text{np}} = \sqrt{\frac{3}{2}} j \left(\frac{2v}{3j} + \frac{1}{2} r_0 k_0\right)^{1/2} \left(2\frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0\right)^{1/2}. \quad (2.84)$$

Подставляя в (2.83), (2.84), значение

$$\frac{v}{j} = \frac{1}{8\sqrt{2}} (r_0^2 - k_0^2) - \frac{1}{4} r_0 k_0, \quad (2.85)$$

соответствующее правой границе рассматриваемого интервала, получим

$$A_1^{\text{np}} = \frac{\sqrt{2}(r_0^2 - k_0^2 + \sqrt{2}r_0 k_0)}{(r_0^2 - k_0^2)^{1/2} (r_0^2 - k_0^2 + 4\sqrt{2}r_0 k_0)^{1/2}}, \quad (2.86)$$

$$B_1^{\text{np}} = \frac{j}{8} (r_0^2 - k_0^2)^{1/2} (r_0^2 - k_0^2 + 4\sqrt{2}r_0 k_0)^{1/2}.$$

В частности, при $k_0 = 0$ и $\frac{v}{j} = \frac{1}{8\sqrt{2}} r_0^2$ эти константы, согласно (2.48),

(2.54), равны соответственно

$$A_{1,0}^{\text{np}} = \sqrt{2}, B_{1,0}^{\text{np}} = \frac{j}{8} r_0^2. \quad (2.87)$$

2⁰. Второй интервал для v/j

Если

$$\frac{\nu}{j} \in \left(\frac{1}{8\sqrt{2}}(r_0^2 - k_0^2) - \frac{1}{4}r_0k_0, \frac{3}{32}(r_0 - k_0)^2 \right), \quad (2.88)$$

то корни α_3, α_4 многочлена $G_2(f)$ действительные и различные, а расположение корней на числовой оси характеризуется неравенством

$$\alpha_2 < \alpha_4 < \alpha_3 < \alpha_1. \quad (2.89)$$

В этом случае эллиптический интеграл (2.43) может быть приведен к канонической форме с помощью замены

$$f = \frac{\alpha_2\alpha_{41} + \alpha_1\alpha_{24} \sin^2 \varphi}{\alpha_{41} + \alpha_{24} \sin^2 \varphi}. \quad (2.90)$$

В формуле (2.90) введено обозначение

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i. \quad (2.91)$$

Переменная f в случае преобразования (2.90) изменяется в интервале (α_2, α_4) .

Для дифференциала df имеем

$$df = \frac{\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{41}}{(\alpha_{41} + \alpha_{24} \sin^2 \varphi)^2} 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi. \quad (2.92)$$

Многочлены $G_1(f), G_2(f)$ принимают вид

$$G_1 = -3(f - \alpha_1)(f - \alpha_2) = 3 \frac{\alpha_{21}^2 \alpha_{24} \alpha_{41} \sin^2 \varphi}{(\alpha_{41} + \alpha_{24} \sin^2 \varphi)^2}, \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} G_2 &= 2(f - \alpha_3)(f - \alpha_4) = \\ &= 2 \frac{\alpha_{23} \alpha_{24} \alpha_{41}^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi}{(\alpha_{41} + \alpha_{24} \sin^2 \varphi)^2}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

а интеграл (2.43) приводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\int_{\alpha_2}^f \frac{df}{\sqrt{G_1(f)}\sqrt{G_2(f)}} = \frac{\nu}{\sqrt{6}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{j}{2} t. \quad (2.95)$$

Параметры ν и k в соотношениях (2.94), (2.95) равны

$$k^2 = k_2^2 = \frac{\alpha_{31}\alpha_{24}}{\alpha_{41}\alpha_{23}} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}, \quad (2.96)$$

$$v = \frac{2}{(\alpha_{41}\alpha_{23})^{1/2}} = \frac{2}{(\alpha_3 - \alpha_2)^{1/2}(\alpha_1 - \alpha_4)^{1/2}}. \quad (2.97)$$

В результате обращения эллиптического интеграла (2.95) получим

$$\sin \varphi = \operatorname{sn}(Bt, k), \quad (2.98)$$

где

$$B = B_2 = \sqrt{\frac{3j}{2v}} = j \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} (\alpha_3 - \alpha_2)^{1/2} (\alpha_1 - \alpha_4)^{1/2}. \quad (2.99)$$

Тогда для переменной y_2 из (2.45), (2.93) следует

$$y_2 = -\sqrt{G_1} = -\sqrt{3} \frac{\alpha_{21}(\alpha_{24}\alpha_{41})^{1/2} \operatorname{sn}(B_2 t, k)}{(\alpha_{41} + \alpha_{24} \operatorname{sn}^2(B_2 t, k))}. \quad (2.100)$$

Угол прецессии θ , согласно (2.93), (2.94), (2.98) определяется соотношением

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\sqrt{\frac{G_1}{G_2}} = -A_2 \frac{\operatorname{sn}(B_2 t, k_2)}{(1 - k_2^2 \operatorname{sn}^2(B_2 t, k_2))^{1/2} \operatorname{cn}(B_2 t, k_2)}, \quad (2.101)$$

где

$$A_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\alpha_{21}}{(\alpha_{41}\alpha_{23})^{1/2}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_4)^{1/2}(\alpha_3 - \alpha_2)^{1/2}}}. \quad (2.102)$$

Окончательный результат получается путем подстановки выражений (2.48), (2.50) для корней многочленов G_1 , G_2 в формулы (2.96), (2.99), (2.102).

Так для модуля эллиптического интеграла получим

$$\begin{aligned}
k_2^2 = & \left\{ \left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0 \right) \left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 - \sqrt{\left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 \right)^2 - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2 \right\} / \left\{ \left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0 \right) \times \right. \\
& \left. \times \left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 + \sqrt{\left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 \right)^2 - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2} \right) - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2 \right\}. \quad (2.103)
\end{aligned}$$

Константы A_2 и B_2 будут

$$\begin{aligned}
A_2 = & \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0 \right) / \left[\left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0 \right) \times \right. \\
& \left. \times \left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 + \sqrt{\left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 \right)^2 - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2} \right) - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.104)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & \frac{j\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{8v}{3j} + r_0 k_0 \right) \times \right. \\
& \left. \times \left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 + \sqrt{\left(2 \frac{v}{j} + \frac{1}{2} r_0 k_0 \right)^2 - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2} \right) - \frac{1}{32} (r_0^2 - k_0^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.105)
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай «идеальных начальных условий», то есть $k_0 = 0$.

Угол прецессии в этом случае будет задаваться формулой (2.101).

Значения констант будут

$$\begin{aligned}
k_{2,0}^2 = & \frac{\frac{8v}{3j} \left(2 \frac{v}{j} - \sqrt{4 \left(\frac{v}{j} \right)^2 - \frac{r_0^4}{32}} \right) - \frac{r_0^4}{32}}{\frac{8v}{3j} \left(2 \frac{v}{j} + \sqrt{4 \left(\frac{v}{j} \right)^2 - \frac{r_0^4}{32}} \right) - \frac{r_0^4}{32}}, \quad (2.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2,0} = & \frac{4\sqrt{2}v}{\sqrt{3}j} \left[\frac{8v}{3j} \left(2 \frac{v}{j} + \sqrt{4 \left(\frac{v}{j} \right)^2 - \frac{r_0^4}{32}} \right) - \frac{r_0^4}{32} \right]^{-1/2}, \quad (2.107)
\end{aligned}$$

$$B_{2,0} = j \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left[\frac{8v}{3j} \left(2\frac{v}{j} + \sqrt{4\left(\frac{v}{j}\right)^2 - \frac{r_0^4}{32}} \right) - \frac{r_0^4}{32} \right]^{1/2}. \quad (2.108)$$

Рассмотрим предельный случай

$$\frac{v}{j} \rightarrow \frac{1}{8\sqrt{2}} (r_0^2 - k_0^2) - \frac{1}{4} r_0 k_0.$$

Это значение параметра $\frac{v}{j}$ соответствует крайней левой точке рассматриваемого интервала. В этом случае многочлен $G_2(f)$ имеет два кратных действительных корня $\alpha_3 = \alpha_4$, и интеграл (2.43) может быть представлен в виде элементарных функций.

Заметим, что при $\alpha_3 \rightarrow \alpha_4$, согласно (2.96) модуль эллиптического интеграла $k_2^2 \rightarrow 1$.

Воспользовавшись соотношениями (2.80) при $k_2 = 1$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= -A_2^n \frac{\operatorname{sn}(B_2^n t, 1)}{\operatorname{cn}^2(B_2^n t, 1)} = -A_2^n \operatorname{th}(B_2^n t) \operatorname{ch}^2(B_2^n t) = \\ &= -A_2^n \operatorname{sh}(B_2^n t) \operatorname{ch}(B_2^n t) = -\frac{A_2^n}{2} \operatorname{sh}(2B_2^n t). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Значение констант A_2 и B_2 , соответствующих значению

$$\frac{v}{j} = \frac{1}{8\sqrt{2}} (r_0^2 - k_0^2) - \frac{1}{4} r_0 k_0,$$

получаются из (2.104), (2.105) и равны соответственно

$$A_2^n = 2\sqrt{2} \frac{(r_0^2 - k_0^2 + \sqrt{2} r_0 k_0)}{(r_0^2 - k_0^2)^{1/2} (r_0^2 - k_0^2 + 4\sqrt{2} r_0 k_0)^{1/2}}, \quad (2.110)$$

$$B_2^n = \frac{j}{16} (r_0^2 - k_0^2)^{1/2} (r_0^2 - k_0^2 + 4\sqrt{2} r_0 k_0)^{1/2}. \quad (2.111)$$

Заметим, что полученное таким предельным переходом решение (2.109), (2.110), (2.111) полностью совпадает с решением (2.81), (2.86),

полученным в пункте 1⁰ предельным переходом при $\frac{\nu}{j} \rightarrow \frac{1}{8\sqrt{2}}(r_0^2 - k_0^2) - \frac{1}{4}r_0k_0$ на интервале $\frac{\nu}{j} \in \left(0, \frac{1}{8\sqrt{2}}(r_0^2 - k_0^2) - \frac{1}{4}r_0k_0\right)$.

Рассмотрим предельный случай $\frac{\nu}{j} \rightarrow \frac{3}{32}(r_0 - k_0)^2$.

Этот случай соответствует крайней правой точке рассматриваемого интервала для параметра $\frac{\nu}{j}$. В этом случае большие корни многочленов G_1, G_2 совпадают, то есть

$$\alpha_1 = \alpha_3. \quad (2.112)$$

Из (2.96) при условии (2.112) для модуля эллиптического интеграла k_2^2 получим

$$k_2^2 = 0.$$

Угол прецессии из (2.101)

$$\operatorname{tg}2\theta = -A_2^{\text{np}} \frac{\operatorname{sn}(B_2^{\text{np}}t, 0)}{\operatorname{cn}(B_2^{\text{np}}t, 0)} = -A_2^{\text{np}} \operatorname{tg}(B_2^{\text{np}}t). \quad (2.113)$$

Константы A_2^{np} и B_2^{np} в формуле (2.113) получаются из (2.104), (2.105), подстановкой в них значения

$$\frac{\nu}{j} = \frac{3}{32}(r_0 - k_0)^2. \quad (2.114)$$

В результате подстановки получим

$$A_2^{\text{np}} = \sqrt{3} \frac{(r_0 + k_0)}{(r_0^2 + k_0^2 + 6r_0k_0)^{1/2}}, \quad (2.115)$$

$$B_2^{\text{np}} = \frac{\sqrt{3}}{16} j (r_0 + k_0) (r_0^2 + k_0^2 + 6r_0k_0)^{1/2}. \quad (2.116)$$

Заметим, что формулы (2.115) и (2.116) дают при $k_0 = 0$ тот же результат, что и формулы (2.107), (2.108) при $\frac{\nu}{j} = \frac{3}{32}r_0^2$, а именно

$$A_{2,0}^{\text{pp}} = \sqrt{3}, \quad B_{2,0}^{\text{pp}} = \frac{\sqrt{3}}{16} j r_0^2. \quad (2.117)$$

3⁰. Третий интервал для v/j

Если

$$\frac{v}{j} > \frac{3}{32} (r_0 - k_0)^2, \quad (2.118)$$

то корни α_3, α_4 многочлена G_2 действительные и различные, причем больший корень многочлена G_2 больше большего корня многочлена G_1 . Выполняется неравенство

$$\alpha_2 < \alpha_4 < \alpha_1 < \alpha_3. \quad (2.119)$$

В этом случае эллиптический интеграл (2.43) может быть приведен к канонической форме с помощью замены

$$f = \frac{\alpha_2 \alpha_{43} + \alpha_3 \alpha_{24} \sin^2 \varphi}{\alpha_{43} + \alpha_{24} \sin^2 \varphi}. \quad (2.120)$$

В формуле (2.120) введено обозначение (2.91).

Переменная f в случае преобразования (2.120) изменяется в интервале (α_2, α_4) . Для дифференциала df имеем

$$df = \frac{\alpha_{23} \alpha_{24} \alpha_{43}}{(\alpha_{43} + \alpha_{24} \sin^2 \varphi)^2} 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Многочлены G_1, G_2 принимают вид

$$G_1 = -3(f - \alpha_1)(f - \alpha_2) = 3 \frac{\alpha_{21} \alpha_{23} \alpha_{24} \alpha_{43} (1 - k^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi}{(\alpha_{43} + \alpha_{24} \sin^2 \varphi)^2}, \quad (2.121)$$

$$G_2 = 2(f - \alpha_3)(f - \alpha_4) = 2 \frac{\alpha_{23} \alpha_{24} \alpha_{43}^2 \cos^2 \varphi}{(\alpha_{43} + \alpha_{24} \sin^2 \varphi)^2}, \quad (2.122)$$

а интеграл (2.43) приводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\int_{\alpha_2}^f \frac{df}{\sqrt{G_1(f)} \sqrt{G_2(f)}} = \frac{v}{\sqrt{6}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{j}{2} t. \quad (2.123)$$

Параметры v и k в соотношениях (2.121), (2.123) равны

$$k^2 = k_3^2 = \frac{\alpha_{13}\alpha_{24}}{\alpha_{43}\alpha_{21}} = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}, \quad (2.124)$$

$$v = \frac{2}{(\alpha_{43}\alpha_{21})^{1/2}} = \frac{2}{(\alpha_3 - \alpha_4)^{1/2}(\alpha_1 - \alpha_2)^{1/2}}. \quad (2.125)$$

В результате обращения эллиптического интеграла (2.123) получим

$$\sin \varphi = \operatorname{sn}(B_3 t, k), \quad (2.126)$$

где

$$B_3 = \sqrt{\frac{3j}{2v}} = j \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} (\alpha_3 - \alpha_4)^{1/2} (\alpha_1 - \alpha_2)^{1/2}. \quad (2.127)$$

Тогда для переменной y_2 из (2.45), (2.121) следует

$$\begin{aligned} y_2 &= -\sqrt{G_1} = \\ &= -\sqrt{3} \frac{(\alpha_{21}\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{43})^{1/2} (1 - k^2 \operatorname{sn}^2(B_3 t, k))^{1/2} \operatorname{sn}(B_3 t, k)}{(\alpha_{43} + \alpha_{24} \operatorname{sn}^2(B_3 t, k))}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Угол прецессии θ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= -\sqrt{\frac{G_1}{G_2}} = \\ &= -A_3 \frac{(1 - k_3^2 \operatorname{sn}^2(B_3 t, k_3))^{1/2} \operatorname{sn}(B_3 t, k_3)}{\operatorname{cn}(B_3 t, k_3)}, \end{aligned} \quad (2.129)$$

где

$$A_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{43}} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^{1/2}}{(\alpha_3 - \alpha_4)^{1/2}}. \quad (2.130)$$

Окончательный результат получается путем подстановки выражений (2.48), (2.50) для корней многочленов $G_1(f)$, $G_2(f)$ в формулы (2.124), (2.127), (2.130).

Так для модуля эллиптического интеграла получим

$$k_3^2 = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{32}(r_0^2 - k_0^2)^2 - \left(2\frac{v}{j} + \frac{1}{2}r_0k_0\right)\left(\frac{8v}{3j} + r_0k_0\right)}{2\left(\frac{8v}{3j} + r_0k_0\right)\left[\left(2\frac{v}{j} + \frac{1}{2}r_0k_0\right)^2 - \frac{1}{32}(r_0^2 - k_0^2)^2\right]^{1/2}}. \quad (2.131)$$

Константы A_3 и B_3 будут

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left(\frac{8v}{3j} + r_0k_0\right)^{1/2}}{\left[\left(2\frac{v}{j} + \frac{1}{2}r_0k_0\right)^2 - \frac{1}{32}(r_0^2 - k_0^2)^2\right]^{1/4}}, \quad (2.132)$$

$$B_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} j \left(\frac{8v}{3j} + r_0k_0\right)^{1/2} \left[\left(2\frac{v}{j} + \frac{1}{2}r_0k_0\right)^2 - \frac{1}{32}(r_0^2 - k_0^2)^2\right]^{1/4}.$$

Если $\frac{v}{j} \gg \frac{3}{32}(r_0 - k_0)^2$, то это равносильно тому, как если бы мы

пренебрегли нелинейными слагаемыми в решении исходной задачи (2.18).

