

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана"

На правах рукописи

Панкратов Владимир Александрович

**Применение фильтрации Калмана в задачах  
определения вращательного движения спутников**

01.02.01 – Теоретическая механика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д. ф.-м. н., проф., чл.-корр. РАН  
Крищенко Александр Петрович

Научный консультант  
д. ф.-м. н., проф.  
Сазонов Виктор Васильевич

Москва – 2014

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Определение вращательного движения спутника по данным бортовых измерений вектора напряженности магнитного поля Земли</b> . . . . .	9
1.1. Введение . . . . .	9
1.2. Математическая модель вращательного движения спутника, используемая при обработке магнитных измерений . . . . .	11
1.3. Реконструкция неуправляемого движения методом наименьших квадратов . . . . .	15
1.4. Примеры реконструкции неуправляемого движения . . . . .	21
1.5. Фильтр Калмана . . . . .	31
1.6. Примеры реконструкции движения с помощью фильтра Калмана . . . . .	40
1.7. Сглаживающий фильтр Калмана . . . . .	50
1.8. Примеры сглаживания . . . . .	53
<b>Глава 2. Определение вращательного движения спутника по данным измерений МПЗ и вектора угловой скорости</b> . . . . .	62
2.1. Введение . . . . .	62
2.2. Измерения угловой скорости на спутнике <i>Фотон М-3</i> . . . . .	63
2.3. Кинематическая модель движения спутника . . . . .	65
2.4. Методика реконструкции вращательного движения спутника, по данным измерений его угловой скорости и вектора напряженности МПЗ . . . . .	66
2.5. Примеры реконструкции неуправляемого движения . . . . .	69
2.6. Фильтр Калмана . . . . .	79
2.7. Примеры реконструкции неуправляемого движения с помощью фильтра Калмана . . . . .	84

<b>Глава 3. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ</b> . . . . .	98
3.1. Введение . . . . .	98
3.2. Методика проверки согласованности данных измерений бортовых магнитометров . . . . .	99
3.3. Примеры проверки согласованности показаний магнитометров .	106
<b>Заключение</b> . . . . .	117
<b>Литература</b> . . . . .	119

## Введение

Диссертация посвящена задачам реконструкции фактического вращательного движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) научного назначения по данным измерений бортовых датчиков. Основное внимание уделяется реконструкции, необходимой для анализа остаточных микроускорений, которые имели место во время проведения космических экспериментов. Ряд экспериментов по материаловедению, физике жидкости, биологии и медицине весьма чувствительны к остаточным микроускорениям на борту ИСЗ. По этой причине информация о микроускорениях важна для интерпретации получаемых результатов. Анализ многих экспериментов такого рода требует знания только квазистатической составляющей микроускорения с частотами менее 0.01 Гц. Эта составляющая наиболее точно определяется расчетным путем по информации о движении спутника, причем наиболее значимо в таких расчетах знание вращательного движения. В диссертации построены математические модели и алгоритмы, которые позволяют построить реконструкцию вращательного движения спутника, как в управляемом, так и неуправляемом режимах полета. Предложенные алгоритмы реализованы в программных комплексах, которые использовались для реконструкции движения летавших спутников.

Поскольку многие космические эксперименты с гравитационно-чувствительными процессами выполняются в течение продолжительного времени, в диссертации предложены методы, позволяющие реконструировать вращательное движение спутника на интервалах времени до 1 сут. Реконструкция строится в виде решений динамических и кинематических уравнений движения твердого тела с помощью различных статистических методик. Основное внимание уделено методикам, основанным на фильтрации Калмана. Рассматриваются также интегральные статистические методики, непосредственно использующие метод наименьших квадратов. Они используются для проверок, кроме того, некоторые их составные части являются общими с калмановскими мето-

диками. Обычно фильтр Калмана используется для определения движения космических аппаратов и других механических систем в реальном времени [1, 2]. В данной работе он используется для апостериорной реконструкции движения, а его главным достоинством считается возможность упрощения применяемых математических моделей объектов.

Данные измерений бортовых датчиков, рассматриваемые в диссертации, это — измерения векторов напряженности магнитного поля Земли (МПЗ) и угловой скорости спутника. Они выполняются с различными шагами по времени, значения которых, как правило, лежат в пределах  $5 \div 15$  с. Это — косвенные измерения, обработка которых в ряде случаев (например, когда имеются измерения только одного вида) требует применения довольно сложных математических моделей, основанных на полных (динамических и кинематических) уравнениях движения. По этой причине в диссертации рассмотрены задачи верификации математических моделей, используемых при обработке косвенных измерений, а также задача проверки показаний бортовых магнитометров.

В **первой главе** рассмотрены задачи реконструкции вращательного движения спутников, совершающих неуправляемый полет. В качестве объекта выбраны спутники *Фотон-12*, *Фотон М-2* и *Фотон М-3*. Мониторинг квазистатистических микроускорений на этих спутниках выполнялся следующим образом. Сначала по измерениям бортовых датчиков, главным образом магнитометров, полученным на некотором отрезке времени, строилась реконструкция вращательного движения спутника на этом отрезке. Затем вдоль найденного движения микроускорение в заданной точке борта рассчитывалось по известной формуле в функции времени. Реконструкция движения строилась методом наименьших квадратов с использованием решений полных уравнений вращательного движения спутника. Отрезки времени, на которых эти уравнения позволяли построить адекватную реконструкцию, имели длину от одного до пяти орбитальных витков. Эта длина возрастала вместе с модулем угловой скорости спутника. Чтобы получить представление о микроускорениях и движении

спутника в течение всего полета, движение реконструировалось на нескольких десятках таких отрезков. В данной работе предлагаются несколько вариантов методики реконструкции движения, пригодной для отрезка произвольной длины. Методика построена на основе фильтра Калмана. Предварительно описан новый вариант методики реконструкции неуправляемого вращательного движения спутника по магнитным измерениям методом наименьших квадратов, который существенно использован при построении фильтра Калмана. Приводятся результаты сравнения обеих методик на данных, полученных в полете *Фотона М-3*.

Во **второй главе** предложены методики реконструкции вращательного движения спутника по данным бортовых измерений векторов угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли (МПЗ). Методики реконструкции основаны на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела и по этой причине, вообще говоря, надежнее методик, использующих полную систему уравнений движения. Последняя наряду с кинематическими включает и динамические уравнения, составление которых требует знания явных выражений для моментов, приложенных к спутнику внешних сил, а такое знание зачастую оказывается недостаточно точными. В ряде случаев с помощью методик, основанных на одних лишь кинематических уравнениях, можно проверить точность динамических уравнений. Иными словами, верифицировать соответствующую модель.

В данной главе описаны два подхода к реконструкции вращательного движения спутника: интегральная статистическая методика, использующая метод наименьших квадратов, и методика, использующая фильтрацию Калмана. В рамках первой методики данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Измерения угловой скорости даны с шагом 12 с на отрезках времени длиной 83 мин. Эти данные сглаживаются тригонометрическими полиномами, которые подставляются в кинематические уравнения для компонент кватерниона, задающего ориентацию связанной

со спутником системы координат относительно гринвичской системы. Полученные таким образом уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения спутника. Измерения МПЗ выбираются внутри отрезка времени, на котором определены эти уравнения. Их решение, доставляющие минимум функционалу метода наименьших квадратов считается реконструкцией фактического движения.

Методика, использующая фильтрацию Калмана, разработана в диссертацию на перспективу. В дальнейшем, полет спутников научного назначения, создаваемых ФГУП "ЦСКБ-Прогресс", будет ориентированным. Ориентация спутников солнечными батареями на Солнце будет поддерживаться двигателями маховиками или гиродинами. В такой ситуации методика мониторинга, основанная на кинематических уравнениях, станет основной. Для нее возникнет ситуация, упомянутая при описании задачи в первой главе.

Фильтрация организована следующим образом. Заданы две временные сетки. На одной из них заданы измерения угловой скорости. Эта сетка равномерная с шагом 12 с. На второй неравномерной сетке заданы измерения МПЗ. Они заданы с шагом  $5 \div 15$  с. Кинематические уравнения интегрируются методом второго порядка точности, специально предназначенным для интегрирования кинематических уравнений в кватернионной форме. Интерполяция решения этих уравнений между узлами сетки выполняется с точностью первого порядка и также в кватернионной форме. Интерполяция используется для вычисления расчетных аналогов данных измерений. Обработка магнитных измерений выполняется по одной из схем первой главы.

В **третьей главе** рассматривается задача проверки согласованности показаний различных магнитометров, измеряющих МПЗ внутри спутника. Магнитные измерения на *Фотонах* начали проводиться не для изучения МПЗ, а с утилитарной целью контроля среды внутри капсулы с научным оборудованием. Для выполнения измерений использовались несколько трехкомпонентных магнитомеров. На *Фотоне-12* их было 5, на *Фотоне М-2* — 6 и на *Фотоне М-3*

— 4. Оказалось, что магнитное поле внутри капсулы довольно мало отличается от МПЗ, и магнитные измерения можно использовать для реконструкции вращательного движения спутника и расчета остаточных микроускорений. Первые расчеты такого рода были выполнены по измерениям, полученным на *Фотоне-12*. На *Фотоне М-2* и на *Фотоне М-3* магнитные измерения проводились уже в основном для мониторинга микрогравитационной обстановки. Перечисленные спутники имели на борту обширные токовые системы, которые вносили заметные возмущения в измерения МПЗ. На каждом из этих трех спутников показания одного или двух магнитометров существенно отличались от расчетных значений МПЗ, показания остальных магнитометров имели значительные постоянные смещения. Чтобы установить, показания каких магнитометров можно использовать для реконструкции вращательного движения спутника, проводились специальные проверки полученных данных. Методика одной из таких проверок описана в диссертации.

Методика проверяет векторную согласованность показаний двух магнитометров в предположении, что оба датчика измеряют одно и то же поле, но вносят в измерения различные постоянные смещения. Если проверка оказывается успешной, то в результате удастся оценить векторную разность этих смещений и матрицу перехода между собственными системами координат магнитометров. Приведены примеры применения этой методики при обработке данных, полученных на *Фотоне М-3*.

Основные результаты диссертации сформулированы в **Заключении**.

## Глава 1

# Определение вращательного движения спутника по данным бортовых измерений вектора напряженности магнитного поля Земли

## 1.1. Введение

Расчет квазистатических микроускорений на последних четырех спутниках серии *Фотон* (1997 — 2007 гг.) проводился по единой схеме, которая совершенствовалась от экспедиции к экспедиции и описана в [3–14]. Существенную часть этой схемы составляет методика реконструкции фактического вращательного движения спутника. В методике удачным образом сочетаются два обстоятельства. Во-первых, она основана на полных уравнениях движения ИСЗ. Во-вторых, квазистатические микроускорения на борту неуправляемого низкоорбитального ИСЗ описываются простой формулой, для расчетов по которой надо знать только движение спутника. В каждый момент времени надо знать его радиус-вектор, ориентацию, скорость, угловую скорость и угловое ускорение. Полные уравнения движения позволяют находить все перечисленные величины. Кроме того, они позволяют реконструировать фактическое движение спутника по косвенным измерениям. Вращательное движение указанных выше *Фотонов* было реконструировано по измерениям бортовых магнитометров [4, 7, 11], датчиков угловой скорости [3, 8, 12] и акселерометров [3, 6, 10, 12, 14].

При расчете микроускорений сначала по измерениям бортовых датчиков, полученным на представляющем интерес отрезке времени, строилась реконструкция реального вращательного движения ИСЗ на этом отрезке. Затем вдоль найденного движения вычислялись 13 скалярных функций, позволявших найти квазистатическое микроускорение в любой точке борта в функции времени. Реконструкция движения строилась методом наименьших квадратов. Отрез-

ки времени, на которых используемые уравнения движения позволяли адекватную реконструкцию, имели длину от одного до пяти орбитальных витков. Эта длина возрастала вместе с модулем угловой скорости ИСЗ. Чтобы определить микроускорения в течение всего полета, движение было реконструировано на нескольких десятках таких отрезков, причем соседние отрезки имели перекрытие 10 мин. Для спутника *Фотон М-3* полученные результаты описаны в [13]. Реконструкция движения этого спутника в течение 11 суток неуправляемого полета была выполнена по измерениям магнитного поля Земли (МПЗ) и представлена 57-ю отрезками. На пересечениях отрезков результаты реконструкции достаточно точно совпали, и с помощью простых вычислительных приемов было обеспечено их гладкое сопряжение.

Несколько менее точную методику реконструкции движения, но пригодную для отрезка произвольной длины можно построить на основе фильтра Калмана [15, 16]. Применение этого фильтра для реконструкции вращательного движения спутника по измерениям МПЗ описано в большом числе работ, в основном, зарубежных авторов. В [17] такая реконструкция была использована для расчета квазистатических микроускорений в управляемом движении спутника. Ниже рассматривается применение фильтра Калмана для реконструкции неуправляемого вращательного движения спутников *Фотон* на продолжительных отрезках времени. Предварительно описан новый вариант методики реконструкции неуправляемого вращательного движения спутника по магнитным измерениям методом наименьших квадратов. Приводятся результаты сравнения обеих методик на данных, полученных в полете *Фотона М-3*.

Результаты первой главы опубликованы в работе [18].

## 1.2. Математическая модель вращательного движения спутника, используемая при обработке магнитных измерений

Для описания движения спутника введем три правые декартовы системы координат.

Система  $Ox_1x_2x_3$  образована главными центральными осями инерции спутника. Точка  $O$  — его центр масс. При отсутствии специальных указаний компоненты векторов и координаты точек указываются в этой системе.

$CY_1Y_2Y_3$  — гринвичская система координат [19]. Точка  $C$  — центр Земли, плоскость  $CY_1Y_2$  совпадает с плоскостью экватора, положительная полуось  $CY_1$  пересекает гринвичский меридиан, ось  $CY_3$  направлена к Северному полюсу.

$CZ_1Z_2Z_3$  — квазиинерциальная система координат. Ось  $CZ_2$  направлена вдоль вектора кинетического момента орбитального движения спутника, ось  $CZ_3$  лежит в плоскости  $CY_1Y_2$  и направлена в восходящий узел орбиты. Плоскость  $CZ_1Z_3$  совпадает с плоскостью оскулирующей орбиты спутника. Абсолютная величина угловой скорости системы  $CZ_1Z_2Z_3$  не превышает нескольких градусов в сутки.

Матрицы перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к системам  $CY_1Y_2Y_3$  и  $CZ_1Z_2Z_3$  обозначим соответственно  $\|g_{ij}\|_{i,j=1}^3$  и  $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$ . Здесь  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  — косинусы углов, которые ось  $Ox_j$  образует с осями  $CY_i$  и  $CZ_i$ . Примем следующие способы параметризации этих матриц.

Положение системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно гринвичской системы координат будем задавать нормированным кватернионом  $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ ,  $Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1$ . Элементы матрицы  $\|g_{ij}\|$  выражаются через ком-

поненты  $\mathbf{Q}$  с помощью формул [20, 21]

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2, & g_{21} &= 2(Q_2Q_1 + Q_0Q_3), \\
 g_{12} &= 2(Q_1Q_2 - Q_0Q_3), & g_{22} &= Q_0^2 + Q_2^2 - Q_1^2 + Q_3^2, \\
 g_{13} &= 2(Q_1Q_3 + Q_0Q_2), & g_{23} &= 2(Q_2Q_3 - Q_0Q_1), \\
 g_{31} &= 2(Q_3Q_1 - Q_0Q_2), \\
 g_{32} &= 2(Q_3Q_2 + Q_0Q_1), \\
 g_{33} &= Q_0^2 + Q_3^2 - Q_1^2 + Q_2^2.
 \end{aligned}$$

Кватернионный вид формул перехода

$$(0, Y_1, Y_2, Y_3) = \mathbf{Q} \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ \mathbf{Q}^{-1}.$$

Положение системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $CZ_1Z_2Z_3$  будем задавать углами  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , которые введем следующим образом. Если совместить точки  $C$  и  $O$ , то система  $CZ_1Z_2Z_3$  может быть переведена в систему  $Ox_1x_2x_3$  тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $\delta + \pi/2$  вокруг оси  $OZ_2$ , 2) на угол  $\beta$  вокруг новой оси  $OZ_3$ , 3) на угол  $\gamma$  вокруг новой оси  $OZ_1$ , совпадающей с осью  $Ox_1$ . Элементы матрицы  $\|b_{ij}\|$  выражаются через эти углы с помощью формул

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & b_{21} &= \sin \beta, \\
 b_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma, & b_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\
 b_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma, & b_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\
 b_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, \\
 b_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma, \\
 b_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma.
 \end{aligned}$$

Углы  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  используются для графического представления вращательного движения спутника — это движение удобно иллюстрировать графиками зависимости указанных углов от времени. Кватернион  $\mathbf{Q}$  входит в фазовый вектор вращательного движения спутника.

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая — его вращательное

движение. Подсистема уравнений движения центра масс записывается в гринвичской системе координат [6, 7]. В ней учитываются нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент спутника считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения образована динамическими уравнениями Эйлера для компонент угловой скорости спутника и кинематическими уравнениями для компонент кватерниона  $\mathbf{Q}$  [20, 21]. В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также учитывается гиростатический момент внутренних устройств спутника (вентиляторов, роторов и т. п.). Подсистема уравнений вращательного движения имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2x_3) + k_1, \\
\dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu x_1x_3) + \frac{\lambda k_2}{1+\lambda\mu}, \\
\dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1x_2) + \lambda k_3, \\
2\dot{Q}_0 &= -Q_1\Omega_1 - Q_2\Omega_2 - Q_3\Omega_3, \\
2\dot{Q}_1 &= Q_0\Omega_1 + Q_2\Omega_3 - Q_3\Omega_2, \\
2\dot{Q}_2 &= Q_0\Omega_2 + Q_3\Omega_1 - Q_1\Omega_3, \\
2\dot{Q}_3 &= Q_0\Omega_3 + Q_1\Omega_2 - Q_2\Omega_1, \\
\lambda &= \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \nu = \frac{3\mu_e}{|\mathbf{r}|^5}, \quad \kappa = E\rho_a\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \\
k_1 &= \kappa(v_2p_3 - v_3p_2) + q_2\omega_3 - q_3\omega_2, \\
k_2 &= \kappa(v_3p_1 - v_1p_3) + q_3\omega_1 - q_1\omega_3, \\
k_3 &= \kappa(v_1p_2 - v_2p_1) + q_1\omega_2 - q_2\omega_1, \\
\Omega_1 &= \omega_1 - \omega_e g_{31}, \quad \Omega_2 = \omega_2 - \omega_e g_{32}, \quad \Omega_3 = \omega_3 - \omega_e g_{33}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $\omega_i$ ,  $x_i$  и  $v_i$  — компоненты вектора абсолютной угловой скорости спутника, геоцентрического радиуса-вектора точки  $O$  и скорости этой точки относительно гринвичской системы координат,  $I_i$  — моменты инерции спутника относительно осей  $Ox_i$ ,  $p_i$  — параметры аэродинамического момента,  $q_i$  — отнесенные к  $I_1$  компоненты гиростатического момента внутренних устройств спутника,  $\omega_e$  — угловая скорость вращения Земли,  $E$  — масштабирующий множитель. При численном интегрировании уравнений (1.1) единицами измерения времени и длины служат  $10^3$  с и  $10^3$  км, единицы измерения других величин:  $[v_i] = \text{км/с}$ ,  $[\omega_i] = [q_i] = 10^{-3} \text{с}^{-1}$ ,  $[p_i] = \text{см/кг}$ ,  $[\rho_a] = \text{кг/м}^3$ ,  $E = 10^{10}$ .

В дальнейшем используется более компактная запись кинематических уравнений [22]

$$2\dot{Q}_0 = - \sum_{i=1}^3 Q_i \Omega_i, \quad 2\dot{Q}_i = Q_0 \Omega_i + \sum_{j,k=1}^3 e_{ijk} Q_j \Omega_k \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

где  $e_{ijk}$  — символ Леви-Чивиты (равен 1, если  $i, j, k$  — четная перестановка чисел 1, 2 и 3, равен  $-1$  для нечетной перестановки и равен 0 в остальных случаях). Переменные  $Q_i$  зависимы — связаны условием нормировки кватерниона  $\mathbf{Q}$ . Если это условие выполнено в начальный момент времени, то в силу свойств уравнений (1.2) оно будет выполняться тождественно. Следовательно, достаточно обеспечить условие нормировки только в начальный момент.

Параметры  $\lambda$  и  $\mu$  в уравнениях (1.1) считаются известными. Для Фотона М-3  $\lambda = 0.255$ ,  $\mu = 0.1$ . Параметры  $p_i$  и  $q_i$  считаются неизменными на каждом интервале обработки данных измерений (см. ниже), но их значения определяются в результате этой обработки наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника, т. е.  $p_i$  и  $q_i$  служат параметрами согласования.

### 1.3. Реконструкция неуправляемого движения методом наименьших квадратов

Методику реконструкции неуправляемого вращательного движения низкоорбитального КА по магнитным измерениям опишем на примере *Фотона М-3*. На борту этого спутника находились четыре трехкомпонентных магнитометра, входящих в состав аппаратуры DIMAC [11]. Аппаратура предназначалась для измерения микроускорений на борту спутника. Основными ее датчиками были акселерометры. Магнитные измерения проводились для реконструкции вращательного движения спутника с целью проверки показаний низкочастотного акселерометров расчетным путем [9, 10].

Магнитные измерения выполнялись непрерывно в течение всего полета. Измерения разных магнитометров оцифровывались на единые моменты времени, промежутки между которыми варьируются в пределах от 1 до 12 с, а в среднем составляют около 5 с. Для реконструкции движения брались сплошные ряды этих измерений, охватывающие интервалы времени длиной от 2 до 8 ч. Выбранные данные представляли собой совокупность чисел

$$t_n^H, h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)} \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad (1.3)$$

где  $h_i^{(n)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) измеренные значения компонент векторана напряженности магнитного поля в момент  $t_n^H$ ,  $t_0^H < t_1^H < \dots < t_N^H$ . Полагаем, что эти компоненты с точностью до постоянных смещений, а также малых ошибок измерений и координатных преобразований совпадают с компонентами напряженности МПЗ в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Следуя методу наименьших квадратов, аппроксимацией фактического движения спутника на отрезке  $t_0^H \leq t \leq t_N^H$  будем считать решение системы (1.1),

доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n=0}^N \left[ h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n^H) \right]^2 - (N+1)\Delta_{Hi}^2 \right\}, \quad (1.4)$$

$$\Delta_{Hi} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \left[ h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n^H) \right], \quad \hat{h}_i(t) = \sum_{j=1}^3 H_j(t)g_{ji}.$$

Здесь  $\Delta_{Hi}$  — оценки постоянных смещений в измерениях,  $H_i(t)$  — расчетные значения компонент напряженности МПЗ в гринвичской системе координат в момент времени  $t$ . Функции  $H_i(t)$  строятся вдоль известной орбиты спутника с использованием аналитической модели МПЗ IGRF2005.

Функционал (1.4) получен в результате преобразования стандартного функционала метода наименьших квадратов, возникающего при уравнивании соотношений  $h_i^{(n)} \approx \hat{h}_i(t_n^H) + \Delta_{Hi}$  ( $i = 1, 2, 3; n = 0, 1, \dots, N$ ) (ср. [4, 7]). Минимизация  $\Phi$  проводится по начальным условиям решения  $\omega_i(t_0^H)$ ,  $Q_j(t_0^H)$  и параметрам математической модели  $p_i$ ,  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, 3$ ). При этом учитывается условие нормировки

$$Q_0^2(t_0^H) + Q_1^2(t_0^H) + Q_2^2(t_0^H) + Q_3^2(t_0^H) = 1. \quad (1.5)$$

Для простоты письма все уточняемые величины объединим в один вектор  $x \in \mathbb{R}^{13}$ . В принятых обозначениях  $\Phi = \Phi(x)$ ,  $x_* = \operatorname{argmin} \Phi(x)$  — искомая оценка вектора  $x$ . Минимизация  $\Phi(x)$  выполнялась в несколько этапов разными методами. Ее описание начнем с заключительного этапа, на котором применялся метод Гаусса — Ньютона [23].

На каждой итерации этого метода поправки  $\Delta Q_j(t_0^H)$  к имеющимся значения  $Q_j(t_0^H)$  ищутся в виде (ср. уравнения (1.2))

$$\Delta Q_0(t_0^H) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 Q_i(t_0^H)\theta_i,$$

$$\Delta Q_i(t_0^H) = \frac{1}{2} \left[ Q_0(t_0^H)\theta_i + \sum_{j,k=1}^3 e_{ijk} Q_j(t_0^H)\theta_k \right] \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.6)$$

Параметры  $\theta_i$  суть компоненты вектора бесконечно малого поворота [24], задающего изменение ориентации спутника в окрестности положения  $\mathbf{Q}(t_0^H)$ . Эти

параметры и поправки  $\Delta\omega_i(t_0^H)$ ,  $\Delta p_i$ ,  $\Delta q_i$  находятся из системы нормальных уравнений с матрицей  $\|C_{ij}\|_{i,j=1}^{12}$  и правой частью  $\|D_i\|_{i=1}^{12}$ :

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 A_{ki}(t_n^H) A_{kj}(t_n^H) - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^3 B_{ki} B_{kj}, \\ D_i &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 h_k^{(n)} A_{ki}(t_n^H) - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^3 \Delta_{Hk} B_{ki}, \\ A_{ki}(t) &= \sum_{l,m=1}^3 e_{klm} \hat{h}_l(t) \frac{\partial \varphi_m(t)}{\partial z_i}, \quad B_{ki} = \sum_{n=0}^N A_{ki}(t_n^H) \\ &\quad (k = 1, 2, 3; i, j = 1, 2, \dots, 12). \end{aligned}$$

Здесь  $z_1, z_2, \dots, z_{12}$  — обозначения величин  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega_1(t_0^H), \omega_2(t_0^H), \omega_3(t_0^H), p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$  в указанном порядке,  $\partial \varphi_m(t)/\partial z_i$  — псевдопроизводные, служащие для представления истинных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_0(t)}{\partial z_j} &= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 Q_l(t) \frac{\partial \varphi_l(t)}{\partial z_j}, \\ \frac{\partial Q_i(t)}{\partial z_j} &= \frac{1}{2} \left[ Q_0(t) \frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial z_j} + \sum_{l,m=1}^3 e_{ilm} Q_l(t) \frac{\partial \varphi_m(t)}{\partial z_j} \right], \\ \frac{\partial g_{ik}(t)}{\partial z_j} &= \sum_{l,m=1}^3 e_{klm} g_{il}(t) \frac{\partial \varphi_m(t)}{\partial z_j} \quad (i, k = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 12). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Псевдопроизводная — это не частная производная некоторой функции по какому-то параметру. Запись ее в виде частной производной используется лишь для удобства. Такую запись следует воспринимать как единый символ с двумя индексами. В кинематике твердого тела угловая скорость служит для расчета производных по времени, а псевдопроизводная — для расчета производных по параметру (ср. выписанные выражения для  $\partial Q_i/\partial z_j$  с уравнениями (1.2) и формулами (1.6)). В обозначении  $\partial \varphi_m/\partial z_j$  индекс  $m$  указывает векторную компоненту, индекс  $j$  — номер параметра, по которому выполняется дифференцирование. Дифференцируя уравнения (1.7) и уравнения вращательного движения

твердого тела, записанные в кватернионной форме, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z_j} &= \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \circ \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z_j} \circ \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial z_j}. \end{aligned}$$

С учетом уравнений вращательного движения твердого тела, записанных в кватернионной форме, последнее равенство примет вид

$$\mathbf{Q} \circ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial z_j} \right) = 0.$$

Это равенство обеспечивается при равенстве нулю одного из сомножителей. Из равенства  $\|\mathbf{Q}\| \equiv 1$ , следует запись системы дифференциальных уравнений для определения значений псевдопроизводных в координатном виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} = \sum_{k,l=1}^3 e_{ikl} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_j} \omega_l + \frac{\partial \omega_i}{\partial z_j} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 6). \quad (1.8)$$

Эти уравнения интегрировались совместно с уравнениями (1.1) и уравнениями в вариациях для  $\partial \omega_i / \partial z_j$ . Последние получаются дифференцированием по  $z_j$  первых трех уравнений (1.1), причем производные  $\partial g_{ik} / \partial z_j$  выражаются через  $\partial \varphi_i / \partial z_j$  с помощью приведенных выше формул. Ненулевые начальные условия для  $\partial \varphi_i / \partial z_j$  и  $\partial \omega_i / \partial z_j$  имеют вид

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_i} \right|_{t=t_0^H} = \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial \omega_i(t_0^H)} \right|_{t=t_0^H} = 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Прибавление найденных поправок  $\Delta Q_j(t_0^H)$  к имеющимся значениям  $Q_j(t_0^H)$  нарушает условие (1.5), поэтому новый кватернион ориентации нормируется. Внешенные нормировкой изменения уточненных компонент кватерниона являются величинами второго порядка относительно  $\Delta Q_j(t_0^H)$ .

Интегрирование уравнений (1.1) и указанных выше уравнений в вариациях выполняется одним из методов Дормана–Принса 8-го порядка. Это — метод типа Рунге–Кутты, реализованный в стандартной процедуре DOP853 [25]. Метод и программа позволяют строить полином, интерполирующий вычисляемое

решение внутри шага интегрирования. Этот полином используется для вычисления функционала (1.4), матрицы  $\| C_{ij} \|$  и правой части  $\| D_i \|$  системы нормальных уравнений. При этом интегрирование уравнений движения и уравнений в вариациях выполняется с оптимальным достаточно большим шагом, величина которого выбирается по критерию локальной точности интегрирования. Наличие интерполяционного полинома и возросшее быстродействие персональных компьютеров позволили осуществлять совместную обработку всех собранных данных измерений, не проводя их предварительную обработку. Это — одно из отличий описываемой методики от методик, использованных в [4, 7, 11]. Другое отличие заключается в использовании компонент кватерниона  $\mathbf{Q}$  в качестве кинематических переменных уравнений движения спутника и в способе уточнения начальных условий этих переменных при реализации метода Гаусса–Ньютона. В [4, 7, 11] кинематическими переменными служили величины  $g_{1i}$ ,  $g_{2i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), начальные условия которых параметризовались тремя углами точно так же, как величины  $b_{1i}$ ,  $b_{2i}$  параметризуются углами  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ .

Вернемся к описанию методики. Точность аппроксимации измерений и оценки  $x_*$  будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями [26]. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в измерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в измерениях одной и той же векторной компоненты напряженности МПЗ равны [27]. Такой подход выбран из соображений удобства и вида функционала (1.4). При сделанных допущениях  $x_*$  — случайный вектор, который имеет приблизительно нормальное распределение со средним значением, равным истинному значению  $x$ . Вследствие условия (1.5) это распределение — несобственное, т. е. имеет вырожденную ковариационную матрицу. Чтобы избежать вырождения и сделать характеристику ошибок более наглядной, ошибки  $\Delta Q_j(t_0^H)$  в задании компонент  $Q_j(t_0^H)$  вектора  $x_*$  представим в виде (1.6), где теперь  $\theta_i$  образуют случайный вектор бесконечно малого поворота. Величины  $\theta_i$  имеют нулевые математические ожидания и вместе с

ошибками остальных компонент  $x_*$  описываются ковариационной матрицей

$$K_x = \sigma^2 C^{-1} = \| K_{ij} \|_{i,j=1}^{12}, \quad \sigma^2 = \frac{\Phi(x_*)}{3N - 12}.$$

Здесь  $\sigma^2$  оценка дисперсии ошибок в измерениях,  $C$  — матрица  $\| C_{ij} \|$ , вычисленная в точке  $x_*$ . Точность аппроксимации измерений будем характеризовать стандартным отклонением  $\sigma$ , точность оценки  $x_*$  — стандартными отклонениями  $\sqrt{K_{ii}}$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ). Стандартные отклонения величин  $\theta_i$ ,  $\omega_i(t_0)$ ,  $p_i$  и  $q_i$  будем обозначать  $\sigma_{\theta_i}$ ,  $\sigma_{\omega_i}$ ,  $\sigma_{p_i}$ ,  $\sigma_{q_i}$ .

Чтобы обеспечить надежную сходимость описанного процесса, надо предусмотреть возможность его регуляризации и иметь достаточно точное начальное приближение точки  $x_*$ . Регуляризация сводилась к предварительному использованию метода Левенберга–Марквардта [23] перед переходом к методу Гаусса–Ньютона [28]. В большинстве случаев метод Левенберга–Марквардта плавно трансформировался в метод Гаусса–Ньютона, но иногда после окончания его работы метод Гаусса–Ньютона расходился. В таком случае в качестве  $x_*$  принимался результат, полученный методом Левенберга–Марквардта. Результат полученный таким способом обеспечивал требуемую точность реконструкции движения спутника.

Поиск начального приближения точки  $x_*$  выполнялся так. Перед минимизацией функционала (1.4) по 12 параметрам, выполнялась его минимизация по 9 параметрам при  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ . Она выполнялась сначала методом случайного поиска, затем методом Левенберга–Марквардта и, наконец, методом Гаусса–Ньютона. В ряде случаев даже применение такой редуцированной модели движения — системы (1.1) при  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$  — обеспечивало достаточно высокую точность реконструкции движения спутника.

Начальная точка для минимизации функционала (1.4) по 9 параметрам находилась посредством минимизации так называемого укороченного функционала, который задавался теми же формулами (1.4), но при уменьшенном в несколько раз значении  $N$  и специальном выборе начальных условий движения и параметров уравнений (1.1). Сокращенный отрезок данных имел длину

15 – 30 мин. В уравнениях движения принималось  $p_i = q_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Начальные условия для кватерниона задавались в виде

$$Q_0(t_0^H) = \sqrt{\frac{S}{2}} \cos \phi,$$

$$Q_i(t_0^H) = \frac{1}{\sqrt{2S}} \left[ (a_i + b_i) \sin \phi + \left( \sum_{k,j=1}^3 e_{ijk} a_k b_j \right) \cos \phi \right],$$

$$a_i = h_i^{(0)} \left( \sum_{j=1}^3 [h_j^{(0)}]^2 \right)^{-1/2}, \quad b_i = H_i(t_0^H) \left( \sum_{j=1}^3 H_j^2(t_0^H) \right)^{-1/2},$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

$$S = 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Здесь  $\phi$  – параметр. Начальные условия для псевдопроизводных по параметру  $\phi$  имеют вид

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \phi} \right|_{t=t_0} = a_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Выписанные соотношения получены при следующих предположениях. Орт  $\mathbf{e}$ , имеющий в системах координат  $Ox_1x_2x_3$  и  $CY_1Y_2Y_3$  компоненты  $a_i$  и  $b_i$  соответственно, в этих системах фиксирован. В системе  $CY_1Y_2Y_3$  он направлен по расчетному вектору напряженности МПЗ, а в системе  $Ox_1x_2x_3$  – по измеренному вектору. Поворот спутника вокруг этого орта может быть произвольным и задается углом  $\phi$ . Укороченный функционал рассматривался в функции четырех параметров:  $\phi$  и  $\omega_i(t_0^H)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Для его минимизации последовательно применяются случайный перебор в параллелепипеде  $\{0 \leq \phi \leq 2\pi, \omega'_i \leq \omega_i(t_0^H) \leq \omega''_i\}$  ( $\omega'_i$  и  $\omega''_i$  заданы), случайный поиск и метод Левенберга–Марквардта.