Тогда для параметров k_3 , A_3 , B_3 из формул (2.131), (2.132) получим

$$k_3^2 = 0, \quad A_3^\infty = 1, \quad B_3^\infty = 2\varepsilon v. \quad (2.133)$$

Для угла прецессии θ при $k_3 = 0$ из (2.129) следует

$$\operatorname{tg}2\theta = -\operatorname{tg}2vt. \quad (2.134)$$

Эти результаты совпадают с полученными ранее результатами при решении задачи в отсутствие нелинейности (параграф 2.2).

Рассмотрим случай «идеальных начальных условий», то есть $k_0 = 0$. Угол прецессии в этом случае будет задаваться формулой (2.129). Значения констант k_3 , A_3 , B_3 изменятся. Так, для модуля эллиптического интеграла получим

$$k_{3,0}^2 = \frac{1}{2} - \frac{\frac{16}{3}v^2 - \frac{1}{32}r_0^4j^2}{\frac{16}{3}v\left(4v^2 - \frac{1}{32}r_0^4j^2\right)^{1/2}}. \quad (2.135)$$

Константы A_3 и B_3 будут

$$A_{3,0} = \left(\frac{4v^2}{4v^2 - \frac{1}{32}r_0^4j^2} \right)^{1/4}, \quad (2.136)$$

$$B_{3,0} = \left[4v^2 \left(4v^2 - \frac{1}{32}r_0^4j^2 \right) \right]^{1/4}.$$

Рассмотрим предельный случай $\frac{v}{j} \rightarrow \frac{3}{32}(r_0 - k_0)^2$.

Этот случай соответствует левой границе рассматриваемого интервала для параметра $\frac{v}{j}$. При таком значении $\frac{v}{j}$ большие корни α_1 и α_3 многочленов G_1 и G_2 , определенные формулами (2.48) и (2.50) соответственно, совпадают. Тогда из формулы (2.124) следует, что константа k_3 в этом случае стремится к нулю, и для угла прецессии θ при $k_3 \rightarrow 0$ из (2.129) получается

$$\operatorname{tg}2\theta = -A_3^{\mathcal{L}} \operatorname{tg}(B_3^{\mathcal{L}} t). \quad (2.137)$$

Для определения $A_3^{\mathcal{L}}$ и $B_3^{\mathcal{L}}$ в выражении (2.137), следует подставить в (2.132) значение

$$v = \frac{3}{32}j(r_0 - k_0)^2. \quad (2.138)$$

В результате такой подстановки получим

$$A_3^{\mathcal{L}} = \sqrt{3} \frac{(r_0 + k_0)}{(r_0^2 + k_0^2 + 6r_0k_0)^{1/2}}, \quad (2.139)$$

$$B_3^{\mathcal{L}} = \frac{\sqrt{3}}{16}j(r_0 + k_0)(r_0^2 + k_0^2 + 6r_0k_0)^{1/2}.$$

В частном случае, когда $k_0 = 0$ ("идеальные начальные условия"), из (2.139) следует

$$A_{3,0}^{\mathcal{L}} = \sqrt{3}, \quad B_{3,0}^{\mathcal{L}} = \frac{\sqrt{3}}{16}jr_0^2. \quad (2.140)$$

Такой же результат получается при $k_0 = 0$ из формул (2.136), (2.138).

Полученные в этом параграфе результаты для случая, когда $\frac{\nu}{j} \rightarrow \frac{3}{32}(r_0 - k_0)^2$ слева, согласуются с результатами предыдущего пункта, когда $\frac{\nu}{j} \rightarrow \frac{3}{32}(r_0 - k_0)^2$ справа, а именно, согласно (2.139), (2.115), (2.116)

$$A_2^{\text{pp}} = A_3^{\text{л}}, B_2^{\text{pp}} = B_3^{\text{л}}. \quad (2.141)$$

Итак, в результате работы в этой главе удалось получить решение системы дифференциальных уравнений в новых переменных (2.17) с целью аналитического представления угла прецессии гироскопа. Заметим, что к вычислению эллиптического интеграла свелось исследование динамики микромеханического вибрационного гироскопа *RR*-типа в [56].

Числовой пример. Рассмотрим гироскоп, параметры которого приведены в числовом примере параграфа 1.1 и параграфа 2.3. Тогда рассматриваемые выше интервалы будут следующими:

1. $\frac{\nu}{j} \in (0, 8.81 \cdot 10^{-7})$,
2. $\frac{\nu}{j} \in (8.81 \cdot 10^{-7}, 9.36 \cdot 10^{-7})$,
3. $\frac{\nu}{j} > 9.36 \cdot 10^{-7}$.

Для выбранных геометрических параметров пластин величина $j = 0.0938$, и приведенные интервалы соответствуют следующим значениям угловой скорости основания

1. $\Omega \in (0, 0.0102)$ рад/с,
2. $\Omega \in (0.0102, 0.0109)$ рад/с,
3. $\Omega > 0.0109$ рад/с.

Выберем значения угловой скорости основания для каждого интервала:

1. $\Omega_1 = 0.0012$ рад/с (параметр $\frac{\nu}{j} = 10^{-7}$),
2. $\Omega_2 = 0.0104$ рад/с (параметр $\frac{\nu}{j} = 9 \cdot 10^{-7}$),

3. $\Omega_3=0.58$ рад/с (параметр $\frac{\nu}{j} = 5 \cdot 10^{-5}$).

На рисунках 2.2 – 2.4 приведены графики зависимости абсолютной погрешности измерения угла прецессии $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$ от безразмерного времени t для выбранных значений угловых скоростей.

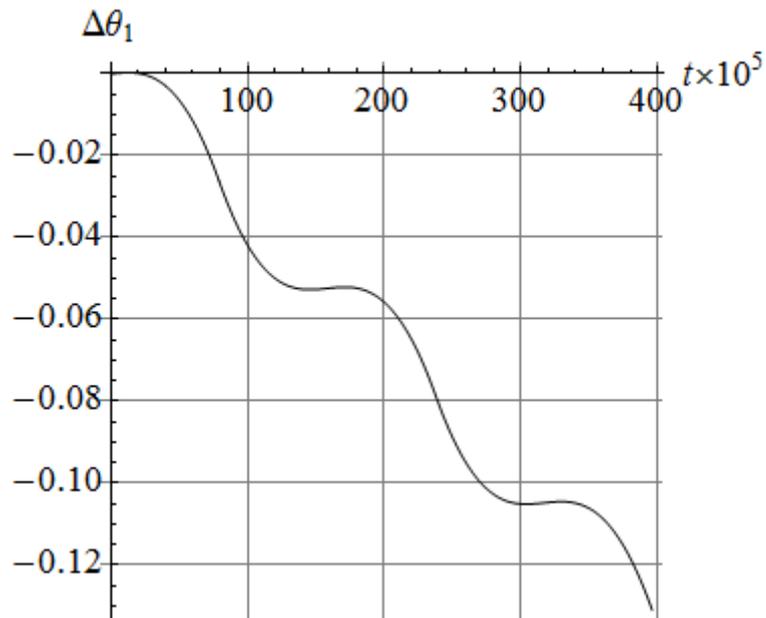


Рис. 2.2. Зависимость абсолютной погрешности $\Delta\theta_1$ от времени t

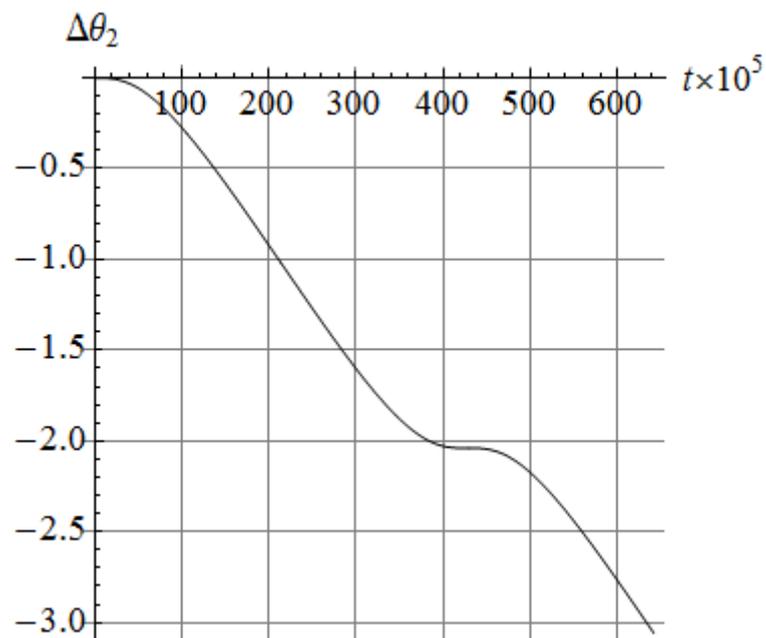


Рис. 2.3. Зависимость абсолютной погрешности $\Delta\theta_2$ от времени t

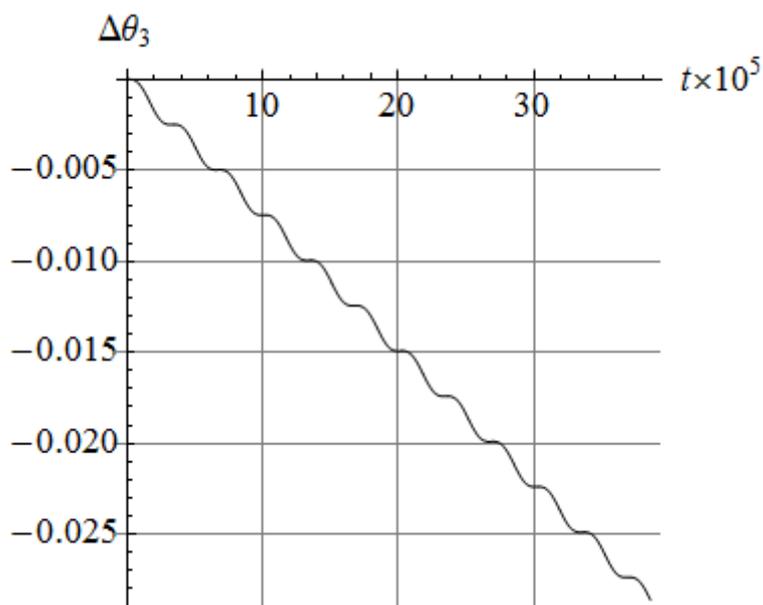


Рис. 2.4. Зависимость абсолютной погрешности $\Delta\theta_3$ от времени t

Из численного эксперимента установлено, что за одну минуту наблюдений абсолютная погрешность из-за нелинейных эффектов для данных значений угловых скоростей $\Omega_1 - \Omega_3$ составляет соответственно 0.11° , 1.27° , 1.53° . Это соответствует относительной погрешности измерения 5.47 %, 7.36 %, 0.16 %.

Согласно (2.129) при угловой скорости основания 3.5 рад/с абсолютная погрешность составляет 1.45° , относительная погрешность – 0.025 %.

Таким образом, при выбранных начальных условиях и угловых скоростях основания наибольшее влияние нелинейность оказывает при угловой скорости основания, соответствующей второму интервалу $\frac{v}{j}$.

Глава 3. Вынужденные нелинейные колебания микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин

В третьей главе рассмотрены нелинейные вынужденные колебания микромеханического гироскопа с резонатором в виде четырех упругих пластин. В 3.1 исследована устойчивость по Ляпунову стационарных режимов, когда гироскоп помещен на неподвижное основание. Показано, что при определенных частотах внешнего воздействия существуют несколько асимптотически устойчивых стационарных режимов. В 3.2 изучена устойчивость по Ляпунову стационарных режимов, когда гироскоп помещен на основание, вращающееся с постоянной угловой скоростью, малой по отношению к собственной частоте колебаний резонатора. Показано, что в системе существует несколько устойчивых стационарных режимов, а увеличение угловой скорости основания приводит к изменению амплитудно-частотной характеристики, при этом наблюдается явление срыва колебаний и скачков амплитуд.

Постановка задачи и результаты исследований опубликованы в [60].

В режиме вынужденных колебаний на пластины подается сигнал нормализованной амплитудой \check{A} и с постоянной частотой ω_B . Уравнения движения, таким образом, будут

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha &= -2\gamma_0 \omega \dot{\alpha} + 2b_1 \Omega \dot{\beta} + b_1 \dot{\beta}^2 + \alpha \dot{\beta}^2 + \check{A} \omega^2 \sin \omega_B t, \\ \ddot{\beta} + \omega^2 \beta &= -2\gamma_0 \omega \dot{\beta} - 2b_2 \Omega \dot{\alpha} - 2b_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} - 2b_2 \alpha \ddot{\beta} - \frac{b_2}{b_1} \alpha^2 \ddot{\beta} - 2 \frac{b_2}{b_1} \alpha \dot{\alpha} \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) $\gamma_0 \ll 1$ – коэффициент вязкого трения; $\check{A} \ll 1$.

Введем безразмерное время $t_* = \omega t$. Система (3.1) примет вид

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \alpha &= -2\gamma_0\dot{\alpha} + 2b_1\mu\dot{\beta} + b_1\dot{\beta}^2 + \alpha\dot{\beta}^2 + \check{A} \sin \tilde{\omega}_B t, \\ \ddot{\beta} + \beta &= -2\gamma_0\dot{\beta} - 2b_2\mu\dot{\alpha} - 2b_2\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2b_2\alpha\dot{\beta} - \frac{b_2}{b_1}\alpha^2\dot{\beta} - 2\frac{b_2}{b_1}\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Здесь $\mu = \frac{\Omega}{\omega} \ll 1$ – безразмерная угловая скорость основания;

$\tilde{\omega}_B = \frac{\omega_B}{\omega}$ – безразмерная частота вынуждающей силы. Точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени t^* (здесь и далее знак * опущен).

В резонансном случае, то есть $\tilde{\omega}_B = 1 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll 1$, решение системы (3.2) ищем методом двух масштабов [69]

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0(t, \tau) + \alpha_1(t, \tau), \\ \beta &= \beta_0(t, \tau) + \beta_1(t, \tau),\end{aligned}\quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= A(\tau) \sin(\tilde{\omega}_B t + \varphi(\tau)), \\ \beta_0 &= B(\tau) \sin(\tilde{\omega}_B t + \psi(\tau)).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ – медленное безразмерное время, ε – малый положительный параметр и $|\alpha_1| \ll |\alpha_0|$, $|\beta_1| \ll |\beta_0|$.

Продифференцируем (3.3) с точностью до величин второго порядка малости.