#### 1.4. Примеры реконструкции неуправляемого движения

Примеры реконструкции фактического движения спутника *Фотон М-3* методом наименьших квадратов приведены на рис. 1.1-1.4 (более подробные результаты, полученные с помощью той же математической модели, но другим программным обеспечением представлены в [11, 13]). Реконструкция выполнена на двух интервалах времени. Интервал на рис. 1.1, 1.2 приходится на середину

полета, интервал на рис. 1.3, 1.4 — на его конец. Рис. 1.1 и 1.3 иллюстрируют движение спутника относительно квазиинерциальной системы координат  $CZ_1Z_2Z_3$ , рис. 1.2 и 1.4 характеризуют точность аппроксимации данных измерений. Графики на рисунках построены на отрезках  $t_0^H \leq t \leq t_N^H$ , в подписях к рисункам указаны начальные точки интервалов  $t_0^H$ , значения  $N$  и оценки стандартного отклонения  $\sigma$  ошибок в измерениях.

Каждая страница рисунков естественным образом разбивается на две части — левую и правую. На рис. 1.1 и 1.3 в левых частях приведены графики зависимости от времени углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , а также график разности  $\Delta\gamma(t) = \gamma(t) - c_0 - c_1(t - t_0^H)$ , где  $c_0 + c_1(t - t_0^H)$  — линейная аппроксимация функции  $\gamma(t)$ , построенная методом наименьших квадратов. В правых частях этих рисунков помещены графики компонент угловой скорости  $\omega_i(t)$  в найденных решениях уравнений (1.1).

В левых частях рис. 1.2 и 1.4 приведены графики функций  $\hat{h}_i(t)$  (см. (1.4)) и ломаные, проходящие через точки  $(t_n^H, h_i^{(n)} - \Delta_{Hi})$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Каждая ломаная и график аппроксимирующей ее функции  $\hat{h}_i(t)$  изображены в единой системе координат. Ломаные и аппроксимирующие их графики практически совпадают, поэтому в правых частях рис. 1.2 и 1.4 приведены ломаные, проходящие через точки  $(t_n^H, h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n^H) - \Delta_{Hi})$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Приведем некоторые числовые характеристики найденных реконструкций. В решении на рис. 1.1 и 1.2

$$\begin{aligned} p_1 &= -0.046, & p_2 &= 0.010, & p_3 &= 0.0016, \\ q_1 &= 0.704, & q_2 &= 0.240 & q_3 &= -0.126. \end{aligned}$$

Стандартные отклонения оценок начальных условий и уточняемых параметров составляют

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_1} &= 0.0041, & \sigma_{\theta_2} &= 0.0069, & \sigma_{\theta_3} &= 0.0059, & \sigma_{\omega_1} &= 0.0023, \\ \sigma_{\omega_2} &= 0.0014, & \sigma_{\omega_3} &= 0.0016, & \sigma_{p_1} &= 0.0019, & \sigma_{p_2} &= 0.00052, \\ \sigma_{p_3} &= 0.00018, & \sigma_{q_1} &= 0.0050, & \sigma_{q_2} &= 0.0016, & \sigma_{q_3} &= 0.0017. \end{aligned}$$

В решении на рис. 1.3 и 1.4

$$\begin{aligned} p_1 &= -0.014, & p_2 &= -0.030, & p_3 &= -0.021, \\ q_1 &= 0.152, & q_2 &= 0.309 & q_3 &= -0.241, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_1} &= 0.0028, & \sigma_{\theta_2} &= 0.0020, & \sigma_{\theta_3} &= 0.0056, & \sigma_{\omega_1} &= 0.0016, \\ \sigma_{\omega_2} &= 0.0011, & \sigma_{\omega_3} &= 0.0006, & \sigma_{p_1} &= 0.00034, & \sigma_{p_2} &= 0.00013, \\ \sigma_{p_3} &= 0.00013, & \sigma_{q_1} &= 0.0034, & \sigma_{q_2} &= 0.0047, & \sigma_{q_3} &= 0.0045. \end{aligned}$$

Стандартные отклонения  $\sigma_{\theta_i}$  здесь выражены в радианах, стандартные отклонения остальных величин — в единицах, в которых интегрируются уравнения (1.1), в частности,  $[\sigma_{\omega_i}] = 10^{-3} c^{-1}$ .

Оценки параметров  $q_i$  в решении на рис. 1.3 и 1.4 выглядят неправдоподобно большими. Это связано с тем, что рассматриваемое решение построено для продолжительного отрезка времени, на котором начинает сказываться неадекватность модели. Если длину  $t_N^H - t_0^H$  отрезка уменьшить, то оценки параметров  $q_i$  уменьшатся.

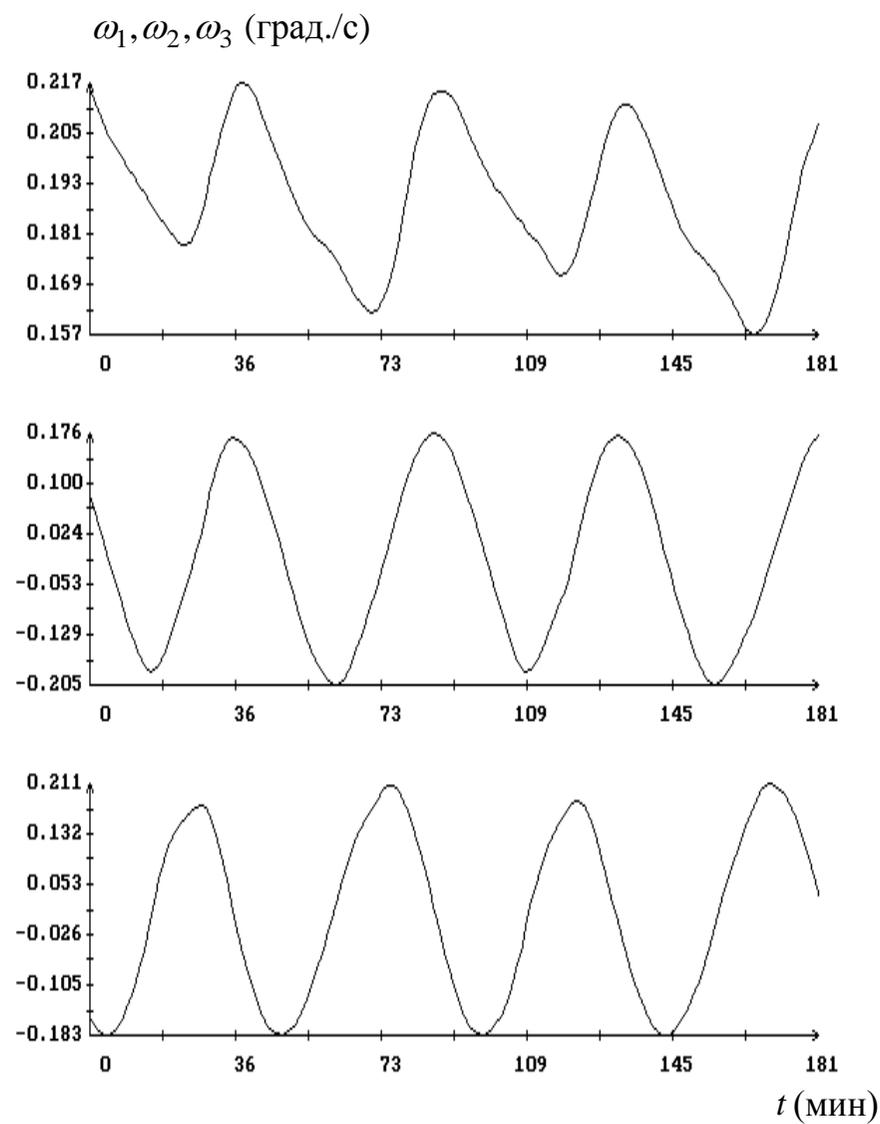
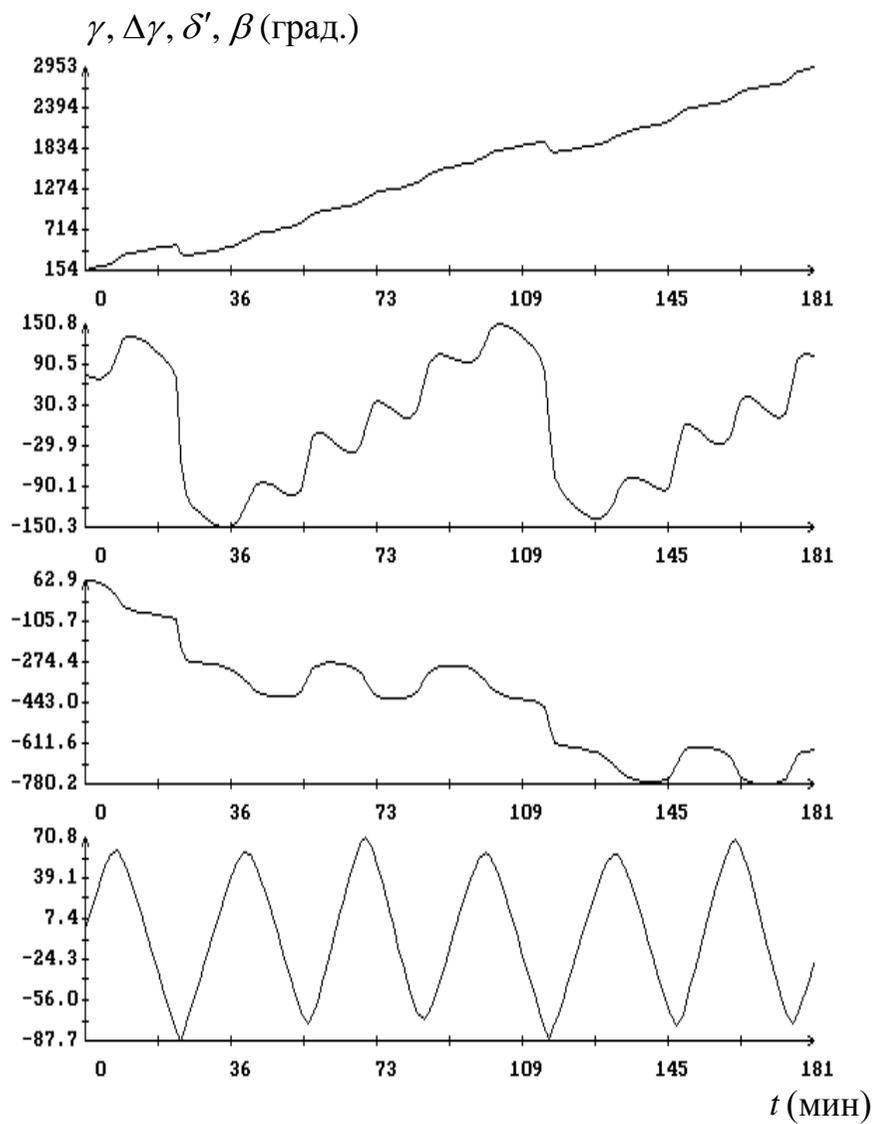


Рис. 1.1. Движение *Фотона М-3*, реконструированное методом наименьших квадратов. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 22:46:42.00 ДМВ 17.09.2007.

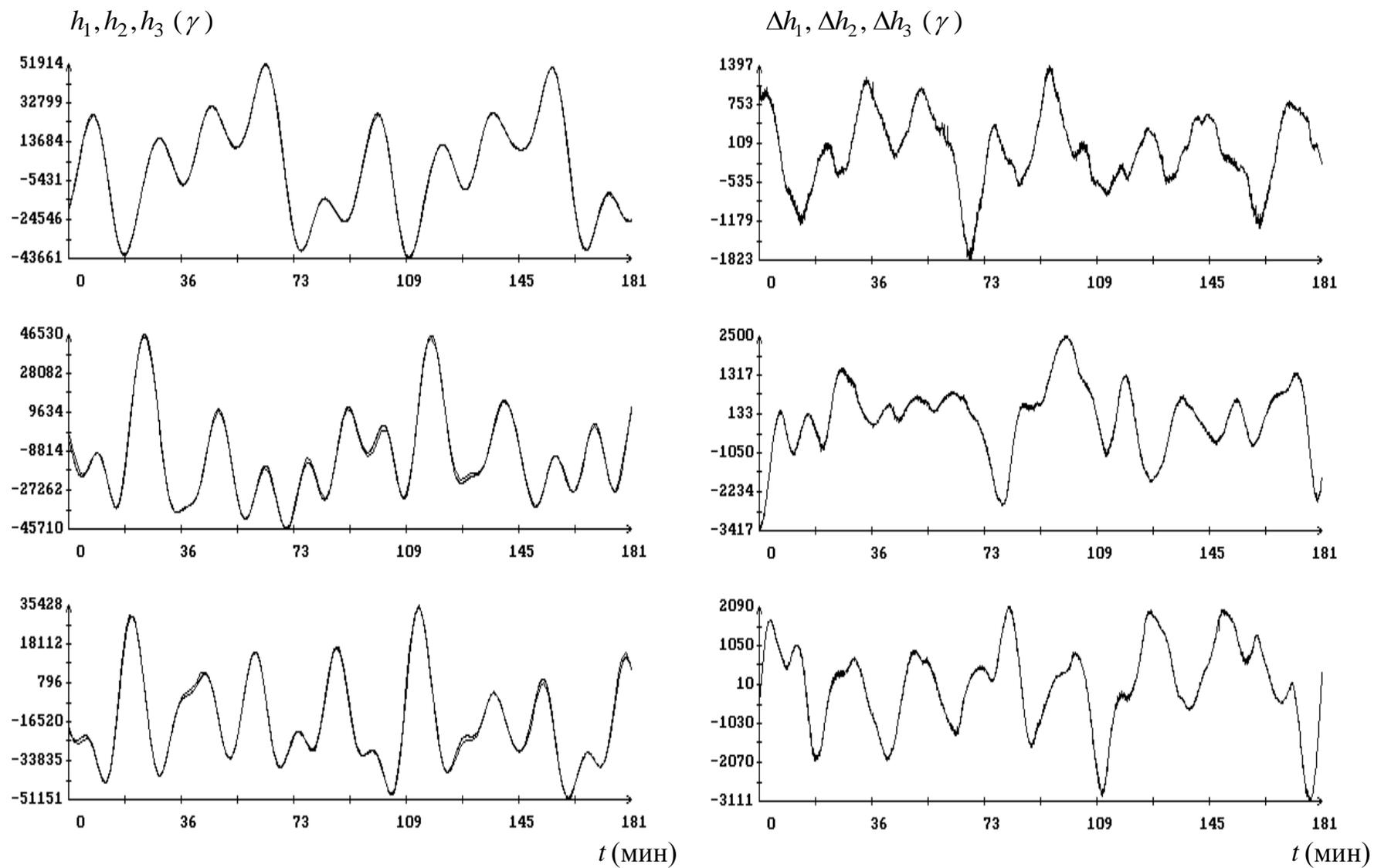


Рис. 1.2. Аппроксимация магнитных измерений, полученная методом наименьших квадратов,  $N = 2340$ ,  $\sigma = 958\gamma$ . Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 22:46:42.00 ДМВ 17.09.2007.

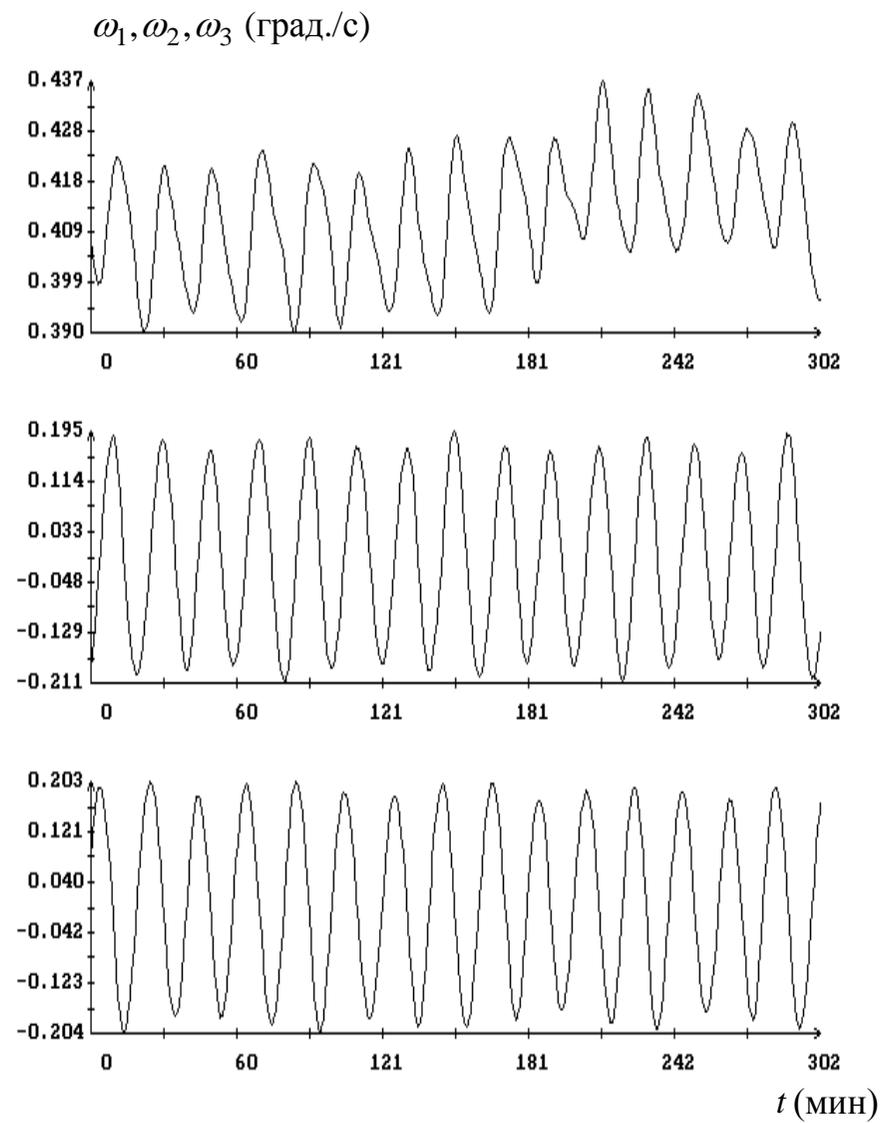
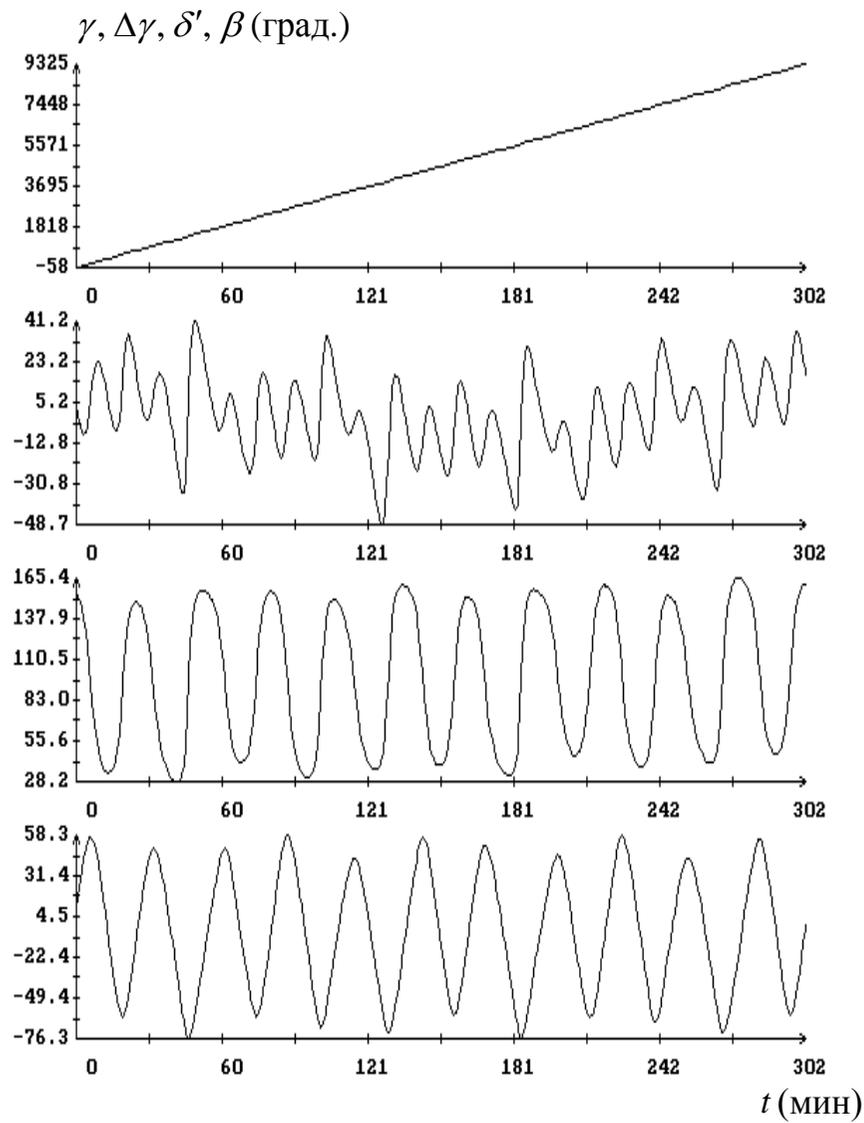


Рис. 1.3. Движение *Фотона М-3*, реконструированное методом наименьших квадратов. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 09:09:05 ДМВ 22.09.2007.

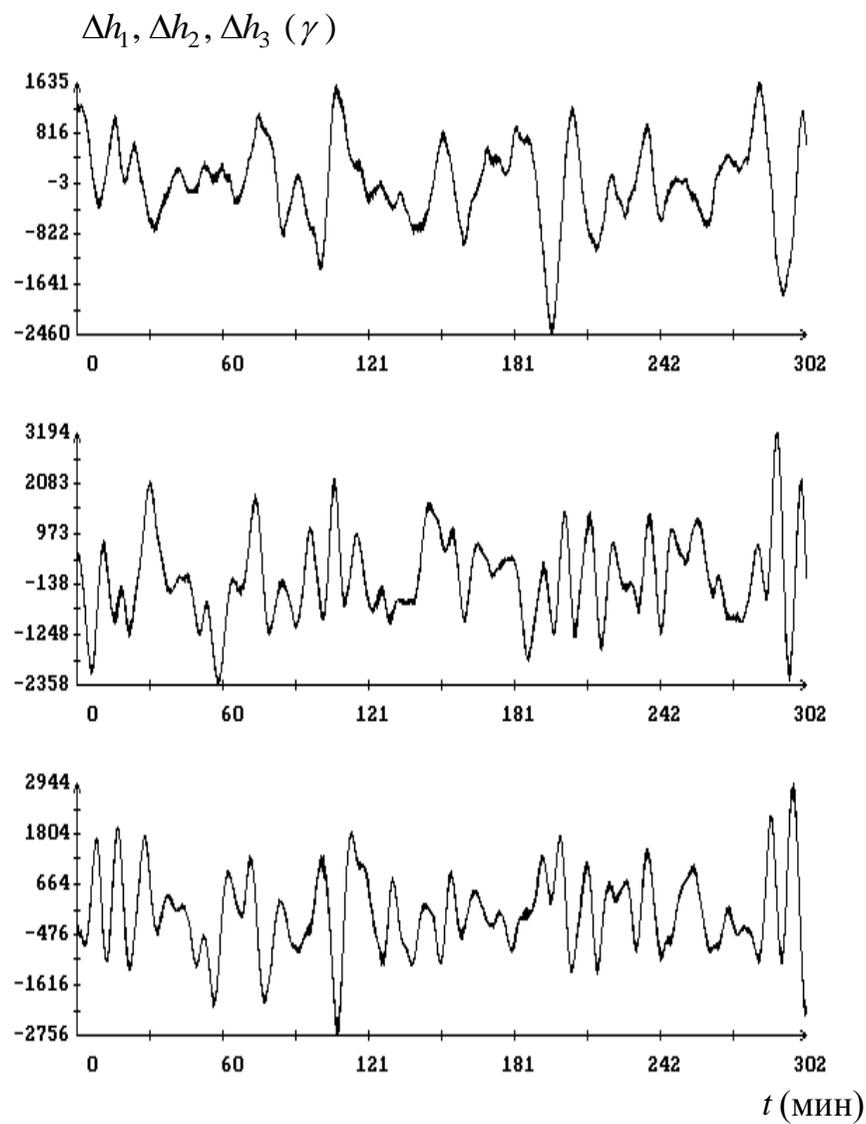
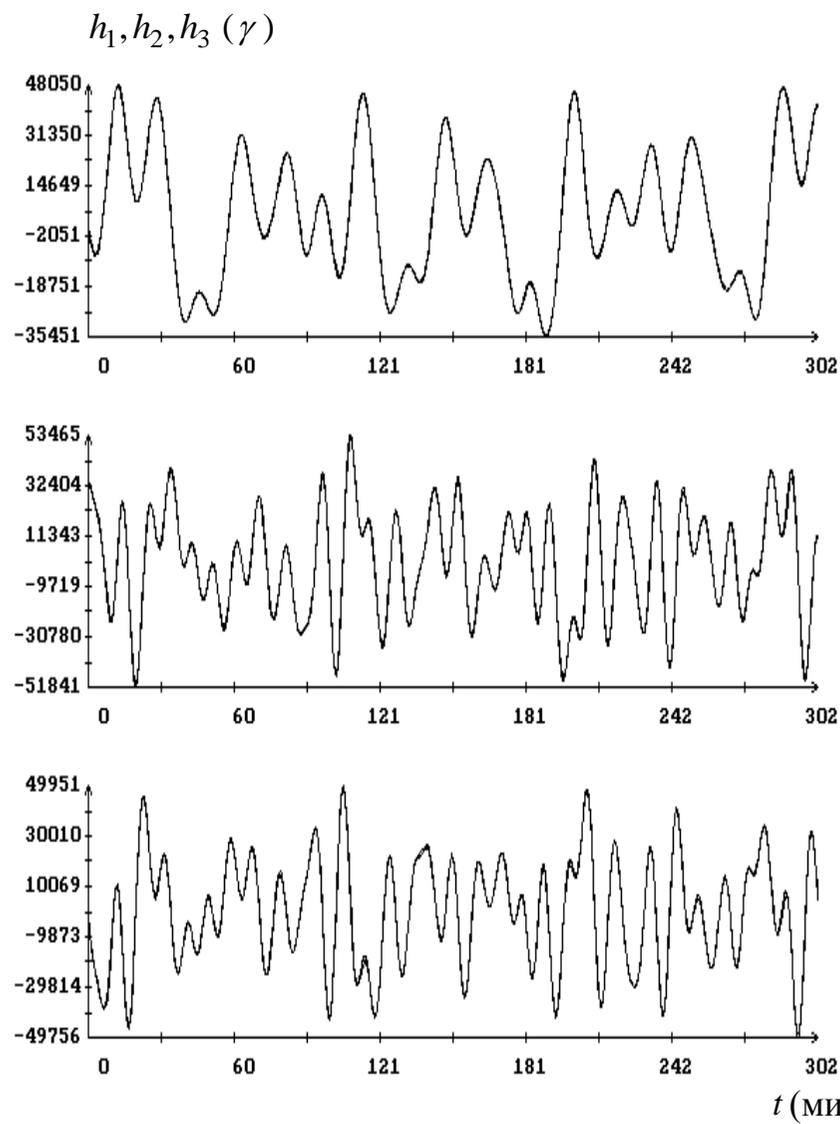


Рис. 1.4. Аппроксимация магнитных измерений, полученная методом наименьших квадратов,  $N = 4000$ ,  $\sigma = 831\gamma$ . Момент на графиках соответствует 09:09:05 ДМВ 22.09.2007.

Чтобы получить более содержательную оценку точности определения движения спутника с помощью описанной методики, была проведена обработка измерений на 11 пересекающихся интервалах времени, охватывающих 16.7 ч. Каждый интервал имел длину примерно 6200 с. Смежные интервалы имели пересечение около 800 с. Начальные точки интервалов приведены в табл. 1.1. Реконструкция движения спутника на всех этих интервалах (11 решений уравнений (1.1)) представлена на рис. 1.5. В левой части рисунка приведены графики зависимости от времени углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , а также график разности  $\Delta\gamma(t) = \gamma(t) - c_0 - c_1(t - t_0^H)$ , где  $c_0 + c_1(t - t_0^H)$  — линейная аппроксимация функции  $\gamma(t)$ , построенная методом наименьших квадратов. В средней и правой частях рисунка приведены графики зависимости от времени компонент угловой скорости и кватерниона ориентации. Как видно из рисунка, на стыках интервалов разные решения несколько отличаются, но в целом реконструкция выглядит плавной. Оценки параметров модели на этих интервалах приведены в табл. 1.1.

В [13] приведена аналогичная реконструкция всего неуправляемого полета *Фотона М-3*. Там использовались более сложные уравнения движения — дополнительно учитывался действующий на спутник магнитный момент, параметры которого уточнялись, и стыковка смежных решений получилась более точной. Следует отметить, что и интервалы времени, на которых выполнялась реконструкция в [13] были длиннее — в основном  $2 \div 3$  орбитальных витка. Использование более грубой модели в данной работе обусловлено тем, что ниже эта модель применяется в фильтре Калмана. В этом случае целесообразно уменьшить число уточняемых параметров за счет некоторого огрубления модели.

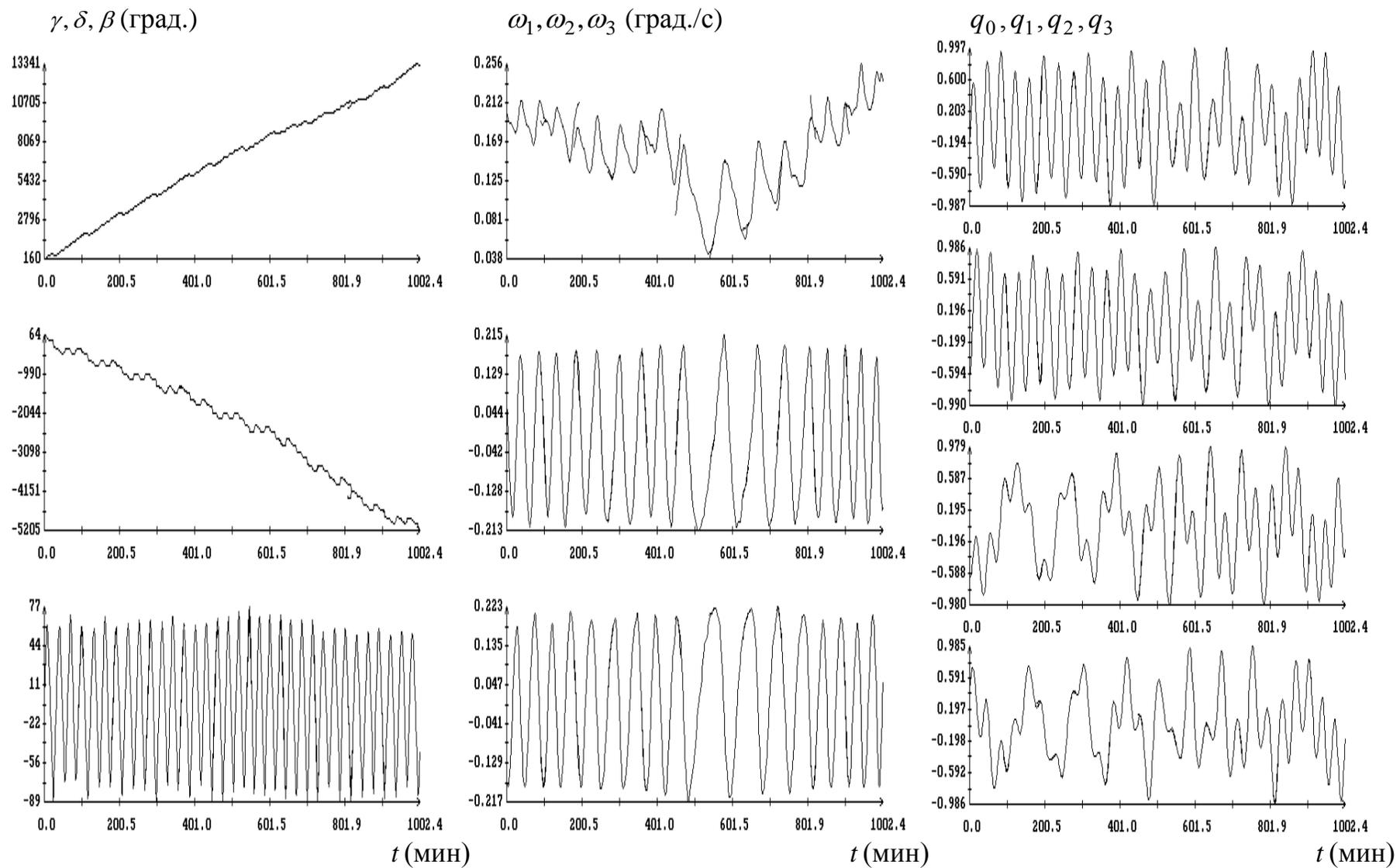


Рис. 1.5. Результаты реконструкции движения на 11 смежных промежутках времени.