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= \varepsilon \frac{dA(\tau)}{d\tau} \sin(\tilde{\omega}_B t + \varphi(\tau)) + \varepsilon A(\tau) \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \cos(\tilde{\omega}_B t + \varphi(\tau)) + \\
&+ A(\tau) \tilde{\omega}_B \cos(\tilde{\omega}_B t + \varphi(\tau)) + \frac{\partial \alpha_1(t, \tau)}{\partial t}, \\
\dot{\beta} &= \varepsilon \frac{dB(\tau)}{d\tau} \sin(\tilde{\omega}_B t + \psi(\tau)) + \varepsilon B(\tau) \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cos(\tilde{\omega}_B t + \psi(\tau)) + \\
&+ B(\tau) \tilde{\omega}_B \cos(\tilde{\omega}_B t + \psi(\tau)) + \frac{\partial \beta_1(t, \tau)}{\partial t}, \\
\ddot{\alpha} &= 2\varepsilon \frac{dA(\tau)}{d\tau} \cos(\tilde{\omega}_B t + \varphi(\tau)) - A(\tau)(1 + 2\Delta\omega) \sin(\tilde{\omega}_B t + \varphi(\tau)) - \\
&- 2\varepsilon A(\tau) \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \sin(\tilde{\omega}_B t + \varphi(\tau)) + \frac{\partial^2 \alpha_1(t, \tau)}{\partial t^2}, \\
\ddot{\beta} &= 2\varepsilon \frac{dB(\tau)}{d\tau} \cos(\tilde{\omega}_B t + \psi(\tau)) - B(\tau)(1 + 2\Delta\omega) \sin(\tilde{\omega}_B t + \psi(\tau)) - \\
&- 2\varepsilon B(\tau) \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \sin(\tilde{\omega}_B t + \psi(\tau)) + \frac{\partial^2 \beta_1(t, \tau)}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Подставляя (3.3), (3.4) и (3.5) в (3.2) и оставляя только слагаемые порядка ε , имеем следующую систему дифференциальных уравнений для первого приближения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \alpha_1(t, \tau)}{\partial t^2} + \alpha_1 &= \left\{ 2\varepsilon A \frac{d\varphi}{d\tau} + 2\Delta\omega A + \frac{1}{4} AB^2 (2 - \cos 2(\varphi - \psi)) + \right. \\
&+ 2b_1 \mu B \sin(\varphi - \psi) + \check{A} \cos \varphi \left. \right\} \sin(\tilde{\omega}_B t + \varphi) + \left\{ -2\varepsilon \frac{dA}{d\tau} - 2\gamma_0 A + \right. \\
&+ 2b_1 \mu B \cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{4} AB^2 \sin 2(\varphi - \psi) - \check{A} \sin \varphi \left. \right\} \cos(\tilde{\omega}_B t + \varphi) + \\
&+ \frac{1}{2} b_1 B^2 (1 + \cos 2(\tilde{\omega}_B t + \psi)) + \frac{1}{4} AB^2 \sin(3\tilde{\omega}_B t + \varphi + 2\psi), \\
\frac{\partial^2 \beta_1(t, \tau)}{\partial t^2} + \beta_1 &= \left\{ 2\varepsilon B \frac{d\psi}{d\tau} + 2\Delta\omega B + \frac{1}{4} \frac{b_2}{b_1} A^2 B (2 - \cos 2(\varphi - \psi)) + \right. \\
&+ 2b_2 \mu A \sin(\varphi - \psi) \left. \right\} \sin(\tilde{\omega}_B t + \varphi) + \left\{ -2\varepsilon \frac{dB}{d\tau} - 2\gamma_0 B - \right. \\
&- 2b_2 \mu A \cos(\varphi - \psi) - \frac{1}{4} \frac{b_2}{b_1} A^2 B \sin 2(\varphi - \psi) \left. \right\} \cos(\tilde{\omega}_B t + \varphi) - \\
&- b_2 AB \cos(2\tilde{\omega}_B t + \varphi + \psi) - \frac{3}{4} \frac{b_2}{b_1} A^2 B \sin(3\tilde{\omega}_B t + 2\varphi + \psi).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Чтобы избежать появления резонансных слагаемых в уравнениях для первого приближения (3.6), приравняем коэффициенты при $\sin(\tilde{\omega}_B t + \varphi)$,

$\cos(\tilde{\omega}_B t + \varphi)$, $\sin(\tilde{\omega}_B t + \psi)$, $\cos(\tilde{\omega}_B t + \psi)$ к нулю. Тогда получаем систему дифференциальных уравнения для определения амплитуд A , B и фаз φ , ψ :

$$\begin{aligned} A \frac{d\varphi}{dt} &= -\Delta\omega A - \frac{1}{8} AB^2 (2 - \cos 2(\varphi - \psi)) - b_1 \mu B \sin(\varphi - \psi) - \frac{\check{A}}{2} \cos \varphi, \\ \frac{dA}{dt} &= -\gamma_0 A + \frac{1}{8} AB^2 \sin 2(\varphi - \psi) + b_1 \mu B \cos(\varphi - \psi) - \frac{\check{A}}{2} \sin \varphi, \\ B \frac{d\psi}{dt} &= -\Delta\omega B - \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} A^2 B (2 - \cos 2(\varphi - \psi)) - b_2 \mu A \sin(\varphi - \psi), \\ \frac{dB}{dt} &= -\gamma_0 B - \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} A^2 B \sin 2(\varphi - \psi) - b_2 \mu A \cos(\varphi - \psi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

В переменных Ван-дер-Поля p_1 , q_1 , p_2 , q_2 , переход к которым можно осуществить с помощью следующей замены

$$\begin{aligned} p_1(\tau) &= A(\tau) \cos \varphi(\tau), \quad q_1(\tau) = A(\tau) \sin \varphi(\tau), \\ p_2(\tau) &= B(\tau) \cos \psi(\tau), \quad q_2(\tau) = B(\tau) \sin \psi(\tau), \end{aligned} \quad (3.8)$$

система (3.7) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= -\gamma_0 q_1 - \Delta\omega p_1 + b_1 \mu q_2 - \frac{1}{8} (p_2^2 + q_2^2) p_1 + \frac{q_2}{4} (p_2 q_1 - p_1 q_2) - \frac{\check{A}}{2}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\gamma_0 p_1 + \Delta\omega q_1 + b_1 \mu p_2 + \frac{1}{8} (p_2^2 + q_2^2) q_1 + \frac{p_2}{4} (p_2 q_1 - p_1 q_2), \\ \frac{dq_2}{dt} &= -\gamma_0 q_2 - \Delta\omega p_2 - b_2 \mu q_1 - \frac{b_2}{8b_1} (p_1^2 + q_1^2) p_2 - \frac{b_2 q_1}{4b_1} (p_2 q_1 - p_1 q_2), \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\gamma_0 p_2 + \Delta\omega q_2 - b_2 \mu p_1 + \frac{b_2}{8b_1} (p_1^2 + q_1^2) q_2 - \frac{b_2 p_1}{4b_1} (p_2 q_1 - p_1 q_2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

§3.1. Исследование устойчивости стационарных режимов на неподвижном основании

На неподвижном основании ($\mu = 0$) системы (3.7) и (3.9) соответственно примут вид:

$$\begin{aligned}
A \frac{d\varphi}{dt} &= -\Delta\omega A - \frac{1}{8} AB^2 (2 - \cos 2(\varphi - \psi)) - \frac{\check{A}}{2} \cos \varphi, \\
\frac{dA}{dt} &= -\gamma_0 A + \frac{1}{8} AB^2 \sin 2(\varphi - \psi) - \frac{\check{A}}{2} \sin \varphi, \\
B \frac{d\psi}{dt} &= -\Delta\omega B - \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} A^2 B (2 - \cos 2(\varphi - \psi)), \\
\frac{dB}{dt} &= -\gamma_0 B - \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} A^2 B \sin 2(\varphi - \psi).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= -\gamma_0 q_1 - \Delta\omega p_1 - \frac{1}{8} (p_2^2 + q_2^2) p_1 + \frac{q_2}{4} (p_2 q_1 - p_1 q_2) - \frac{\check{A}}{2}, \\
\frac{dp_1}{dt} &= -\gamma_0 p_1 + \Delta\omega q_1 + \frac{1}{8} (p_2^2 + q_2^2) q_1 + \frac{p_2}{4} (p_2 q_1 - p_1 q_2), \\
\frac{dq_2}{dt} &= -\gamma_0 q_2 - \Delta\omega p_2 - \frac{b_2}{8b_1} (p_1^2 + q_1^2) p_2 - \frac{b_2 q_1}{4b_1} (p_2 q_1 - p_1 q_2), \\
\frac{dp_2}{dt} &= -\gamma_0 p_2 + \Delta\omega q_2 + \frac{b_2}{8b_1} (p_1^2 + q_1^2) q_2 - \frac{b_2 p_1}{4b_1} (p_2 q_1 - p_1 q_2).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Определим стационарные значения амплитуд A и B , приравняв правую часть системы уравнений (3.10) к нулю.

$$\begin{aligned}
\Delta\omega A + \frac{1}{8} AB^2 (2 - \cos 2(\varphi - \psi)) + \frac{\check{A}}{2} \cos \varphi &= 0, \\
\gamma_0 A - \frac{1}{8} AB^2 \sin 2(\varphi - \psi) + \frac{\check{A}}{2} \sin \varphi &= 0, \\
\Delta\omega B + \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} A^2 B (2 - \cos 2(\varphi - \psi)) &= 0, \\
\gamma_0 B + \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} A^2 B \sin 2(\varphi - \psi) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Сначала разрешим данную систему относительно $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin 2(\varphi - \psi)$, $\cos 2(\varphi - \psi)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\sin \varphi &= -\frac{2\gamma_0(b_1 B^2 + b_2 A^2)}{\check{A} b_2 A}, & \cos \varphi &= \frac{2\Delta\omega(b_1 B^2 - b_2 A^2)}{\check{A} b_2 A}, \\
\sin 2(\varphi - \psi) &= -\frac{8b_1 \gamma_0}{b_2 A^2}, & \cos 2(\varphi - \psi) &= 2 + \frac{8b_1 \Delta\omega}{b_2 A^2}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, получим алгебраические уравнения для амплитуд

$$\begin{aligned} 3b_2^2 A^4 + 32b_1 b_2 \Delta\omega A^2 + 64b_1^2 (\gamma_0^2 + \Delta\omega^2) &= 0, \\ 4\gamma_0^2 (b_1 B^2 + b_2 A^2)^2 + 4\Delta\omega^2 (b_1 B^2 - b_2 A^2)^2 &= \check{A}^2 b_2^2 A^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Уравнения (3.14) есть биквадратные уравнения относительно искомым амплитуд колебаний. Ниже приведено решение данной системы

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{-8b_1 \left(2\Delta\omega - \sqrt{\Delta\omega^2 - 3\gamma_0^2} \right)}{3b_2}, \\ B_{1,2}^2 &= \frac{b_2 A_1 \left(-2A_1 (\gamma_0^2 - \Delta\omega^2) \pm \sqrt{\check{A}^2 (\gamma_0^2 + \Delta\omega^2) - 16A_1^2 \gamma_0^2 \Delta\omega^2} \right)}{2b_1 (\gamma_0^2 + \Delta\omega^2)}, \\ A_2^2 &= \frac{-8b_1 \left(2\Delta\omega + \sqrt{\Delta\omega^2 - 3\gamma_0^2} \right)}{3b_2}, \\ B_{3,4}^2 &= \frac{b_2 A_2 \left(-2A_2 (\gamma_0^2 - \Delta\omega^2) \pm \sqrt{\check{A}^2 (\gamma_0^2 + \Delta\omega^2) - 16A_2^2 \gamma_0^2 \Delta\omega^2} \right)}{2b_1 (\gamma_0^2 + \Delta\omega^2)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Можно показать, что существует стационарный режим, при котором амплитуда колебаний по углу β равна нулю, и существуют только колебания пластин, то есть

$$A_0^2 = \frac{\check{A}^2}{4(\gamma_0^2 + \Delta\omega^2)}, \quad B_0 = 0. \quad (3.16)$$

Исследуем устойчивость стационарных режимов (3.15), (3.16) по Ляпунову. Обратимся к уравнениям (3.11). Введем вектор малых отклонений от положения равновесия $q_1^{(i)}, p_1^{(i)}, q_2^{(i)}, p_2^{(i)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= (z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4)^T, \\ z_1 &= q_1 - q_1^{(i)}, z_2 = p_1 - p_1^{(i)}, \\ z_3 &= q_2 - q_2^{(i)}, z_4 = p_2 - p_2^{(i)}. \end{aligned}$$

Линеаризованные около положения равновесия уравнения (3.11) имеют вид

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}], \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\gamma_0 + \frac{1}{4} q_2^{(i)} p_2^{(i)}, \\
a_{12} &= -\Delta\omega - \frac{1}{8} (p_2^{(i)})^2 - \frac{3}{8} (q_2^{(i)})^2, \\
a_{13} &= -\frac{3}{4} p_1^{(i)} q_2^{(i)} + \frac{1}{4} q_1^{(i)} p_2^{(i)}, \\
a_{14} &= a_{23} = -\frac{1}{4} p_1^{(i)} p_2^{(i)} + \frac{1}{4} q_1^{(i)} q_2^{(i)}, \\
a_{21} &= \Delta\omega + \frac{1}{8} (q_2^{(i)})^2 + \frac{3}{8} (p_2^{(i)})^2, \\
a_{22} &= -\gamma_0 - \frac{1}{4} q_2^{(i)} p_2^{(i)}, \\
a_{24} &= \frac{3}{4} p_2^{(i)} q_1^{(i)} - \frac{1}{4} q_2^{(i)} p_1^{(i)}, \\
a_{31} &= -\frac{3}{4} \frac{b_2}{b_1} p_2^{(i)} q_1^{(i)} + \frac{1}{4} \frac{b_2}{b_1} q_2^{(i)} p_1^{(i)}, \\
a_{32} &= a_{41} = -\frac{1}{4} \frac{b_2}{b_1} p_1^{(i)} p_2^{(i)} + \frac{1}{4} \frac{b_2}{b_1} q_1^{(i)} q_2^{(i)}, \\
a_{33} &= -\gamma_0 + \frac{1}{4} \frac{b_2}{b_1} q_1^{(i)} p_1^{(i)}, \\
a_{34} &= -\Delta\omega - \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} (p_1^{(i)})^2 - \frac{3}{8} \frac{b_2}{b_1} (q_1^{(i)})^2, \\
a_{42} &= -\frac{1}{4} \frac{b_2}{b_1} p_2^{(i)} q_1^{(i)} + \frac{3}{4} \frac{b_2}{b_1} q_2^{(i)} p_1^{(i)}, \\
a_{43} &= \Delta\omega + \frac{3}{8} \frac{b_2}{b_1} (p_1^{(i)})^2 + \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} (q_1^{(i)})^2, \\
a_{44} &= -\gamma_0 - \frac{1}{4} \frac{b_2}{b_1} q_1^{(i)} p_1^{(i)}.
\end{aligned}$$

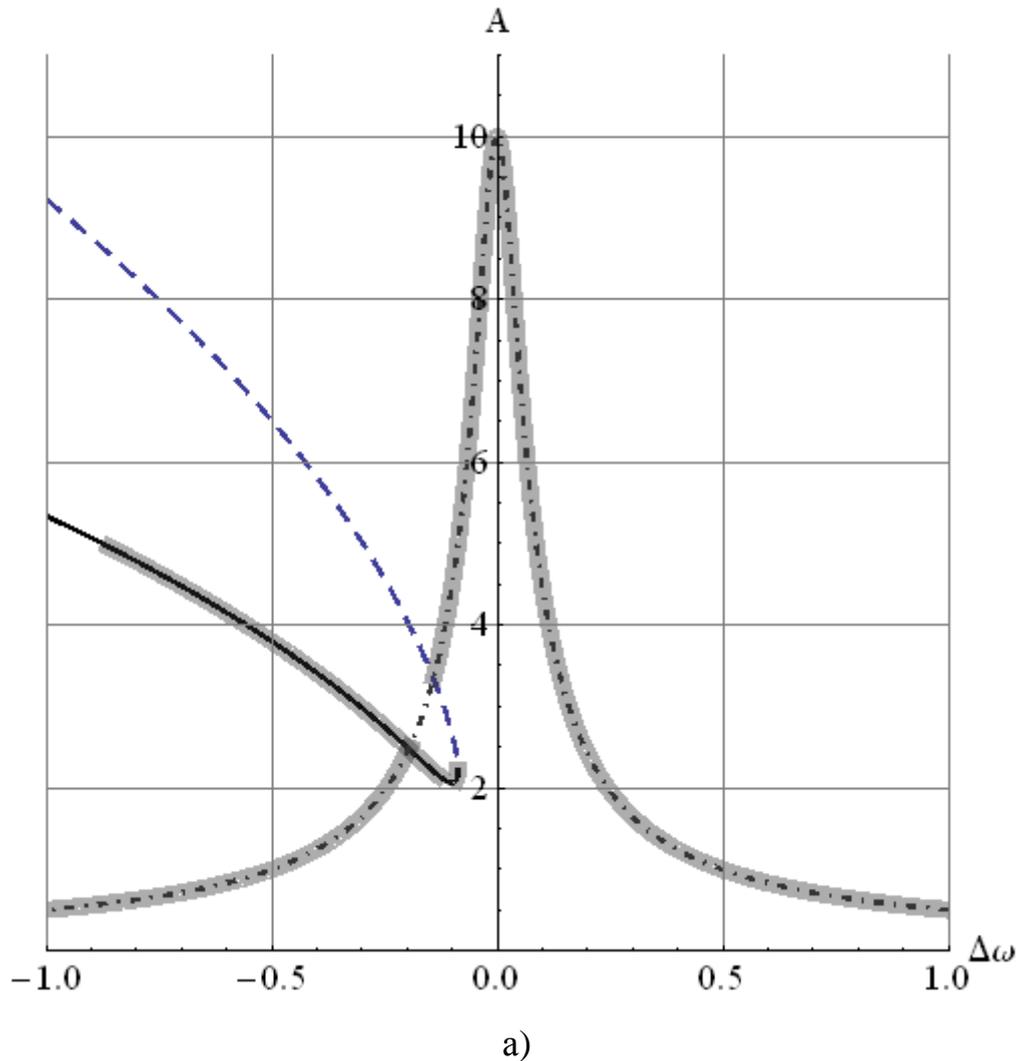
Запишем характеристическое уравнение линеаризованной системы (3.17)