Таблица 1.1. Параметры модели, основанной на динамических уравнениях вращательного движения

№	$t_0$ (ч:м:с)	$\sigma(\gamma)$	$\Delta_{H1}$	$\Delta_{H2}$	$\Delta_{H3}$	$p_1$	$\sigma_{p1}$	$p_2$	$\sigma_{p2}$	$p_3$	$\sigma_{p3}$
1	22 : 46 : 35	618	-2118	1010	965	-0.0382	0.0019	-0.0066	0.00055	-0.0106	0.00057
2	00 : 16 : 29	851	-2157	981	798	0.0054	0.0026	0.0265	0.00078	-0.0254	0.00076
3	01 : 46 : 23	863	-2063	1820	-1955	0.0140	0.0026	0.0235	0.00097	0.0254	0.00064
4	03 : 16 : 17	696	-2130	678	109	-0.0605	0.0021	0.0278	0.00090	0.0312	0.00041
5	04 : 46 : 11	1009	-2110	2072	318	0.0431	0.0029	0.0380	0.0011	-0.0438	0.00093
6	06 : 16 : 05	725	-1947	1713	156	-0.0792	0.0029	0.0015	0.0012	-0.0108	0.0011
7	07 : 45 : 59	644	-1888	1445	94	-0.0196	0.0023	0.0785	0.0016	-0.0114	0.00024
8	09 : 15 : 53	721	-2009	843	166	-0.0287	0.0029	0.0097	0.0011	0.0208	0.00035
9	10 : 45 : 47	619	-2102	1612	-141	-0.0382	0.0026	-0.0177	0.00055	-0.0442	0.00065
10	12 : 15 : 41	798	-2466	844	-27	-0.1056	0.0028	0.0107	0.0013	0.0342	0.00095
11	13 : 45 : 34	1002	-2512	944	-144	-0.1340	0.0034	-0.0546	0.00089	0.0098	0.0012

№	$q_1$	$\sigma_{q1}$	$q_2$	$\sigma_{q2}$	$q_3$	$\sigma_{q3}$
1	0.7604	0.0042	0.1878	0.0016	-0.1118	0.0015
2	0.7984	0.0060	0.1512	0.0021	-0.1805	0.0021
3	0.7243	0.0062	0.2647	0.0021	-0.1481	0.0018
4	0.8381	0.0053	0.2483	0.0016	-0.1176	0.0015
5	0.8196	0.0075	0.2537	0.0027	-0.1901	0.0025
6	0.8289	0.0059	0.2445	0.0012	-0.1295	0.0011
7	0.6900	0.0056	0.2002	0.0012	-0.1702	0.0010
8	0.6693	0.0065	0.2220	0.0014	-0.1285	0.0015
9	0.6556	0.0056	0.1812	0.0017	-0.1290	0.0010
10	0.7334	0.0067	0.2697	0.0030	-0.1118	0.0020
11	0.8436	0.0070	0.2702	0.0041	-0.0910	0.0034

## 1.5. Фильтр Калмана

Дискретный фильтр Калмана в достаточно общем виде можно описать следующим образом [15, 16, 25]. Рассмотрим механическую систему, некоторые параметры движения которой измеряются в дискретные моменты времени. Математическую модель движения системы и процесса измерений примем линейной и представим в виде

$$x_n = A_n x_{n-1} + \eta_n, \quad y_n = B_n x_n + \xi_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.9)$$

Здесь  $x_n$  — фазовый вектор системы,  $y_n$  — вектор измерений,  $\xi_n$  — вектор случайных ошибок измерений,  $\eta_n$  — вектор случайных возмущений системы. Размерность векторов  $x_n$ ,  $\eta_n$  и порядок квадратных матриц  $A_n$  считаем не зависящими от  $n$ , размерности и размеры остальных векторов матриц полагаем согласованными должным образом. Полагаем также, что все матрицы имеют полный ранг. В частности, все матрицы  $A_n$  — невырожденные. Полагаем далее, что векторы  $\xi_m$  и  $\eta_n$  некоррелированы при любых значениях  $m$  и  $n$ , векторы  $\xi_m$  и  $\xi_n$ , а также  $\eta_m$  и  $\eta_n$ , некоррелированы при любых  $m \neq n$ . Математические

ожидания и ковариационные матрицы этих векторов определяются соотношениями

$$M\xi_n = 0, \quad M\eta_n = 0, \quad M\xi_n\xi_n^T = K_n, \quad M\eta_n\eta_n^T = L_n,$$

где  $K_n$  и  $L_n$  — симметричные, положительно определенные матрицы. Задача состоит в том, чтобы по данным измерений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  найти оценку  $\hat{x}_n$  вектора  $x_n$  и ковариационную матрицу  $P_n$  ошибки  $x_n - \hat{x}_n$ .

Предположим сначала, что введенные выше случайные величины  $\xi_n$  и  $\eta_n$  имеют нормальное распределение. Тогда фазовый вектор  $x_n$  и его оценка  $\hat{x}_n$  также будут нормальными случайными величинами и решение поставленной задачи об оценивании движения системы можно свести к задаче нахождения условной плотности распределения  $p(x_n|Y_n)$ . Здесь  $Y_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . В этом случае  $\hat{x}_n = M(x_n|Y_n)$ ,  $P_n = M[(x_n - \hat{x}_n)(x_n - \hat{x}_n)^T|Y_n]$ .

Вывод рекуррентных соотношений для расчета величин  $x_n$  и  $P_n$  можно осуществить посредством формальных преобразований условных плотностей вероятностей [29]. С учетом равенства  $p(x_n, Y_n) \equiv p(x_n, Y_{n-1}, y_n)$  имеем

$$\begin{aligned} p(x_n|Y_n) &= \frac{p(x_n, Y_n)}{p(Y_n)} = \frac{p(x_n, Y_{n-1}, y_n)}{p(x_n, Y_{n-1})} \cdot \frac{p(x_n, Y_{n-1})}{p(Y_{n-1})} \cdot \frac{p(Y_{n-1})}{p(Y_n)} = \\ &= p(y_n|x_n, Y_{n-1})p(x_n|Y_{n-1})\frac{p(Y_{n-1})}{p(Y_n)} = \\ &= p(y_n|x_n)p(x_n|Y_{n-1})\frac{p(Y_{n-1})}{p(Y_n)}. \end{aligned}$$

Последнее равенство в этой цепочке следует из соотношения  $p(y_n|x_n, Y_{n-1}) = p(y_n|x_n)$ , справедливого в силу второго соотношения (1.9).

В силу первого соотношения (1.9)  $p(x_n|x_{n-1}, Y_{n-1}) = p(x_n|x_{n-1})$ , поэтому

$$p(x_n, x_{n-1}|Y_{n-1}) = p(x_n|x_{n-1}, Y_{n-1})p(x_{n-1}|Y_{n-1}) = p(x_n|x_{n-1})p(x_{n-1}|Y_{n-1}),$$

и, следовательно,

$$p(x_n|Y_{n-1}) = \int p(x_n, x_{n-1}|Y_{n-1}) dx_{n-1} = \int p(x_n|x_{n-1})p(x_{n-1}|Y_{n-1}) dx_{n-1}.$$

Здесь интегрирование выполняется по всему фазовому пространству системы.

В силу нормальности рассматриваемых случайных величин [30] (здесь и ниже несущественные множители опускаем)

$$\begin{aligned} p(x_n|x_{n-1}) &\sim \exp\left[-\frac{1}{2}(x_n - A_n x_{n-1})^T L_n^{-1}(x_n - A_n x_{n-1})\right], \\ p(x_{n-1}|Y_{n-1}) &\sim \exp\left[-\frac{1}{2}(x_{n-1} - \hat{x}_{n-1})^T P_{n-1}^{-1}(x_{n-1} - \hat{x}_{n-1})\right]. \end{aligned}$$

Посредством несложных, но довольно громоздких преобразований подынтегральное выражение в последнем интеграле можно преобразовать к виду (члены, не содержащие  $x_n$  и  $x_{n-1}$ , опущены)

$$\begin{aligned} p(x_n|x_{n-1})p(x_{n-1}|Y_{n-1}) &\sim \exp\left[-\frac{1}{2}(x_n - A_n \hat{x}_{n-1})^T P_n'^{-1}(x_n - A_n \hat{x}_{n-1}) - \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-1}^\circ)^T (P_{n-1}^{-1} + A_n^T L_n^{-1} A_n)^{-1}(x_{n-1} - x_{n-1}^\circ)\right], \\ P_n' &= A_n P_{n-1} A_n^T + L_n, \quad x_{n-1}^\circ = (P_{n-1}^{-1} + A_n^T L_n^{-1} A_n)^{-1}(P_{n-1}^{-1} \hat{x}_{n-1} + A_n^T L_n^{-1} x_n). \end{aligned}$$

Вычислив выписанный интеграл, получим

$$p(x_n|Y_{n-1}) \sim \exp\left[-\frac{1}{2}(x_n - A_n \hat{x}_{n-1})^T P_n'^{-1}(x_n - A_n \hat{x}_{n-1})\right].$$

Согласно второму соотношению (1.9) и принятым допущениям

$$p(y_n|x_n) \sim \exp\left[-\frac{1}{2}(y_n - B_n x_n)^T K_n^{-1}(y_n - B_n x_n)\right].$$

Перемножив правые части двух последних формул, получим после преобразований

$$p(x_n|Y_n) \sim \exp\left[-\frac{1}{2}(x_n - \hat{x}_n)^T P_n^{-1}(x_n - \hat{x}_n)\right].$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= A_n \hat{x}_{n-1} + P_n' B_n^T S_n^{-1}(y_n - B_n A_n \hat{x}_n), \\ P_n &= P_n' - P_n' B_n^T S_n^{-1} B_n P_n', \quad S_n = K_n + B_n P_n' B_n^T. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Соотношения (1.10) задают рекуррентные формулы для расчета величин  $\hat{x}_n$  и  $P_n$  [31, 32]. Отыскание величин  $\hat{x}_0$  и  $P_0$  — отдельная задача. Полагаем, что она решена. В ряде случаев величины  $\hat{x}_0$  и  $P_0$  можно выбирать достаточно произвольно; с увеличением  $n$  рекуррентные формулы (1.10) начинают давать правильные значения  $\hat{x}_n$  и  $P_n$ .

Как следует из вывода формул (1.10), вектор  $x'_n = A_n \hat{x}_{n-1}$  — несмещенная оценка вектора  $x_n$  по измерениям  $Y_{n-1}$ ,  $P'_n$  — ковариационная матрица этой оценки.

Соотношения (1.10) позволяют находить оценку фазового вектора системы по мере поступления измерений. Обычно их применяют в случае, когда  $\dim y_n < \dim x_n$ . Если выполнено обратное неравенство и  $\dim y_n$  зависит от  $n$ , то вследствие необходимости обращать матрицу  $S_n$  порядка  $\dim y_n$  формулы (1.10) следует преобразовать к более удобному виду. На промежуточном этапе вывода формул (1.10) возникают соотношения [33, 34]

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= x'_n + P_n B_n^T K_n^{-1} (y_n - B_n x'_n), & P_n^{-1} &= P_n'^{-1} + B_n^T K_n^{-1} B_n, \\ P_n'^{-1} &= Z_n - Z_n Q_n^{-1} Z_n, & Z_n &= (A_n^{-1})^T P_{n-1}^{-1} A_n^{-1}, & Q_n &= L_n^{-1} + Z_n. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Фильтр, построенный на их основе, оперирует с матрицами  $P_n^{-1}$ ,  $P_n'^{-1}$ ,  $A_n^{-1}$ ,  $K_n^{-1}$ ,  $L_n^{-1}$ . Обращаются только матрицы  $P_n^{-1}$  (для вычисления  $P_n$ ),  $Q_n$  и  $A_n$  порядка  $\dim x_n$ . Матрицы  $K_n^{-1}$ ,  $L_n^{-1}$  являются исходными вместо  $K_n$ ,  $L_n$ .

В задачах обработки магнитных измерений на спутниках Земли матрица  $A_n$  близка к единичной, а элементы  $L_n$  существенно меньше  $P_{n-1}$ . С учетом последнего условия  $Q_n^{-1} \approx L_n$  и  $P_n'^{-1} = Z_n - Z_n L_n Z_n$ .

Рассмотрим последнюю формулу в случае, когда  $L_n = \sigma_\eta^2 E$ ,  $\sigma_\eta$  — положительный скаляр,  $E$  — единичная матрица. Такое предположение означает, в частности, что единицы измерения компонент фазового вектора выбраны подходящим образом). Тогда  $P_n'^{-1} = Z_n - \sigma_\eta^2 Z_n^2$ . Если  $a$  и  $\alpha$  — собственные вектор и число матрицы  $Z_n$  ( $\alpha \neq 0$ ), то  $a$  и  $\alpha - \alpha^2 \sigma_\eta^2$  — собственные вектор и число матрицы  $P_n'^{-1}$ . Матрицы  $P_n'^{-1}$  и  $Z_n$  имеют одинаковые собственные векторы, а их собственные числа в случае  $\alpha \sigma_\eta^2 \ll 1$  близки. В такой ситуации можно взять  $P_n'^{-1} = \chi Z_n$  при подходящем  $\chi \in (0, 1)$ ,  $\chi \approx 1$ .

Выписанные выше соотношения относятся к линейному случаю. Перейдем теперь к нелинейной системе. Математическую модель ее движения и процесса измерений примем в виде

$$x_n = F_n(x_{n-1}) + \eta_n, \quad y_n = G_n(x_n) + \xi_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.12)$$

В выписанных соотношениях  $F_n(x)$  и  $G_n(x)$  — гладкие функции, матрицы Якоби которых имеют полный ранг; векторы  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $\xi_n$  и  $\eta_n$  имеют прежний смысл, причем ошибки  $\xi_n$  и  $\eta_n$  имеют указанные выше первые и вторые моменты.

Рассмотрим получение оценки вектора  $x_n$  по измерениям  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Эту оценку и ее ковариационную матрицу по-прежнему будем обозначать  $\hat{x}_n$  и  $P_n$ . Рекуррентные соотношения, позволяющие находить искомые величины получаются эвристической модификацией соотношений (1.11). А именно, оценка  $\hat{x}_n$  в (1.11) минимизирует по  $x_n$  выражение

$$(x_n - x'_n)^T P_n'^{-1} (x_n - x'_n) + (y_n - B_n x_n)^T K_n^{-1} (y_n - B_n x_n).$$

Иными словами, эта оценка является оценкой метода наименьших квадратов. Второе слагаемое в выписанном выражении отвечает за ошибки измерений, первое слагаемое учитывает априорную информацию о значении  $x_n$ . По аналогии и с учетом малости случайных величин в модели (1.12) оценку вектора  $x_n$  в рамках этой модели будем искать из условия минимума функции

$$f_1(x_n) = (x_n - x'_n)^T P_n'^{-1} (x_n - x'_n) + [y_n - G_n(x_n)]^T K_n^{-1} [y_n - G_n(x_n)],$$

где теперь

$$x'_n = F_n(\hat{x}_{n-1}), \quad P_n' = A_n P_{n-1} A_n^T + L_n, \quad A_n = \frac{\partial F_n(\hat{x}_{n-1})}{\partial x}.$$

Описанный переход от линейного фильтра к нелинейному не единствен. Приведем пример другого перехода. Минимизация по  $x_n$  функции  $f_1(x_n)$  эквивалентна минимизации по  $x_{n-1}$  функцию

$$f_1[F_n(x_{n-1})] = [F(x_{n-1}) - x'_n]^T P_n'^{-1} [F(x_{n-1}) - x'_n] + [y_n - \tilde{G}_n(x_{n-1})]^T K_n^{-1} [y_n - \tilde{G}_n(x_{n-1})], \quad \tilde{G}_n(x) = G_n[F_n(x)].$$

Первое слагаемое в правой части формулы для  $f_1[F_n(x_{n-1})]$ , отвечающее за априорную информацию с высокой точностью можно представить в виде

$$[F(x_{n-1}) - x'_n]^T P_n'^{-1} [F(x_{n-1}) - x'_n] = (x_{n-1} - \hat{x}_{n-1})^T C_n (x_{n-1} - \hat{x}_{n-1}), \\ C_n = A_n^T P_n'^{-1} A_n = P_{n-1}^{-1} - P_{n-1}^{-1} D_n^{-1} P_{n-1}^{-1}, \quad D_n = P_{n-1}^{-1} + A_n^T L_n^{-1} A_n.$$

Здесь матрица  $A_n$  имеет тот же вид, что и в формуле для  $f_1(x_n)$ . Положим

$$f_2(x_{n-1}) = (x_{n-1} - \hat{x}_{n-1})^T C_n (x_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) + \\ + [y_n - \tilde{G}_n(x_{n-1})]^T K_n^{-1} [y_n - \tilde{G}_n(x_{n-1})]$$

и примем в качестве оценки  $x_n$  величину  $\hat{x}_n = F_n[\arg \min f_2(x_{n-1})]$ . Понятно, что эта оценка отличается от предыдущей оценки  $\hat{x}_n = \arg \min f(x_n)$ , но при определенных условиях они будут близки.

Минимизацию функций  $f_1(x_n)$  и  $f_2(x_{n-1})$  можно выполнять методом Гаусса–Ньютона, в качестве начальных приближений использовать точки  $x'_n$  и  $\hat{x}_{n-1}$  соответственно. При минимизации функции  $f_1(x_n)$  нормальные уравнения имеют вид

$$(P_n'^{-1} + B_n^T K_n^{-1} B_n) \Delta x_n = B_n^T K_n^{-1} [y_n - G_n(x_n^*)] - P_n'^{-1} (x_n^* - x'_n), \\ \Delta x_n = x_n - x_n^*, \quad B_n = \frac{\partial G_n(x_n^*)}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Здесь  $x_n^*$  — имеющееся приближенное значение величины  $\hat{x}_n$ , которому после решения системы (1.13) присваивается значение  $x_n^* + \Delta x_n$ . Итерационное уточнение  $x_n^*$  прекращается, когда норма поправки  $\|\Delta x_n\|$  станет приемлемо малой. Тогда принимается  $\hat{x}_n = x_n^*$ .

При минимизации функции  $f_2(x_{n-1})$  нормальные уравнения имеют вид

$$(C_n + U_n^T K_n^{-1} U_n) \Delta x_{n-1} = U_n^T K_n^{-1} [y_n - \tilde{G}_n(x_{n-1}^*)] - C_n (x_{n-1}^* - \hat{x}_n), \\ \Delta x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-1}^*, \quad U_n = \frac{\partial \tilde{G}_n(x_{n-1}^*)}{\partial x}. \quad (1.14)$$

Здесь  $x_{n-1}^*$  — имеющееся приближенное значение величины  $F_n^{-1}(\hat{x}_n)$ ,  $F_n^{-1}(x)$  — функция, обратная функции  $F_n(x)$ . Итерационное уточнение  $x_{n-1}^*$  выполняется аналогично только что описанному уточнению оценки  $\hat{x}_n$ . По окончании итераций принимается  $\hat{x}_n = F_n(x_{n-1}^*)$ .

Нелинейные фильтры, основанные на решении систем (1.13), (1.14) были использованы для обработки магнитных измерений, выполненных на *Фотоне М-3*. В программных реализациях этих фильтров под уравнениями движения спутника понимается совокупность уравнений (1.1) и уравнений

$$\dot{p}_i = 0, \quad \dot{q}_i = 0, \quad \dot{\Delta}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Для ссылок такую систему обозначим (1.1'). Компонентами ее фазового вектора  $x \in \mathbb{R}^{16}$  являются величины  $\omega_i, p_i, q_i, \Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $Q_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ). Значения фазового вектора  $x_n$  суть значения переменных уравнений движения спутника в узлах временной сетки  $\{t_n\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ . В реализации, использующей минимизацию функции  $f_2(x_{n-1})$ , эта сетка равномерная:  $t_n = t_0 + nh$ ,  $h = 200 \div 500$ с. Выбираемое значение  $h$  в несколько раз превышает длину оптимального шага интегрирования уравнений (1.1) с помощью процедуры DOP853. В реализации, основанной на минимизации функции  $f_1(x_n)$ , узлы  $t_n$  являются концевыми точками этих оптимальных шагов. Здесь  $t_{n+1} - t_n = 50 \div 100$ с.

В обеих реализациях формирование векторов измерений  $y_n$  и вычисление функций  $F_n(x), G_n(x)$  выполняется следующим образом. Решение системы (1.1') с начальным условием  $x(\tau) = a$  обозначим  $x = \varphi(t, \tau, a)$ . Тогда  $F_n(x) = \varphi(t_n, t_{n-1}, x)$ . Измерения напряженности магнитного поля (ср. (1.3)),

$$t_k^H, h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, h_3^{(k)}, \quad (1.15)$$

попавшие в полуинтервал  $t_{n-1} < t \leq t_n$ , — величины  $h_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при  $t_k^H \in (t_{n-1}, t_n]$  — объединим в вектор  $y_n$ . Соответствующие расчетные аналоги этих измерений  $\Delta_i + \hat{h}_i(t_k^H)$ , вычисленные вдоль решения  $\varphi(t, t_{n-1}, x)$  с использованием интерполяционного полинома, обозначим  $\tilde{G}_n(x)$ . Имеют место формулы  $F_n^{-1}(x) = \varphi(t_{n-1}, t_n, x)$ ,  $G_n(x) = \tilde{G}_n[F_n^{-1}(x)]$ .

Векторы  $\Delta x_n = x_n - x_n^*$ ,  $x_n^* - x_n'$  в системе (1.13) и векторы  $\Delta x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-1}^*$ ,  $x_{n-1}^* - \hat{x}_n$  в системе (1.14) фактически являются элементами  $\mathbb{R}^{15}$  — четыре кватернионные компоненты этих векторов (они малы) заменены тремя компонентами векторов бесконечно малых поворотов. Такая замена была использована в п. 1.3 при формировании системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов. По этой причине матрицы  $A_n, P_n$  и т.п. имеют порядок 15. Вместо ковариаций компонент кватернионов используются ковариации компонент векторов бесконечно малых поворотов.

Приведем некоторые детали формирования и решения системы (1.13). Пусть для точки  $t_{n-1}$  известны оценка  $\hat{x}_{n-1}$  и матрица  $P_{n-1}^{-1}$ . Сначала посредством интегрирования уравнений (1.1') от точки  $t_{n-1}$  к точке  $t_n$  (фактически здесь и ниже интегрируются уравнения (1.1) и описанная в п. 1.3 система уравнений в вариациях) находятся прогноз  $x'_n$  и матрица  $P_n'^{-1}$ . Расчет этой матрицы выполняется по третьей и последующим формулам (1.11), в которых теперь  $A_n = \partial F_n(\hat{x}_{n-1})/\partial x$ . Затем реализуется итерационный процесс получения оценки  $\hat{x}_n$ . Матрица и правая часть системы (1.13) вычисляются посредством интегрирования уравнений (1.1') от точки  $t_n$  к точке  $t_{n-1}$ . При этом часть элементов матрицы  $B_n^T K_n^{-1} B_n$  и компонент вектора  $B_n^T K_n^{-1} [y_n - G_n(\tilde{G}_n(x_{n-1}))]$  рассчитываются по формулам, используемым при формировании системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов. Матрица  $P_n'^{-1}$  на всех итерациях остается неизменной. Ковариационная матрица  $P_n$  найденной оценки равна обратной матрице системы (1.13) на последней итерации уточнения  $x_n^*$  (ср. вторую формулу (1.11), в которой  $B_n$  вычисляется при  $x_n = \hat{x}_n$ ). Фактически в фильтре используется только эта матрица системы (1.13), т. е. матрица  $P_n^{-1}$ , а матрица  $P_n$  служит только для расчета стандартных отклонений оцениваемых величин.

Процесс решения системы (1.14) организован несколько иначе. На каждой итерации уравнения (1.1') интегрируются от точки  $t_{n-1}$  к точке  $t_n$ . На первой итерации вычисляется матрица  $C_n$ , которая при последующих итерациях остается неизменной. Часть элементов матрицы  $U_n^T K_n^{-1} U_n$  и компонент вектора  $U_n^T K_n^{-1} [y_n - \tilde{G}_n(x_{n-1}^*)]$  рассчитываются так же, как при формировании системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов в п. 1.3. Ковариационная матрица оценки  $\hat{x}_n = F_n(x_{n-1}^*)$ ,  $x_{n-1}^* = \arg \min f_2(x_{n-1})$  определяется формулой

$$P_n = A_n (C_n + U_n^T K_n^{-1} U_n)^{-1} A_n^T, \quad A_n = \frac{\partial F_n(x_{n-1}^*)}{\partial x}, \quad U_n = \frac{\partial \tilde{G}_n(x_{n-1}^*)}{\partial x}.$$

Фактически в фильтре используется матрица

$$P_n^{-1} = (A_n^{-1})^T (C_n + U_n^T K_n^{-1} U_n) A_n^{-1}.$$

Оценка  $\hat{x}_0$  и матрица  $P_0^{-1}$ , относящиеся к начальной точке  $t_0$ , находились методом наименьших квадратов посредством минимизации функционала (1.4) при  $t_0 > t_1 > \dots > t_N$ ,  $t_0 - t_N = 30 \div 60$  мин. В обозначениях п. 1.3  $x_0 = x_*$ ,  $P_0^{-1} = \sigma^{-2}C$ . Однако соотношения, связывающие все рассматриваемые ковариационные матрицы, являются однородными первой степени. Кроме того, реконструируемое движение спутника на довольно продолжительных отрезках сетки  $\{t_n\}$  можно считать установившимся. В такой ситуации удобно в качестве  $K_n$  принять единичную матрицу, положить  $P_0^{-1} = C$ ,  $L_n$  взять диагональной матрицей, не зависящей от  $n$ , а ковариационную матрицу оценки  $\hat{x}_n$  вычислять как  $\sigma_0^2 P_n$ , где  $\sigma_0$  — характерное значение стандартного отклонения ошибок в измерениях отдельных компонент МПЗ в строительной системе координат. В расчетах следующего пункта диагональные компоненты  $L_n$ , отвечающие фазовым переменным, составляют  $2 \cdot 10^4$ , отвечающие параметрам —  $2 \cdot 10^2$  (в единицах измерения переменных и параметров системы (1.1)), в качестве  $\sigma_0$  берется среднеквадратичная ошибка аппроксимации данных измерений. Эта ошибка и матрицы  $\sigma_0^2 P_n$  рассчитываются после реконструкции движения на всем выбранном отрезке времени. Матрицы  $P_n$ , оценки  $\hat{x}_n$  и еще ряд величин, относящихся к интервалам  $(t_{n-1}, t_n]$  хранятся в памяти компьютера.

Точность аппроксимации измерений вектора МПЗ на каждом полуинтервале  $(t_{n-1}, t_n]$  характеризуется величинами

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{3 N_n} \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{k \in U(n)} \left[ h_i^{(k)} - \hat{h}_i(t_k^H) - \Delta_i \right]^2 \right\}}, \quad (1.16)$$

$$U(n) = \{k : t_k^H \in (t_{n-1}, t_n]\}.$$

где  $N_n$  — количество элементов множества  $U(n)$ .

## 1.6. Примеры реконструкции движения с помощью фильтра Калмана

Приведем результаты реконструкции движения *Фотона М-3* на отрезке времени, пересекающемся с объединением 11 интервалов из п. 1.4 (см. табл. 1.1). Реконструкции, полученные посредством решения системы (1.14) приведены на рис. 1.6–1.7. Рис. 1.6–1.9 получены при  $t_{n+1} - t_n = 200\text{с}$ . Левая часть рис. 1.6 содержит графики зависимости от времени углов (ср. рис. 1.1, 1.3)  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , а также график разности  $\Delta\gamma(t) = \gamma(t) - c_0 - c_1(t - t_0)$ , где  $c_0 + c_1(t - t_0)$  — линейная аппроксимация функции  $\gamma(t)$ , построенная методом наименьших квадратов. В средней части рисунка помещены графики компонент угловой скорости  $\omega_i(t)$ , в левых частях — ломаные, характеризующие ошибки аппроксимации данных измерений (ср. правые графики на рис. 1.2, 1.4). На рис. 1.7 изображены графики величин  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $\Delta_i$  и  $\sigma_n$ . Эти величины — кусочно постоянные функции, на интервалах  $(t_{n-1}, t_n]$  они сохраняют свои значения. На рис. 1.8 и 1.9 приведены графики стандартных отклонений оценок  $\hat{x}_n$ . Каждая компонента оценки представлена соответствующим стандартным отклонением, за исключением компонент кватерниона. Последние представлены стандартными отклонениями  $\sigma_{\theta_i}$  компонент вектора бесконечно малого поворота  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Это также кусочно постоянные функции с промежутками постоянства  $(t_{n-1}, t_n]$ . В данном примере  $\sigma = \sigma_0 = 482\gamma$ .

Реконструкция движения на том же отрезке времени посредством решения системы (1.13) приведена на рис. 1.10–1.13. Эта серия рисунков организована аналогично рис. 1.6–1.9. В данном случае  $\sigma_0 = 1009\gamma$ . Точность аппроксимации измерений получилась несколько хуже, чем при использовании системы (1.14). Это видно и из сравнения рис. 1.12, 1.13 с рис. 1.8, 1.9. Указанный эффект обусловлен уменьшением числа измерений на полуинтервале  $(t_{n-1}, t_n]$  при переходе от варианта с системой (1.14) к варианту с системой (1.13) — длина этого интервала стала в  $2 \div 3$  раза короче. Вариант с системой (1.13)

оказался чувствителен к этому числу. Даже кратковременный сбой в поступлении измерений может привести к некоторому нарушению работы фильтра. На рис. 1.8 заметен выброс при  $t \approx 830$  мин. Он обусловлен именно малым числом измерений на соответствующем полуинтервале  $(t_{n-1}, t_n]$ .

Варьируя элементы матрицы  $L_n$ , можно заметно повысить точность аппроксимации измерений даже при использовании варианта с системой (1.13). В частности, в данном примере можно достичь значения  $\sigma_0 < 300\gamma$ . Но такое уменьшение сопровождается увеличением диапазона изменения параметров  $p_i, q_i$  в (1.1). Аналогичный результат получается, если вместо использования  $L_n$  принять  $P_n'^{-1} = \chi Z_n$ ,  $\chi \approx 1$ ,  $\chi < 1$  (см. выше). Здесь получается высокая точность аппроксимации и неоправданно большие (по сравнению с оценками метода наименьших квадратов) значения оцениваемых параметров уравнений (1.1).

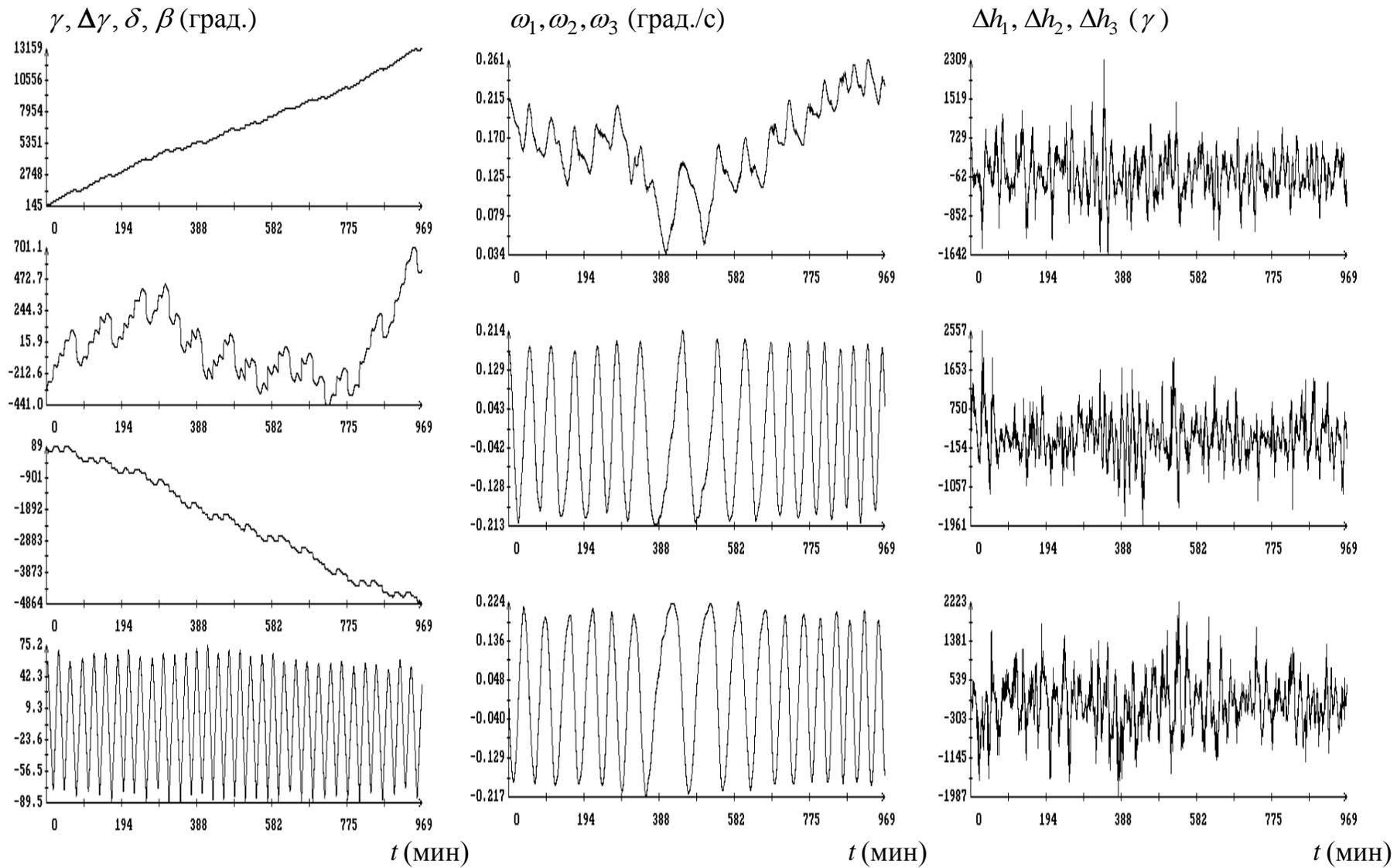


Рис. 1.6. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с,  $\sigma_0 = 481\gamma$ . Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

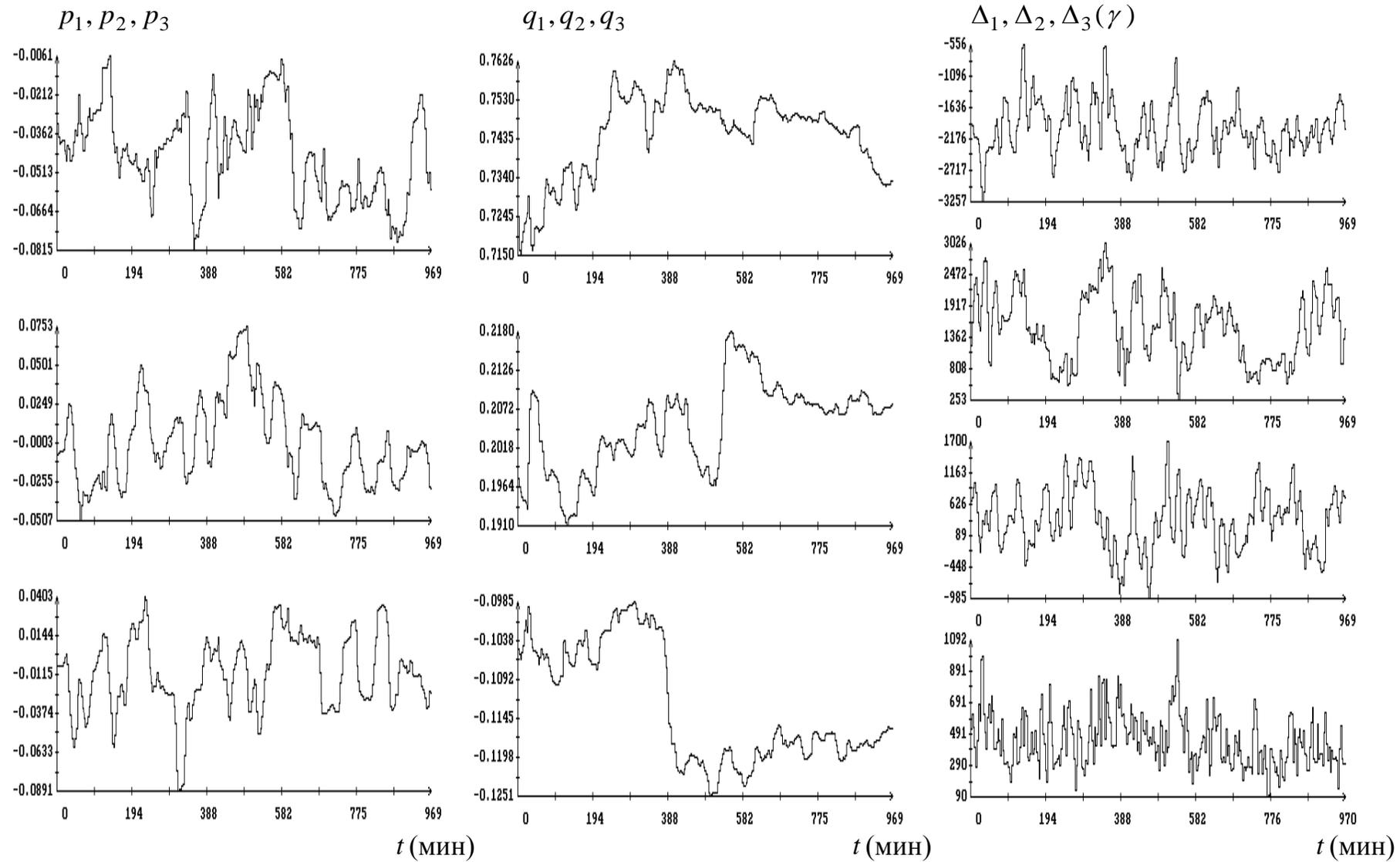


Рис. 1.7. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

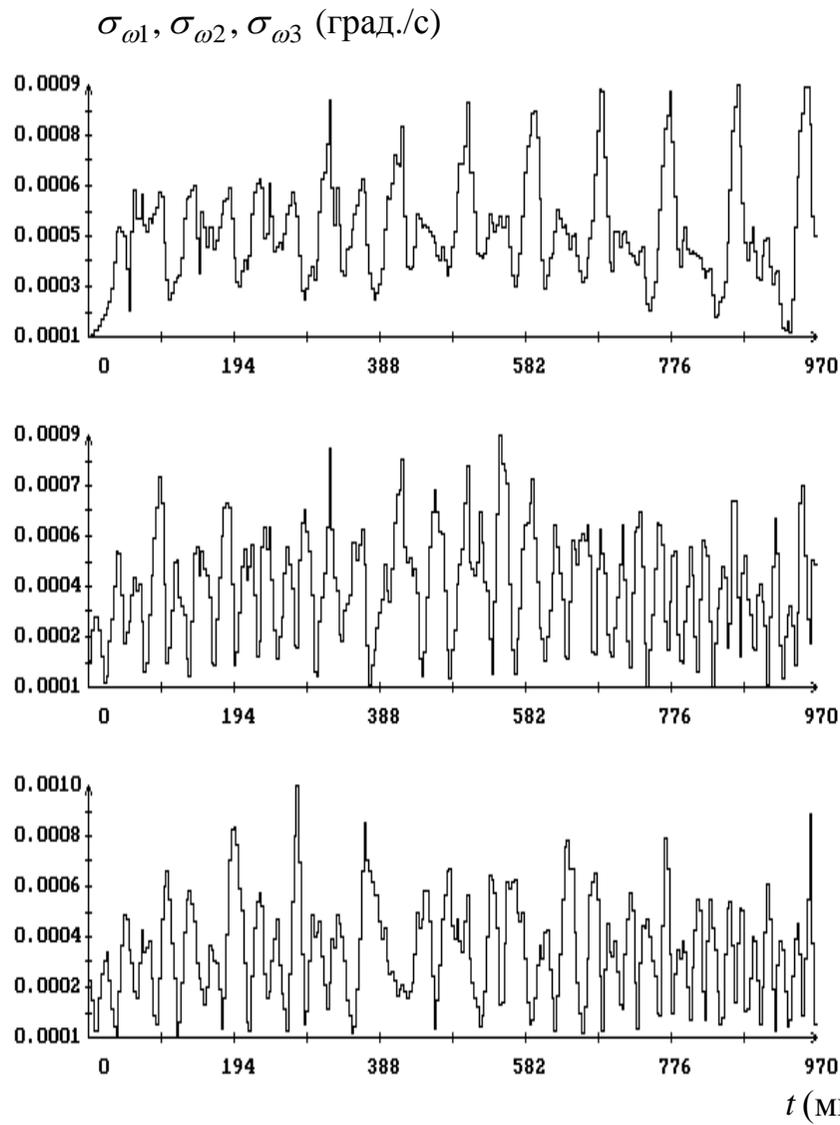
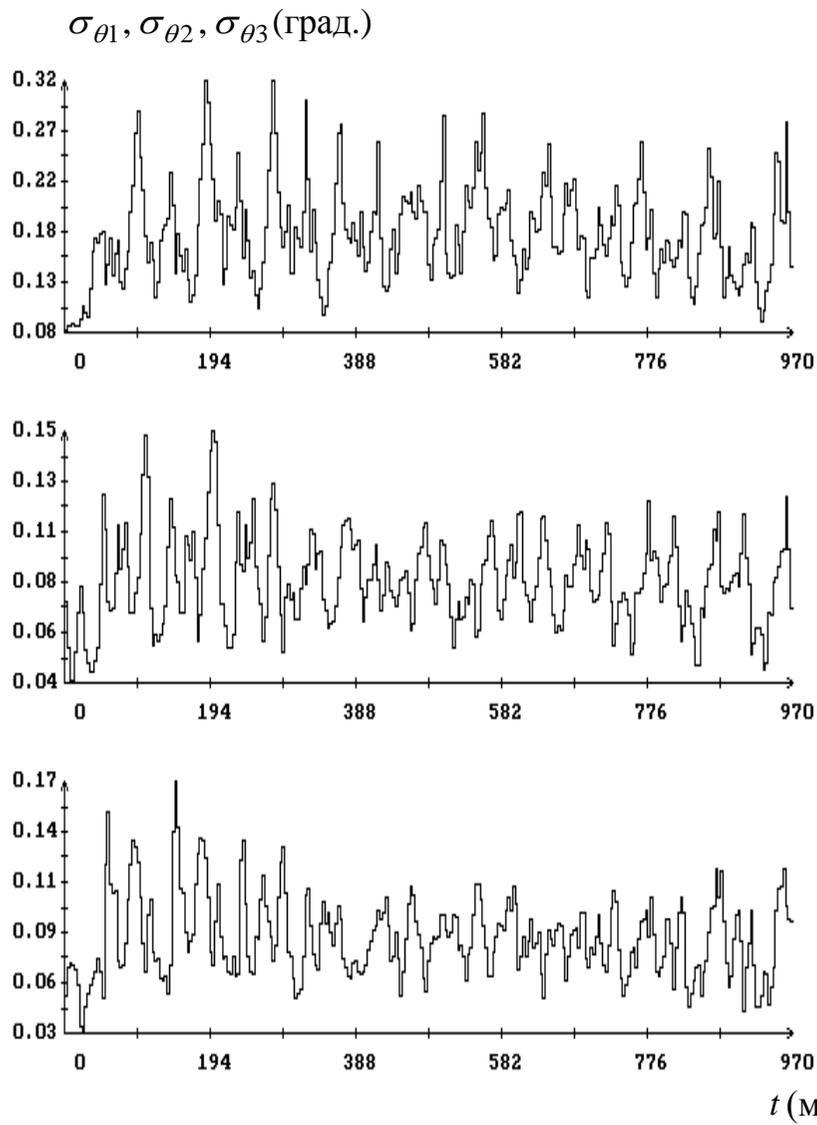


Рис. 1.8. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

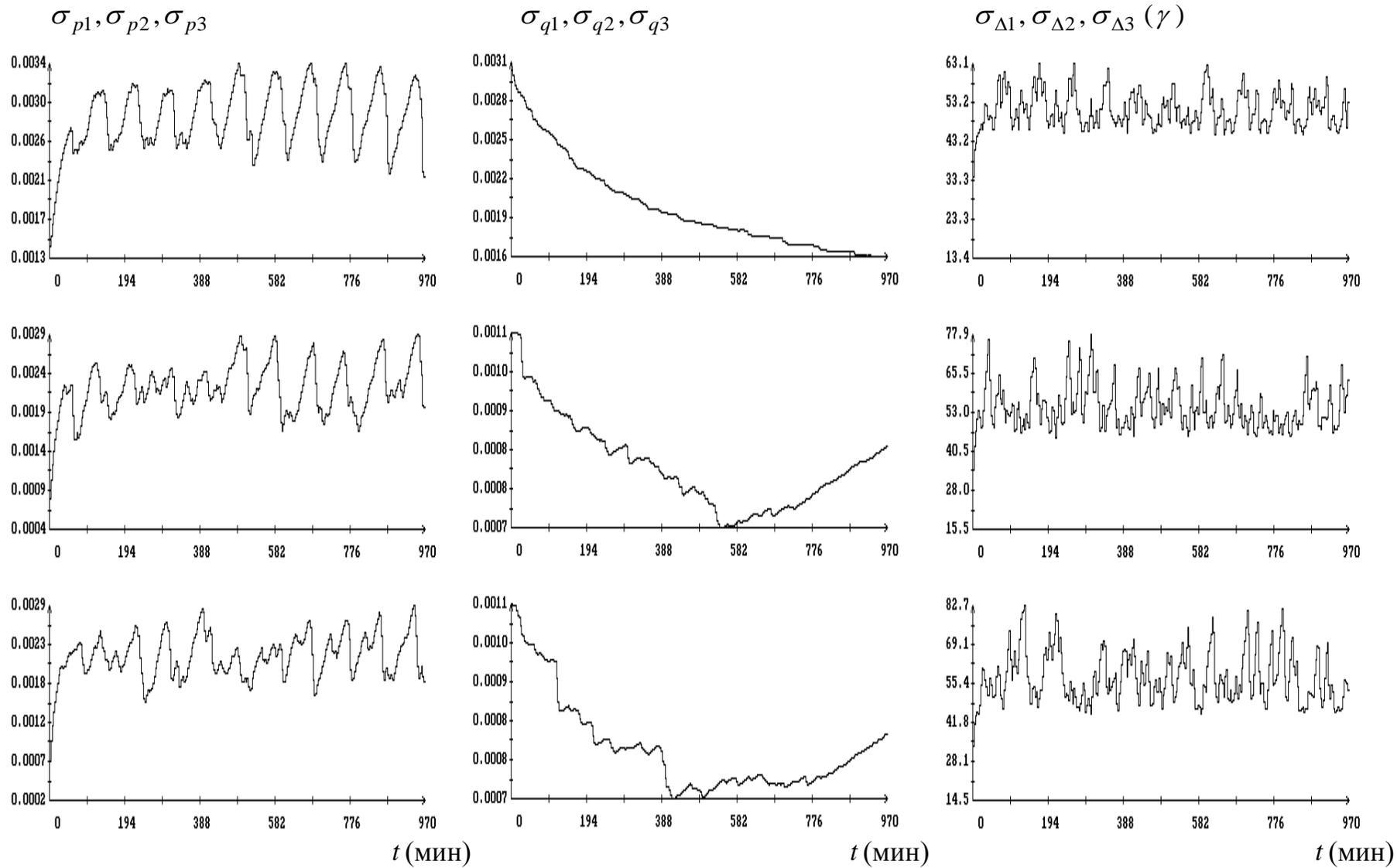


Рис. 1.9. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

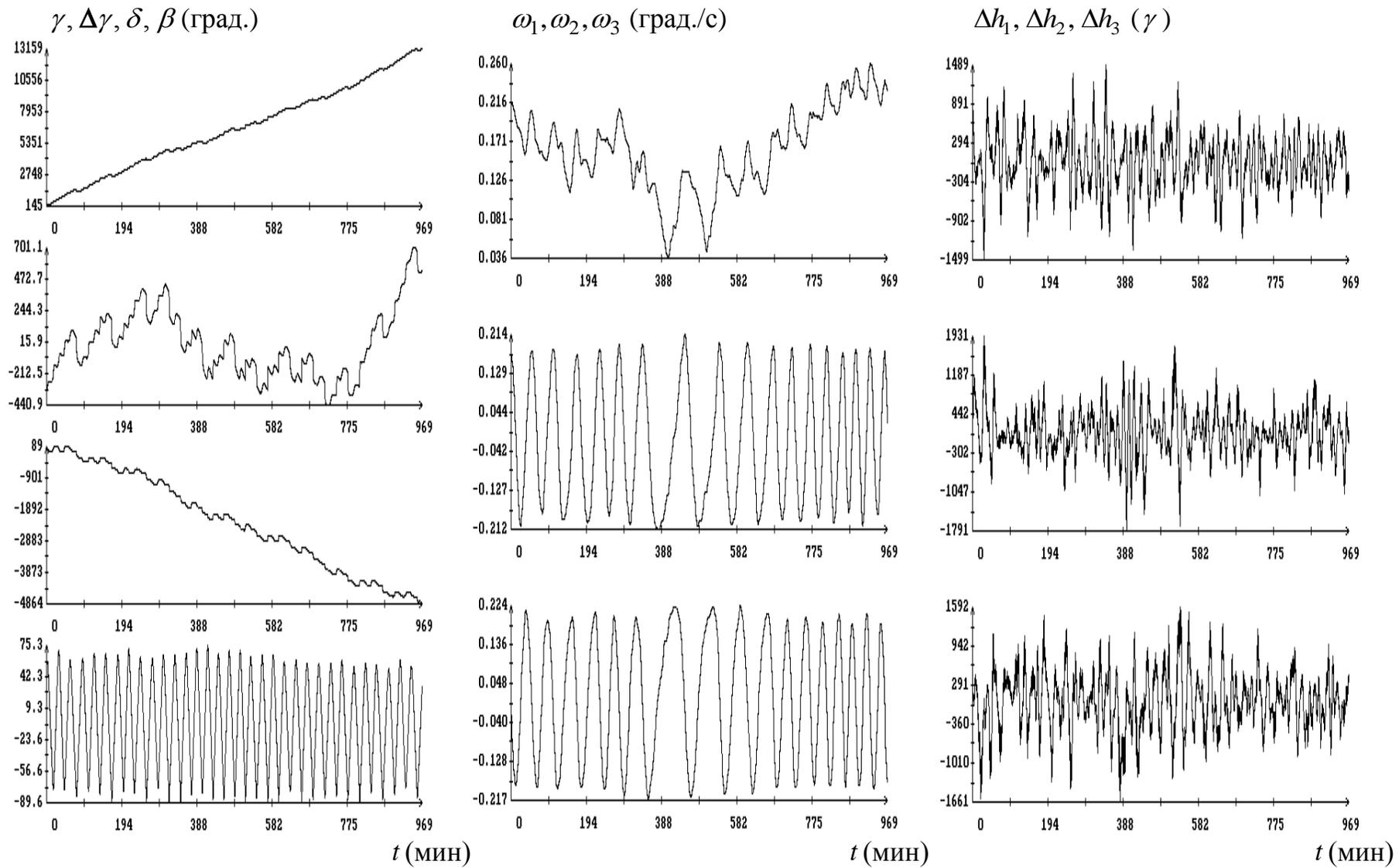


Рис. 1.10. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

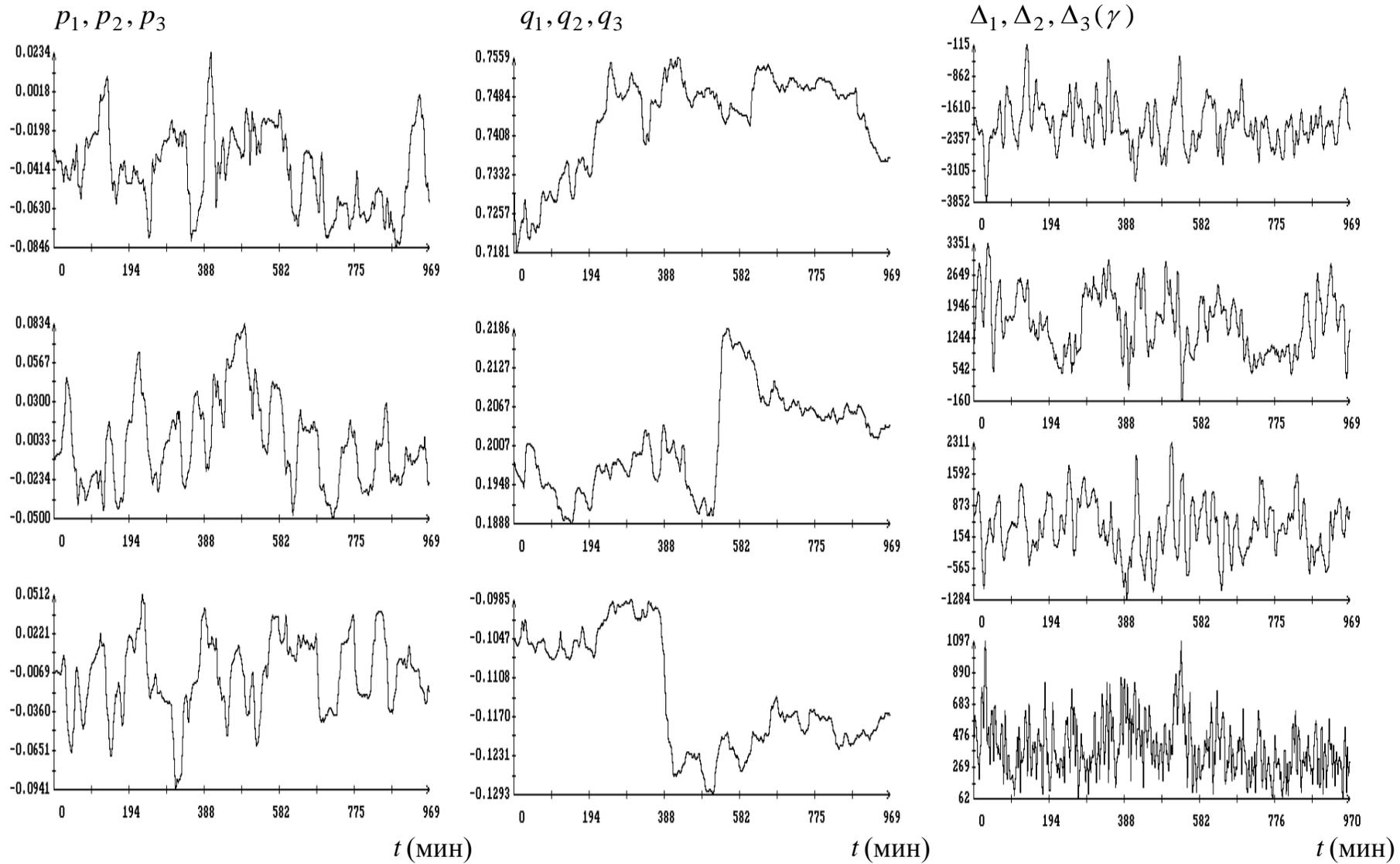


Рис. 1.11. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

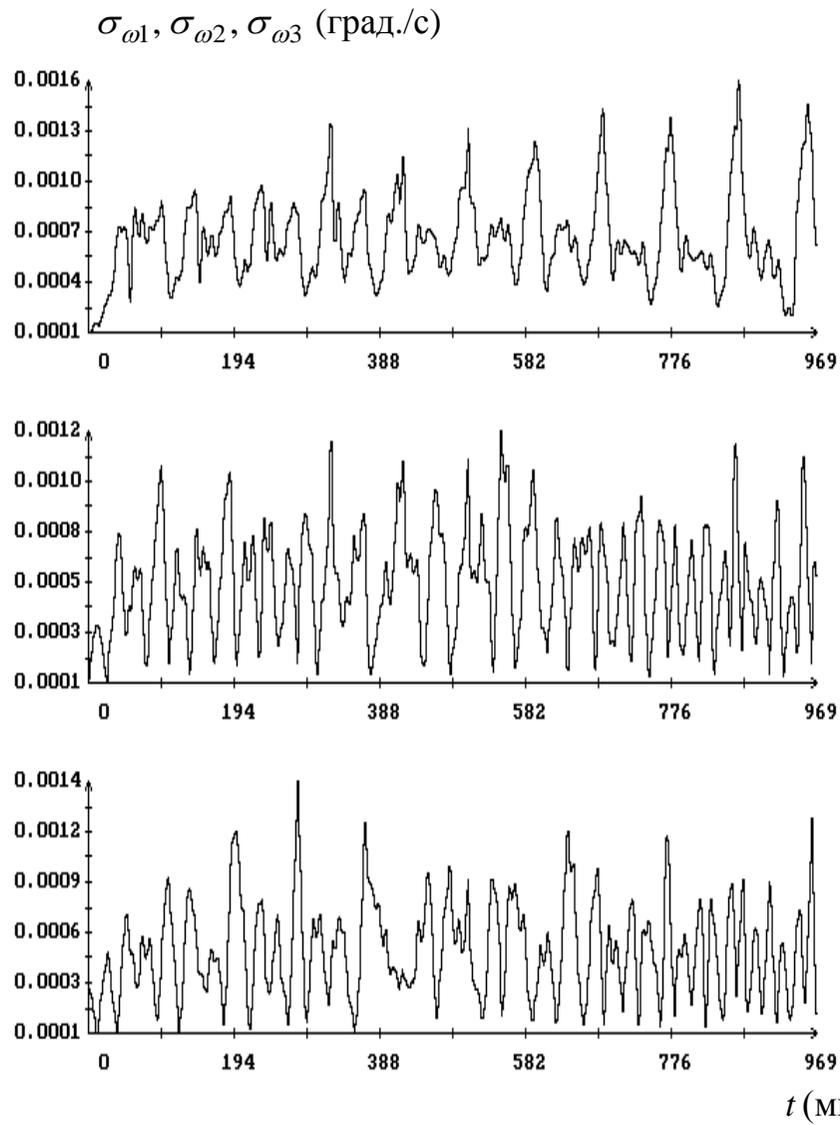
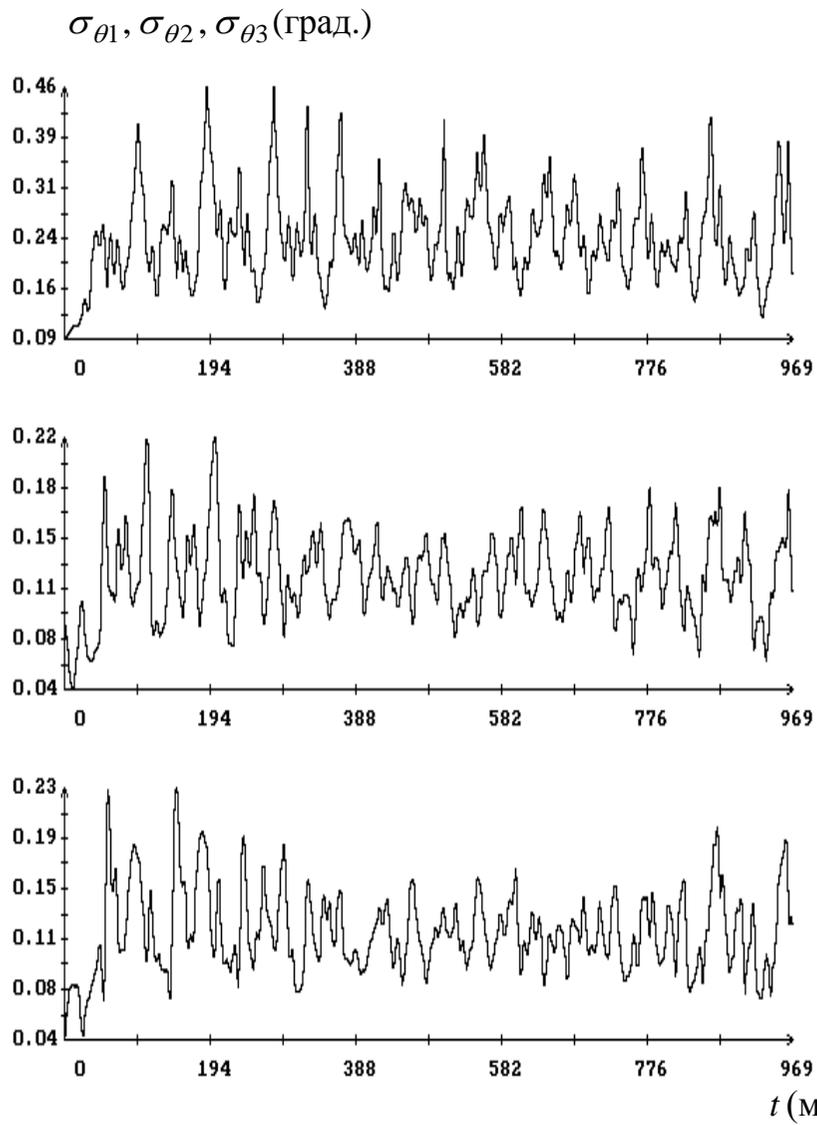


Рис. 1.12. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

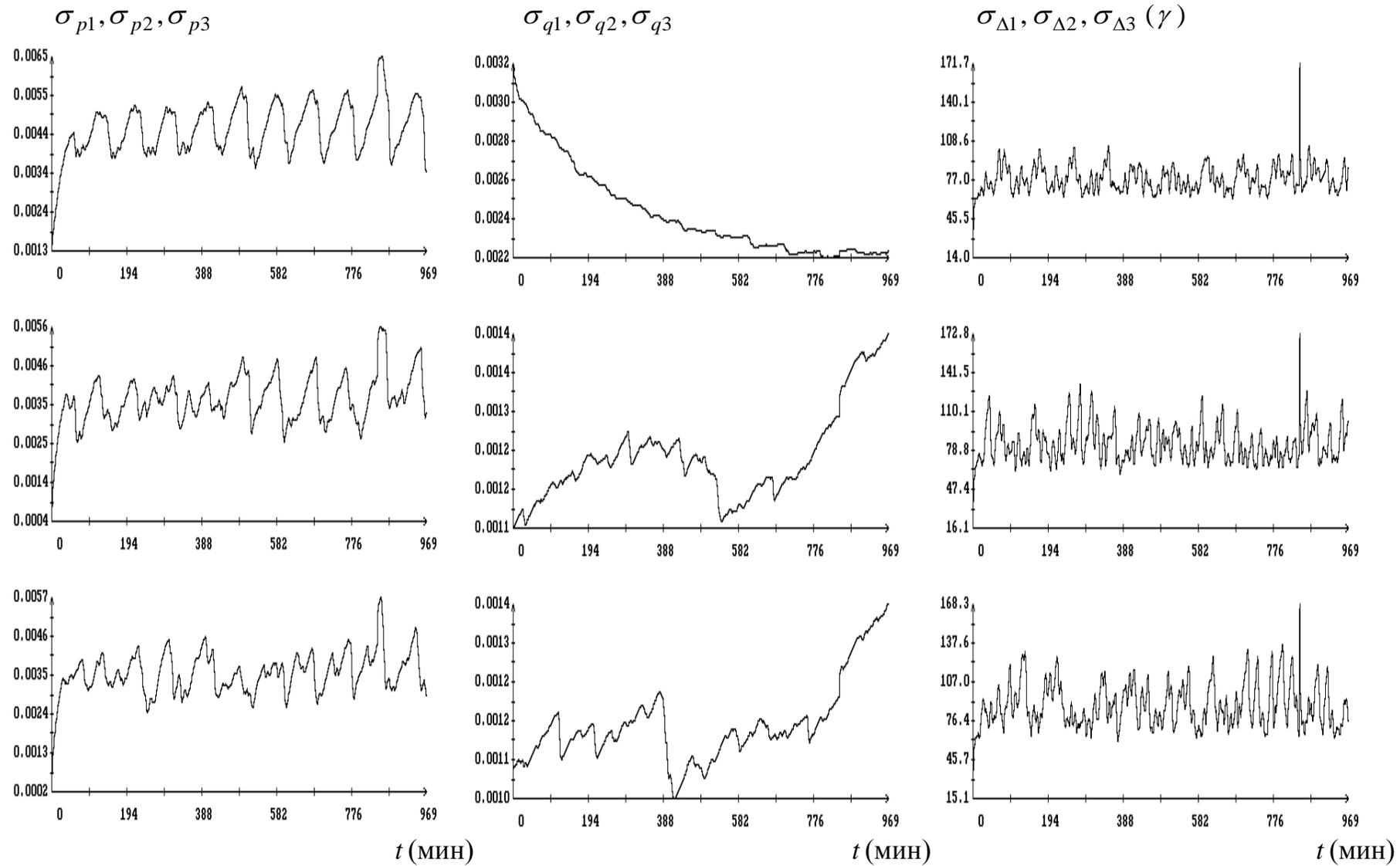


Рис. 1.13. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

## 1.7. Сглаживающий фильтр Калмана

Описанные выше процессы фильтрации позволяют реконструировать вращательное движение спутника по мере поступления данных измерений. Их можно использовать для реконструкции в реальном времени. Для апостериорной реконструкции движения по всей полученной совокупности данных обычно используют другие алгоритмы. Задача апостериорной реконструкции формулируется следующим образом. Пусть на некотором отрезке времени были получены измерения  $y_n$  при  $n = 1, 2, \dots, N$ , и по мере поступления этих измерений по формулам (1.10) рассчитаны величины  $x'_n$ ,  $P'_n$ ,  $\hat{x}_n$  и  $P_n$ . После того как процесс получения измерений был завершен возникает задача уточнения оценок  $\hat{x}_n$  и  $P_n$  с использованием всей имеющейся измерительной информации. Уточненную оценку вектора  $x_n$  обозначим  $\tilde{x}_n$ , ковариационную матрицу новой оценки обозначим  $Q_n$ . Ниже эта задача решается с помощью алгоритма, основанного на результатах [35]. Приведем, следуя [29], вывод основных соотношений этого алгоритма в терминах модели (1.9) и предположений п. 1.5. Будем основываться на формальных преобразованиях условных плотностей вероятностей.

Найдем  $p(x_n|Y_N)$ . По определению плотности условной вероятности имеем

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1}|Y_N) &= p(x_n|x_{n+1}, Y_N)p(x_{n+1}|Y_N) = p(x_n|x_{n+1}, Y_n)p(x_{n+1}|Y_N), \\ p(x_n|x_{n+1}, Y_n) &= \frac{p(x_n, x_{n+1}, Y_n)}{p(x_{n+1}, Y_n)} = \frac{p(x_n, x_{n+1}, Y_n)}{p(x_n, Y_n)} \cdot \frac{p(x_n, Y_n)}{p(Y_n)} \cdot \frac{p(Y_n)}{p(x_{n+1}, Y_n)} = \\ &= \frac{p(x_{n+1}|x_n, Y_n)p(x_n|Y_n)}{p(x_{n+1}|Y_n)} = \frac{p(x_{n+1}|x_n)p(x_n|Y_n)}{p(x_{n+1}|Y_n)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$p(x_n, x_{n+1}|Y_N) = \frac{p(x_{n+1}|x_n)p(x_n|Y_n)p(x_{n+1}|Y_N)}{p(x_{n+1}|Y_n)}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \ln p(x_n, x_{n+1}|Y_N) &= \ln p(x_{n+1}|x_n) + \ln p(x_n|Y_n) + \\ &+ \ln p(x_{n+1}|Y_N) - \ln p(x_{n+1}|Y_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}(x_{n+1} - A_{n+1}x_n)^T L_{n+1}^{-1}(x_{n+1} - A_{n+1}x_n) - \\
&\quad -\frac{1}{2}(x_n - \hat{x}_n)^T P_n^{-1}(x_n - \hat{x}_n) - \\
&\quad -\frac{1}{2}(x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1})^T Q_{n+1}^{-1}(x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}) + \\
&\quad +\frac{1}{2}(x_{n+1} - x'_{n+1})^T P'_{n+1}{}^{-1}(x_{n+1} - x'_{n+1}) = \\
&= -\frac{1}{2}x_{n+1}^T(L_{n+1}^{-1} + Q_{n+1}^{-1} - P'_{n+1}{}^{-1})x_{n+1} + \\
&\quad + x_{n+1}^T L_{n+1}^{-1} A_{n+1} x_n - \\
&\quad -\frac{1}{2}x_n^T(A_{n+1}^T L_{n+1}^{-1} A_{n+1} + P_n^{-1})x_n + x_n^T P_n^{-1} \hat{x}_n + \dots
\end{aligned}$$

Здесь в последнем выражении выписаны только члены второй степени по компонентам векторов  $x_n$ ,  $x_{n+1}$  и члены первой степени по компонентам вектора  $x_n$ . Их знание достаточно, чтобы вычислить интеграл в формуле

$$p(x_n|Y_N) = \int p(x_n, x_{n+1}|Y_N) dx_{n+1},$$

где интегрирование выполняется по всему фазовому пространству системы.