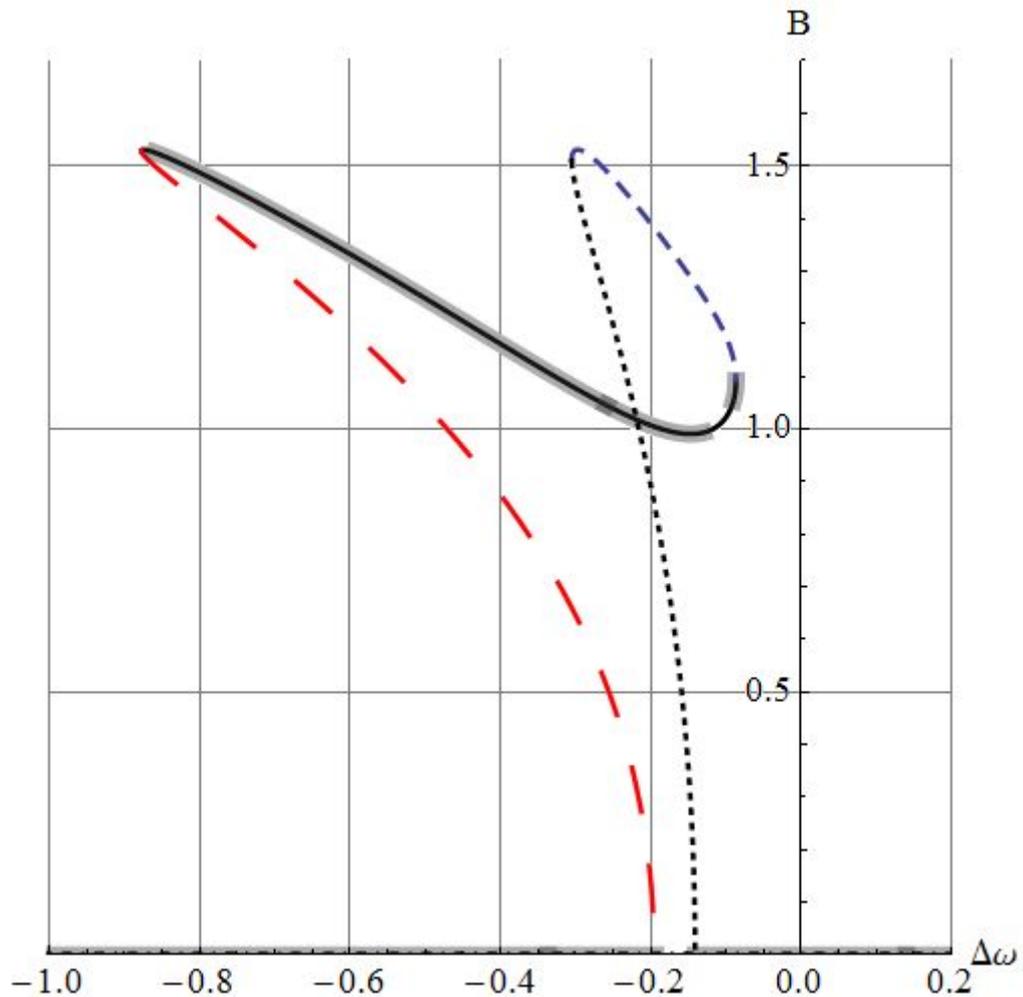
$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0,$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, и проанализируем его корни. Для асимптотической устойчивости стационарных режимов все корни должны лежать в левой полуплоскости.

Для численного исследования рассмотрим гироскоп, параметры которого приведены в примере параграфа 1.1. Также примем $\check{A} = \varepsilon$, $\gamma_0 = 0.05\varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-5}$.

На рисунке 3.1 приведены амплитудно-частотные характеристики $A(\Delta\omega)$ (а) и $B(\Delta\omega)$ (б). На соответствующих графиках штрихпунктирной линией показана зависимость $A_0(\Delta\omega)$, $B_0(\Delta\omega)$ из (3.16), сплошной – $A_2(\Delta\omega)$, $B_3(\Delta\omega)$, пунктирной с большим интервалом – $B_4(\Delta\omega)$, пунктирной с малым интервалом – $A_1(\Delta\omega)$, $B_1(\Delta\omega)$, точками – $B_2(\Delta\omega)$.





б)

Рис. 3.1. Амплитудно-частотные характеристики $A(\Delta\omega)$ (а) и $B(\Delta\omega)$ (б)

Численный анализ приведенных зависимостей (3.15), (3.16) при данных параметрах показал, что при определенных частотах внешнего воздействия существуют несколько асимптотически устойчивых стационарных режимов (на графиках данные режимы выделены темным фоном).

§3.2. Исследование устойчивости стационарных режимов на подвижном основании

На подвижном основании уравнения для определения стационарных значений амплитуд A и B имеют вид (3.18). Для их получения необходимо приравнять правую часть системы уравнений (3.7) к нулю.

$$\begin{aligned}
 \Delta\omega A + \frac{1}{8} AB^2(2 - \cos 2(\varphi - \psi)) + b_1\mu B \sin(\varphi - \psi) + \frac{\check{A}}{2} \cos \varphi &= 0, \\
 -\gamma_0 A + \frac{1}{8} AB^2 \sin 2(\varphi - \psi) + b_1\mu B \cos(\varphi - \psi) - \frac{\check{A}}{2} \sin \varphi &= 0, \\
 \Delta\omega B + \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} A^2 B(2 - \cos 2(\varphi - \psi)) + b_2\mu A \sin(\varphi - \psi) &= 0, \\
 \gamma_0 B + \frac{1}{8} \frac{b_2}{b_1} A^2 B \sin 2(\varphi - \psi) + b_2\mu A \cos(\varphi - \psi) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Если разрешить данную систему относительно $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin 2(\varphi - \psi)$, $\cos 2(\varphi - \psi)$, то получим

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi &= -\frac{2\gamma_0(b_1 B^2 + b_2 A^2)}{\check{A} b_2 A}, \quad \cos \varphi = \frac{2\Delta\omega(b_1 B^2 - b_2 A^2)}{\check{A} b_2 A}, \\
 \sin 2(\varphi - \psi) &= -\frac{4b_1(2\gamma_0 B + 2b_2\mu A \cos(\varphi - \psi))}{b_2 A^2 B}, \\
 \cos 2(\varphi - \psi) &= 2 + \frac{8b_1(\Delta\omega b_1 B + b_2\mu A \sin(\varphi - \psi))}{b_2 A^2 B}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

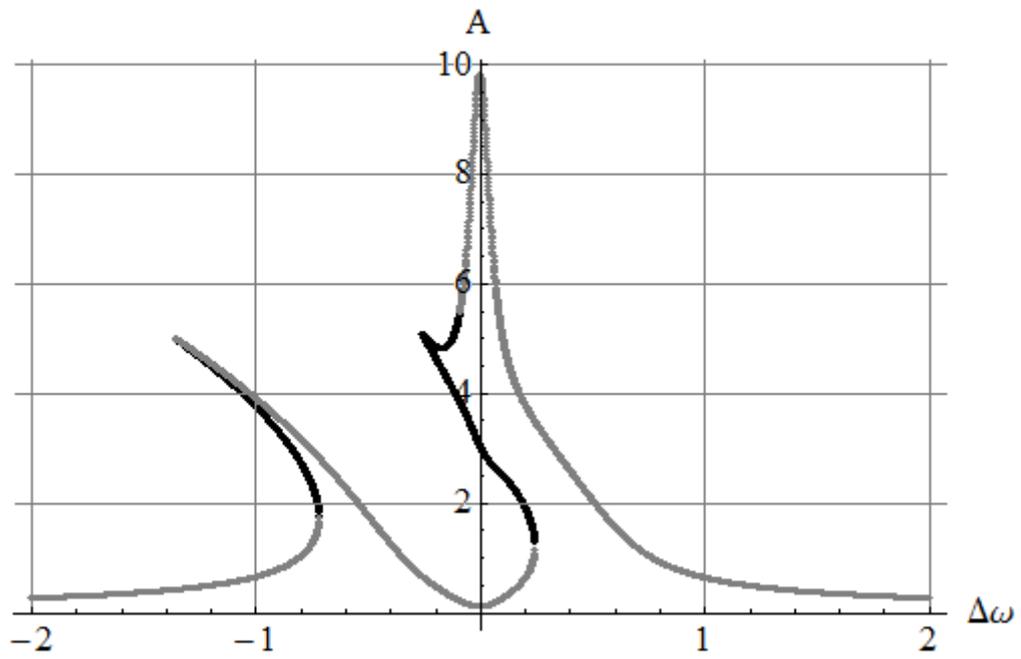
Изучение полученной системы в аналитическом виде затруднительно, поэтому далее приведем численное моделирование стационарных режимов в системе символьных вычислений *Mathematica*.

Для исследования устойчивости стационарных режимов, рассмотрим линеаризованные около положения равновесия уравнения (3.9), записанные в виде (3.17), которые имеют следующие коэффициенты a_{ij}

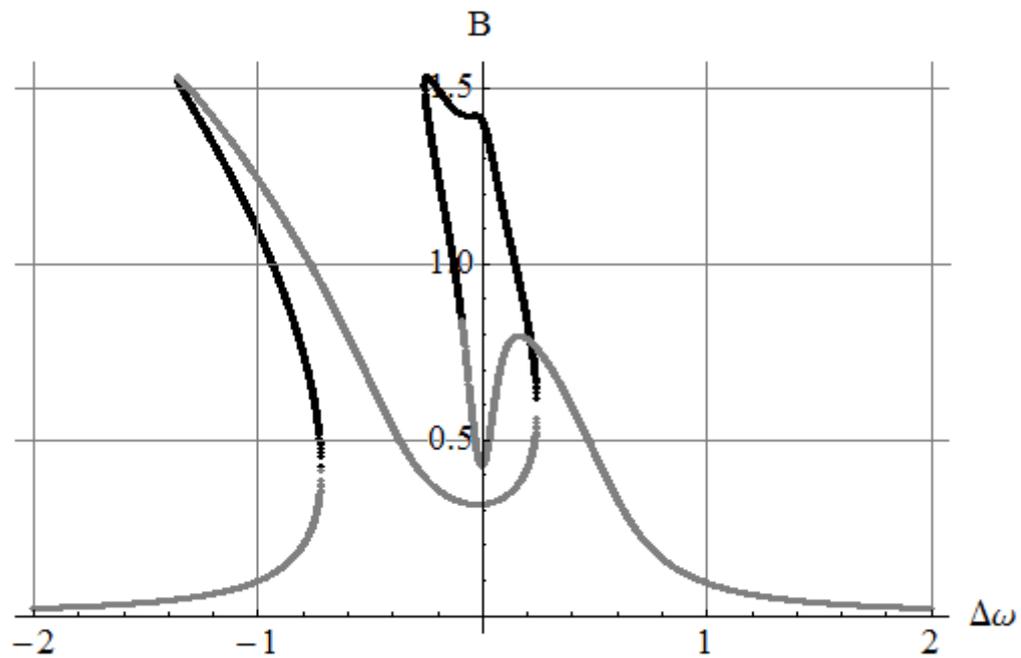
$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\gamma_0 + \frac{1}{4} q_2^{(i)} p_2^{(i)}, \\
a_{12} &= -\Delta\omega - \frac{1}{8} (p_2^{(i)})^2 - \frac{3}{8} (q_2^{(i)})^2, \\
a_{13} &= b_1 \mu - \frac{3}{4} p_1^{(i)} q_2^{(i)} + \frac{1}{4} q_1^{(i)} p_2^{(i)}, \\
a_{14} &= a_{23} = -\frac{1}{4} p_1^{(i)} p_2^{(i)} + \frac{1}{4} q_1^{(i)} q_2^{(i)}, \\
a_{21} &= \Delta\omega + \frac{1}{8} (q_2^{(i)})^2 + \frac{3}{8} (p_2^{(i)})^2, \\
a_{22} &= -\gamma_0 - \frac{1}{4} q_2^{(i)} p_2^{(i)}, \\
a_{24} &= b_1 \mu + \frac{3}{4} p_2^{(i)} q_1^{(i)} - \frac{1}{4} q_2^{(i)} p_1^{(i)}, \\
a_{31} &= -b_2 \mu - \frac{3 b_2}{4 b_1} p_2^{(i)} q_1^{(i)} + \frac{1 b_2}{4 b_1} q_2^{(i)} p_1^{(i)}, \\
a_{32} &= a_{41} = -\frac{1 b_2}{4 b_1} p_1^{(i)} p_2^{(i)} + \frac{1 b_2}{4 b_1} q_1^{(i)} q_2^{(i)}, \\
a_{33} &= -\gamma_0 + \frac{1 b_2}{4 b_1} q_1^{(i)} p_1^{(i)}, \\
a_{34} &= -\Delta\omega - \frac{1 b_2}{8 b_1} (p_1^{(i)})^2 - \frac{3 b_2}{8 b_1} (q_1^{(i)})^2, \\
a_{42} &= -b_2 \mu - \frac{1 b_2}{4 b_1} p_2^{(i)} q_1^{(i)} + \frac{3 b_2}{4 b_1} q_2^{(i)} p_1^{(i)}, \\
a_{43} &= \Delta\omega + \frac{3 b_2}{8 b_1} (p_1^{(i)})^2 + \frac{1 b_2}{8 b_1} (q_1^{(i)})^2, \\
a_{44} &= -\gamma_0 - \frac{1 b_2}{4 b_1} q_1^{(i)} p_1^{(i)}.
\end{aligned}$$

Далее рассмотрим гироскоп, параметры которого приведены в числовом примере параграфа 1.1. Примем $\check{A} = \varepsilon$, $\gamma_0 = 0.05\varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-5}$.

На рисунке 3.2 приведены амплитудно-частотные характеристики $A(\Delta\omega)$ (а) и $B(\Delta\omega)$ (б), построенные при $\mu = \varepsilon$. Это соответствует угловой скорости основания, равной 0.6 рад/с. На рисунке 3.3 приведены амплитудно-частотные характеристики $A(\Delta\omega)$ (а) и $B(\Delta\omega)$ (б), построенные при $\mu = 10\varepsilon$. Это соответствует угловой скорости основания, равной 6 рад/с. Устойчивые стационарные режимы изображены серой линией.

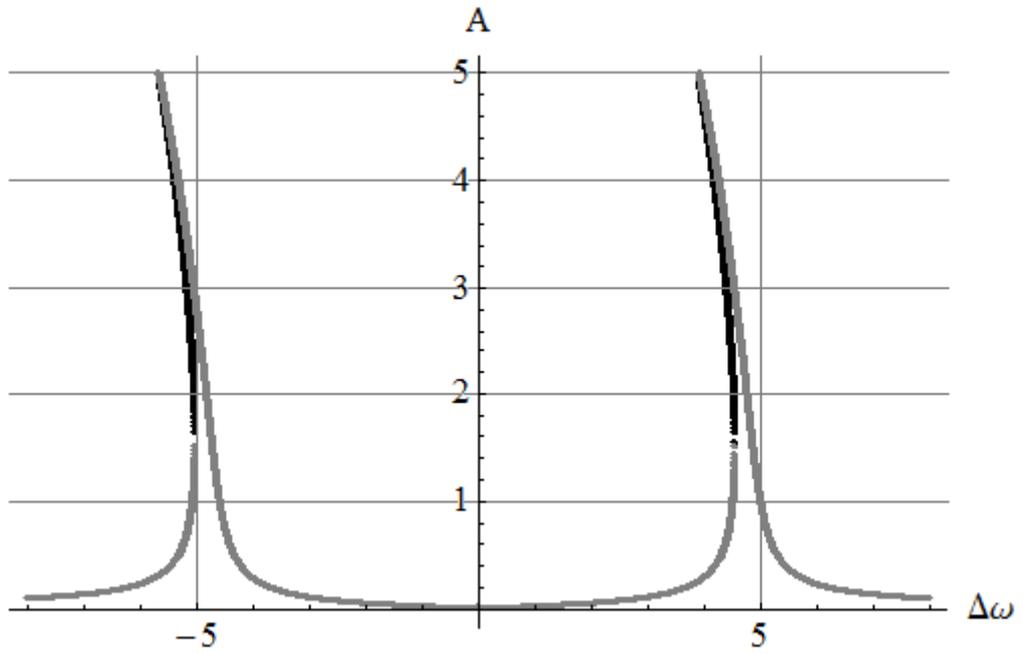


а)

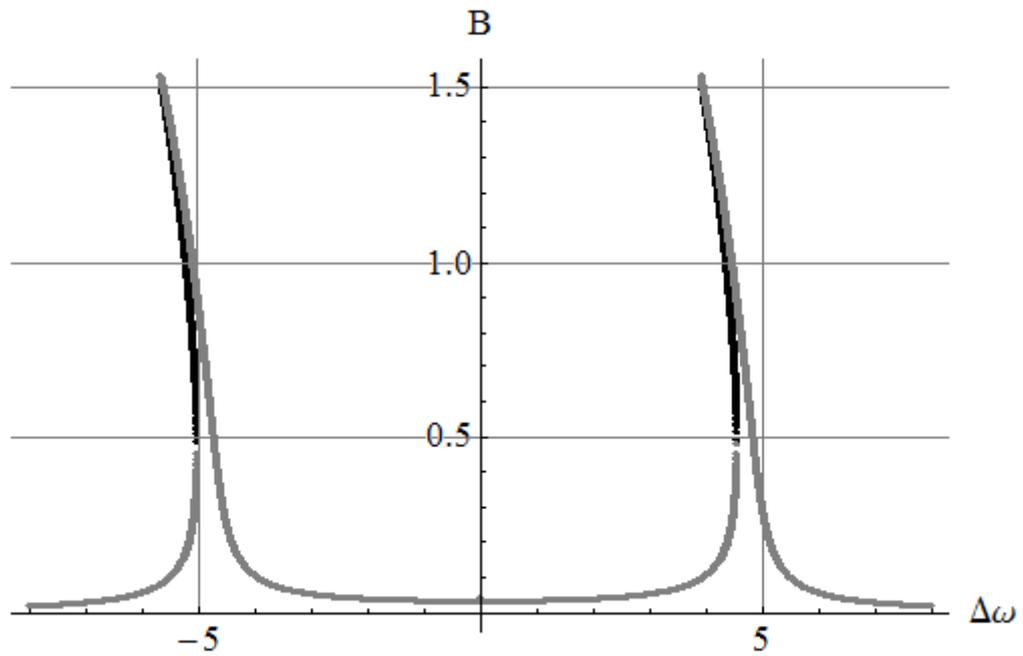


б)

Рис. 3.2. Амплитудно-частотные характеристики $A(\Delta\omega)$ (а) и $B(\Delta\omega)$ (б) при $\mu = \varepsilon$



а)



б)

Рис. 3.3. Амплитудно-частотные характеристики $A(\Delta\omega)$ (а) и $B(\Delta\omega)$ (б) при $\mu = 10\epsilon$

Из приведенных графиков можно сделать вывод, что в системе существует несколько асимптотически устойчивых стационарных режимов, а увеличение угловой скорости основания (μ) приводит к изменению АЧХ

(рис. 3.3), при этом наблюдаются срыв колебаний и скачки амплитуд. Наличие угловой скорости основания (μ) приводит к раздвоению кратной собственной частоты на две близкие частоты, разница между которыми увеличивается с ростом μ .