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\begin{aligned}
I(z_2) &= \int \exp\left[-\frac{1}{2}\Phi(z_1, z_2)\right] dz_1, \\
\Phi(z_1, z_2) &= (z_1 - \mu_1)^T S_{11}(z_1 - \mu_1) + (z_2 - \mu_2)^T S_{22}(z_2 - \mu_2) + \\
&\quad + 2(z_1 - \mu_1)^T S_{12}(z_2 - \mu_2),
\end{aligned}$$

где  $S_{ij}$  и  $\mu_i$  постоянные матрицы и векторы. Квадратичную форму  $\Phi(z_1, z_2)$  представим в виде

$$\begin{aligned}
\Phi(z_1, z_2) &= [z_1 - \mu_1 + S_{11}^{-1}S_{12}(z_2 - \mu_2)]^T S_{11} [z_1 - \mu_1 + S_{11}^{-1}S_{12}(z_2 - \mu_2)] + \\
&\quad + (z_2 - \mu_2)^T (S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12})(z_2 - \mu_2).
\end{aligned}$$

С использованием последней формулы получим

$$I(z_2) \sim \exp\left[-\frac{1}{2}(z_2 - \mu_2)^T (S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12})(z_2 - \mu_2)\right].$$

Приняв  $z_1 = x_{n+1}$ ,  $z_2 = x_n$  и сравнив  $\ln p(x_{n+1}, x_n|Y_N)$  с  $\Phi(z_1, z_2)$ , найдем

$$\begin{aligned}
S_{11} &= L_{n+1}^{-1} + Q_{n+1}^{-1} - P'_{n+1}{}^{-1}, \quad S_{22} = A_{n+1}^T L_{n+1}^{-1} A_{n+1} + P_n^{-1}, \\
S_{12} &= -L_{n+1}^{-1} A_{n+1}, \quad S_{12}^T \mu_1 + S_{22} \mu_2 = P_n^{-1} \hat{x}_n, \quad \mu_1 = \tilde{x}_{n+1}, \quad \mu_2 = \tilde{x}_n.
\end{aligned}$$

Согласно установленному соответствию

$$\begin{aligned}\tilde{x}_n &= S_{22}^{-1}P_n^{-1}\hat{x}_n - S_{22}^{-1}S_{12}^T\tilde{x}_{n+1}, \\ Q_n &= (S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12})^{-1} = S_{22}^{-1} + S_{22}^{-1}S_{12}^T G^{-1} S_{12} S_{22}^{-1},\end{aligned}$$

где  $G = S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T$ . Прямые вычисления дают

$$S_{22}^{-1} = P_n - P_n A_{n+1}^T P_{n+1}'^{-1} A_{n+1} P_n, \quad S_{22}^{-1} S_{12}^T = -P_n A_{n+1}^T P_{n+1}'^{-1}, \quad G = Q_n^{-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\tilde{x}_n &= \hat{x}_n + P_n A_{n+1}^T P_{n+1}'^{-1} (\tilde{x}_{n+1} - A_{n+1} \hat{x}_n), \\ Q_n &= P_n + P_n A_{n+1}^T P_{n+1}'^{-1} (Q_{n+1} - P_{n+1}') P_{n+1}'^{-1} A_{n+1} P_n.\end{aligned}\tag{1.17}$$

При использовании формул (1.17) принимается  $\tilde{x}_N = \hat{x}_N$ ,  $Q_N = P_N$ .

Перейдем к нелинейной модели (1.12). Рекуррентные соотношения, позволяющие осуществлять сглаживание, получаются эвристической модификацией соотношений (1.17). Оценка  $\tilde{x}_n$ , выражаемая первой формулой (1.17), минимизирует по  $x_n$  выражение

$$(x_n - \hat{x}_n)^T P_n^{-1} (x_n - \hat{x}_n) + (\tilde{x}_{n+1} - A_{n+1} x_n)^T L_{n+1}^{-1} (\tilde{x}_{n+1} - A_{n+1} x_n),$$

т.е. является оценкой метода наименьших квадратов. По аналогии и с учетом малости случайных величин в модели (1.9) оценку вектора  $x_n$  в рамках этой модели будем искать из условия минимума функции

$$\begin{aligned}g(x_n) &= (x_n - \hat{x}_n)^T P_n^{-1} (x_n - \hat{x}_n) + \\ &+ [\tilde{x}_{n+1} - F_{n+1}(x_n)]^T L_{n+1}^{-1} [\tilde{x}_{n+1} - F_{n+1}(x_n)].\end{aligned}$$

Минимизация функции  $g(x_n)$  выполняется методом Гаусса–Ньютона, начальным приближением служат точка  $\hat{x}_n$ . Нормальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}&(P_n^{-1} + A_{n+1}^T L_{n+1}^{-1} A_{n+1}) \Delta x_n = \\ &= A_{n+1}^T L_{n+1}^{-1} [\tilde{x}_{n+1} - F_{n+1}(x_n^*)] - P_n^{-1} (x_n^* - \hat{x}_n), \\ &\Delta x_n = x_n - x_n^*, \quad A_{n+1} = \frac{\partial F_{n+1}(x_n^*)}{\partial x}.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Здесь  $x_n^*$  — имеющееся приближенное значение величины  $\tilde{x}_n$ , которому после решения системы (1.18) присваивается значение  $x_n^* + \Delta x_n$ . Итерационное уточнение  $x_n^*$  прекращается, когда норма поправки  $\|\Delta x_n\|$  станет приемлемо малой. Тогда принимается  $\tilde{x}_n = x_n^*$ .

Процесс вычисления оценок  $\tilde{x}_n, Q_n$  идет в направлении от точки  $t_N$  к точке  $t_1$ . При переходе от точки  $t_{n+1}$  к точке  $t_n$  матрица и правая часть системы (1.18) находятся интегрированием уравнений (1.1') в обратном направлении — от точки  $t_n$  к точке  $t_{n+1}$ . Расчет матрицы  $Q_n^{-1}$  выполняется по второй формуле (1.17), где  $A_{n+1}$  имеет вид (1.18). В начале процесса  $\tilde{x}_N = \hat{x}_N, Q_N = P_N$ .

Чтобы реализовать этот процесс, приходится хранить в памяти компьютера все вычисленные в процессе фильтрации "вперед" величины  $\hat{x}_n, P'_n$  и  $P_n$ . В [35] приведены рекуррентные формулы, которые позволяют вычислить матрицы  $P'_n$  и  $P_n$  в процессе фильтрации "назад". Однако применение этих формул часто дает отрицательно определенные матрицы  $Q_n$  (возможно сказывается нелинейность задачи), поэтому их использование непрактично.

## 1.8. Примеры сглаживания

Результаты сглаживания приведены на рис. 1.14–1.21. Серия рис. 1.14–1.17 получена для варианта, в котором фильтрация "вперед" выполнена с использованием системы (1.14), серия рис. 1.18–1.21 относится к варианту, в котором фильтрация "вперед" выполнена с использованием системы (1.13). Как показывает сравнение этих серий рисунков, один и тот же метод сглаживания при использовании разной (хотя очень похожей) исходной информации дает заметно различающиеся результаты. Однако микроускорения для обеих реконструкций оказываются практически одинаковыми.

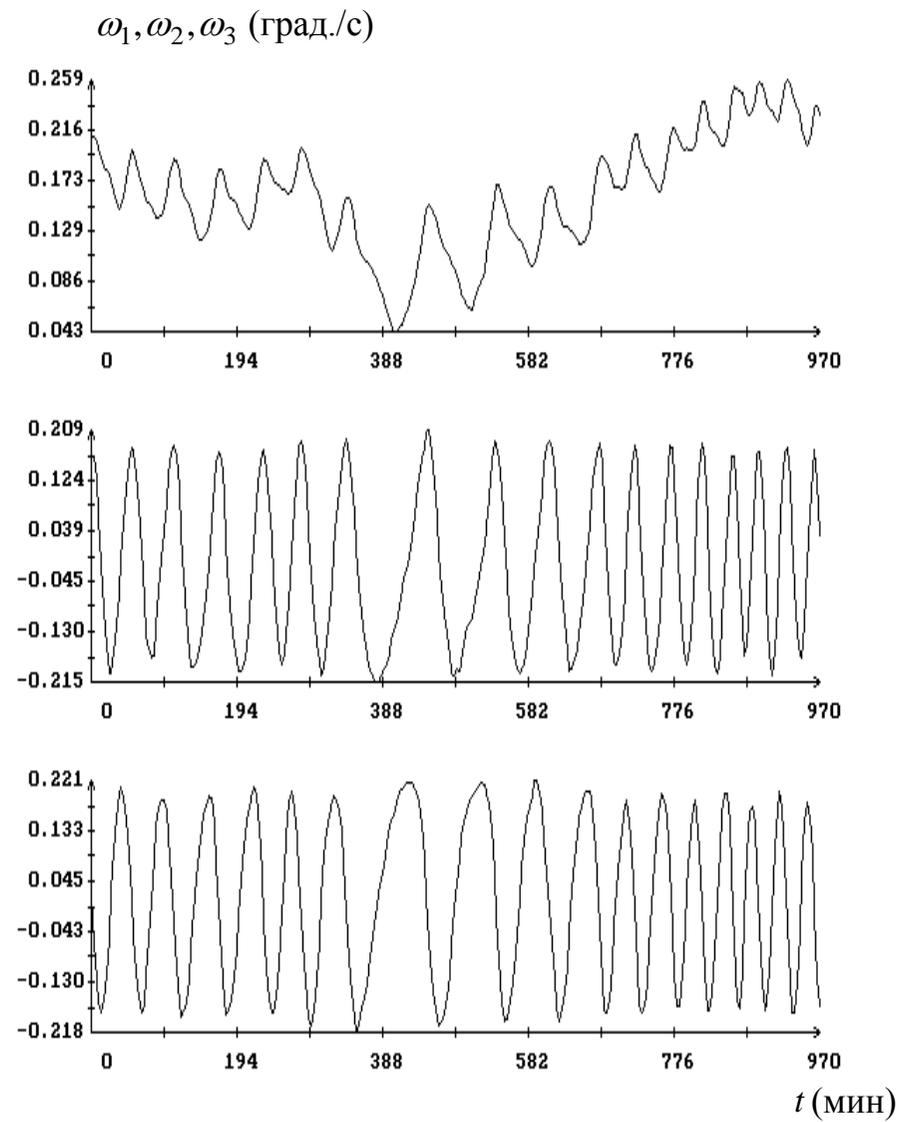
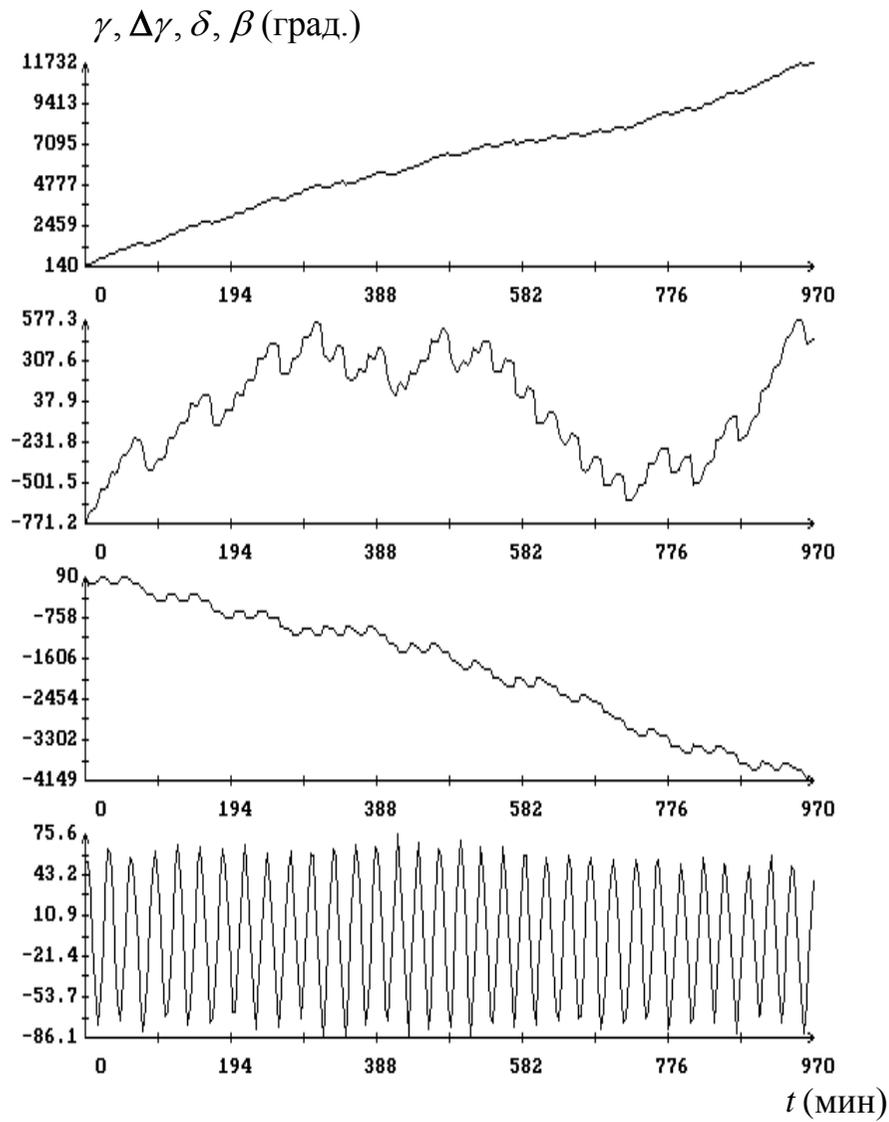


Рис. 1.14. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

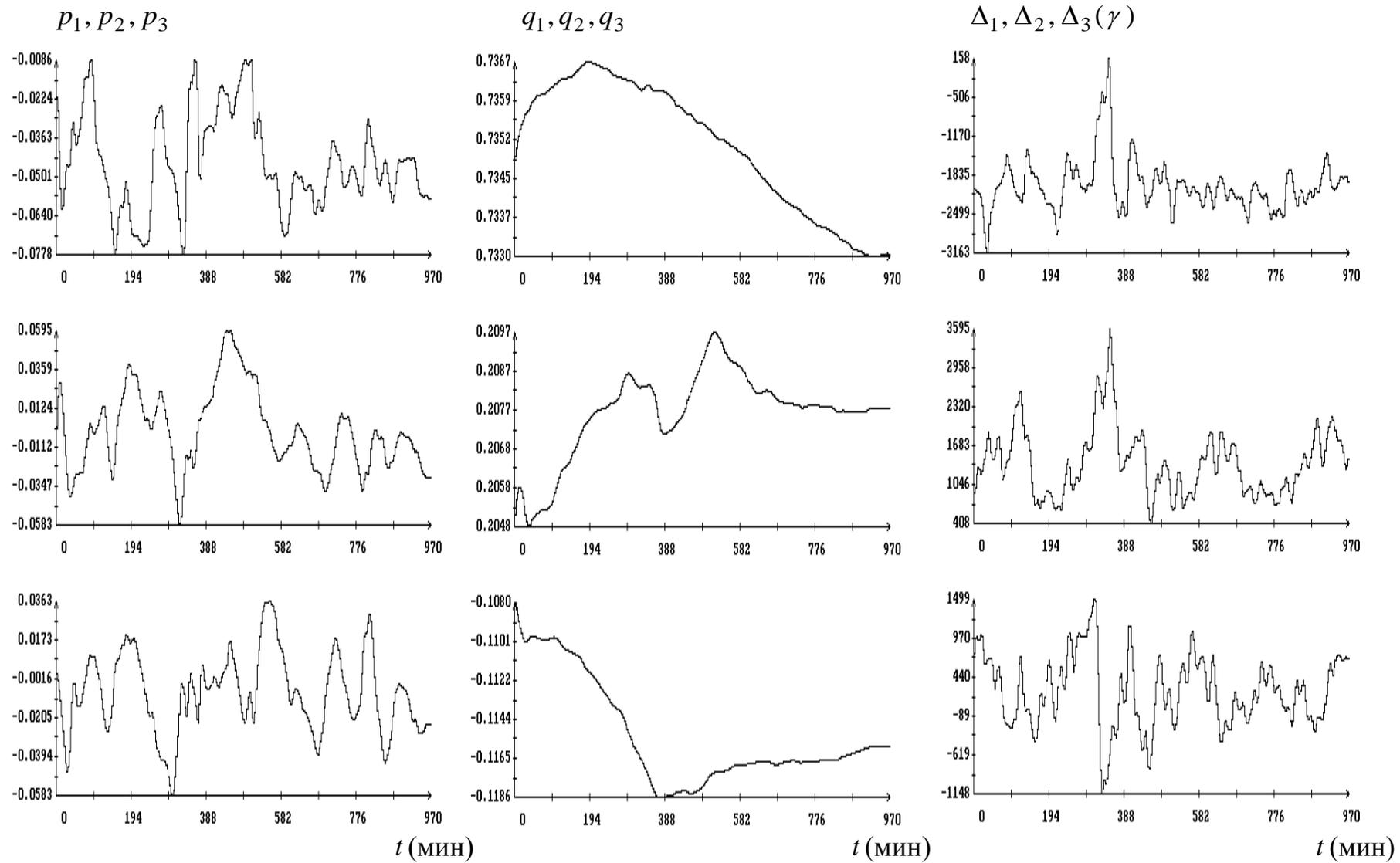


Рис. 1.15. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

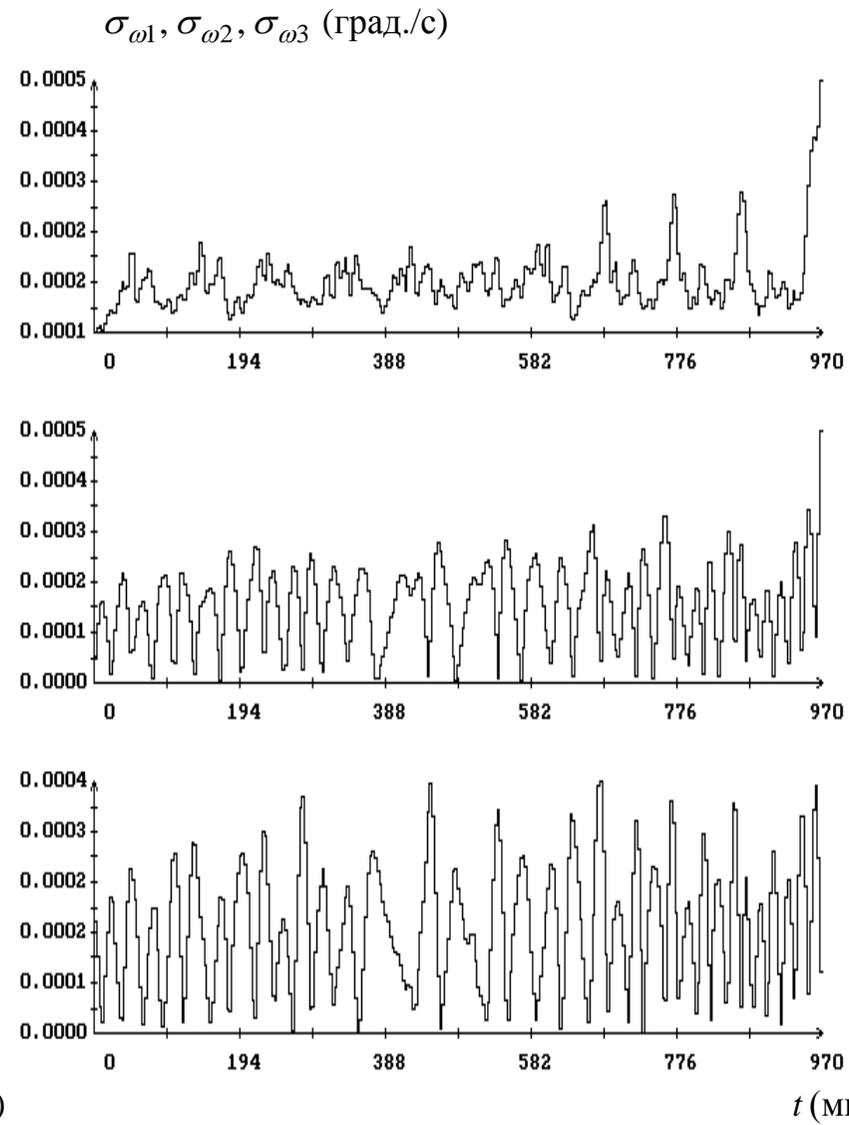
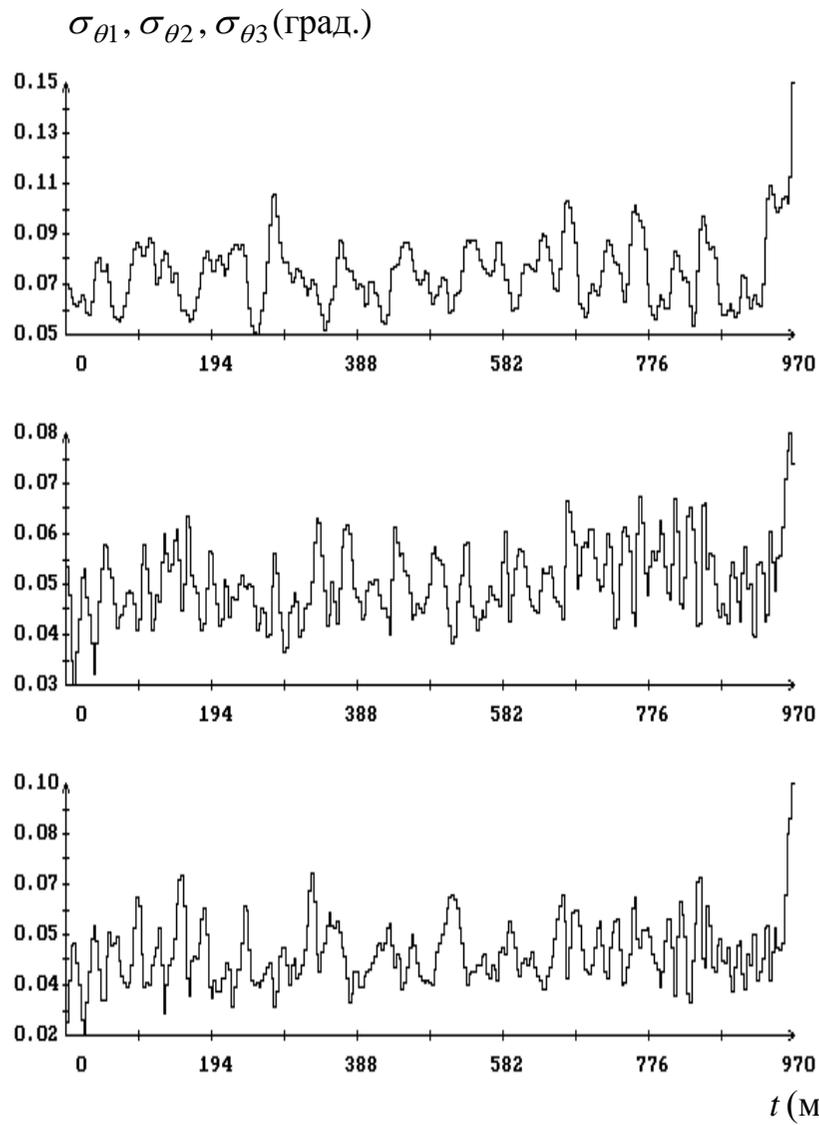


Рис. 1.16. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

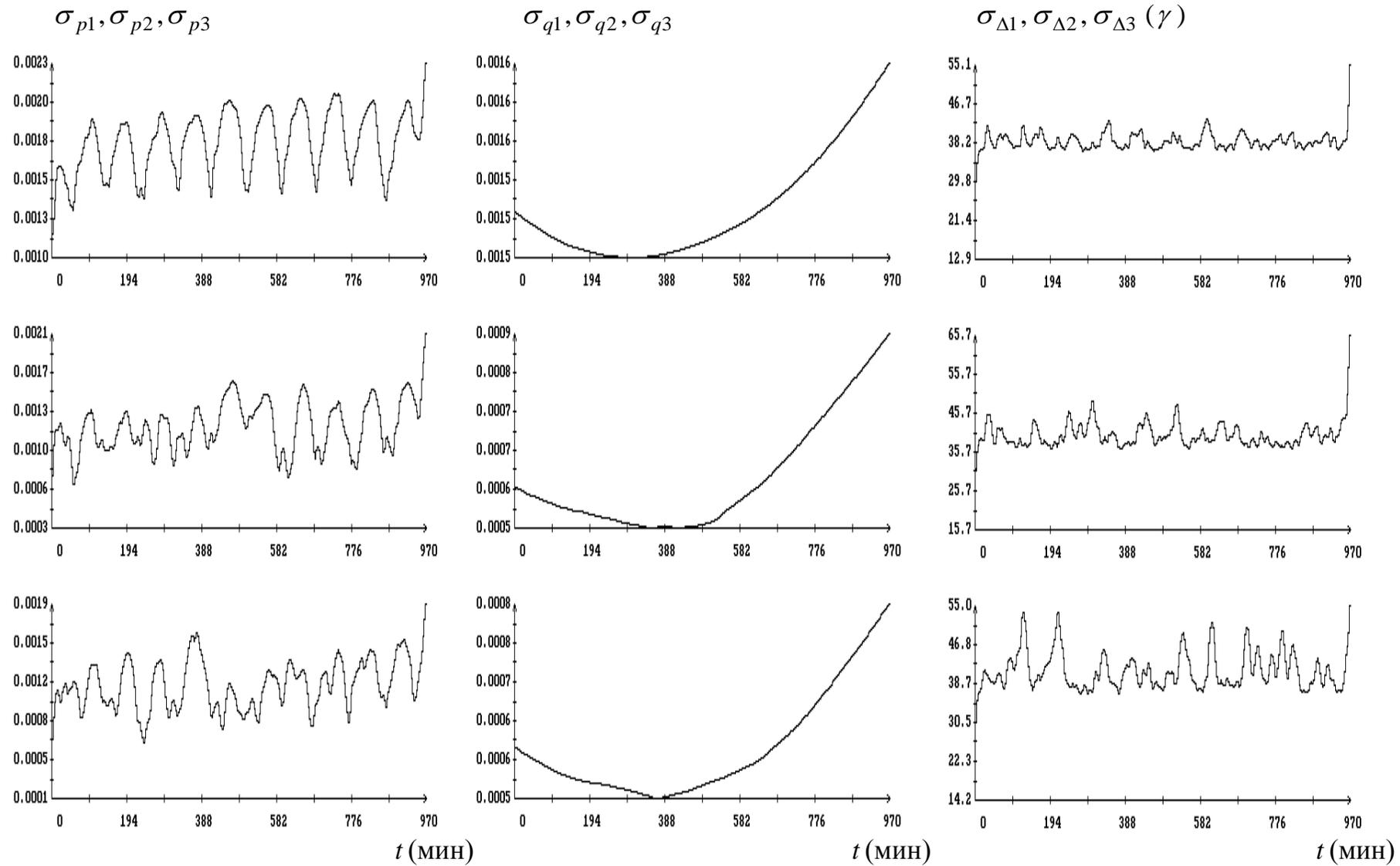


Рис. 1.17. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

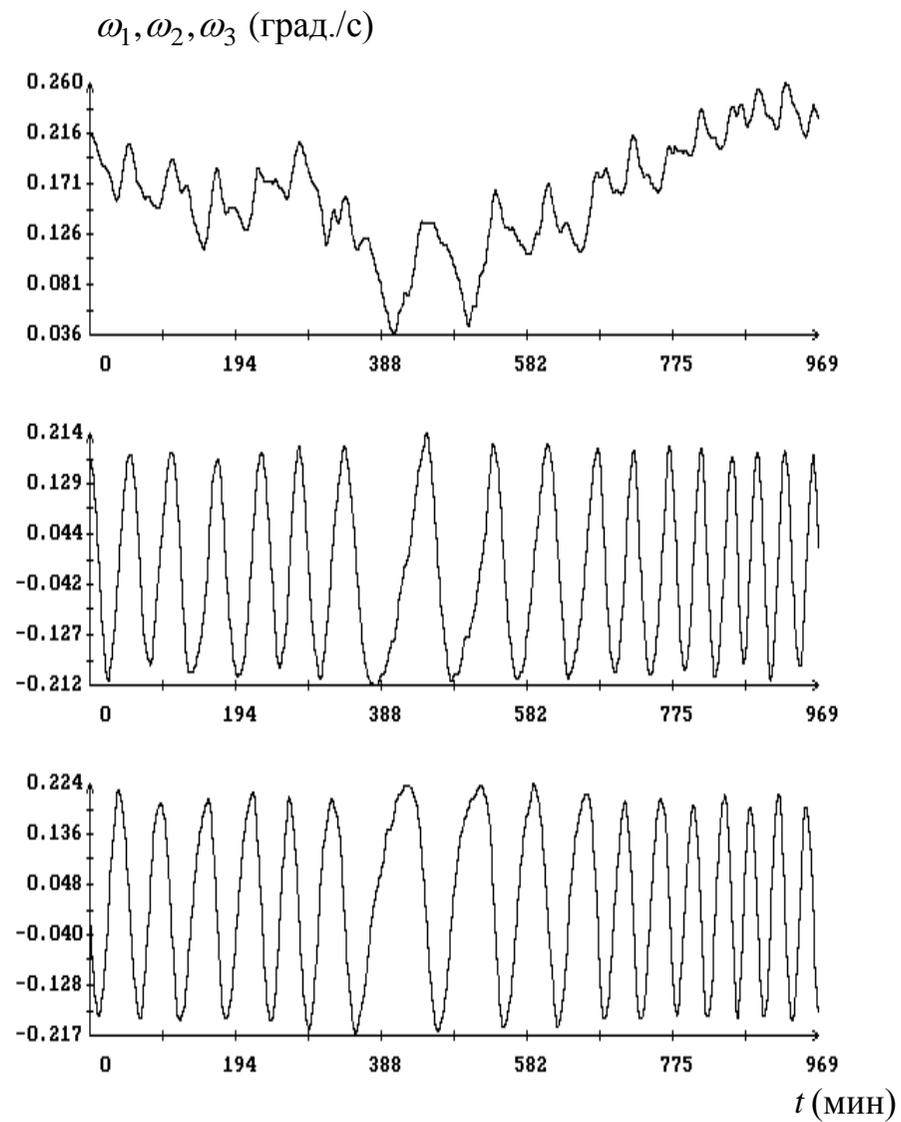
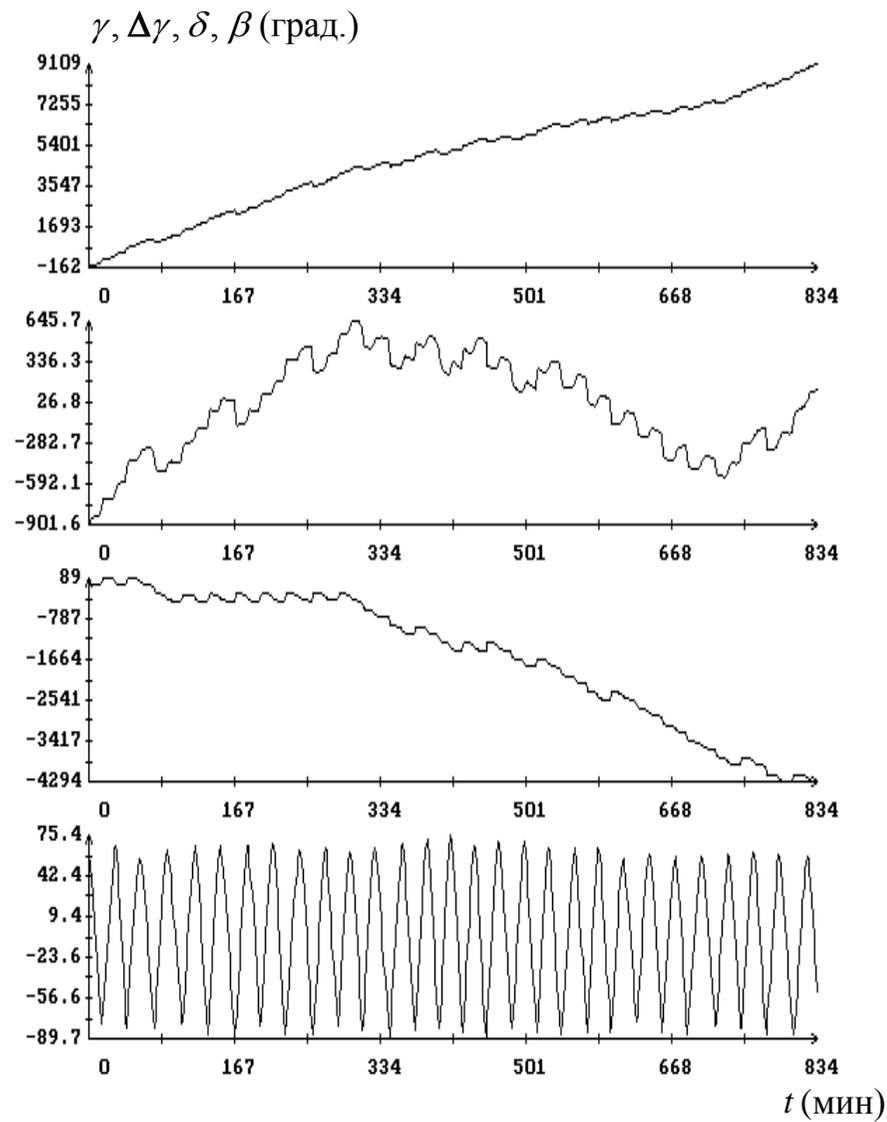


Рис. 1.18. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

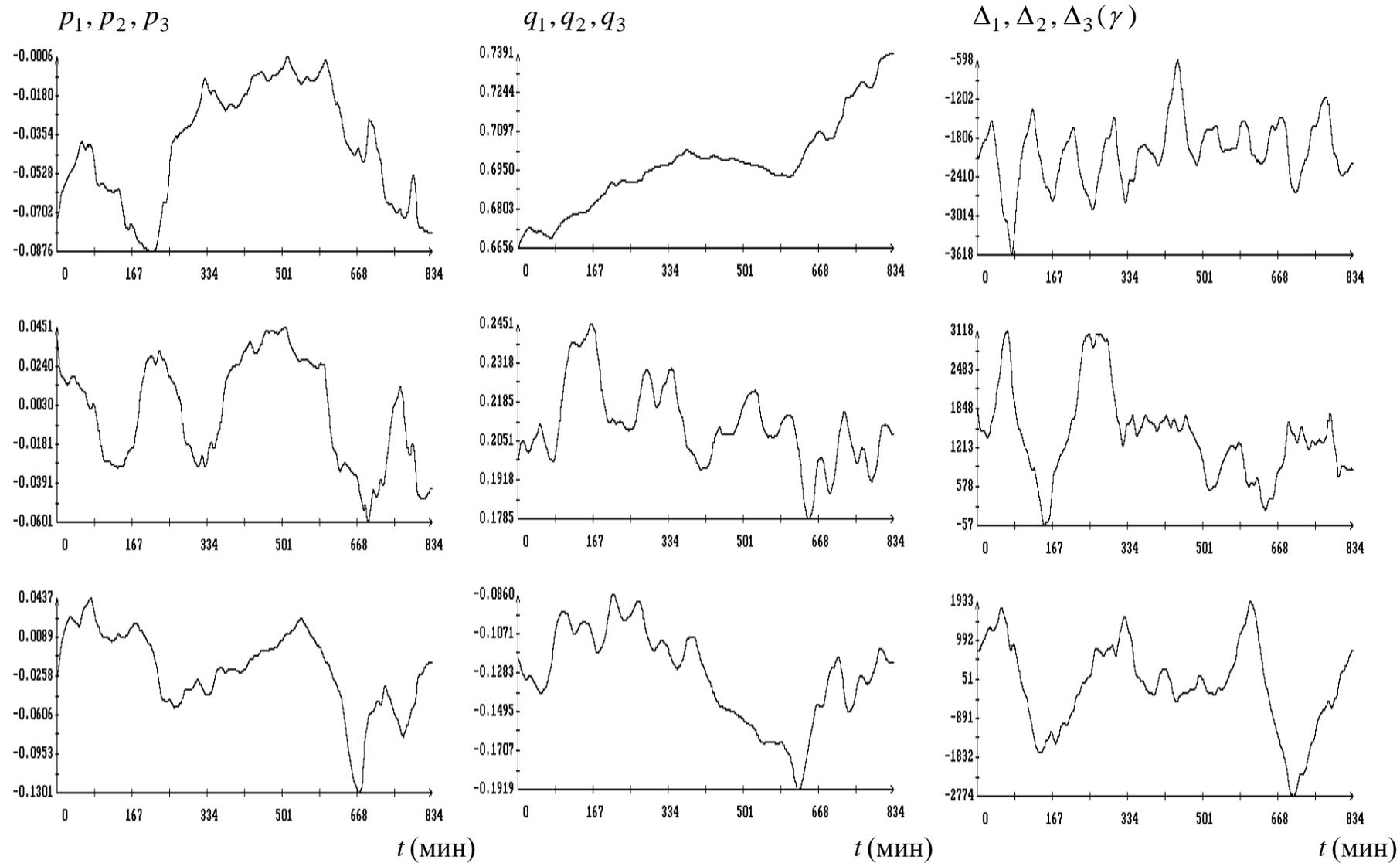


Рис. 1.19. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.



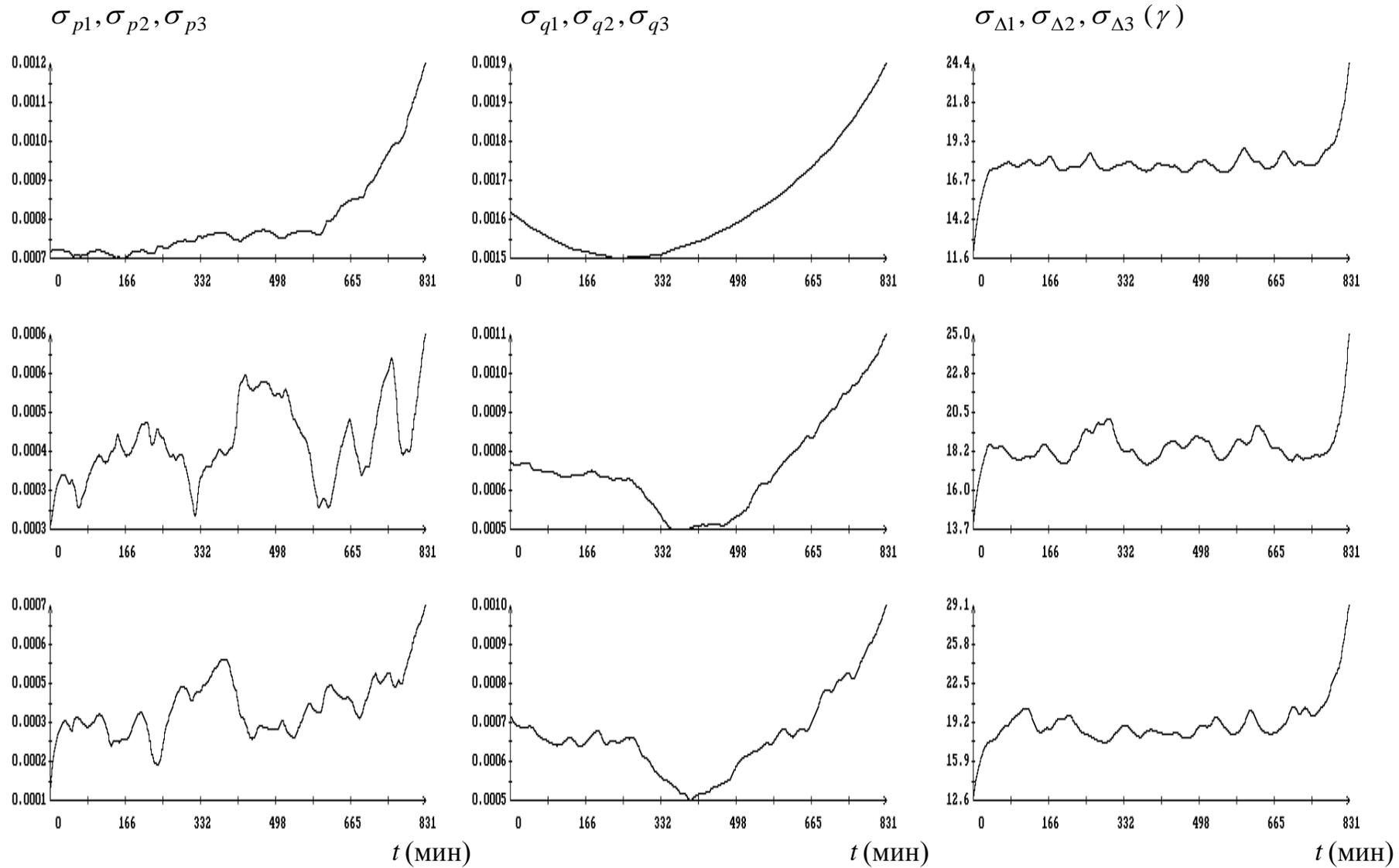


Рис. 1.21. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

## Глава 2

# Определение вращательного движения спутника по данным измерений МПЗ и вектора угловой скорости

## 2.1. Введение

В главе 1 применялась методика, основанная на полных (динамических и кинематических) уравнениях вращательного движения спутника. Эти уравнения содержат явные выражения моментов приложенных к спутнику внешних сил, и предназначены для описания неуправляемого движения. Такие выражения могут оказаться не достаточно точными, поэтому желательно проверить правильность реконструкции движения другими средствами. Проверку можно выполнить, обработав совместно измерения датчиков угловой скорости и бортовых магнитометров с помощью кинематической модели вращательного движения спутника. В основе этой модели лежат кинематические уравнения вращательного движения для компонент кватерниона  $\mathbf{Q}$  (см. п. 1.2). Входящие в эти уравнения компоненты угловой скорости строятся по данным измерений. Принципиальная возможность построения методики для определения вращательного движения на основе только кинематических уравнений известна давно. В частности, в [36] с помощью математического моделирования показано, что измерения напряженности МПЗ и угловой скорости КА позволяют определять движение последнего в реальном времени. В данной главе описаны два подхода к реконструкции вращательного движения спутника: интегральная статистическая методика, использующая метод наименьших квадратов, и методика, использующая фильтрацию Калмана. С помощью методики, основанной на методе наименьших квадратов, было реконструировано вращательное движение спутников *Фотон-12* [37, 38], *Фотон М-2* [39] и *Фотона М-3* [40, 41]. В диссер-

тационной работе приведен обновленный вариант этой методики. В ее рамках данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Эти данные сглаживаются тригонометрическими полиномами, которые подставляются в кинематические уравнения для компонент кватерниона, задающего ориентацию связанной со спутником системы координат относительно гринвичской системы. Полученные таким образом уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения спутника. Измерения МПЗ выбираются внутри отрезка времени, на котором определены эти уравнения. Решение кинематических уравнений вращательного движения, реконструирующее фактическое движение спутника, находится из условия наилучшего, в смысле метода наименьших квадратов, согласования данных измерений вектора напряженности МПЗ с его расчетными значениями. Методика, использующая фильтрацию Калмана, разработана на перспективу. В дальнейшем полет спутников научного назначения, создаваемых ФГУП "ЦСКБ-Прогресс", будет ориентированным (ориентация спутников солнечными батареями на Солнце будет поддерживаться двигателями маховиками или гиродинами), и методика мониторинга, основанная на кинематических уравнениях, станет основной. Для нее возникнет ситуация, упомянутая при описании задачи в главе 1.

Результаты второй главы опубликованы в работах [37–43].

## 2.2. Измерения угловой скорости на спутнике *Фотон М-3*

На последних трех спутниках типа *Фотон* были установлены трехосные датчики угловой скорости системы управления движением. В случае КА *Фотон-М3* — аппаратура *DIMAS*, которая предназначалась для измерения микроускорений на борту спутника. Основными ее датчиками были два акселерометра — низкочастотный и высокочастотный. Этой системой было проведено 9 сеансов измерений, которые охватывали отрезки времени длиной 84 мин. Прак-

тически сразу после сеанса, данные измерений по телеметрическому каналу передавались на Землю.

Данные измерений угловой скорости интерпретировались в жестко связанной с КА правой приборной системе координат аппаратуры *DIMAS*  $Ox_1x_2x_3$ . Точка  $O$  — центр масс ИСЗ, ось  $Ox_1$  параллельна продольной оси ИСЗ и направлена от спускаемого аппарата к приборному отсеку.

Данные измерений, полученные во время одного сеанса, представляют собой совокупность чисел

$$t_n^\Omega, \Omega_1^{(n)}, \Omega_2^{(n)}, \Omega_3^{(n)} \quad (n = 0, 1, \dots, N_\Omega), \quad (2.1)$$

где  $\Omega_i^{(n)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — значения компонент угловой скорости спутника в приборной системе координат в момент времени  $t_n^\Omega$ ,  $t_{n+1}^\Omega - t_n^\Omega = 12$  с.

Чтобы использовать эти данные для апостериорной аппроксимации движения ИСЗ, их необходимо аппроксимировать гладкими функциями времени. Аппроксимация данных (2.1) выполнялась с помощью дискретных рядов Фурье [38–40] независимо для каждой векторной компоненты. Последовательности точек  $(t_n^\Omega, \Omega_i^{(n)})$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_\Omega$ , аппроксимировались выражениями [44]

$$\chi_i(t) = a_{i,K+1} + a_{i,K+2}(t - t_0^\Omega) + \sum_{k=1}^K a_{i,k} \sin \frac{\pi k(t - t_0^\Omega)}{t_{N_\Omega}^\Omega - t_0^\Omega}, \quad (2.2)$$

где  $a_{i,k}$  — коэффициенты и число  $K$  одинаково для всех  $i = 1, 2, 3$ . Это число должно не превосходить  $M - 1$  и быть таким, чтобы выражения (2.2) позволяли с высокой точностью аппроксимировать на отрезке  $t_0^\Omega \leq t \leq t_{N_\Omega}^\Omega$  компоненты угловой скорости в уравнениях вращательного движения КА. Коэффициенты  $a_{i,k}$  находились методом наименьших квадратов. Полученные таким образом выражения (2.2) иногда испытывают заметные высокочастотные колебания. Чтобы избавиться от них коэффициенты при старших гармониках корректировались с помощью специальных множителей [7, 8, 38–40] для ослабления присутствия в (2.2) высоких частот:

$$\frac{M - m + 1}{M - M_1 + 1} a_{i,m} \rightarrow a_{i,m} \quad (m = M_1 + 1, \dots, M).$$

Здесь  $M_1$  — целая часть числа  $M/2$ . Точность аппроксимации данных измерений выражениями (2.2) характеризовалась стандартными отклонениями [45]

$$\sigma_{\Omega i} = \left\{ \frac{1}{N - M - 1} \sum_{n=0}^{N_{\Omega}} \left[ \Omega_i^{(n)} - \chi_i(t_n^{\Omega}) \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

В расчетах принималось  $20 \leq K \leq 30$ , а среднеквадратичные ошибки равенств  $\Omega_i^{(n)} = \chi_i(t_n^{\Omega})$  были менее  $0.006^\circ \text{ c}^{-1}$ .

### 2.3. Кинематическая модель движения спутника

Спутник считаем твердым телом, геоцентрическое движение центра масс которого — кеплерово эллиптическое [46]. Элементы этого движения определяются по данным траекторных измерений (ср. [7]). Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс и соотношений, необходимых при обработке данных измерений, будем использовать введенную выше приборную систему координат  $Oy_1y_2y_3$  и *гринвичскую систему координат*  $OX_1X_2X_3$ . Сохраняя обозначения, введенные в главе 1, положение системы координат  $Ox_1x_2x_3$  относительно гринвичской системы координат будем задавать единичным кватернионом  $\mathbf{Q}$ .

Кинематические уравнения вращательного движения запишем в кватернионной форме (ср. 1.2)

$$2\dot{Q}_0 = - \sum_{i=1}^3 Q_i \omega_i, \quad 2\dot{Q}_i = Q_0 \omega_i + \sum_{j,k=1}^3 e_{ijk} Q_j \omega_k \quad (2.3)$$

$$\omega_i = \Delta_{\Omega i} + \chi_i(t - \tau) - \omega_e g_{3i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь  $\omega_i$  — компоненты вектора абсолютной угловой скорости спутника в системе  $Ox_1x_2x_3$ ,  $\chi_i(t)$  — выражения (2.2), аппроксимирующие измерения угловой скорости,  $\Delta_{\Omega i}$  — постоянные смещения в этих измерениях,  $\tau$  — смещение шкалы времени аппаратуры DIMAS относительно шкалы времени системы управления движением спутника,  $\omega_e$  и  $g_{ij}$  имеют такой же смысл, как и в (1.1). Параметры  $\tau$  и  $\Delta_{\Omega i}$  считались неизвестными и определялись из обработки данных измерений МПЗ наряду с начальными условиями движения спутника.

## 2.4. Методика реконструкции вращательного движения спутника, по данным измерений его угловой скорости и вектора напряженности МПЗ

Положим  $I_\Omega(\tau) = [t_0^\Omega + \tau, t_{N_\Omega}^\Omega + \tau]$ . Уравнения (2.3) рассматриваются при значениях  $\tau$  и  $t$ , удовлетворяющих условиям  $I_\Omega(\tau) \subset [t_0^H, t_{N_H}^H]$ ,  $t \in I_\Omega(\tau)$ .

Следуя методу наименьших квадратов, аппроксимацией фактического движения спутника на отрезке  $I_\Omega(\tau)$  будем считать решение системы (2.3), доставляющее минимум функционалу [38–40] (ср. (1.4))

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n \in U(\tau)} [h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n^H)]^2 - N_\tau \tilde{\Delta}_{Hi}^2 \right\}, \\ \tilde{\Delta}_{Hi} &= \frac{1}{N_\tau} \sum_{n \in U(\tau)} [h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n^H)], \quad U(\tau) = \{n : t_n^H \in I_\Omega(\tau)\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $\tilde{\Delta}_{Hi}$  — постоянные смещения в псевдоизмерениях МПЗ,  $\hat{h}_i(t)$  вычислялись по формуле (1.4),  $N_\tau$  — число элементов множества  $U(\tau)$ .

Отыскание решения системы (2.3), реконструирующего фактическое вращательное движение спутника, состоит в минимизации функционала (2.4) по начальным условиям этого решения  $Q_j(t_0^\Omega + \tau)$ , и смещениям  $\Delta_{\Omega i}$ ,  $\tau$  при ограничениях, наложенных условием нормировки (ср. (1.5))

$$Q_0^2(t_0^\Omega + \tau) + Q_1^2(t_0^\Omega + \tau) + Q_2^2(t_0^\Omega + \tau) + Q_3^2(t_0^\Omega + \tau) = 1. \quad (2.5)$$

Введем вектор  $x \in \mathbb{R}^7$  составленный из  $Q_j(t_0^\Omega + \tau)$ ,  $\Delta_{\Omega i}$  и будем рассматривать функционал (2.4) как функцию  $\Phi(x, \tau)$ . Минимизация  $\Phi$  по  $x$  и  $\tau$  сводилась к вычислению функции

$$\Phi_1(\tau) = \min_x \Phi(x, \tau)$$

в последовательности точек  $\tau_n$ , сходящейся к пределу  $\tau_* = \arg \min \Phi_1(\tau)$  [38–40]. Минимизация  $\Phi$  по  $x$  при фиксированном  $\tau$  выполнялась в два этапа (ср. глава 1). На начальном этапе применялся метод Левенберга–Марквардта, далее метод Гаусса–Ньютона (ср. глава 1). На каждом шаге этих методов поправки

к имеющимся значениям начальных условий решения системы (2.3) ищутся в виде (1.6). Расчет матрицы и свободного члена системы нормальных уравнений, возникающей на каждой итерации этих методов, осуществлялся по формулам, которые получены модификацией (1.3)

$$\begin{aligned}
C_{ij} &= \sum_{n \in U(\tau)} \sum_{k=1}^3 A_{ki}(t_n^H) A_{kj}(t_n^H) - \frac{1}{N_\tau + 1} \sum_{k=1}^3 B_{ki} B_{kj}, \\
D_i &= \sum_{n \in U(\tau)} \sum_{k=1}^3 [h_k^{(n)} - \hat{h}_k(t_n^H)] A_{ki}(t_n^H) - \frac{1}{N_\tau + 1} \sum_{k=1}^3 \Delta_k B_{ki}, \\
A_{ki}(t) &= \sum_{l,m=1}^3 e_{klm} \hat{h}_l(t) \frac{\partial \varphi_m(t)}{\partial z_i}, \quad B_{ki} = \sum_{n \in U(\tau)} A_{ki}(t_n^H) \\
&\quad (k = 1, 2, 3; i, j = 1, 2, \dots, 6).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь  $z_1, z_2, \dots, z_6$  — обозначения величин  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \Delta_{\Omega 1}, \Delta_{\Omega 2}, \Delta_{\Omega 3}$ . Значения псевдопроизводных  $\partial \varphi_i / \partial z_j$  определяются в процессе совместного интегрирования уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} = \sum_{k,l=1}^3 e_{ikl} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_j} \omega_l + \frac{\partial \Delta_{\Omega i}}{\partial z_j} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 6) \tag{2.7}$$

и уравнений (2.3). Ненулевые значения производных  $\partial \Delta_{\Omega i} / \partial z_j$  и начальных условий для  $\partial \varphi_i / \partial z_j$  имеют вид

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_i} \right|_{t=t_0^\Omega} = \frac{\partial \Delta_{\Omega i}}{\partial \Delta_{\Omega i}} = 1 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.8}$$

Интегрирование этих уравнений выполнялось методом, описанным в разделе 1.3.

Для нахождения начального приближения функционал (2.4) минимизировался на подмножестве допустимого множества значений параметров  $(x, \tau)$ , точки которого удовлетворяют условиям  $\tau = 0$ , а  $Q_j(t_0^\Omega + \tau)$  выражаются через параметр  $\phi$  по формулам (1.3). На этом подмножестве функционал рассматривался, как функция четырех параметров:  $\phi$  и  $\Delta_{\Omega i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). В таком случае начальные условия для уравнений в вариациях (2.7) имеют вид (1.3).

Выделение переменной  $\tau$  из полного набора аргументов  $\Phi$  вызвано тем обстоятельством, что в процессе изменения  $\tau$  множество  $U(\tau)$  может меняться. В точках, где происходит это изменение функция,  $\Phi_1(\tau)$  недифференцируема. По этой причине вычисление точек  $\tau_n$  выполнялось без использования производной  $d\Phi/d\tau$ .

Разработанное программное обеспечение позволяет также минимизировать функцию  $\Phi(x, \tau)$  сразу по всем ее аргументам. По указанной выше причине на практике такая возможность иногда оказывалась неэффективной, но всегда использовалась на заключительном этапе минимизации  $\Phi$  и при оценке точности найденной аппроксимации движения спутника.

Для оценки точности аппроксимации движения спутника применялся такой же подход как и в разделе 1.3. Эта точность характеризовалась стандартными отклонениями ошибок аппроксимации псевдоизмерений МПЗ и найденных оценок  $x$  и  $\tau$ , полученными в рамках метода наименьших квадратов. Принятый способ расчета указанных характеристик соответствует следующим допущениям [47]: 1) ошибки в псевдоизмерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, 2) средние значения ошибок, относящихся к одной и той же компоненте напряженности МПЗ, равны. Этот способ выбран из соображений удобства и вида функционала (2.4). Теоретико-вероятностные условия его адекватности требуют дополнительного обсуждения.

Приведем расчетные формулы. Пусть  $(x_*, \tau_*) = \operatorname{argmin} \Phi(x, \tau)$ ,  $C$  — матрица  $\|C_{ij}\|$  вычисленная в точке  $(x_*, \tau_*)$ . Тогда стандартное отклонение ошибок аппроксимации измерений находится по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Phi(x_*, \tau_*)}{3N_{\tau_*} - 10}}, \quad (2.9)$$

ковариационная матрица оценок  $x = x_*$ ,  $\tau = \tau_*$  равна  $\sigma^2 C^{-1}$ . Стандартные отклонения этих оценок суть квадратные корни из соответствующих диагональных элементов ковариационной матрицы. Рассчитанные описанным способом стандартные отклонения оценок величин  $\theta_i$ ,  $\Delta_{\Omega i}$ ,  $\tau$  будем обозна-

чать  $\sigma_{\theta_i}$ ,  $\sigma_{\Delta\Omega_i}$ ,  $\sigma_\tau$ .

## 2.5. Примеры реконструкции неуправляемого движения

Результаты определения фактического движения *Фотона М-3* с помощью методики из раздела 2.4 приведены в табл. 2.1 — 2.3 и на рис. 2.1 — 2.6. В табл. 2.1 для каждого имеющегося отрезка данных измерений угловой скорости приведены номер витка орбиты — В, день сентября 2007 г. — Д, скорректированные начальная —  $t_0^\Omega + \tau$  и конечная точки —  $t_{N_\Omega}^\Omega + \tau$ , среднее квадратическое отклонение аппроксимации измерений МПЗ и число  $N_\tau$  включенных в обработку измерений на заключительном этапе минимизации функционала (2.4). В табл. 2.2 приведены значения углов,  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  в момент времени  $t_0^\Omega + \tau$ , смещений  $\Delta\Omega_i$  и  $\tau$ . В табл. 2.3 приведены значения средних квадратических отклонений компонент вектора бесконечно малого поворота в момент времени  $t_0^\Omega + \tau$ , смещения  $\Delta\Omega_i$  и  $\tau$ . Единицы измерения величин, приведенных в таблицах:  $[\gamma] = [\delta] = [\beta] = [\sigma_{\theta_i}] = \text{рад}$ ,  $[\Delta\Omega_i] = [\sigma_{\Delta\Omega_i}] = 10^{-3}\text{с}^{-1}$ ,  $[\sigma_\tau] = [\tau] = \text{с}$ .

Рисунки иллюстрируют найденное движение спутника и точность аппроксимаций измерений (1.3) функциями  $\hat{h}_i(t)$ . Время на рисунках измеряется в минутах от момента  $t_0^\Omega + \tau$  до  $t_{N_\Omega}^\Omega + \tau$ . Все рисунки естественным образом разбиваются на две части — левую и правую. В левых частях рис. 2.1, 2.3 и 2.5 приведены графики зависимости от времени углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , а также график разности  $\Delta\gamma(t) = \gamma(t) - c_0 - c_1(t - t_0^\Omega)$ , где  $c_0 + c_1(t - t_0^\Omega)$  — линейная аппроксимация функции  $\gamma(t)$ , построенная методом наименьших квадратов. В правых частях этих рисунков помещены графики выражений  $\chi_i(t)$ , аппроксимирующих данные измерений угловой скорости, и ломаные, проходящие через точки  $(t_n^\Omega, \Omega_i^{(n)})$ .

В левых частях рис. 2.2, 2.4 и 2.6 приведены графики функций  $\hat{h}_i(t) + \tilde{\Delta}_{H_i}$  (см. (2.4)) и ломаные, проходящие через точки  $(t_n^H, h_i^{(n)})$ ,  $n \in U(\tau)$ . Каждая ломаная и график аппроксимирующей ее функции  $\hat{h}_i(t) + \tilde{\Delta}_{H_i}$  изображены в еди-

ной системе координат. В выбранном масштабе ломаные и аппроксимирующие их графики совпадают, поэтому в правых частях рис. 2.2, 2.4 и 2.6 приведены ломаные, проходящие через точки  $(t_n^H, h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n^H) - \tilde{\Delta}_{Hi})$ ,  $n \in U(\tau)$ .

Точность реконструкции реального движения спутника характеризуется стандартными отклонениями уточняемых параметров математической модели (табл. 2.3). Несмотря на то что, как уже отмечалось, обычные теоретико-вероятностные допущения метода наименьших квадратов в данном случае не выполнены, стандартные отклонения оказываются полезными характеристиками. В частности, они позволяют сравнить точность определения различных параметров. Анализ стандартных отклонений вместе анализом собственных векторов матрицы  $C(z, \tau)$  (см. раздел 2.4), отвечающих ее нескольким минимальным собственным числам, позволяет понять характер ошибок, возникающих при определении движения спутника. Анализ основан на формуле

$$C^{-1} = \sum_{k=1}^6 \left( \frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right) \left( \frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right)^T,$$

где  $c_k$  и  $u_k$  — собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы  $C$ . Из этой формулы следует, что наибольшие стандартные отклонения имеют те определяемые параметры, которым отвечают наибольшие компоненты векторов  $u_k/\sqrt{c_k}$ .

В качестве примера исследуем точность определение движения на данных, относящихся к витку 128 (2.5 и 2.6). Из приведенных в табл. 2.3 стандартных отклонений видно, что в указанных выше единицах интегрирования уравнений (2.3) наиболее точно определяется параметр  $\tau$ , наименее точно определяются параметры  $\Delta_{\Omega 2}$ ,  $\Delta_{\Omega 3}$ :  $\sigma_{\tau} = 0.0001$ ,  $\sigma_{\Delta_{\Omega 2}} = 0.027$ ,  $\sigma_{\Delta_{\Omega 3}} = 0.032$ . Расположенные в порядке возрастания собственные числа матрицы  $C$  в данном случае составля-

ют  $c_1 = 10.2$ ,  $c_2 = 19.2$ ,  $c_3 = 64.9$ ,  $c_4 = 252.6$ ,  $c_5 = 359.7$ ,  $c_6 = 949.1$ ,  $c_7 = 14529.9$

$$\begin{aligned}\frac{u_1^T}{\sqrt{c_1}} &= [-0.0546, 0.0994, -0.0298, 0, 0.0496, 0.1029, 0.2675, -0.0019], \\ \frac{u_2^T}{\sqrt{c_2}} &= [0.0458, -0.0111, -0.0326, -0.0061, 0.2096, -0.0697, 0.0000], \\ \frac{u_3^T}{\sqrt{c_3}} &= [0.0601, -0.0679, -0.0267, -0.0636, -0.0065, 0.0488, 0.0020], \\ \frac{u_4^T}{\sqrt{c_4}} &= [0.0495, 0.0350, 0.0129, 0.0046, -0.0067, 0.0002, -0.0074], \\ \frac{u_5^T}{\sqrt{c_5}} &= [0.0003, -0.0172, 0.0483, 0.0034, 0.0092, 0.0077, -0.0011], \\ \frac{u_6^T}{\sqrt{c_6}} &= [0.0086, -0.0136, -0.0067, 0.0272, -0.0022, 0.0019, 0.0006], \\ \frac{u_7^T}{\sqrt{c_7}} &= [0.0007, 0.0006, 0.0004, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0082].\end{aligned}$$

В этих расчетах (как и в программах минимизации функций  $\Phi$  и  $\Phi_1$ ) единица измерения напряженности магнитного поля равнялась 50000  $\gamma$ . Компоненты векторов  $u_k$  здесь упорядочены также, как в векторе  $(z, \tau)$ . Как видно из приведенных формул, пятая и шестая компонента вектора  $u_1/\sqrt{c_1}$  и пятая компонента вектора  $u_2/\sqrt{c_2}$ , отвечающие параметрам  $\Delta_{\Omega_2}$  и  $\Delta_{\Omega_3}$ , дают наибольший вклад в диагональные элементы матрицы  $C^{-1}$ . Минимальный вклад в эти элементы дают последние компоненты векторов  $u_k/\sqrt{c_k}$ , отвечающие параметру  $\tau$ .

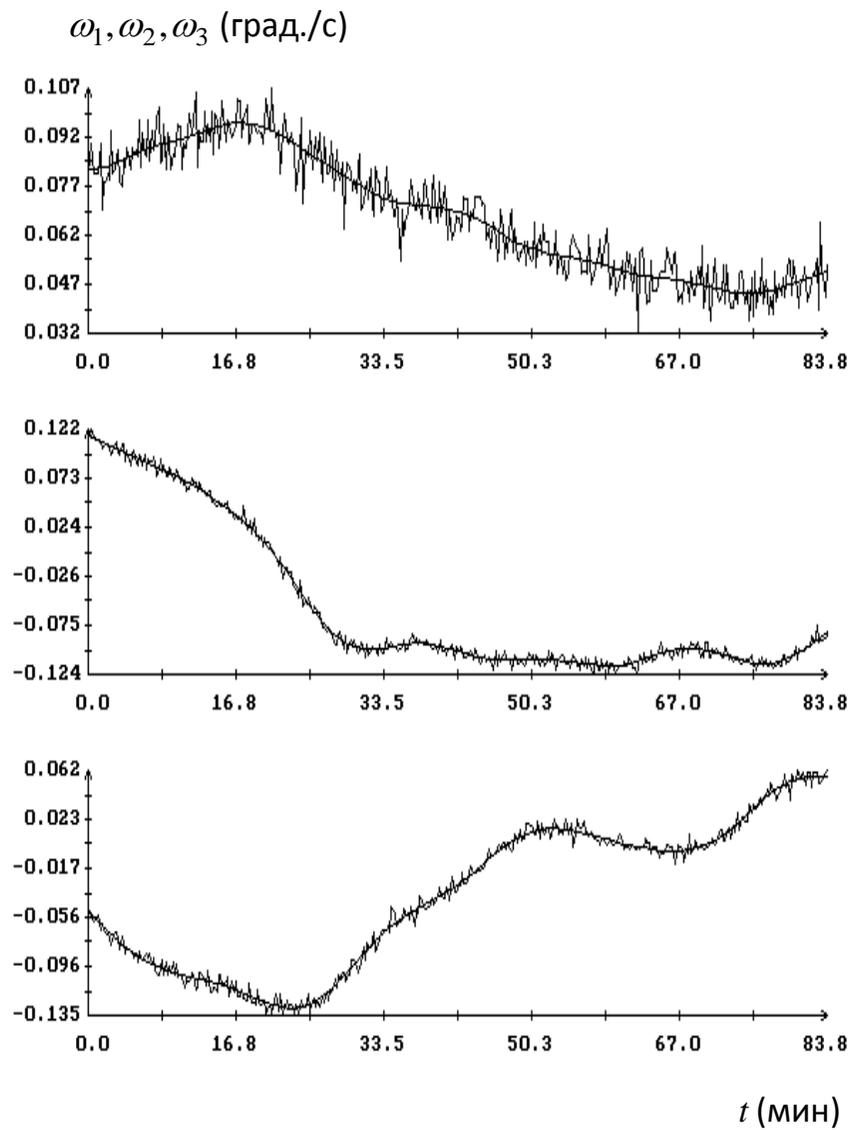
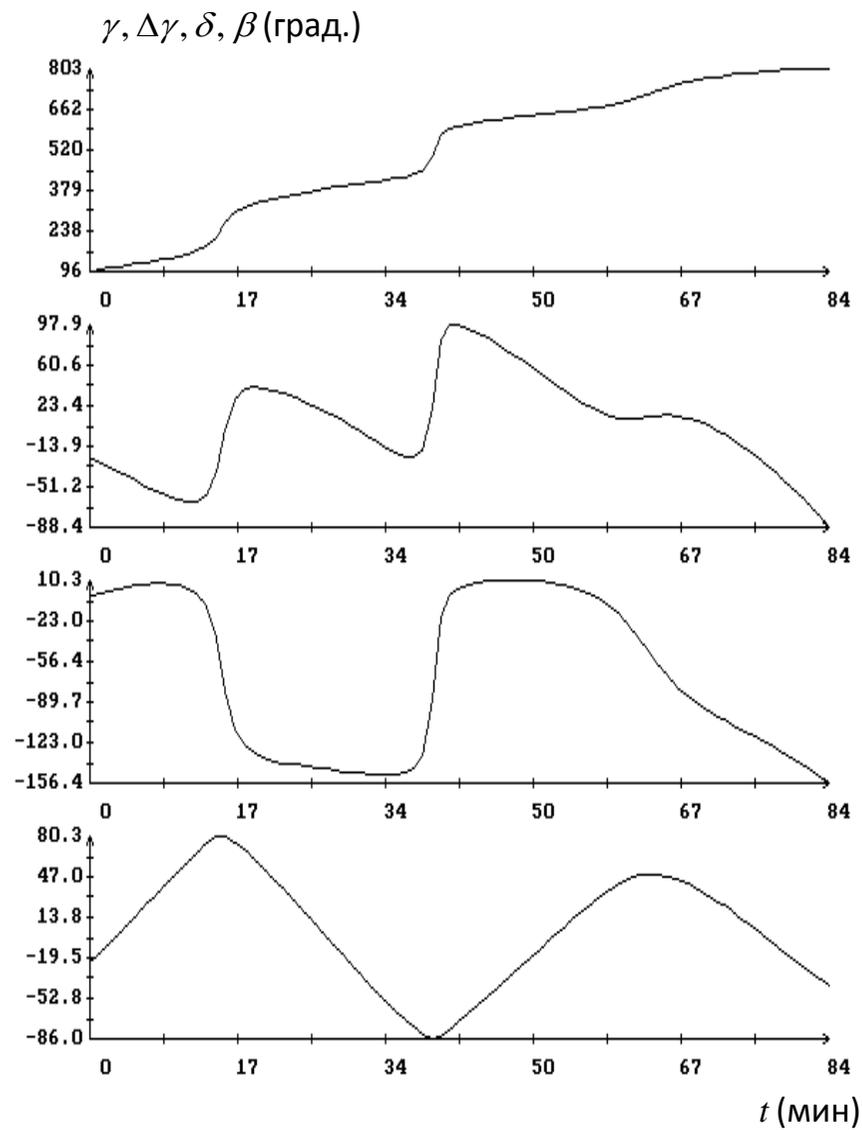


Рис. 2.1. Движение *Фотона М-3*, реконструированное методом наименьших квадратов. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:11:09 ДМВ 15.09.2007.