Данное поведение АЧХ характерно и для других типов вибрационных гироскопов [56], что подтверждает достоверность полученного результата.

Глава 4. Динамика микромеханического гироскопа в нелинейной постановке задачи при произвольной постоянной угловой скорости основания

В четвертой главе исследована динамика микромеханического гироскопа, помещенного на основание, вращающееся с произвольной постоянной угловой скоростью. С использованием формализма Лагранжа получены нелинейные дифференциальные уравнения для обобщенных координат системы. В 4.1 описана методика перехода от исходных переменных к так называемым «нормальным» координатам. В 4.2 приведено точное решение системы дифференциальных уравнений в «нормальных» координатах. В 4.3 получена аналитическая формула для тангенса угла прецессии гироскопа. Приведена оценка точности прибора.

Рассмотрим микромеханический гироскоп с резонатором в виде упругих пластин, где в качестве граничных условий выбрано консольное закрепление (1.9) (см. рис. 1.2). Гироскоп помещен на подвижное основание, вращающееся с произвольной постоянной угловой скоростью Ω . Для вывода уравнений движения обратимся к Лагранжевой функции $L = T - \Pi$. Пренебрежем слагаемыми, которые в нелинейных уравнениях дадут квадратичные слагаемые [11]. Тогда из (1.2), (1.3), (1.9) имеем:

$$L = \frac{1}{2} [J\dot{\beta}^2 + 0.249\rho hab^3\dot{\alpha}^2 + 1.566\rho hab^3\Omega\dot{\beta}\alpha + 0.259\rho hab^3\dot{\beta}^2\alpha^2 - 3.091D\frac{b^3}{a^3}\alpha^2 - c\beta^2]. \quad (4.1)$$

Вынося в (4.1) коэффициент при $\dot{\alpha}^2$ за скобки и введя новую переменную

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{J}{0.249\rho hab^3}}\beta, \quad (4.2)$$

получаем Лагранжеву функцию вида

$$L = \frac{0.249\rho hab^3}{2} \left[\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}^2 + 4\sqrt{b_1 b_2} \Omega \alpha \dot{\alpha}_0 - \omega^2 (\alpha_0^2 + \alpha^2) + \frac{b_2}{b_1} \dot{\alpha}_0^2 \alpha^2 \right]. \quad (4.3)$$

Здесь b_1 , b_2 определяются соотношениями $b_1 = 1.566$,
 $b_2 = 0.392 \frac{\rho hab^3}{J}$.

Выражение (4.3) записано с учетом совмещения частот собственных колебаний, то есть $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega^2$.

Для удобства введем обозначение

$$\alpha \equiv \alpha_1 \quad (4.4)$$

и, как следует из формализма Лагранжа, для составления уравнений можно рассматривать нормализованную Лагранжеву функцию L_*

$$L_* = L_0 + L_n, \quad (4.5)$$

где

$$L_0 = \frac{1}{2} \left[\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}_1^2 + 4\sqrt{b_1 b_2} \Omega \alpha_1 \dot{\alpha}_0 - \omega^2 (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \right], \quad (4.6)$$

$$L_n = \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1} \dot{\alpha}_0^2 \alpha_1^2. \quad (4.7)$$

Дифференцируя (4.5) с учетом (4.6) и (4.7), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\alpha}_0} &= \dot{\alpha}_0 + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \alpha_1 + \frac{b_2}{b_1} \dot{\alpha}_0 \alpha_1^2, \\ \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\alpha}_1} &= \dot{\alpha}_1, \quad \frac{\partial L_*}{\partial \alpha_0} = -\omega^2 \alpha_0, \\ \frac{\partial L_*}{\partial \alpha_1} &= 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \dot{\alpha}_0 - \omega^2 \alpha_1 + \frac{b_2}{b_1} \dot{\alpha}_0^2 \alpha_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Полные производные по времени будут

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\alpha}_0} &= \ddot{\alpha}_0 + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \dot{\alpha}_1 + \frac{b_2}{b_1} \ddot{\alpha}_0 \alpha_1^2 + 2 \frac{b_2}{b_1} \dot{\alpha}_0 \alpha_1 \dot{\alpha}_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\alpha}_1} &= \ddot{\alpha}_1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Далее получаем систему дифференциальных уравнений, в которой учтено внутреннее трение в материале (слагаемые $-2\gamma_0\omega\dot{\alpha}_0$ и $-2\gamma_0\omega\dot{\alpha}_1$)

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_0 + 2\sqrt{b_1b_2}\Omega\dot{\alpha}_1 + \omega^2\alpha_0 &= -2\gamma_0\omega\dot{\alpha}_0 - \frac{b_2}{b_1}\ddot{\alpha}_0\alpha_1^2 - 2\frac{b_2}{b_1}\dot{\alpha}_0\alpha_1\dot{\alpha}_1, \\ \ddot{\alpha}_1 - 2\sqrt{b_1b_2}\Omega\dot{\alpha}_0 + \omega^2\alpha_1 &= -2\gamma_0\omega\dot{\alpha}_1 + \frac{b_2}{b_1}\dot{\alpha}_0^2\alpha_1.\end{aligned}\quad (4.10)$$

§4.1. Приведение системы дифференциальных уравнений к «нормальным» координатам

Для приведения системы (4.10) к «нормальным» координатам, согласно [66], сначала сведем ее к системе первого порядка с помощью введения новых переменных

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\alpha}_0} = \dot{\alpha}_0 + 2\sqrt{b_1b_2}\Omega\alpha_1, \\ \alpha_3 &= \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\alpha}_1} = \dot{\alpha}_1.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Отсюда выражения для производных записываются очевидным образом

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_0 &= \alpha_2 - 2\sqrt{b_1b_2}\Omega\alpha_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= \alpha_3.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Запишем функцию Гамильтона

$$H = \dot{\alpha}_0 \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\alpha}_0} + \dot{\alpha}_1 \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\alpha}_1} - L_0.\quad (4.13)$$

С учетом замены (4.12) имеем

$$H = \frac{1}{2}\{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 4\sqrt{b_1b_2}\Omega\alpha_2\alpha_1 + 4b_1b_2\Omega^2\alpha_1^2 + \omega^2(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)\}.\quad (4.14)$$

Тогда, согласно известным принципам механики, систему уравнений (4.10) можно заменить системой четырех уравнений

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_{i+2}}, \quad \frac{d\alpha_{i+2}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} + \hat{Q}_i, \quad (i = 0, 1) \quad (4.15)$$

где \hat{Q}_0 и \hat{Q}_1 – правые части системы (4.10) с подстановкой замены (4.12)

$$\begin{aligned} \hat{Q}_0 = & -2\gamma_0\omega(\alpha_2 - 2\sqrt{b_1b_2}\Omega\alpha_1) + \frac{b_2}{b_1}(2\sqrt{b_1b_2}\Omega\alpha_3 + \omega^2\alpha_0)\alpha_1^2 - \\ & -2\frac{b_2}{b_1}(\alpha_2 - 2\sqrt{b_1b_2}\Omega\alpha_1)\alpha_1\alpha_3, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\hat{Q}_1 = -2\gamma_0\omega\alpha_3 + \frac{b_2}{b_1}(\alpha_2 - 2\sqrt{b_1b_2}\Omega\alpha_1)^2\alpha_1.$$

Заметим, что в (4.16) учтены равенства $\ddot{\alpha}_0 = -2\sqrt{b_1b_2}\Omega\dot{\alpha}_1 - \omega^2\alpha_0$ и (4.12) с целью сохранения в правой части системы (4.15) слагаемых одного порядка малости.

Имеем

$$\begin{aligned} \omega^2\alpha_0 + \frac{d\alpha_2}{dt} &= \hat{Q}_0, \\ (\omega^2 + 4b_1b_2\Omega^2)\alpha_1 - 2\sqrt{b_1b_2}\Omega\alpha_2 + \frac{d\alpha_3}{dt} &= \hat{Q}_1, \\ -\frac{d\alpha_0}{dt} - 2\sqrt{b_1b_2}\Omega\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ -\frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Составим для невозмущенных уравнений функциональную матрицу

$$\mathbf{f}(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \omega^2 + 4b_1b_2\Omega^2 & -2\sqrt{b_1b_2}\Omega & \lambda \\ -\lambda & -2\sqrt{b_1b_2}\Omega & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Выпишем характеристическое уравнение $\det \mathbf{f}(\lambda) = 0$

$$D_1(\lambda) = \lambda^4 + 2(\omega^2 + 2b_1b_2\Omega^2)\lambda^2 + \omega^4 = 0. \quad (4.19)$$

Обозначая корни уравнения $D_1(\lambda)$

$$\lambda = \pm i\lambda_h, \quad (h = 1, 2)$$

получаем:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sqrt{b_1 b_2 \Omega} - \omega_0, \\ \lambda_2 &= \sqrt{b_1 b_2 \Omega} + \omega_0,\end{aligned}\tag{4.20}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + b_1 b_2 \Omega^2}$.

Переход от исходных переменных $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ к новым переменным u_1, u_2, v_1, v_2 (так называемым «нормальным» координатам) осуществляется по формулам [66]

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= X_1^{(1)} u_1 + Y_1^{(1)} v_1 + X_1^{(2)} u_2 + Y_1^{(2)} v_2, \\ \alpha_1 &= X_2^{(1)} u_1 + Y_2^{(1)} v_1 + X_2^{(2)} u_2 + Y_2^{(2)} v_2, \\ \alpha_2 &= X_3^{(1)} u_1 + Y_3^{(1)} v_1 + X_3^{(2)} u_2 + Y_3^{(2)} v_2, \\ \alpha_3 &= X_4^{(1)} u_1 + Y_4^{(1)} v_1 + X_4^{(2)} u_2 + Y_4^{(2)} v_2.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Здесь $X_k^{(h)}, Y_k^{(h)}$ ($h = 1, 2; k = 1, \dots, 4$) определяются выражениями

$$X_k^{(h)} - iY_k^{(h)} = \frac{F_{kl}(i\lambda_h)}{\sqrt{\lambda_h |\Delta_h(i\lambda_h) F_{ll}(i\lambda_h)|}}\tag{4.22}$$

В формуле (4.22)

$$\Delta_h(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{\lambda^2 + \lambda_h^2}\tag{4.23}$$

и $F_{kl}(i\lambda_h), F_{ll}(i\lambda_h)$ есть элементы присоединенной к $\mathbf{f}(\lambda)$ матрицы $\mathbf{F}(\lambda)$, причем $F_{ll}(i\lambda_h)$ – диагональный элемент, отличный от нуля. Заметим, что $F_{ll}(i\lambda_h)$ и $\Delta_h(\lambda)$ есть величины действительные.

С учетом (4.20) имеем

$$\begin{aligned}\Delta_1(i\lambda_1) &= \lambda_2^2 - \lambda_1^2, \\ \Delta_2(i\lambda_2) &= -\lambda_2^2 + \lambda_1^2.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Выпишем присоединенную матрицу $\mathbf{F}(\lambda)$

$$\mathbf{F}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \omega^2 & -2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \lambda \dots \\ \dots - \lambda^3 - (\omega^2 + 4b_1 b_2 \Omega^2) \lambda & 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \lambda^2 \\ 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \lambda & \lambda^2 + \omega^2 \dots \\ \dots 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \omega^2 & -\lambda^3 - \omega^2 \lambda \\ \lambda^3 + (\omega^2 + 4b_1 b_2 \Omega^2) \lambda & 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \omega^2 \dots \\ \dots \omega^2 \lambda^2 + 4b_1 b_2 \Omega^2 \omega^2 + \omega^4 & -2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \omega^2 \lambda \\ 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \lambda^2 & \lambda^3 + \omega^2 \lambda \dots \\ \dots 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \omega^2 \lambda & (\omega^2 + 4b_1 b_2 \Omega^2) \lambda^2 + \omega^4 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

В качестве элемента F_{ll} возьмем F_{22} , таким образом, $l = 2$. Тогда $F_{22}(i\lambda_1)$ и $F_{22}(i\lambda_2)$ будут равны

$$\begin{aligned} F_{22}(i\lambda_1) &= -\lambda_1^2 + \omega^2 = -2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \lambda_1, \\ F_{22}(i\lambda_2) &= -\lambda_2^2 + \omega^2 = -2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \lambda_2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

На основании (4.20), (4.24) и (4.26) знаменатель правой части формулы (4.22) будет ($h = 1, 2$)

$$\sqrt{\lambda_h |\Delta_h(i\lambda_h) F_{ll}(i\lambda_h)|} \Big|_{l=2} = 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \lambda_h \sqrt{2\omega_0}. \quad (4.27)$$

Согласно (4.22), с учетом (4.20), (4.25) и (4.27) вычисляем

$$\begin{aligned}
X_1^{(1)} &= 0, & Y_1^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}, \\
X_1^{(2)} &= 0, & Y_1^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}, \\
X_2^{(1)} &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}, & Y_2^{(1)} &= 0, \\
X_2^{(2)} &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}, & Y_2^{(2)} &= 0, \\
X_3^{(1)} &= \frac{\omega^2}{\lambda_1\sqrt{2\omega_0}}, & Y_3^{(1)} &= 0, \\
X_3^{(2)} &= \frac{\omega^2}{\lambda_2\sqrt{2\omega_0}}, & Y_3^{(2)} &= 0, \\
X_4^{(1)} &= 0, & Y_4^{(1)} &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\omega_0}}, \\
X_4^{(2)} &= 0, & Y_4^{(2)} &= \frac{\lambda_2}{\sqrt{2\omega_0}}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Из (4.21) следует, что переход от исходных переменных $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ к «нормальным» координатам осуществляется следующим образом

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}[v_1 + v_2], \\
\alpha_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}[u_1 + u_2], \\
\alpha_2 &= \frac{\omega^2}{\sqrt{2\omega_0}}\left[\frac{1}{\lambda_1}u_1 + \frac{1}{\lambda_2}u_2\right], \\
\alpha_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Подстановка (4.29) в систему (4.17) с последующим разрешением ее относительно производных $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2$ дает систему дифференциальных уравнений для «нормальных» координат

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 + \lambda_1 v_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \tilde{Q}_0, \\
\dot{u}_2 + \lambda_2 v_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \tilde{Q}_0, \\
\dot{v}_1 - \lambda_1 u_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \tilde{Q}_1, \\
\dot{v}_2 - \lambda_2 u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \tilde{Q}_1.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Здесь \tilde{Q}_0 и \tilde{Q}_1 определяются, согласно (4.16), (4.29), формулами

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_0 &= \hat{Q}_0|_{(4.29)} = -\frac{\sqrt{2}\gamma_0\omega}{\sqrt{\omega_0}} (\check{a}u_1 + \check{b}u_2) + \\
&+ \frac{b_2}{2b_1\omega_0\sqrt{2\omega_0}} [(3\check{a}\lambda_1 v_1 + (2\check{a} + \check{b})\lambda_2 v_2)u_1^2 + \\
&+ 2((2\check{a} + \check{b})\lambda_1 v_1 + (\check{a} + 2\check{b})\lambda_2 v_2)u_1 u_2 + ((\check{a} + 2\check{b})\lambda_1 v_1 + 3\check{b}\lambda_2 v_2)u_2^2], \tag{4.31} \\
\tilde{Q}_1 &= \hat{Q}_1|_{(4.29)} = -\frac{\sqrt{2}\gamma_0\omega}{\sqrt{\omega_0}} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \\
&- \frac{b_2}{2b_1\omega_0\sqrt{2\omega_0}} [\check{a}^2 u_1^3 + \check{b}^2 u_2^3 + \check{a}(\check{a} + \check{b})u_1^2 u_2 + \check{b}(\check{a} + \check{b})u_1 u_2^2],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\check{a} &= \frac{\omega^2}{\lambda_1} + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega, \\
\check{b} &= \frac{\omega^2}{\lambda_2} + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