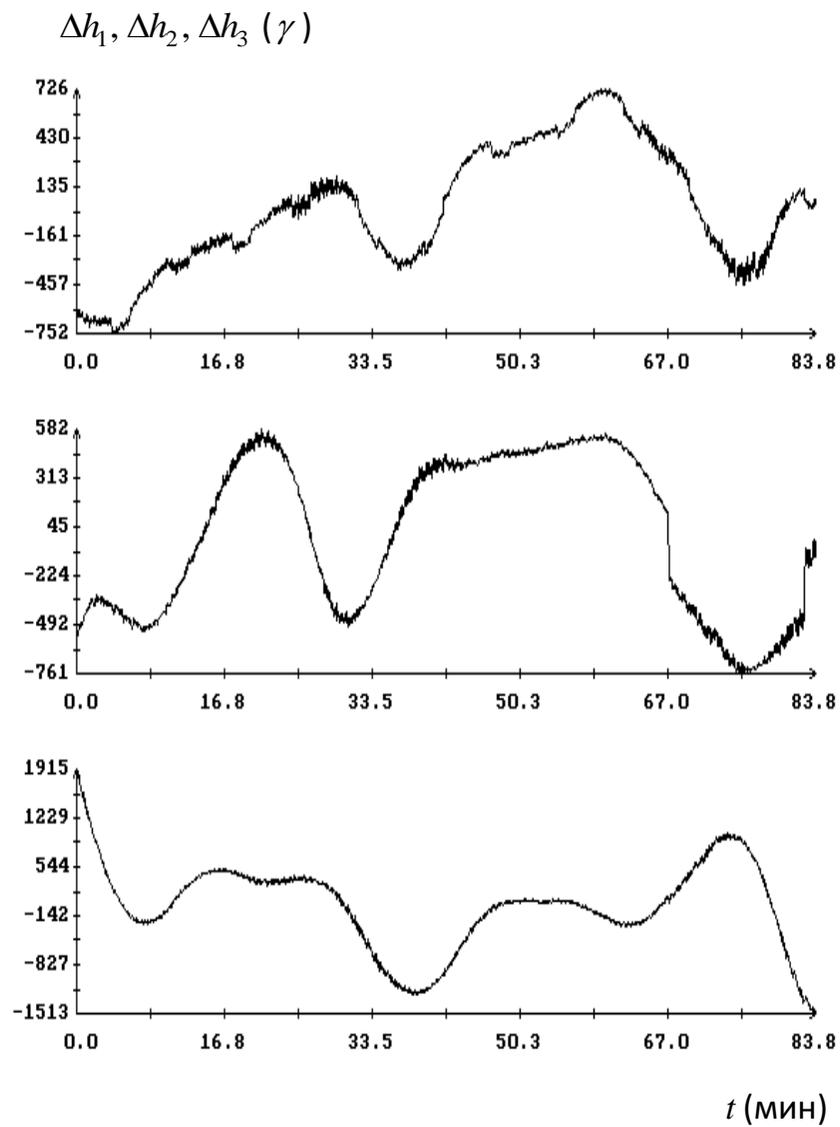
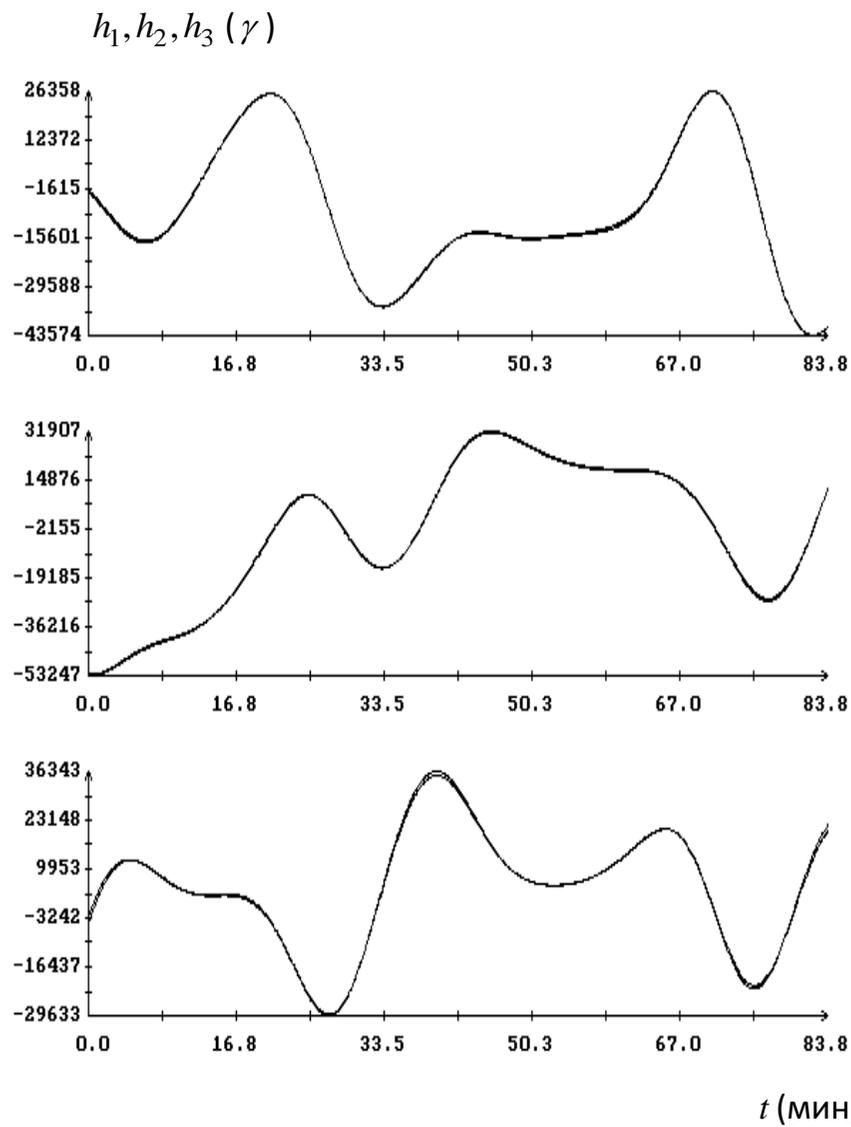


Рис. 2.2. Аппроксимация магнитных измерений, полученная методом наименьших квадратов,  $N_\tau = 1117$ ,  $\sigma = 479\gamma$ . Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:11:09 ДМВ 15.09.2007.

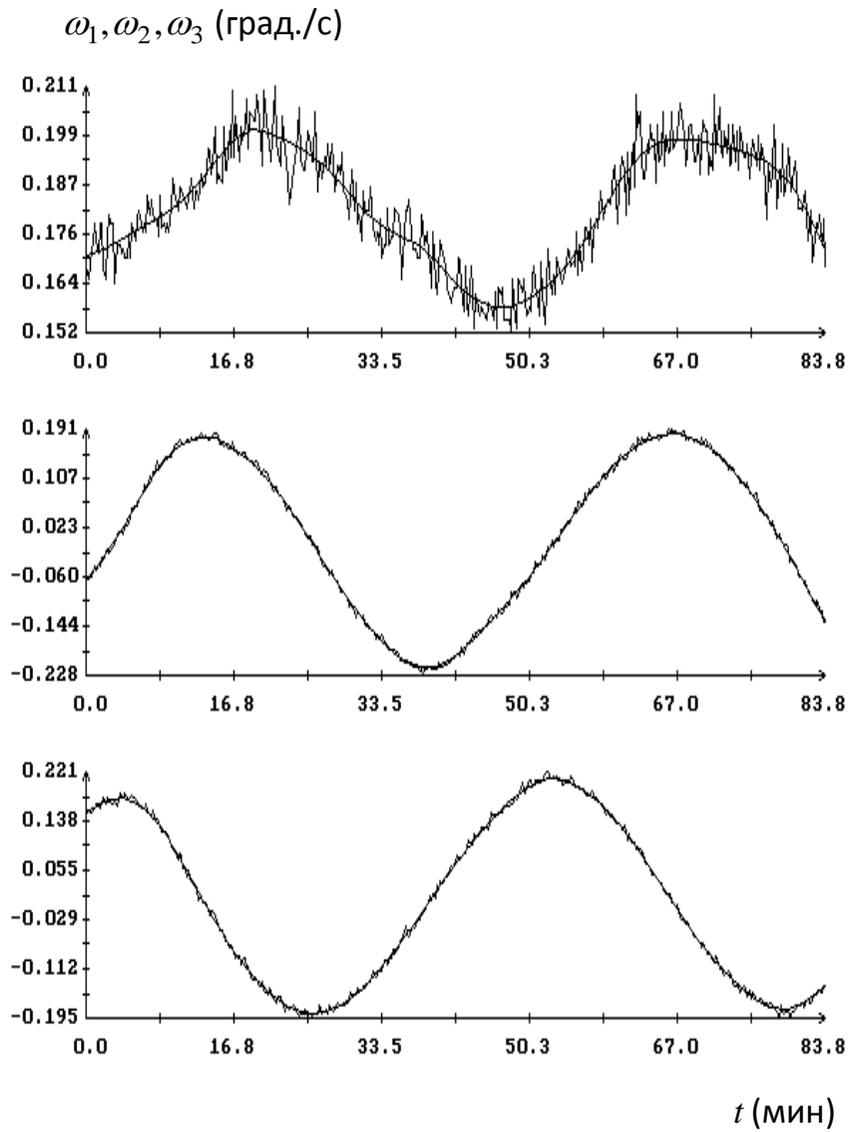
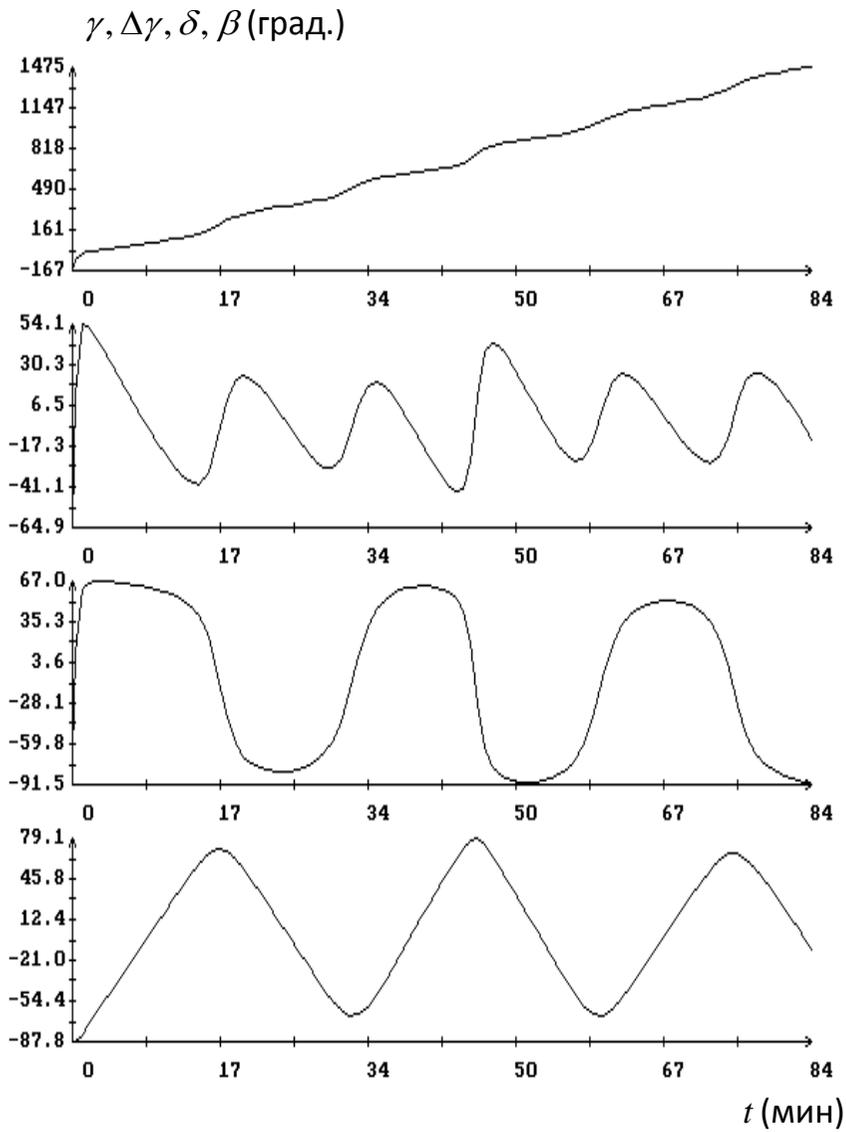


Рис. 2.3. Движение *Фотона М-3*, реконструированное методом наименьших квадратов. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:05:48 ДМВ 17.09.2007.

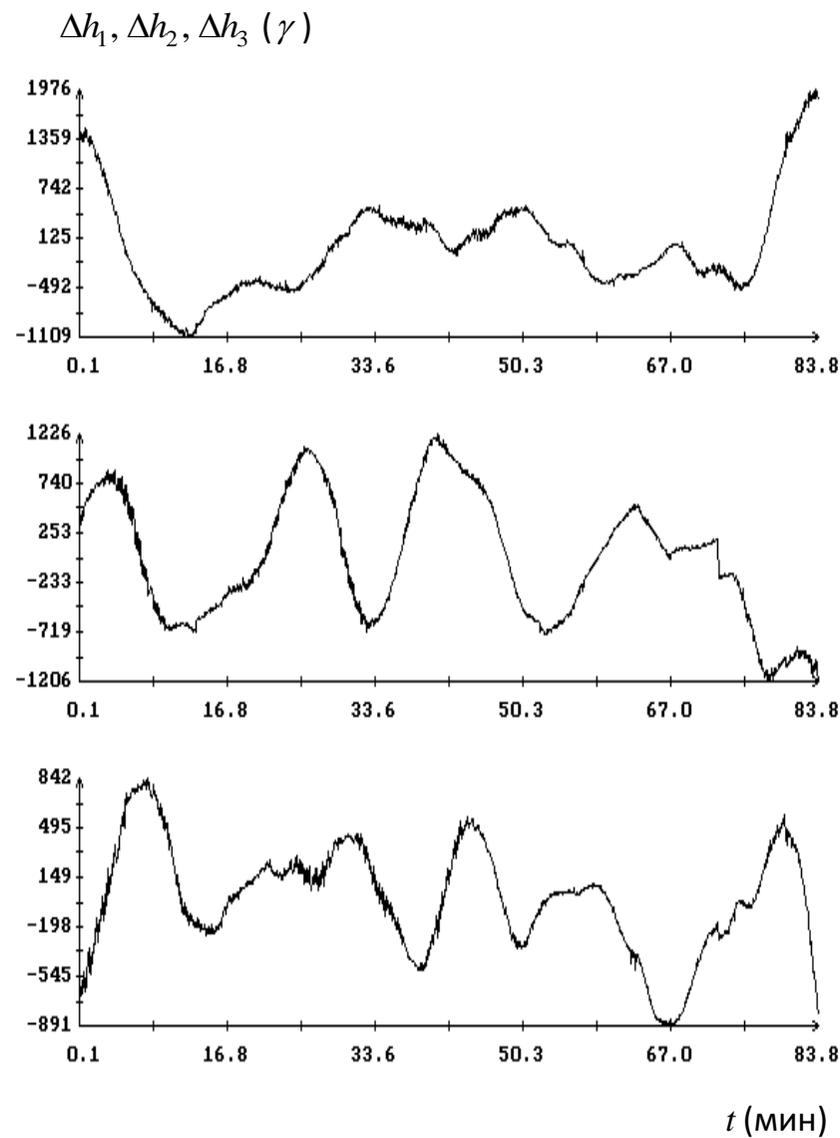
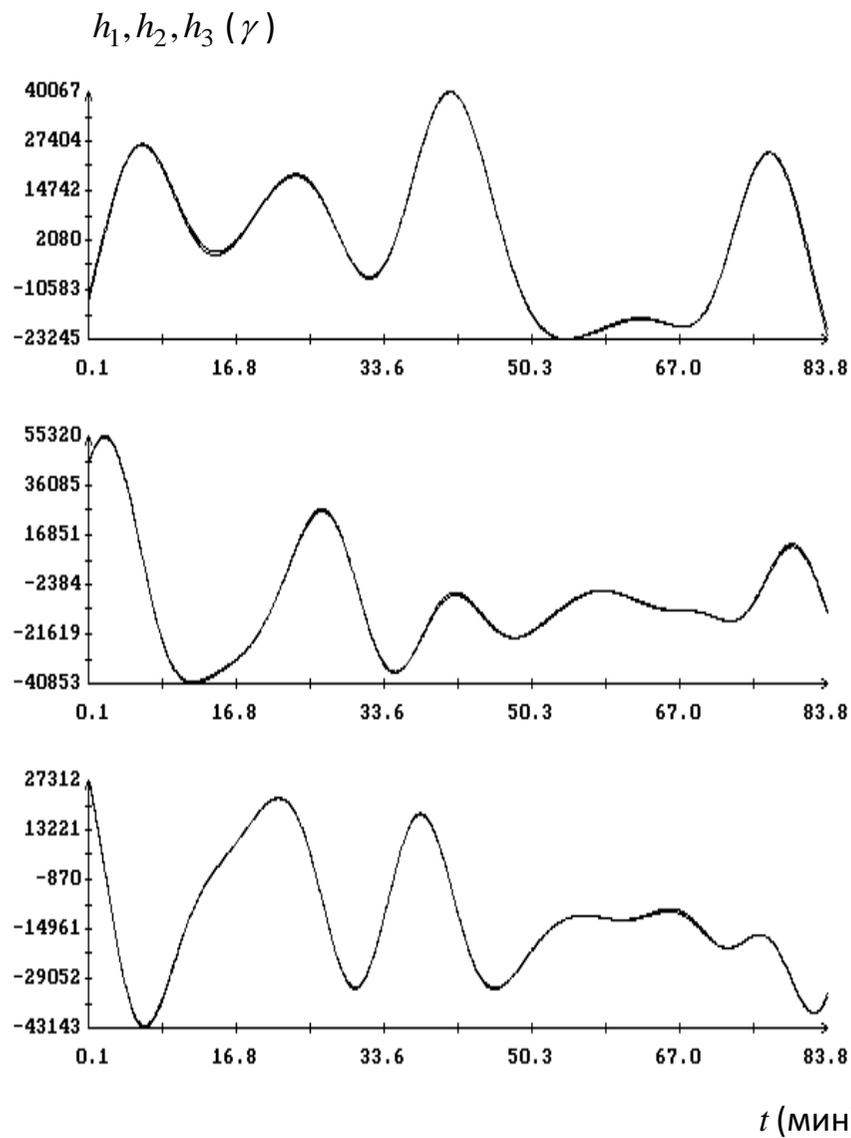


Рис. 2.4. Аппроксимация магнитных измерений, полученная методом наименьших квадратов,  $N_\tau = 1092$ ,  $\sigma = 544\gamma$ . Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:05:48 ДМВ 17.09.2007.

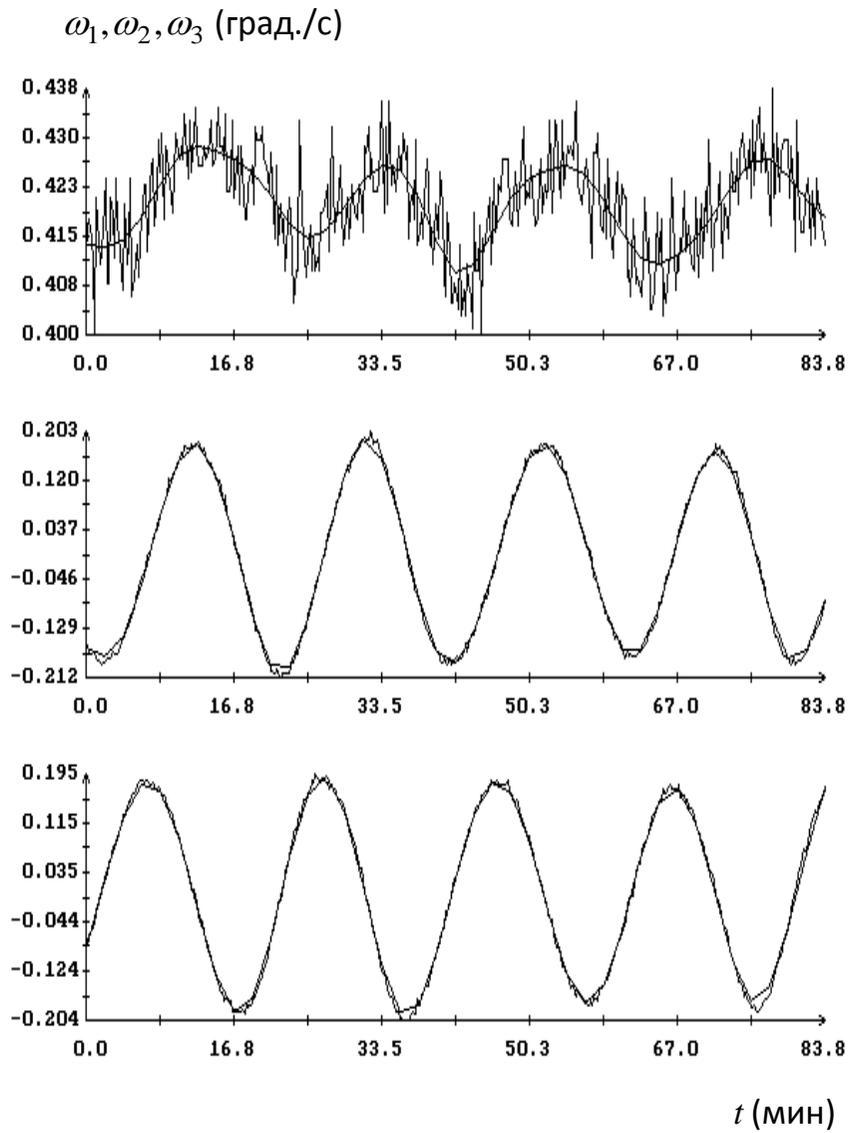
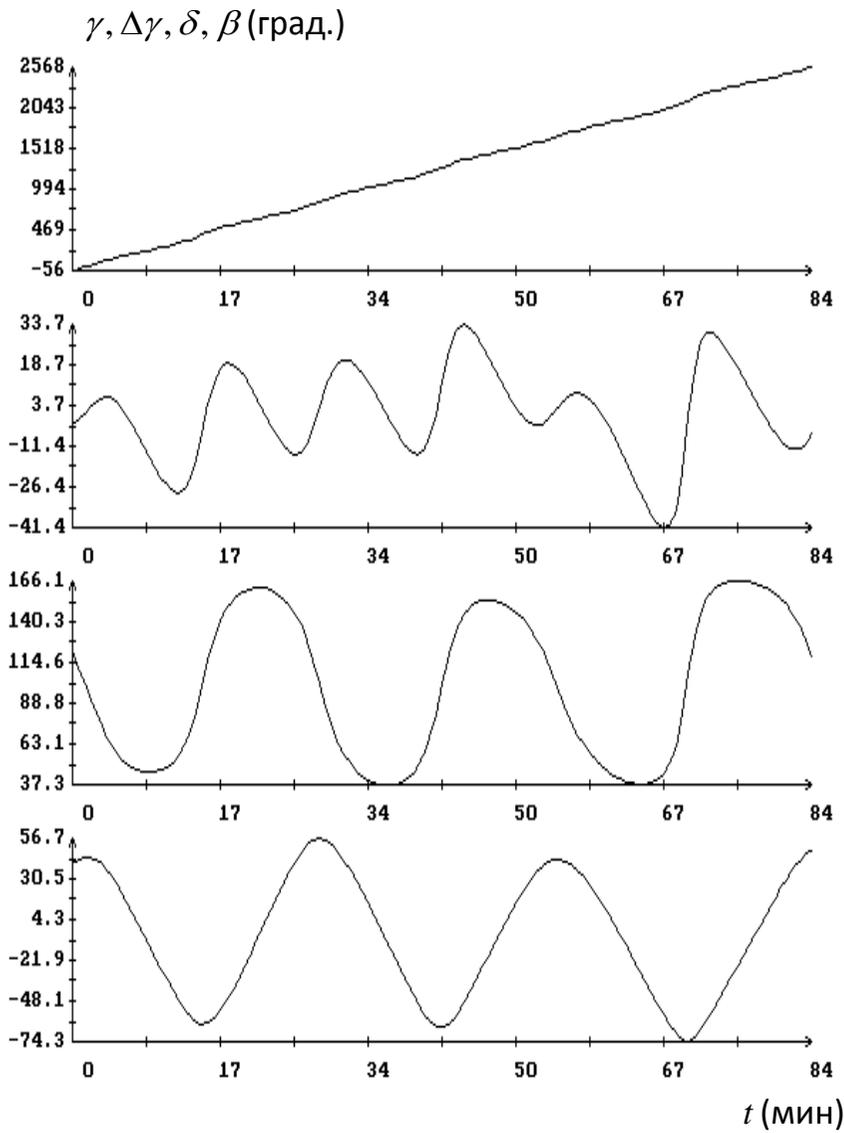


Рис. 2.5. Движение *Фотона М-3*, реконструированное методом наименьших квадратов. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 12:27:24 ДМВ 22.09.2007.

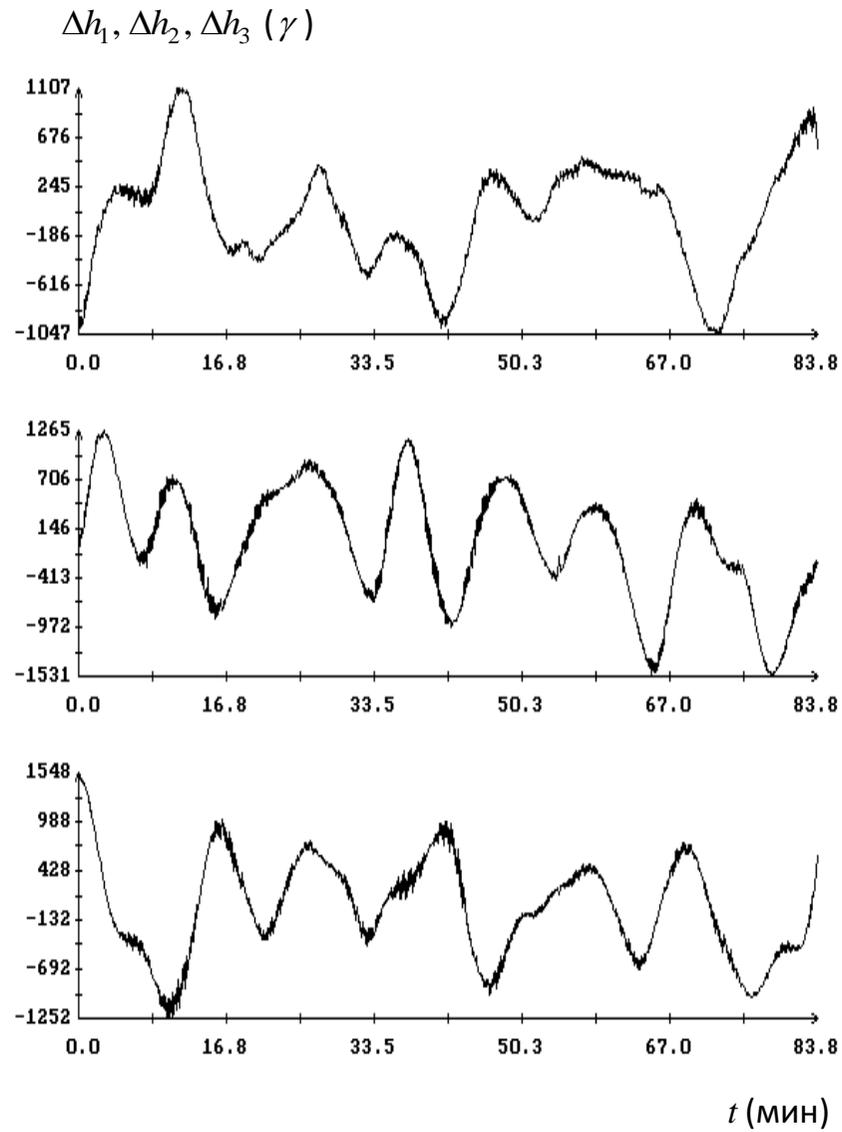
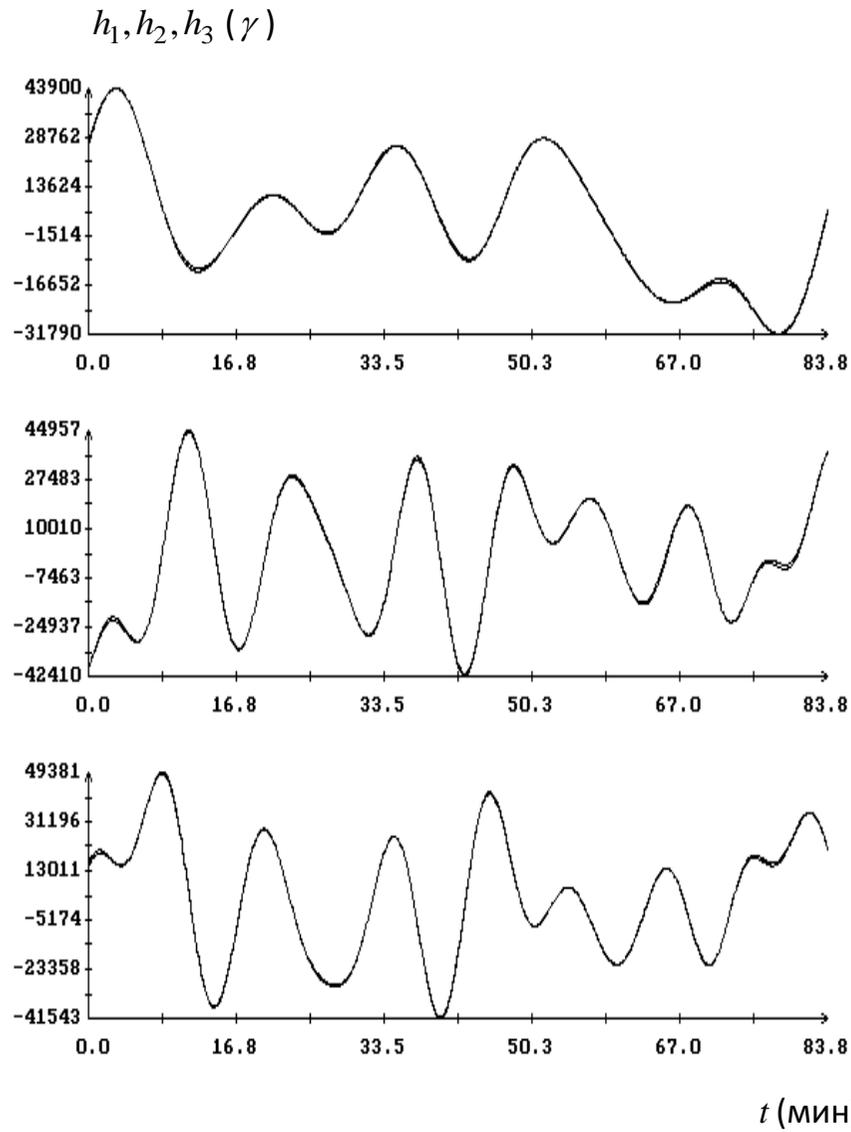


Рис. 2.6. Аппроксимация магнитных измерений, полученная методом наименьших квадратов,  $N_\tau = 1109$ ,  $\sigma = 567\gamma$ . Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 12:27:24 ДМВ 22.09.2007.

Таблица 2.1. Временные отрезки обработки с помощью кинематической модели

В	Д	$t_0^\Omega + \tau$ (ДМВ)	$t_{N_\Omega}^\Omega + \tau$ (ДМВ)	$N_\tau$	$\sigma$
17	15	14:11:09	15:34:57	1117	479
33	16	14:07:12	15:31:00	1084	393
49	17	14:05:48	15:29:36	1092	544
65	18	14:04:51	15:28:39	1081	524
81	19	13:57:45	15:21:33	1091	433
96	20	12:29:43	13:53:31	1093	439
113	21	13:54:35	15:18:23	1094	552
128	22	12:27:24	13:51:12	1109	567
144	23	12:26:05	13:49:53	1092	531

Таблица 2.2. Оценки вектора параметров кинематической модели

В	$\gamma$	$\delta$	$\beta$	$\Delta_{\Omega_1}$	$\Delta_{\Omega_2}$	$\Delta_{\Omega_3}$	$\tau$
17	-0.4125	1.6834	-0.0427	0.0054	0.0207	0.0195	16
33	0.9706	0.0825	-0.7024	0.0372	0.0084	0.0226	37
49	-1.5139	-2.9213	-1.1958	-0.0509	-0.0062	0.0055	7
65	0.2937	-1.6673	2.8436	-0.0893	0.0103	0.0402	7
81	0.1156	-1.9063	-0.4618	-0.0824	0.0070	0.0259	14
96	0.9641	-2.4049	0.7390	-0.0474	0.0368	0.0533	12
113	0.5190	1.5861	1.7057	-0.0545	0.0163	0.0494	16
128	0.6926	-0.9799	2.1081	-0.0377	-0.0028	0.0739	12
144	-0.7970	1.6049	-2.6413	-0.0721	-0.0041	0.0991	11

Таблица 2.3. Средние квадратические отклонения оценок параметров кинематической модели

B	$\sigma_{\theta_1}$	$\sigma_{\theta_2}$	$\sigma_{\theta_3}$	$\sigma_{\Delta_{\Omega_1}}$	$\sigma_{\Delta_{\Omega_2}}$	$\sigma_{\Delta_{\Omega_3}}$	$\sigma_{\tau}$
17	0.0006	0.0012	0.0009	0.0012	0.0006	0.0010	0.6
33	0.0009	0.0006	0.0010	0.0013	0.0009	0.0005	1.2
49	0.0009	0.0008	0.0010	0.0011	0.0015	0.0017	0.3
65	0.0009	0.0012	0.0006	0.0011	0.0014	0.0012	0.2
81	0.0009	0.0013	0.0006	0.0010	0.0011	0.0011	0.2
96	0.0009	0.0009	0.0007	0.0006	0.0011	0.0014	0.1
113	0.0010	0.0011	0.0006	0.0009	0.0027	0.0024	0.1
128	0.0012	0.0014	0.0008	0.0010	0.0027	0.0032	0.1
144	0.0008	0.0010	0.0008	0.0007	0.0032	0.0029	0.1

## 2.6. Фильтр Калмана

Поскольку в дальнейшем полет спутников научного назначения будет ориентированным (ориентация спутников солнечными батареями на Солнце будет поддерживаться двигателями маховиками или гиродинами), методика мониторинга, основанная на кинематических уравнениях, станет основной. Для нее возникнет ситуация, упомянутая при описании первой задачи. В связи с этим рассмотрим применение фильтра Калмана для кинематической модели.