§4.2. Построение решения системы уравнений в «нормальных» координатах

Для построения решения системы уравнений (4.30) сведем ее к системе двух уравнений второго порядка относительно переменных u_1 и u_2 . Для

этого продифференцируем первые два уравнения по времени и из последних двух подставим \dot{v}_1 и \dot{v}_2 . Получаем

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 + \lambda_1^2 u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left(\lambda_1 \tilde{Q}_1 - \frac{d\tilde{Q}_0}{dt} \right), \\ \ddot{u}_2 + \lambda_2^2 u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left(-\lambda_2 \tilde{Q}_1 + \frac{d\tilde{Q}_0}{dt} \right).\end{aligned}\quad (4.33)$$

В правой части системы (4.33) производная $\frac{d\tilde{Q}_0}{dt}$ представима в виде

$$\frac{d\tilde{Q}_0}{dt} = \frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial v_2} \frac{dv_2}{dt}. \quad (4.34)$$

Выполним с учетом (4.31) необходимое дифференцирование. Учитывая только слагаемые одного порядка малости, подставим в $\frac{d\tilde{Q}_0}{dt}$ и \tilde{Q}_1 замену

$$\begin{aligned}v_1 &= -\frac{\dot{u}_1}{\lambda_1}, & v_2 &= -\frac{\dot{u}_2}{\lambda_2}, \\ \dot{v}_1 &= \lambda_1 u_1, & \dot{v}_2 &= \lambda_2 u_2.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{Q}_0}{dt} \Big|_{(4.35)} &= -\frac{\sqrt{2}\gamma_0\omega}{\sqrt{\omega_0}} (\check{a}\dot{u}_1 + \check{b}\dot{u}_2) + \\ &+ \frac{b_2}{2b_1\omega_0\sqrt{2\omega_0}} [-2(3\check{a}u_1 + (\check{b} + 2\check{a})u_2)\dot{u}_1^2 - \\ &- 4((\check{b} + 2\check{a})u_1 + (\check{a} + 2\check{b})u_2)\dot{u}_1\dot{u}_2 - 2((\check{a} + 2\check{b})u_1 + 3\check{b}u_2)\dot{u}_2^2 + \\ &+ 3\check{a}\lambda_1^2 u_1^3 + 3\check{b}\lambda_2^2 u_2^3 + (\check{b} + 2\check{a})(2\lambda_1^2 + \lambda_2^2)u_1^2 u_2 + (\check{a} + 2\check{b})(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2)u_1 u_2^2].\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1 \Big|_{(4.35)} &= \frac{\sqrt{2}\gamma_0\omega}{\sqrt{\omega_0}} (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) - \frac{b_2}{2b_1\omega_0\sqrt{2\omega_0}} [\check{a}^2 u_1^3 + \check{b}^2 u_2^3 + \\ &+ \check{a}(\check{a} + \check{b})u_1^2 u_2 + \check{b}(\check{a} + \check{b})u_1 u_2^2].\end{aligned}\quad (4.37)$$

С учетом (4.36) и (4.37) система (4.33) примет вид

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1 + \lambda_1^2 u_1 &= \frac{\gamma_0 \omega}{\omega_0} [(\lambda_1 + \check{a})\dot{u}_1 + (\lambda_1 + \check{b})\dot{u}_2] + \\
&+ \frac{b_2}{4b_1 \omega_0^2} [2(3\check{a}u_1 + (\check{b} + 2\check{a})u_2)\dot{u}_1^2 + \\
&+ 4((\check{b} + 2\check{a})u_1 + (\check{a} + 2\check{b})u_2)\dot{u}_1\dot{u}_2 + 2((\check{a} + 2\check{b})u_1 + 3\check{b}u_2)\dot{u}_2^2 + \\
&+ \check{a}\lambda_1(\check{a} - 3\lambda_1)u_1^3 + \check{b}(\check{b}\lambda_1 - 3\lambda_2^2)u_2^3 + \\
&+ [\check{a}\lambda_1(\check{a} + 2\check{b}) - (\check{b} + 2\check{a})(2\lambda_1^2 + \lambda_2^2)]u_1^2 u_2 + \\
&+ [\check{b}\lambda_1(\check{b} + 2\check{a}) - (\check{a} + 2\check{b})(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2)]u_1 u_2^2, \\
\ddot{u}_2 + \lambda_2^2 u_2 &= -\frac{\gamma_0 \omega}{\omega_0} [(\lambda_2 + \check{a})\dot{u}_1 + (\lambda_2 + \check{b})\dot{u}_2] + \\
&+ \frac{b_2}{4b_1 \omega_0^2} [-2(3\check{a}u_1 + (\check{b} + 2\check{a})u_2)\dot{u}_1^2 - \\
&- 4((\check{b} + 2\check{a})u_1 + (\check{a} + 2\check{b})u_2)\dot{u}_1\dot{u}_2 - \\
&- 2((\check{a} + 2\check{b})u_1 + 3\check{b}u_2)\dot{u}_2^2 + \check{a}(\check{a}\lambda_2 + 3\lambda_1^2)u_1^3 + \\
&+ \check{b}\lambda_2(\check{b} + 3\lambda_2)u_2^3 + [\check{a}\lambda_2(\check{a} + 2\check{b}) + (\check{b} + 2\check{a})(2\lambda_1^2 + \lambda_2^2)]u_1^2 u_2 + \\
&+ [\check{b}\lambda_2(\check{b} + 2\check{a}) + (\check{a} + 2\check{b})(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2)]u_1 u_2^2.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Начальные условия $u_1(0)$, $u_2(0)$ для системы (4.38) найдем, выражая их через начальные условия для исходных переменных $\dot{\alpha}_0(0)$ и $\alpha_1(0)$, согласно (4.11) и (4.29). Из

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} [u_1 + u_2], \\
\alpha_2 &\equiv \dot{\alpha}_0 + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \alpha_1 = \frac{\omega^2}{\sqrt{2\omega_0}} \left[\frac{1}{\lambda_1} u_1 + \frac{1}{\lambda_2} u_2 \right]
\end{aligned} \tag{4.39}$$

при $t = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_1(0) &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} [u_1(0) + u_2(0)], \\
\dot{\alpha}_0(0) + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \alpha_1(0) &= \frac{\omega^2}{\sqrt{2\omega_0}} \left[\frac{1}{\lambda_1} u_1(0) + \frac{1}{\lambda_2} u_2(0) \right].
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Решая данную систему уравнений относительно $u_1(0)$, $u_2(0)$, с учетом (4.20) получаем

$$\begin{aligned} u_1(0) &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left[\left(\frac{\omega^2}{\lambda_2} + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \right) \alpha_1(0) + \dot{\alpha}_0(0) \right], \\ u_2(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left[\left(\frac{\omega^2}{\lambda_1} + 2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \right) \alpha_1(0) + \dot{\alpha}_0(0) \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Начальные условия для производных $\dot{u}_1(0), \dot{u}_2(0)$ можно найти, продифференцировав по времени уравнения (4.39) и подставив затем $t = 0$. При этом с целью сохранения слагаемых одного порядка малости необходимо иметь в виду равенство $\ddot{\alpha}_0 = -2\sqrt{b_1 b_2} \Omega \dot{\alpha}_1 - \omega^2 \alpha_0$. Таким образом, после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(0) &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left[\frac{\omega^2}{\lambda_2} \dot{\alpha}_1(0) - \omega^2 \alpha_0(0) \right], \\ \dot{u}_2(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left[\frac{\omega^2}{\lambda_1} \dot{\alpha}_1(0) - \omega^2 \alpha_0(0) \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Итак, ставится задача: найти решение системы (4.38) с заданными начальными условиями (4.41), (4.42).

Решение системы (4.38) ищем методом двух масштабов [69]

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{(0)}(t, \tau) + u_1^{(1)}(t, \tau), \\ u_2 &= u_2^{(0)}(t, \tau) + u_2^{(1)}(t, \tau), \end{aligned} \quad (4.43)$$

где

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= A(\tau) \sin(\lambda_1 t + \varphi(\tau)), \\ u_2^{(0)} &= B(\tau) \sin(\lambda_2 t + \psi(\tau)). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ – медленное безразмерное время, ε – малый положительный параметр и $|u_1^{(1)}| \ll |u_1^{(0)}|$, $|u_2^{(1)}| \ll |u_2^{(0)}|$.

Продифференцируем (4.43) с точностью до величин второго порядка малости

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= \varepsilon \frac{dA(\tau)}{d\tau} \sin(\lambda_1 t + \varphi(\tau)) + \varepsilon A(\tau) \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \cos(\lambda_1 t + \varphi(\tau)) + \\
&+ A(\tau) \lambda_1 \cos(\lambda_1 t + \varphi(\tau)) + \frac{\partial u_1^{(1)}(t, \tau)}{\partial t}, \\
\dot{u}_2 &= \varepsilon \frac{dB(\tau)}{d\tau} \sin(\lambda_2 t + \psi(\tau)) + \varepsilon B(\tau) \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cos(\lambda_2 t + \psi(\tau)) + \\
&+ B(\tau) \lambda_2 \cos(\lambda_2 t + \psi(\tau)) + \frac{\partial u_2^{(1)}(t, \tau)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1 &= 2\varepsilon \lambda_1 \frac{dA(\tau)}{d\tau} \cos(\lambda_1 t + \varphi(\tau)) - A(\tau) \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 t + \varphi(\tau)) - \\
&- 2\varepsilon A(\tau) \lambda_1 \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \sin(\lambda_1 t + \varphi(\tau)) + \frac{\partial^2 u_1^{(1)}(t, \tau)}{\partial t^2}, \\
\ddot{u}_2 &= 2\varepsilon \lambda_2 \frac{dB(\tau)}{d\tau} \cos(\lambda_2 t + \psi(\tau)) - B(\tau) \lambda_2^2 \sin(\lambda_2 t + \psi(\tau)) - \\
&- 2\varepsilon B(\tau) \lambda_2 \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \sin(\lambda_2 t + \psi(\tau)) + \frac{\partial^2 u_2^{(1)}(t, \tau)}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Подставляя (4.43), (4.44), (4.45), (4.46) в (4.38) и оставляя только слагаемые порядка ε , имеем следующую систему дифференциальных уравнений для первого приближения (в формулах опущены скобки (τ) и (t, τ) , свидетельствующие о том, функцией какого параметра являются указанные выше переменные):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial t^2} + \lambda_1^2 u_1^{(1)} &= \left[\frac{\gamma_0 \omega}{\omega_0} (\lambda_1 + \check{\alpha}) \lambda_1 A - 2\varepsilon \lambda_1 \frac{dA}{d\tau} \right] \cos(\lambda_1 t + \varphi) + \\
&+ \left[\frac{b_2 \lambda_1}{8b_1 \omega_0^2} A \left(\frac{3}{2} \check{\alpha} (\check{\alpha} - \lambda_1) A^2 + (\check{b} (\check{b} + 2\check{\alpha}) - (\check{\alpha} + 2\check{b}) \lambda_1) B^2 \right) + 2\varepsilon A \lambda_1 \frac{d\varphi}{d\tau} \right] \times \\
&\times \sin(\lambda_1 t + \varphi) + \frac{\gamma_0 \omega}{\omega_0} (\lambda_1 + \check{b}) \lambda_2 B \cos(\lambda_2 t + \psi) + \\
&+ \frac{b_2}{8b_1 \omega_0^2} B \left(\frac{3}{2} \check{b} (\check{b} \lambda_1 - \lambda_2^2) B^2 + (\check{\alpha} \lambda_1 (\check{\alpha} + 2\check{b}) - (\check{b} + 2\check{\alpha}) \lambda_2^2) A^2 \right) \times \\
&\times \sin(\lambda_2 t + \psi) + \frac{b_2}{16b_1 \omega_0^2} \left[\check{\alpha} \lambda_1 (9\lambda_1 - \check{\alpha}) A^3 \sin(3\lambda_1 t + 3\varphi) + \right. \\
&+ \check{b} (9\lambda_2^2 - \check{b} \lambda_1) B^3 \sin(3\lambda_2 t + 3\psi) + \\
&+ (-\check{\alpha} \lambda_1 (\check{\alpha} + 2\check{b}) + (\check{b} + 2\check{\alpha}) (2\lambda_1 + \lambda_2)^2) B A^2 \sin((2\lambda_1 + \lambda_2)t + 2\varphi + \psi) + \\
&+ (-\check{\alpha} \lambda_1 (\check{\alpha} + 2\check{b}) + (\check{b} + 2\check{\alpha}) (2\lambda_1 - \lambda_2)^2) B A^2 \sin((-2\lambda_1 + \lambda_2)t - 2\varphi + \psi) + \\
&+ (-\check{b} \lambda_1 (\check{b} + 2\check{\alpha}) + (\check{\alpha} + 2\check{b}) (2\lambda_2 + \lambda_1)^2) A B^2 \sin((\lambda_1 + 2\lambda_2)t + \varphi + 2\psi) + \\
&+ \left. (\check{b} \lambda_1 (\check{b} + 2\check{\alpha}) - (\check{\alpha} + 2\check{b}) (2\lambda_2 - \lambda_1)^2) A B^2 \sin((- \lambda_1 + 2\lambda_2)t - \varphi + 2\psi) \right].
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial t^2} + \lambda_2^2 u_2^{(1)} &= \left[-\frac{\gamma_0 \omega}{\omega_0} (\lambda_2 + \check{b}) \lambda_2 B - 2\varepsilon \lambda_2 \frac{dB}{d\tau} \right] \cos(\lambda_2 t + \psi) + \\
&+ \left[\frac{b_2 \lambda_2}{8b_1 \omega_0^2} B \left(\frac{3}{2} \check{b} (\check{b} + \lambda_2) B^2 + (\check{\alpha} (\check{\alpha} + 2\check{b}) + (\check{b} + 2\check{\alpha}) \lambda_2) A^2 \right) + 2\varepsilon B \lambda_2 \frac{d\psi}{d\tau} \right] \times \\
&\times \sin(\lambda_2 t + \psi) - \frac{\gamma_0 \omega}{\omega_0} (\lambda_2 + \check{\alpha}) \lambda_2 A \cos(\lambda_1 t + \varphi) + \\
&+ \frac{b_2}{8b_1 \omega_0^2} A \left(\frac{3}{2} \check{\alpha} (\check{\alpha} \lambda_2 + \lambda_1^2) A^2 + (\check{b} \lambda_2 (\check{b} + 2\check{\alpha}) + (\check{\alpha} + 2\check{b}) \lambda_1^2) B^2 \right) \times \\
&\times \sin(\lambda_1 t + \varphi) - \frac{b_2}{16b_1 \omega_0^2} \left[\check{\alpha} (9\lambda_1^2 + \check{\alpha} \lambda_2) A^3 \sin(3\lambda_1 t + 3\varphi) + \right. \\
&+ \check{b} \lambda_2 (9\lambda_2 + \check{b}) B^3 \sin(3\lambda_2 t + 3\psi) + \\
&+ (\check{\alpha} \lambda_2 (\check{\alpha} + 2\check{b}) + (\check{b} + 2\check{\alpha}) (2\lambda_1 + \lambda_2)^2) B A^2 \sin((2\lambda_1 + \lambda_2)t + 2\varphi + \psi) + \\
&+ (\check{\alpha} \lambda_2 (\check{\alpha} + 2\check{b}) + (\check{b} + 2\check{\alpha}) (2\lambda_1 - \lambda_2)^2) B A^2 \sin((-2\lambda_1 + \lambda_2)t - 2\varphi + \psi) + \\
&+ (\check{b} \lambda_2 (\check{b} + 2\check{\alpha}) + (\check{\alpha} + 2\check{b}) (2\lambda_2 + \lambda_1)^2) A B^2 \sin((\lambda_1 + 2\lambda_2)t + \varphi + 2\psi) - \\
&+ \left. (\check{b} \lambda_2 (\check{b} + 2\check{\alpha}) + (\check{\alpha} + 2\check{b}) (2\lambda_2 - \lambda_1)^2) A B^2 \sin((- \lambda_1 + 2\lambda_2)t - \varphi + 2\psi) \right].
\end{aligned}$$

Чтобы избежать появления резонансных слагаемых в уравнениях для первого приближения (4.47), приравняем коэффициенты при $\sin(\lambda_1 t + \varphi)$,

$\cos(\lambda_1 t + \varphi)$, $\sin(\lambda_2 t + \psi)$, $\cos(\lambda_2 t + \psi)$ к нулю. Тогда получаем систему дифференциальных уравнений для определения амплитуд A , B и фаз φ , ψ :

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{\gamma_0 \omega}{2\omega_0} (\lambda_1 + \check{\alpha}) A, \\ \frac{dB}{dt} &= -\frac{\gamma_0 \omega}{2\omega_0} (\lambda_2 + \check{\beta}) B.\end{aligned}\tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{b_2}{16b_1\omega_0^2} \left(\frac{3}{2} \check{\alpha}(\check{\alpha} - \lambda_1) A^2 + (\check{\beta}(\check{\beta} + 2\check{\alpha}) - (\check{\alpha} + 2\check{\beta})\lambda_1) B^2 \right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{b_2}{16b_1\omega_0^2} \left(\frac{3}{2} \check{\beta}(\check{\beta} + \lambda_2) B^2 + (\check{\alpha}(\check{\alpha} + 2\check{\beta}) + (\check{\beta} + 2\check{\alpha})\lambda_2) A^2 \right).\end{aligned}\tag{4.49}$$

Для решения систем дифференциальных уравнений (4.48), (4.49) определим начальные условия для амплитуд $A(0)$, $B(0)$ и фаз $\varphi(0)$, $\psi(0)$. Согласно (4.43), (4.44), (4.45) при $t = 0$

$$\begin{aligned}u_1(0) &= A(0) \sin \varphi(0), \\ u_2(0) &= B(0) \sin \psi(0), \\ \dot{u}_1(0) &= A(0) \lambda_1 \cos \varphi(0), \\ \dot{u}_2(0) &= B(0) \lambda_2 \cos \psi(0),\end{aligned}\tag{4.50}$$

где $u_1(0)$, $u_2(0)$, $\dot{u}_1(0)$, $\dot{u}_2(0)$ определяются формулами (4.41), (4.42). Разрешая (4.50) относительно $A(0)$, $B(0)$, $\varphi(0)$, $\psi(0)$, получаем

$$\begin{aligned}A(0) &= \sqrt{u_1^2(0) + \frac{\dot{u}_1^2(0)}{\lambda_1^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi(0) &= \lambda_1 \frac{u_1(0)}{\dot{u}_1(0)}, \\ B(0) &= \sqrt{u_2^2(0) + \frac{\dot{u}_2^2(0)}{\lambda_2^2}}, \\ \operatorname{tg} \psi(0) &= \lambda_2 \frac{u_2(0)}{\dot{u}_2(0)}.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Система (4.48) имеет следующее решение

$$\begin{aligned} A(\tau) &= A(0)e^{\frac{\gamma_0\omega}{2\omega_0}(\lambda_1+\check{\alpha})t}, \\ B(\tau) &= B(0)e^{-\frac{\gamma_0\omega}{2\omega_0}(\lambda_2+\check{\beta})t}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Подставим (4.52) в (4.49):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{b_2}{16b_1\omega_0^2} \left(\frac{3}{2} \check{\alpha}(\check{\alpha} - \lambda_1)A^2(0)e^{\frac{\gamma_0\omega}{\omega_0}(\lambda_1+\check{\alpha})t} + \right. \\ &\quad \left. + (\check{\beta}(\check{\beta} + 2\check{\alpha}) - (\check{\alpha} + 2\check{\beta})\lambda_1)B^2(0)e^{-\frac{\gamma_0\omega}{\omega_0}(\lambda_2+\check{\beta})t} \right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{b_2}{16b_1\omega_0^2} \left(\frac{3}{2} \check{\beta}(\check{\beta} + \lambda_2)B^2(0)e^{-\frac{\gamma_0\omega}{\omega_0}(\lambda_2+\check{\beta})t} + \right. \\ &\quad \left. + (\check{\alpha}(\check{\alpha} + 2\check{\beta}) + (\check{\beta} + 2\check{\alpha})\lambda_2)A^2(0)e^{\frac{\gamma_0\omega}{\omega_0}(\lambda_1+\check{\alpha})t} \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Таким образом, получены два неоднородных дифференциальных уравнения, решение которых имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \varphi(0) - \frac{3b_2\check{\alpha}(\check{\alpha} - \lambda_1)A^2(0)}{32b_1\omega_0\gamma_0\omega(\lambda_1 + \check{\alpha})} e^{\frac{\gamma_0\omega}{\omega_0}(\lambda_1+\check{\alpha})t} + \\ &\quad + \frac{b_2(\check{\beta}(\check{\beta} + 2\check{\alpha}) - (\check{\alpha} + 2\check{\beta})\lambda_1)B^2(0)}{16b_1\omega_0\gamma_0\omega(\lambda_2 + \check{\beta})} e^{-\frac{\gamma_0\omega}{\omega_0}(\lambda_2+\check{\beta})t}, \\ \psi(\tau) &= \psi(0) - \frac{b_2(\check{\alpha}(\check{\alpha} + 2\check{\beta}) + (\check{\beta} + 2\check{\alpha})\lambda_2)A^2(0)}{16b_1\omega_0\gamma_0\omega(\lambda_1 + \check{\alpha})} e^{\frac{\gamma_0\omega}{\omega_0}(\lambda_1+\check{\alpha})t} + \\ &\quad + \frac{3b_2\check{\beta}B^2(0)}{32b_1\omega_0\gamma_0\omega} e^{-\frac{\gamma_0\omega}{\omega_0}(\lambda_2+\check{\beta})t}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Итак, формулы (4.43), (4.44), (4.52), (4.54) дают решение системы (4.38) с точностью до величин порядка ε .

Решение для переменных v_1, v_2 представимо в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1^{(0)} + v_1^{(1)}, \\ v_2 &= v_2^{(0)} + v_2^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

где, согласно (4.35) и учитывая (4.45),

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &= -A \cos(\lambda_1 t + \varphi), \\ v_2^{(0)} &= -B \cos(\lambda_2 t + \psi). \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
v_1^{(1)} &= -\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{dA}{dt} \sin(\lambda_1 t + \varphi) + A \frac{d\varphi}{dt} \cos(\lambda_1 t + \varphi) + \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial t} \right), \\
v_2^{(1)} &= -\frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{dB}{dt} \sin(\lambda_2 t + \psi) + B \frac{d\psi}{dt} \cos(\lambda_2 t + \psi) + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial t} \right).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

§4.3. Уход гироскопа в условиях немалой угловой скорости основания

Перейдем от переменных u_1, u_2, v_1, v_2 к исходным переменным α, β . Из (4.2), (4.4), (4.29)

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} [u_1 + u_2], \\
\beta &= \frac{\sqrt{0.125\rho hab^3}}{\sqrt{J\omega_0}} [v_1 + v_2].
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Подставим в (4.58) решение (4.43), (4.55), принимая во внимание (4.20), (4.44), (4.56):

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left[A \sin \left((\sqrt{b_1 b_2} \Omega - \omega_0) t + \varphi \right) + \right. \\
&\quad \left. + B \sin \left((\sqrt{b_1 b_2} \Omega + \omega_0) t + \psi \right) + u_1^{(1)} + u_2^{(1)} \right], \\
\beta &= \frac{\sqrt{0.125\rho hab^3}}{\sqrt{J\omega_0}} \left[-A \cos \left((\sqrt{b_1 b_2} \Omega - \omega_0) t + \varphi \right) - \right. \\
&\quad \left. - B \cos \left((\sqrt{b_1 b_2} \Omega + \omega_0) t + \psi \right) + v_1^{(1)} + v_2^{(1)} \right].
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Перейдем к переменным Ван-дер-Поля по формулам

$$\begin{aligned}
\alpha &= p_1 \sin \omega_0 t + q_1 \cos \omega_0 t + \alpha^{(1)}, \\
\beta &= p_2 \sin \omega_0 t + q_2 \cos \omega_0 t + \beta^{(1)}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Сравнивая (4.59) и (4.60), получаем выражения для переменных p_1, q_1, p_2, q_2 :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} [A \cos(\sqrt{b_1 b_2} \Omega t + \varphi) - B \cos(\sqrt{b_1 b_2} \Omega t + \psi)], \\
q_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} [A \sin(\sqrt{b_1 b_2} \Omega t + \varphi) + B \sin(\sqrt{b_1 b_2} \Omega t + \psi)], \\
\alpha^{(1)} &= -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} [u_1^{(1)} + u_2^{(1)}], \\
p_2 &= \frac{\sqrt{0.125\rho hab^3}}{\sqrt{J\omega_0}} [-A \sin(\sqrt{b_1 b_2} \Omega t + \varphi) + B \sin(\sqrt{b_1 b_2} \Omega t + \psi)], \\
q_2 &= -\frac{\sqrt{0.125\rho hab^3}}{\sqrt{J\omega_0}} [A \cos(\sqrt{b_1 b_2} \Omega t + \varphi) + B \cos(\sqrt{b_1 b_2} \Omega t + \psi)], \\
\beta^{(1)} &= \frac{\sqrt{0.125\rho hab^3}}{\sqrt{J\omega_0}} [v_1^{(1)} + v_2^{(1)}].
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Тогда, согласно (1.43), с точностью до ε тангенс угла прецессии гироскопа будет

$$\theta = -\frac{1}{2} (2\sqrt{b_1 b_2} \Omega t + \varphi + \psi + \theta_0). \tag{4.62}$$

Таким образом, погрешность из-за нелинейных эффектов носит систематический характер.

Числовой пример. Рассмотрим осцилляторный вибрационный гироскоп (рис. 1.2), параметры которого приведены в примере параграфа 1.1. Примем следующие значения для других параметров и начальных условий: $\Omega = 10$ рад/с, $\gamma_0 = 10^{-5}$ 1/с, $\alpha(0) = 3.1 \cdot 10^{-3}$, $\beta(0) = 3.1 \cdot 10^{-6}$, $\dot{\alpha}(0) = 0$, $\dot{\beta}(0) = 0$. Тогда за 10 минут наблюдений уход гироскопа составляет 0.19° . То есть нелинейность оказывает существенное влияние на прецессию гироскопа.

Заключение

В диссертационной работе изложены научно-обоснованные решения, имеющие существенное значение для проектирования и создания датчиков инерциальной информации на основе осцилляторных вибрационных гироскопов, изготовленных по технологиям МЭМС, а также для повышения уровня технических характеристик систем на их основе.

Основные результаты данной работы:

1. Получена новая математическая модель, описывающая динамику микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин, учитывающая нелинейные эффекты, присущие данной конструкции прибора. Приведены параметры модели при различных граничных условиях для пластин.

2. Установлено, что на неподвижном основании при неточном совмещении частот колебаний по двум обобщенным координатам возникает прецессия волновой картины колебаний гироскопа, что приводит к дополнительным погрешностям в измерении угла поворота основания в режиме свободных колебаний.

3. Показано, что медленное изменение во времени собственной частоты колебаний чувствительных элементов в линейной постановке задачи приводит к медленному изменению амплитуд и фаз колебаний резонатора и не влияет на угол прецессии гироскопа.

4. Установлено, что в случае вынужденных линейных колебаниях микромеханического гироскопа наличие угловой скорости основания приводит к раздвоению кратной собственной частоты на две близкие частоты (два резонансных пика на амплитудно-частотных характеристиках). При этом амплитуда вторичных колебаний оказывается менее чувствительной к раздвоению частот. Показано, что медленное изменение частоты вынуждающей силы приводит к изменению абсолютной величины

максимума амплитуд по сравнению со стационарной кривой. Замечено, что резонансные пики существенно смещены относительно пиков стационарной кривой; до первого максимума и после прохождения второго максимума наблюдаются биения амплитуд.

5. Установлено, что вблизи резонанса при медленно меняющейся частоте вынуждающей силы существует значение частотной расстройки, при которой ошибка измерений угловой скорости основания равна нулю. Определено максимальное значение ошибки вблизи резонанса.

6. Установлено, что нелинейные эффекты оказывают существенное влияние на уход гироскопа. Показано, что их аналитическое представление определяется величиной угловой скорости основания и начальными условиями. Приведены величины абсолютных и относительных погрешностей при различных значениях угловых скоростей. Показано, что минимальное значение относительной погрешности имеет место при больших угловых скоростях основания.

7. Численное моделирование показало, что в случае нелинейных вынужденных колебаний микромеханического гироскопа при определенных частотах внешнего воздействия существуют несколько асимптотически устойчивых стационарных режимов. Увеличение угловой скорости основания, на которое помещен прибор, приводит к изменению вида амплитудно-частотных характеристик, при этом наблюдается явление срыва колебаний и скачков амплитуд.

8. Получено выражение для угла прецессии гироскопа с учетом влияния угловой скорости основания на частоты собственных колебаний нелинейной системы. Установлено, что погрешность из-за нелинейных эффектов носит систематический характер.

Список литературы

1. **Амеличев В.В., Годовицын И.В., Сайкин Д.А.** Перспективная технология изготовления высокочастотных кремниевых микромеханических резонаторов // Нано– и микросистемная техника. 2011. №4 (129). С. 39–45.
2. **Аравин В.В., Вернер В.Д., Сауров А.Н., Мальцев П.П.** МЭМС высокого уровня – возможный путь развития МЭМС в России // Нано– и микросистемная техника. 2011. №6 (131). С. 28–31.
3. **Астахов С.В., Меркурьев И.В., Подалков В.В.** Влияние конечных деформаций резонатора на динамику и точность микромеханического гироскопа камертонного типа // Вестник МЭИ. 2010. №6. С. 148–154.
4. **Астахов С.В., Меркурьев И.В., Подалков В.В.** Погрешности волнового твердотельного гироскопа при учете нелинейных упругих свойств материала резонатора // Вестник МЭИ. 2011. №4. С. 5–11.
5. **Ачильдиев В.М., Дрофа В.Н., Рублев В.М.** Микромеханический вибрационный гироскоп–акселерометр // Микросистемная техника. 2001. №5. С. 8–10.
6. **Банах Л.Я., Никифоров А.Н.** Динамическое гашение колебаний быстроходных роторов плавающими уплотнительными кольцами // Научный вестник МГТУ ГА. 2006. №109. С. 125–128.
7. **Банах Л.Я., Никифоров А.Н.** Воздействие аэрогидродинамических сил на быстровращающиеся роторные системы // Изв. РАН. МТТ. 2006. №5. С. 42–51.
8. **Басараб М.А., Ивойлов М.А., Матвеев В.А.** Оптимизация балансировки волнового твердотельного гироскопа с помощью нейронной сети Хопфилда // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2012. №7. С. 289–298.

9. **Басараб М.А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А.** Математическое моделирование физических процессов в гироскопии. Монография. – М.: Радиотехника, 2005. – 176 с.
10. **Бейтмен Г., Ардейи А.** Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967. – 300 с.
11. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
12. **Бонштедт А.В., Зайцев В.А., Мачехин П.К., Тонков Е.Л.** Оптимизация управления твердотельным волновым гироскопом // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2005. №1. С. 189–214.
13. **Бонштедт А.В., Кузьмин С.В., Мачехин П.К.** Восьмиточечная модель твердотельного волнового гироскопа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2007. №1. С. 135–214.
14. **Боронахин А.М., Иванов П.А., Суров И.Л.** Исследование погрешностей триады микромеханических гироскопов с использованием малогабаритного двухосного стенда // Нано– и микросистемная техника. 2010. №1 (114). С. 35–41.
15. **Боронахин А.М., Иванов П.А., Суров И.Л.** Коррекция влияния линейного ускорения на показания микромеханического гироскопа // Нано– и микросистемная техника. 2010. №7 (120). С. 41–44.
16. **Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л.** Вибрационные гироскопы. – М.: Машиностроение, 1970. – 215 с.
17. **Бугров Д.И.** Одноосный вибрационный гироскоп // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т 11. № 8. С. 149–163.
18. **Вопилкин Е.А.** Возможности микроэлектромеханических систем (пер. с англ. брошюры «Microelectromechanical Systems Opportunities», nn.1-3) // Нано– и микросистемная техника. 2009. №1 (102). С. 47–50.

19. **Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Подалков В.В.** Экспериментальные методы определения параметров вязкоупругой анизотропии резонатора волнового твердотельного гироскопа. // Вестник МЭИ, 2010. №5. С. 13–19.
20. **Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Сбытова Е.С.** Программа на ЭВМ "Идентификация параметров математической модели вибрационного микромеханического гироскопа (iMMG)". а. с. программы для ЭВМ 2011615862 Рос. Федерация / Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Сбытова Е.С.; заявитель и правообладатель: ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ». – № 2011614031; заявл. 02.06.2011; опубл. 27.07.2011.
21. **Гольцова М.М., Юдинцев В.А.** МЭМС: большие рынки малых устройств // Нано– и микросистемная техника. 2008. №4 (93). С. 9–13.
22. **Горнев Е.С., Зайцев Н.А., Равилов М.Ф., Романов И.М., Ранчин С.О., Былинкин Д.А.** Анализ разработанных зарубежных изделий микросистемной техники // Микросистемная техника. 2002. №7. С. 6–11.
23. **Демидов А.Н., Демидова Е.С., Ландау Б.Е., Шарыгин Б.Л.** Двухстепенной поплавковый гироскоп // Патент №2229100. Российская Федерация. 2004 г.
24. **Джашитов В.Э., Панкратов В.М.** Суперминиатюрный микромеханический датчик инерциальной информации в условиях переменных и постоянных механических воздействий // Нано– и микросистемная техника. 2011. №6 (131). С. 39–43.
25. **Джашитов В.Э., Панкратов В.М.** Суперминиатюрный микромеханический датчик инерциальной информации в условиях тепловых воздействий // Нано– и микросистемная техника. 2011. №7 (132). С. 18–23.
26. **Джашитов В.Э., Панкратов В.М., Барулина М.А.** Теоретические основы разработки и создания суперминиатюрного микромеханического многофункционального датчика инерциальной информации // Нано– и микросистемная техника. 2010. №5 (118). С. 46–54.

27. **Джашитов В.Э., Панкратов В.М., Лестев А.М., Попова И.В.** Расчет температурных и технологических погрешностей микромеханических гироскопов // Микросистемная техника. 2001. №3. С. 2–10.
28. **Евстифеев М.И.** Основные этапы разработки отечественных микромеханических гироскопов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2011, июнь. Т. 54. №6. С. 75–80.
29. **Евстифеев М.И., Челпанов И.Б.** Вопросы обеспечения стойкости микромеханических гироскопов при механических воздействиях // Гироскопия и навигация. 2013. №1. С. 119–133.
30. **Ефимов В.В., Калинин В.А., Лихошерст В.В., Матвеев В.В., Распопов В.Я.** Информационно–аналитическое обеспечение начальных этапов проектирования микромеханических гироскопов и акселерометров // Нано– и микросистемная техника. 2012. №1 (138). С. 11–18.
31. **Журавлев В.Ф.** Дрейф несовершенного ВТГ // Изв. РАН. МТТ. 2004. №4. С. 19–23.
32. **Журавлев В.Ф.** Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 2000. №5. С. 186–192.
33. **Журавлев В.Ф.** Исследование нелинейных колебаний составного маятника // Изв. РАН. МТТ. 1996. №3. С. 160–166.
34. **Журавлев В.Ф.** О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 1998. №6. С. 5–11.
35. **Журавлев В.Ф.** О дрейфе волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) на вращающемся основании при управлении квадратурой в режимах «быстрого» и «медленного» времени // Изв. РАН. МТТ. 2003. №3. С. 13–18.
36. **Журавлев В.Ф.** Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. №3. С. 6–19.
37. **Журавлев В.Ф.** Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов. // Изв. РАН. МТТ. 1997. №6. С. 27–35.

38. **Журавлев В.Ф., Климов Д.М.** Волновой твердотельный гироскоп. – М.: Наука, 1985. 125 с.
39. **Журавлев В.Ф., Линч Д.Д.** Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. №5. С. 12–24.
40. **Захаров А.А.** Способ экспериментального определения масштабного коэффициента волнового твердотельного гироскопа с цифровым дифференцированием // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. Вып. №40. <http://www.mai.ru/science/trudy>
41. **Захаров А.А.** Передача сигналов ориентации стоячей волны, преобразуемых емкостными датчиками, в волновом твердотельном гироскопе // Электронный журнал «Труды МАИ». 2012. Вып. №53. <http://www.mai.ru/science/trudy>
42. **Захаров А.А.** Выражение методической ошибки измерения волновым твердотельным гироскопом с дифференцированием // Электронный журнал «Труды МАИ». 2012. Вып. №53. <http://www.mai.ru/science/trudy>
43. **Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П.** Лекции по теории гироскопов. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 248 с.
44. **Каленова Н.В.** Анализ влияния на динамику поверхностного дисбаланса резонатора волнового твердотельного гироскопа в случае угловой вибрации его основания // Приборы. 2009. №12. С. 37–39.
45. **Каленова Н.В.** Определение параметров поверхностного дебаланса резонатора волнового твердотельного гироскопа по его реакции на угловую вибрацию основания // Изв. РАН. МТТ. 2004. №2. С. 3–7.
46. **Лестев А.М., Ефимовская А.В.** О влиянии нелинейных факторов на динамику микромеханического гироскопа с двухмассовым чувствительным элементом. // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2012, май. Т. 55. №5. С. 40–46.

47. **Лестев А.М., Попова И.В., Евстифеев М.И., Пятышев Е.Н., Лурье М.С., Семенов А.А.** Особенности микромеханических гироскопов // Микросистемная техника. 2000. №4. С. 16–18.
48. **Лысенко И.Е.** Теория микромеханических сенсоров угловых скоростей и линейных ускорений *LR*-типа // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. №1. С. 123–128.
49. **Лысенко И.Е., Лысенко А.В.** Интегральные сенсоры угловых скоростей и линейных ускорений *LR*-типа на основе углеродных нанотрубок // Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2012. №4 (часть2). <http://www.ivdon.ru>
50. **Мартыненко Ю.Г.** Тенденции развития современной гироскопии // Соросовский образовательный журнал. 1997. №11. С. 120–127.
51. **Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А., Чуманкин Е.А.** Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов низкой и средней точности // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. №6. С. 251–266.
52. **Матвеев В.В., Распопов В.Я.** Выбор ориентации топологии микрогироскопа на пластине монокристаллического кремния // Нано– и микросистемная техника. 2008. №7 (96). С. 44–47.
53. **Меркурьев И.В., Михайлов Д.В., Сбытова Е.С.** Влияние инструментальных погрешностей изготовления на точность микромеханического гироскопа // Международная конференция "Седьмые Окуневские чтения". 20-24 июня 2011 г., Санкт-Петербург: Материалы докладов / Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2011. 320 с. – С. 110–111.
54. **Меркурьев И.В., Михайлов Д.В., Сбытова Е.С.** Разработка микромеханической интегрированной системы ориентации и навигации автономного транспортного средства // Сборник расширенных тезисов Международной научно-практической конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы», посвященной 300-летию со дня рождения

М.В. Ломоносова и 90-летию со дня рождения акад. Д.Е. Охочимского. Под редакцией профессора Ю.Г. Мартыненко. – М.: Изд-во Московского университета, 2011. – 184 с., ил. – С. 105–106.

55. Меркурьев И.В., Панкратьева Г.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Нелинейные колебания микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // Вестник МЭИ. 2013. №4. С. 13–18.

56. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. – М.: Физматлит, 2009. – 228 с.

57. Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Вынужденные колебания микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: Девятнадцатая Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 4 т. Т.4. М.: Издательский дом МЭИ 2013. – 334 с. – С. 232.

58. Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Динамика микромеханического вибрационного гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // Вестник МЭИ. 2013. №1. С. 5–8.

59. Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Динамика микромеханического гироскопа с монокристаллическим дисковым резонатором // XIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 28-30 мая 2012 г. С. 27–28.

60. Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Исследование вынужденных нелинейных колебаний микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXVII Академических чтений по космонавтике. Москва, январь – февраль 2013 г./ Под общей редакцией А.К. Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2013. – 647 с. – С. 638–639.

61. Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С. Исследование динамики микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: Восемнадцатая Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 4 т. Т.4. М.: Издательский дом МЭИ, 2012. – 478. – С. 324.
62. Меркурьев И.В., Родионова Н.А., Сбытова Е.С. Разработка методики динамических испытаний и алгоритмов компенсации инструментальных погрешностей изготовления кольцевого микромеханического гироскопа // Сборник докладов I всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Инновационные подходы к развитию вооружения, военной специальной техники» (Москва, Академия Генерального Штаба ВС РФ, 2010 г.). С. 197–200.
63. Меркурьев И.В., Родионова Н.А., Сбытова Е.С. Разработка методики стендовых калибровочных испытаний микромеханического гироскопа // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: Шестнадцатая Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 3 т. Т.3. М.: Издательский дом МЭИ, 2010. – 538 с. – С. 332–333.
64. Меркурьев И.В., Сбытова Е.С., Соловьев В.М., Соломатин А.К. Влияние инструментальных погрешностей изготовления на погрешности измерений микромеханического гироскопа – акселерометра // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXV Академических чтений по космонавтике. Москва, январь 2011 г./ Под общей редакцией А.К. Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2011. – 624 с. – С. 143.
65. Меркурьев И.В., Сбытова Е.С., Устинов В.Ф. Влияние неравножесткости упругого подвеса кольцевого резонатора на точность микромеханического гироскопа // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: Семнадцатая Междунар. науч.-техн.

конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 3 т. Т.3. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 468 с. – С. 300–301.

66. **Митропольский Ю.А.** Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Под ред. академика Н.Н. Боголюбова – Издательство Академии Наук Украинской ССР, Киев, 1955. – 284 с.

67. **Митько В.Н., Панич А.А., Мотин Д.В., Панич А.Е., Крамаров Ю.А.** Вычисление чувствительности балочного пьезогироскопа // Нано– и микросистемная техника. 2010. №10 (123). С. 48–50.

68. **Михайлов Д.В., Сбытова Е.С.** Разработка алгоритмического и программного комплекса для стендовых испытаний микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. Материалы XIII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». 2011. №2 (73). С. 78–122.

69. **Найфэ А.Х.** Методы возмущений. Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 456 с.

70. **Неаполитанский А.С., Хромов Б.В.** Микромеханические вибрационные гироскопы. – М.: «Когито-центр», 2002. – 122 с.

71. **Никитин Е.А., Балашова А.Л.** Проектирование дифференцирующих и интегрирующих гироскопов и акселерометров. М.: Изд-во Машиностроение, 1969. 215 с.

72. **Образцов Р.М.** Малогабаритный вибрационный гироскоп с балочным биморфным чувствительным элементом из пьезоэлектрической керамики // Нано– и микросистемная техника. 2008. №10 (99). С. 52–54.

73. **Павловский А.М., Збруцкий А.В.** Динамика роторных вибрационных гироскопов. – К.: Вища школа, 1984. – 191с.

74. **Пельпор Д.С., Матвеев В.А., Арсеньев В.Д.** Динамически настраиваемые гироскопы. – М.: Машиностроение, 1988. – 264 с.

75. **Пельпор Д. С., Осокин Ю.А., Рахтеенко Е. Р.** Гироскопические приборы систем ориентации и стабилизации. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.

76. **Погалов А.И., Тимошенко В.П., Тимошенко С.П., Чаплыгин Ю.А.** Разработка микрогироскопов на основе многослойных структур кремния и стекла // Микросистемная техника. 1999. №1. С. 36–41.
77. **Распопов В.Я.** Микромеханические приборы: учебное пособие. – М.: Машиностроение, 2007. – 400 с.: ил.
78. **Распопов В.Я., Иванов Ю.В., Орлов В.А.** Анализ шумов в микромеханических гироскопах // Нано– и микросистемная техника. 2007. №7 (84). С. 51–54.
79. **Распопов В.Я., Матвеев В.В., Лихошерст В.В., Алалуев Р.В., Иванов Ю.В., Шведов А.П., Серегин С.И.** Информационно-измерительные системы ориентации на микромеханических чувствительных элементах для вращающихся по крену летательных аппаратов // Нано– и микросистемная техника. 2010. №12 (125). С. 26-30.
80. **Раткин Л.С.** Современные технологии производства МЭМС // Нано– и микросистемная техника. 2012. №3 (140). С. 23–24.
81. **Сафронов А., Никифоров В., Шахворостов Д., Калифатиди А., Барыкин В.** Малогабаритные пьезоэлектрические вибрационные гироскопы: особенности и области применения // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 2006. №8. С. 62–64.
82. **Сбытова Е.С., Устинов В.Ф.** Влияние средства сборки на динамику компенсационного маятникового микроакселерометра // РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА: Шестнадцатая Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тез. докл. В 3 т. Т.3. М.: Издательский дом МЭИ, 2010. – 538 с. – С. 333–334.
83. **Северов Л.А., Золотарев С.К., Овчинникова Н.А., Панферов А.И., Пономарев В.К.** Информационные характеристики микромеханических гироскопов на основе кремниевой технологии микроэлектромеханических систем // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2011, август. Т. 54. №8. С. 12–22.

84. Стретт Дж.В.(лорд Релей) Теория звука. – М.: ГИТТЛ, 1955. Т.1 – 484 с.
85. Тимошенко С.П., Зотов С.А., Морозова Е.С., Балычев В.Н., Прокопьев Е.П. Передаточные функции чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа *LL*-типа // Нано– и микросистемная техника. 2007. №9 (86). С. 32–34.
86. Тимошенко С.П., Плеханов В.Е., Анчутин С.А., Зарянкин Н.М., Рубчиц В.Г., Дернов И.С., Шилов В.Ф., Кочурина Е.С. Балансировка резонатора кольцевого микромеханического гироскопа // Нано– и микросистемная техника. 2011. №11 (136). С. 37–44.
87. Трутнев Г.А. Шестнадцатиточечная модель твердотельного волнового гироскопа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. №2. С. 135–146.
88. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. 733 с.
89. Шереметьев А.Г. Волоконный оптический гироскоп. – М.: Радио и связь, 1987. – 152 с.: ил.
90. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) – М.: Издательство «Наука», 1964. – 344 с.
91. Яшин К.Д., Осипович В.С., Божко Т.Г. Разработка МЭМС // Нано– и микросистемная техника. 2008. №1 (90). С. 28–34.
92. Яшин К.Д., Осипович В.С., Божко Т.Г., Логин В.М. Современные разработки МЭМС // Нано– и микросистемная техника. 2008. №5 (94). С. 57–64.
93. **Apostolyuk V.** Theory and Design of Micromechanical Vibratory Gyroscopes // MEMS/NEMS Handbook (Ed: Cornelius T. Leondes). Springer. 2006. Vol. 1. Chapter 6. P. 173–195.
94. **Apostolyuk V., Logeeswaran V.J., Tay F.E.H.** Efficient Design of Micromechanical Gyroscopes // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2002. Vol. 12. P. 948–954.

95. **Ayazi F.** The HARPSS process for fabrication of precision MEMS inertial sensors // *Mechatronics*. 2002. №12. P. 1185–1199.
96. **Ayazi F., Najafi K.** High Aspect-Ratio Combined Poly and Single-Crystal Silicon (HARPSS) MEMS Technology // *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*. Sept. 2000. Vol. 9. P. 288–294.
97. **Ayazi F., Najafi K.** High Aspect-Ratio Polysilicon Micromachining Technology // *Sensors and Actuators A: Physical*. 2000. Vol. 87. P. 46–51.
98. **Cheng P., Zhang Y., Gu W., Hao Zh.** Effect of polarization voltage on the measured quality factor of a multiple-beam tuning-fork gyroscope // *Sensors and Actuators A:Physical*. 2012. Vol. 187. P. 118–126.
99. **Cho J., Gregory J.A., Najafi K.** High-Q, 3kHz single-crystal-silicon cylindrical rate-integrating gyro (CING) // *The 25th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems IEEE MEMS 2012 – Paris, France 29 Jan. - 2 Feb.* 2012. P. 172–175.
100. **Davis W.O., Pisano A.P.** Nonlinear Mechanics of Suspension Beams for a Micromachined Gyroscopes // *Modeling and Simulation of Microsystems*. 2001. P. 270–273.
101. **Descharles M., Guérard J., Kokabi H., Le Traon O.** Closed-loop compensation of the cross-coupling error in a quartz Coriolis Vibrating Gyro // *Sensors and Actuators A:Physical*. 2012. Vol. 181. P. 25–32.
102. **Park S., Horowitz. R.** Discrete Time Adaptive Control for a MEMS Gyroscope // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. Aug. 2005. Vol. 19. No. 6. P. 485–503.
103. **Park S., Horowitz R., Hong S.K., Nam Y.** Trajectory-switching algorithm for a MEMS gyroscope // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. Dec. 2007. Vol. 56. No. 6. P. 2561–2569.

104. **Park S., Horowitz R., Tan C.-W.** Dynamics and control of a MEMS angle measuring gyroscope // *Sensors and Actuators: A. Physical*. 2008. vol. 144. No.1. P. 56–63.
105. **Prihodko I., Zotov S., Trusov A., Shkel A.** Foucault pendulum on a chip: Rate integrating silicon MEMS gyroscope // *Sensors and Actuators A:Physical*. 2012. Vol. 177. P. 67–78.
106. **Shkel A., Liu J., Ikei C., Zeng F.-G.** Feasibility study on a prototype of vestibular implant using MEMS gyroscopes // *IEEE Int. Conf. on Sensors*, Orlando, FL, USA, June 2002. – Paper 55.1. – P. 1526–1531.
107. **Tabrizian R., Casinovi G., Ayazi F.** Temperature-Stable Silicon Oxide (SiO_x) Micromechanical Resonators // *IEEE Transactions on Electron Devices*. Aug. 2013. Vol. 60. No. 8. P. 2656–2663.
108. **Trusov A., Prihodko I., Zotov S., Shkel A.** Low-Dissipation Silicon MEMS Tuning Fork Gyroscopes for Rate and Whole Angle Measurements // *IEEE Sensors Journal*. Nov. 2011. Vol. 11. No. 11. P. 2763–2770.