При реализации фильтра, основанного на решении системы (1.13) компоненты вектора состояния  $x \in \mathbb{R}^{10}$  механической системы представляют собой величины  $Q_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ),  $\Delta_{\Omega_i}$ ,  $\Delta_{H_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). В отличие от пункта 2.4, смещения в измерениях компонент векторов напряженности МПЗ и угловой скорости не являются постоянными величинами. Теперь, эти смещения представляют собой случайные величины.

Значения  $x_n$  суть значения переменных вектора состояния в узлах времен-

ной сетки  $\{t_n\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N_\Omega$ ),  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_\Omega}$ . Узлы сетки  $t_n$  являются серединами отрезков  $[t_{n-1}^\Omega, t_n^\Omega]$

$$t_0 = \frac{3t_0^\Omega - t_1^\Omega}{2}, \quad t_n = \frac{t_n^\Omega + t_{n-1}^\Omega}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots, N_\Omega).$$

Функция  $F_n(x)$  из (1.5) строится посредством интегрирования уравнения (2.3), от точки  $t_{n-1}$  к точке  $t_n$ . Проинтегрируем левую и правую часть уравнения (2.3) по времени на отрезке  $[t_{n-1}, t_n]$ , считая его решение известным. Получим

$$\mathbf{Q}(t_n) - \mathbf{Q}(t_{n-1}) = \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{Q}(t) \circ \boldsymbol{\omega}(t) dt.$$

С учетом равномерности сетки  $\{t_n\}$ , для гладких решений уравнения (2.3) имеем

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{Q}(t) \circ \boldsymbol{\omega}(t) dt = \frac{\tau_n}{2} [\mathbf{Q}(t_n) - \mathbf{Q}(t_{n-1})] \circ \boldsymbol{\omega}(t_n^\Omega) + O(\tau_n^3),$$

$$\boldsymbol{\omega}_i(t_n^\Omega) = \Omega_i^{(n)} + \Delta_i(t_n), \quad \tau_n = t_n - t_{n-1}.$$

Последнее равенство представляет собой стандартную формулу трапеций [48], поэтому с погрешностью  $O(\tau_n^3)$  можно записать

$$\mathbf{Q}(t_n) - \mathbf{Q}(t_{n-1}) = \frac{\tau_n}{4} [\mathbf{Q}(t_n) + \mathbf{Q}(t_{n-1})] \circ \boldsymbol{\omega}(t_n^\Omega). \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует

$$\mathbf{Q}(t_n) = \mathbf{Q}(t_{n-1}) \circ \boldsymbol{\kappa}_n, \quad \boldsymbol{\kappa}_n = \left( \frac{16 - \tau_n^2 |\boldsymbol{\omega}(t_n^\Omega)|^2}{16 + \tau_n^2 |\boldsymbol{\omega}(t_n^\Omega)|^2}, \frac{8\tau_n \boldsymbol{\omega}(t_n^\Omega)}{16 + \tau_n^2 |\boldsymbol{\omega}(t_n^\Omega)|^2} \right). \quad (2.11)$$

Непосредственной проверкой, получим  $\|\boldsymbol{\kappa}_n\| = 1$ , следовательно разностная схема (2.11) сохраняет норму кватерниона. Если  $\boldsymbol{\omega}(t)$  почти постоянна на отрезке  $[t_{n-1}, t_n]$ , то формулу (2.11) можно использовать для вычисления значения кватерниона  $\mathbf{Q}(t)$  в точке  $t \in [t_{n-1}, t_n]$ , заменив  $\tau_n$  на  $t - t_{n-1}$ .

Применяя схему (2.11) для интегрирования системы уравнений вращательного движения (2.3), функцию  $F_n(x_{n-1})$  из (1.12) запишем в виде

$$F_n(x_{n-1}) = \left( Q_0^{(n)}, \dots, Q_3^{(n)}, \Delta_{\Omega 1}^{(n-1)}, \dots, \Delta_{\Omega 3}^{(n-1)}, \Delta_{H 1}^{(n-1)}, \dots, \Delta_{H 3}^{(n-1)} \right)^T,$$

$$(Q_0^{(n)}, \dots, Q_3^{(n)}) = (Q_0^{(n-1)}, \dots, Q_3^{(n-1)}) \circ \boldsymbol{\kappa}_n.$$

Здесь  $Q_j^{(n)} = Q_j(t_n)$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ );  $\Delta_{\Omega i}^{(n-1)}$ ,  $\Delta_{H i}^{(n-1)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — постоянные на полуинтервале  $[t_{n-1}, t_n)$  ошибки в измерениях компонент векторов МПЗ и угловой скорости соответственно. Следуя подходу принятому в пункте 2.4, смещения  $\Delta_{\Omega i}$  и  $\Delta_{H i}$  постоянны с точностью до случайных ошибок математической модели.

Формирование векторов измерений  $y_n$  и вычисление функции  $G_n(x)$  выполняется следующим образом. Измерения напряженности магнитного поля (ср. (1.3))

$$t_k^H, h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, h_3^{(k)},$$

попавшие в полуинтервал  $t_n \leq t < t_{n+1}$ , — величины  $h_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при  $t_k^H \in [t_n, t_{n+1})$  — объединим в вектор  $y_n$ . Для вычисления функции

$$G_n(x_n) = (\dots, \hat{h}_i(t_k^H) + \Delta_{H i}(t_n), \dots)^T, \quad (i = 1, 2, 3), \quad t_k^H \in [t_n, t_{n+1}),$$

расчетных аналогов измерений  $y_n$ , необходимо иметь значения кватерниона ориентации  $\mathbf{Q}(t_k^H)$  вычисленные в точке  $t_k^H$ . Эти значения вычислялись по рекуррентной формуле (2.11) в предположении, что на полуинтервале  $[t_n, t_{n+1})$  угловая скорость была постоянна и равнялась  $\omega(t_n^\Omega)$ .

Матрицы Якоби функций  $F_n(x)$  и  $G_n(x)$  не имеют полного ранга, поскольку компоненты кватерниона зависимы. Чтобы избежать вырождения, разность между компонентами фактического и прогнозируемого значений кватерниона  $Q_j(t_n)$  записывалась в терминах вектора бесконечно малого поворота (см. 1.6).

Таким образом, функция (1.5) с высокой точностью можно записать в виде

$$f(x_n) = z_n^T P_n'^{-1} z_n + [y_n - G_n(x_n)]^T K_n^{-1} [y_n - G_n(x_n)]. \quad (2.12)$$

Здесь  $z \in \mathbb{R}^9$  — вектор составленный из компонент вектора бесконечно малого поворота  $\theta_i$  и поправок  $\delta\Delta_{\Omega i}$ ,  $\delta\Delta_{H i}$  к прогнозируемым значениям  $\Delta_{\Omega i}$  и  $\Delta_{H i}$ ,  $z_n$  — значение вектора поправок в узле  $t_n$ . При использовании данной замены, вместо ковариаций компонент кватернионов используются ковариации компонент векторов бесконечно малых поворотов. Прогноз матрицы ковариаций  $P_n'$

вычислялся по формуле (1.5), где теперь матрица Якоби  $A_n = \partial F_n(\hat{x}_{n-1})/\partial z$ . Матрицы  $A_n$ ,  $P'_n$ ,  $P_n$  и т.д. имеют порядок 15.

При минимизации функции (2.12), на каждом шаге решается система нормальных уравнений

$$\begin{aligned} (P_n'^{-1} + B_n^T K_n^{-1} B_n) \Delta z_n &= B_n^T K_n^{-1} [y_n - G_n(x_n^*)] - P_n'^{-1} z_n^*, \\ \Delta z_n &= z_n - z_n^*, \quad x_n^* = x_n' + \Delta x_n, \quad B_n = \frac{\partial G_n(x_n^*)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь  $z_n^*$  — имеющееся приближенное значение оценки величины  $z_n$ , которому после решения системы уравнений в вариациях присваивается значение  $z_n^* + \Delta z_n$ ;  $\Delta x_n \in \mathbb{R}^{10}$  — поправка прогноза вектора состояния  $x_n'$ , отвечающая  $z_n^*$ . Когда норма поправки  $\|\Delta z_n\|$  станет приемлемо малой, принимается  $\hat{x}_n = x_n^*$ .

Матрицы Якоби  $A_n$  и  $B_n$  вычислялись следующим образом. Матрица  $A_n = \|A_{ij}^{(n)}\|_{i,j=1}^9$  содержит следующие ненулевые элементы

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(n)} &= \frac{\partial \varphi_i(t_n)}{\partial z_j} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 6), \\ A_{ii}^{(n)} &= 1 \quad (i = 4, \dots, 9). \end{aligned}$$

Здесь  $z_1, z_2, \dots, z_9$  — обозначения величин  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \Delta_{\Omega 1}, \Delta_{\Omega 2}, \Delta_{\Omega 3}, \Delta_{H 1}, \Delta_{H 2}, \Delta_{H 3}$ . Равенство нулю остальных элементов следует из предположений модели о независимости постоянных сдвигов в измерениях МПЗ и угловой скорости, а также теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Элементы  $\partial \varphi_i(t_n)/\partial z_j$  матрицы  $A_n$  вычисляются интегрированием уравнений в вариациях (1.8) с ненулевыми начальными условиями

$$\frac{\partial \varphi_i(t_{n-1})}{\partial z_i} = 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений в вариациях применялась разностная схема, аналогичная (2.11). Чтобы построить эту схему, запишем (1.8) в векторном виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} + \omega \times \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} = \frac{\partial \Delta \Omega}{\partial z_j}, \quad (2.14)$$

где  $\partial\Delta_\Omega/\partial\Delta_{\Omega k} = \mathbf{e}_k$  ( $\mathbf{e}_k$  — орт оси  $Ox_k$ ) и  $\partial\Delta_\Omega/\partial z_j = 0$  при всех остальных значениях  $z_j$ . Интегрируя уравнение (2.14) на отрезке  $[t_{n-1}, t_n]$ , получим

$$\frac{\partial\varphi(t_n)}{\partial z_j} - \frac{\partial\varphi(t_{n-1})}{\partial z_j} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial\varphi(t)}{\partial z_j} \times \boldsymbol{\omega}(t) dt + \tau_n \frac{\partial\Delta_\Omega}{\partial z_j}. \quad (2.15)$$

Из (2.15) получим уравнение для вычисления  $\partial\varphi(t_n)/\partial P_j$  с погрешностью  $O(\tau_n^3)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi(t_n)}{\partial z_j} - \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial\varphi(t_n)}{\partial z_j} \times \boldsymbol{\omega}(t_{n-1}^\Omega) &= \frac{\partial\varphi(t_{n-1})}{\partial z_j} + \\ &+ \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial\varphi(t_{n-1})}{\partial z_j} \times \boldsymbol{\omega}(t_{n-1}^\Omega) + \tau_n \frac{\partial\Delta_\Omega}{\partial z_j}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Векторное уравнение (2.16) удобно рассматривать, как систему линейных алгебраических уравнений. Эта система решалась методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу.

Как и в случае разностной схемы (2.11), при слабо меняющейся на отрезке  $[t_{n-1}, t_n]$  угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , формулу (2.16) можно использовать и для вычисления значения псевдопроизводных  $\partial\varphi_i(t)/\partial z_j$  в произвольной точке  $t \in [t_{n-1}, t_n]$ .

Матрица  $B_n = \| B_{ij}^{(n)} \|_{i,j=1}^{3,9}$  из (1.13) содержит следующие ненулевые элементы

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(n)} &= \sum_{k,l=1}^3 e_{ikl} \hat{h}_k(t_n^H) \frac{\partial\varphi_l}{\partial z_j} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 6), \\ B_{i+6,i}^{(n)} &= 1 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Равенство нулю остальных элементов следует из предположений модели о независимости компонент постоянных сдвигов в измерениях МПЗ, а также теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Элементы матрицы  $B_n$  вычислялись посредством интегрирования уравнений в вариациях (2.14) на отрезке  $[t_n, t_{n+1}]$  с начальными условиями (2.6) в точке  $t_n$ . Эти уравнения интегрировались при помощи модификации разностной схемы (2.16), в предположении о постоянстве угловой скорости на отрезке интегрирования.

Точность аппроксимации измерений вектора МПЗ на каждом полуинтервале  $[t_n, t_{n+1})$  характеризуется величинами

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{3N_n} \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{k \in U(n)} \left[ h_i^{(k)} - \hat{h}_i(t_k^H) - \Delta_i \right]^2 \right\}},$$

$$U(n) = \{k : t_k^H \in [t_n, t_{n+1})\}.$$

где  $N_n$  — количество элементов множества  $U(n)$ .

Оценка  $x'_0$ , матрица  $P_0'^{-1}$  и смещение шкалы времени магнитометров относительно шкалы времени датчиков угловой скорости находились методом наименьших квадратов, посредством минимизации функционала (2.4). В обозначениях пункта 2.4  $x'_0 = x_*$ ,  $P_0^{-1} = \sigma^{-2}C$ .

## 2.7. Примеры реконструкции неуправляемого движения с помощью фильтра Калмана

Продемонстрируем результаты реконструкций вращательного движения на трех отрезках времени, отвечающих 17, 49 и 128 виткам (см. табл. 2.1). Рисунки организованы нижеописанным образом. Левые части рис. 2.7, 2.11, 2.15 содержат графики зависимости от времени углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , а также график разности  $\Delta\gamma(t) = \gamma(t) - c_0 - c_1(t - t_0^\Omega)$ , где  $c_0 + c_1(t - t_0^\Omega)$  — линейная аппроксимация функции  $\gamma(t)$ , построенная методом наименьших квадратов (ср. рис. 2.1, 2.3 и 2.5). В правых частях — ломаные, проходящие через точки  $(t_n^\Omega, \Omega_i^{(n)} + \Delta_i(t_n))$ . Эти ломаные демонстрируют угловую скорость используемую для построения фактического движения с помощью фильтра Калмана.

В левых частях рис. 2.8, 2.12, 2.16 приведены графики ломаных, проходящие через точки  $(t_k^H, h_i^{(k)})$  и  $(t_k^H, \hat{h}_i(t_k^H) + \Delta_{Hi}(t_n))$ . В выбранном масштабе ломаные совпадают, поэтому в правых частях этих рисунков приведены ломаные, проходящие через точки  $(t_n^H, h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_{K_n}^H) - \Delta_{Hi}(t_n))$ .

На рис. 2.9, 2.13, 2.17 изображены графики величин  $\Delta_{\Omega i}$ ,  $\Delta_{Hi}$  и  $\sigma_n$ . Графики  $\sigma_n$  демонстрируют сходимость фильтра Калмана. Эти величины — кусочно

постоянные функции, на полуинтервалах  $[t_n, t_{n+1})$  они сохраняют свои значения. На рис. 2.10, 2.14, 2.18 приведены графики стандартных отклонений оценок  $\hat{x}_n$ . Каждая компонента оценки представлена соответствующим стандартным отклонением, за исключением компонент кватерниона. Последние представлены стандартными отклонениями  $\sigma_{\theta_i}$  компонент вектора бесконечно малого поворота  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Это также кусочно постоянные функции с интервалами постоянства  $[t_n, t_{n+1})$ .

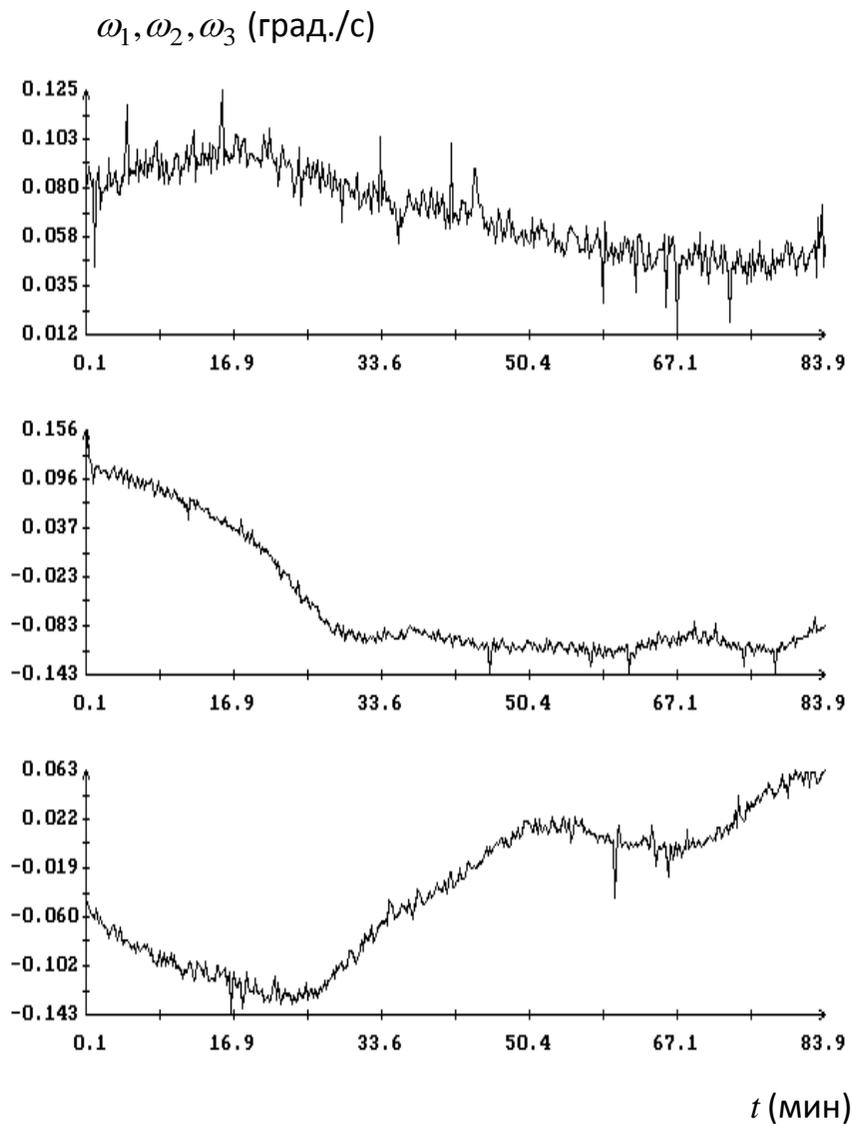
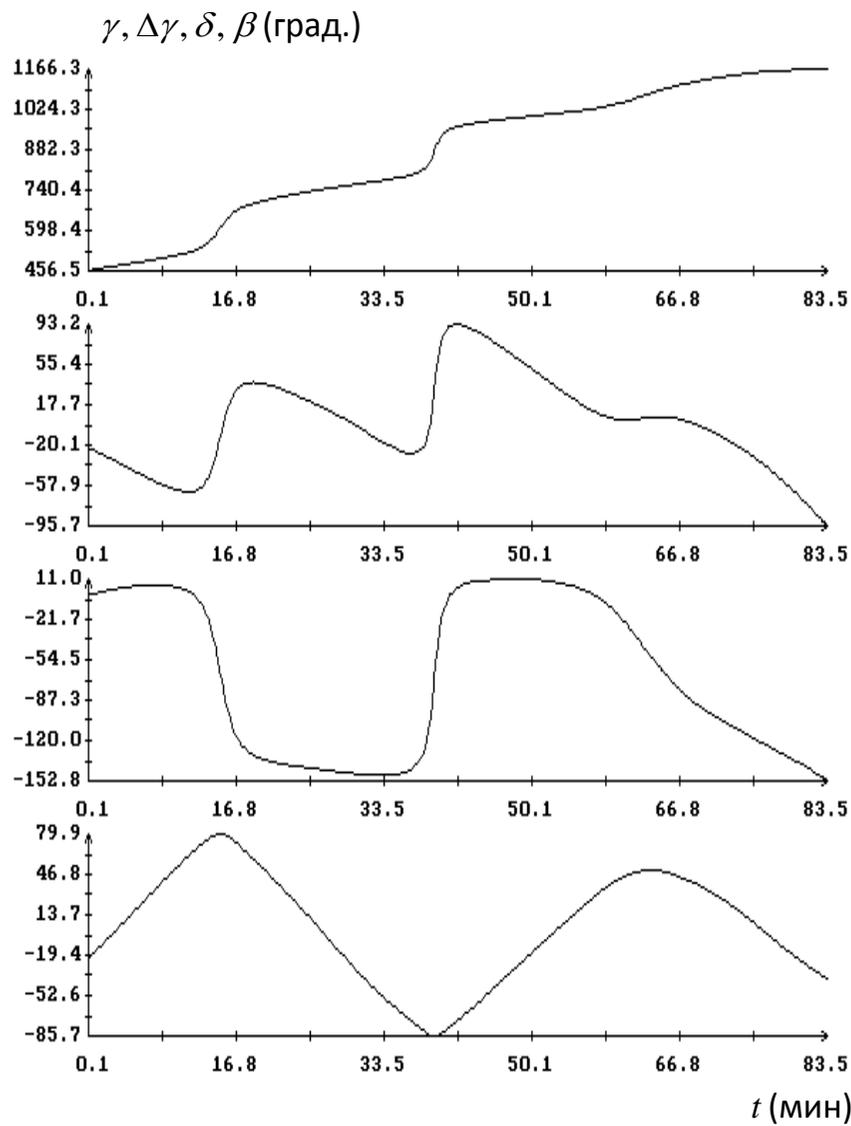


Рис. 2.7. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:11:03 ДМВ 15.09.2007.

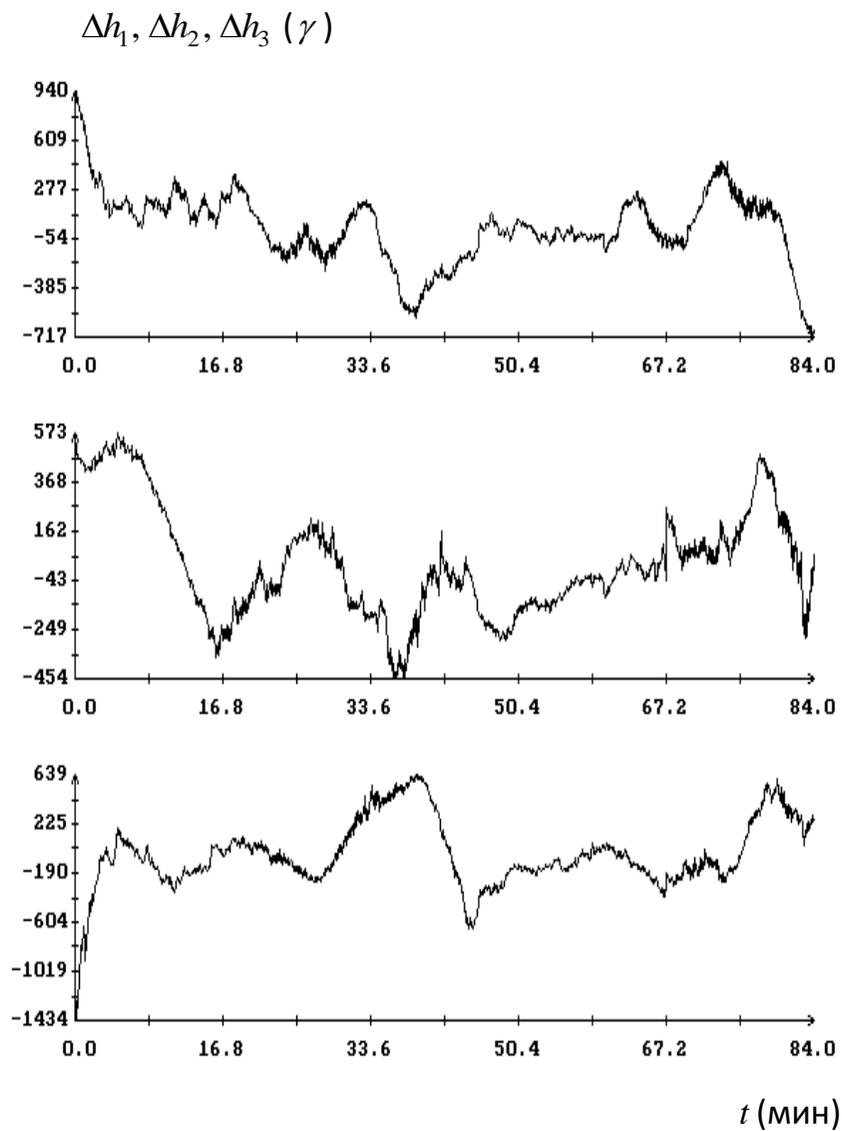
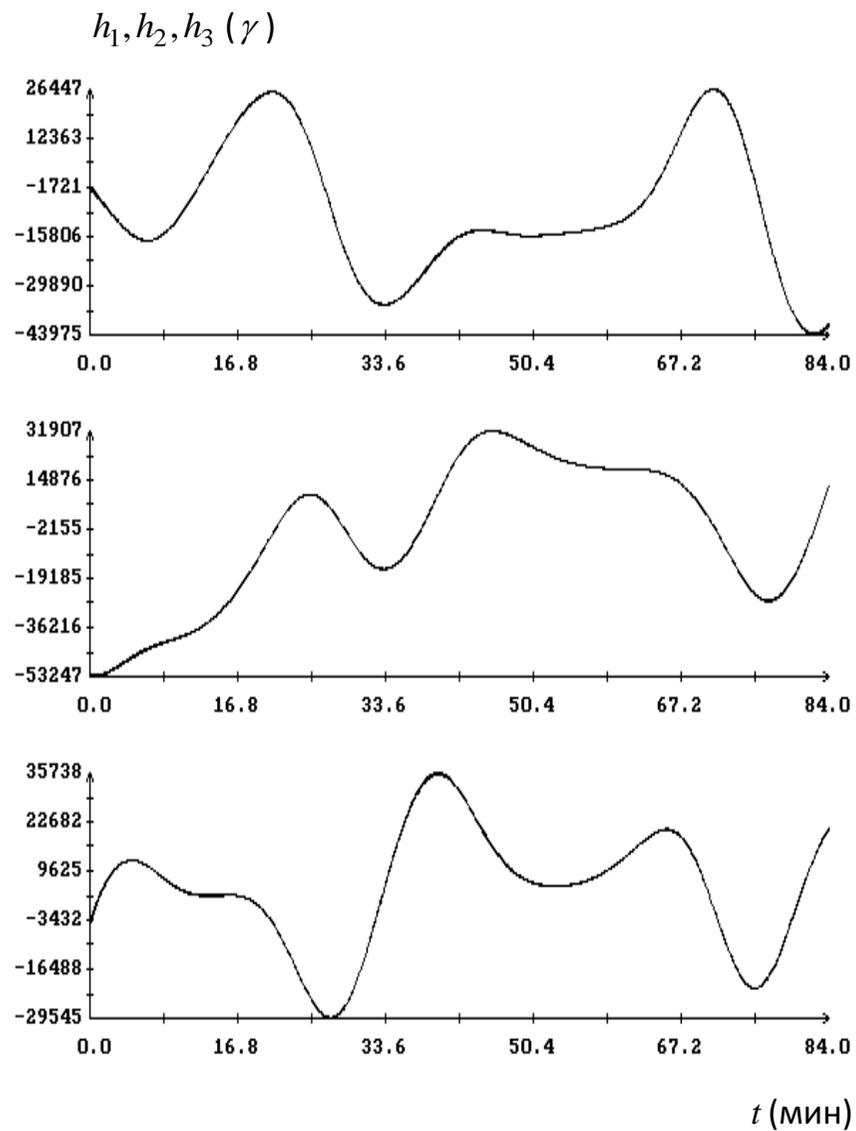


Рис. 2.8. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:11:03 ДМВ 15.09.2007.

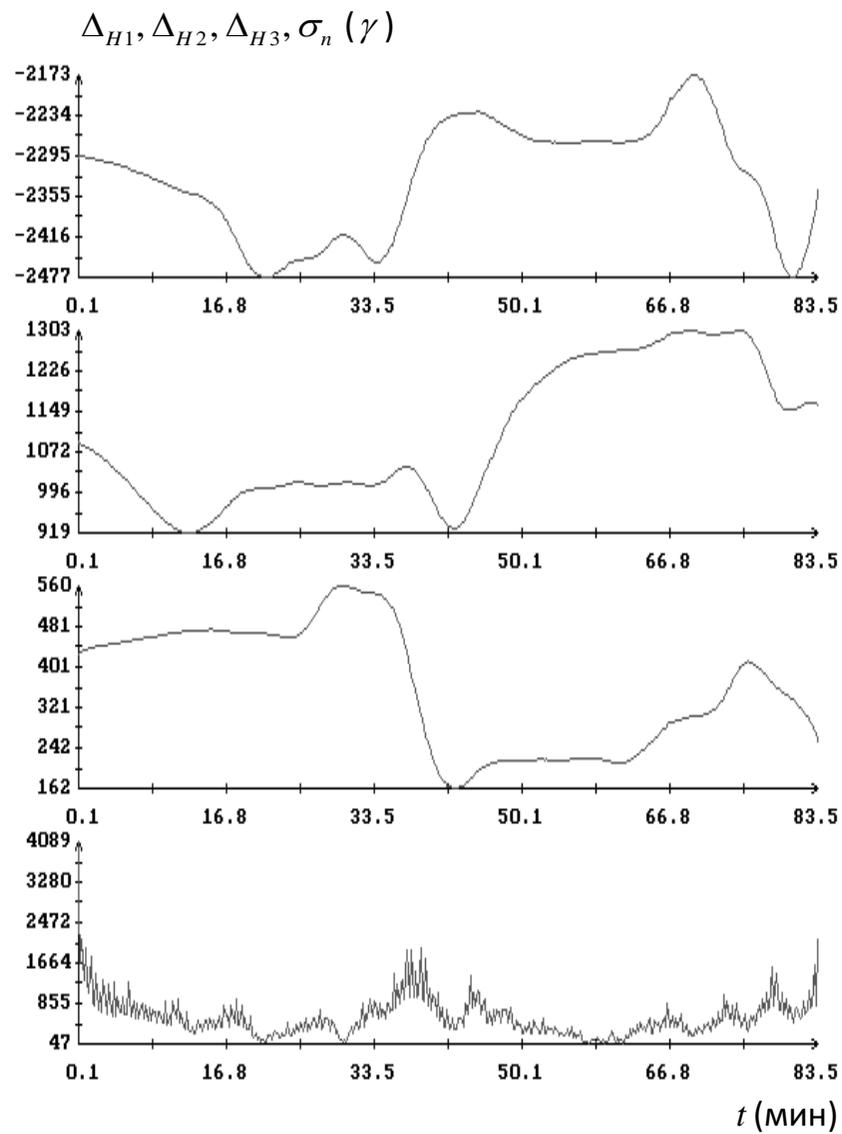
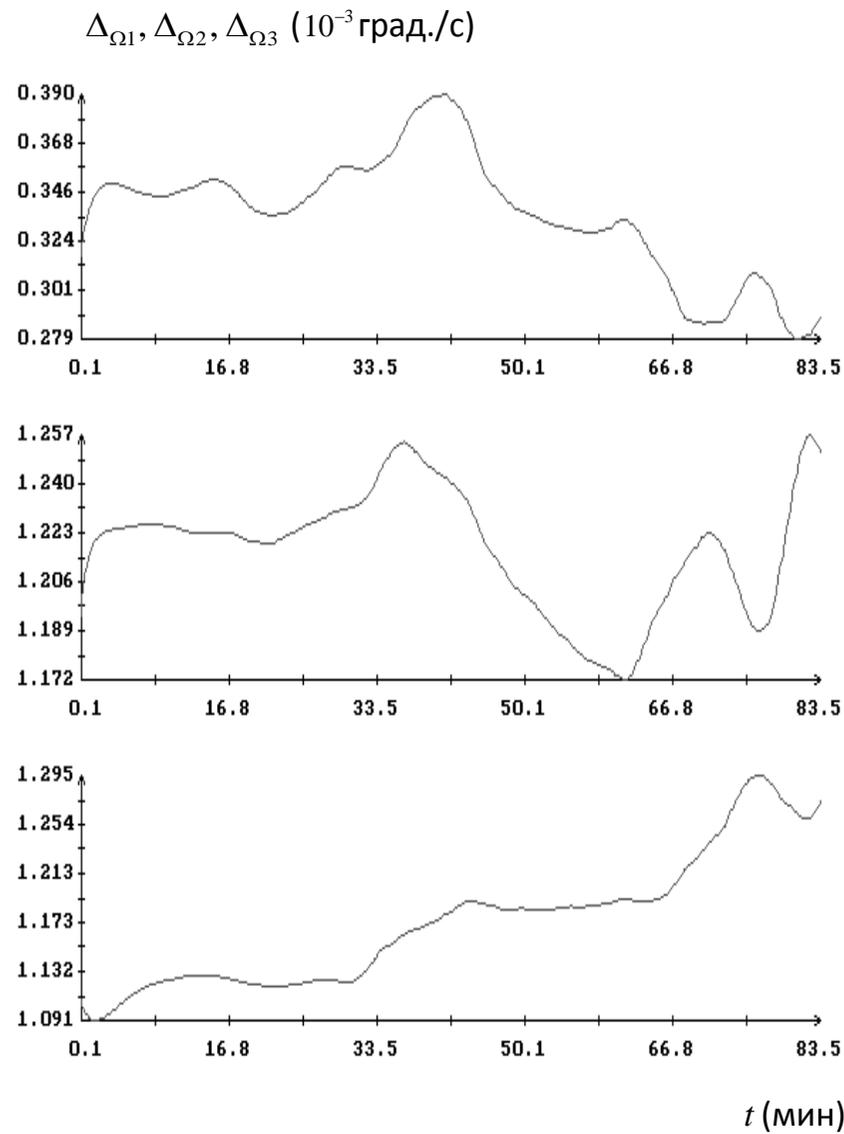


Рис. 2.9. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:11:03 ДМВ 15.09.2007.

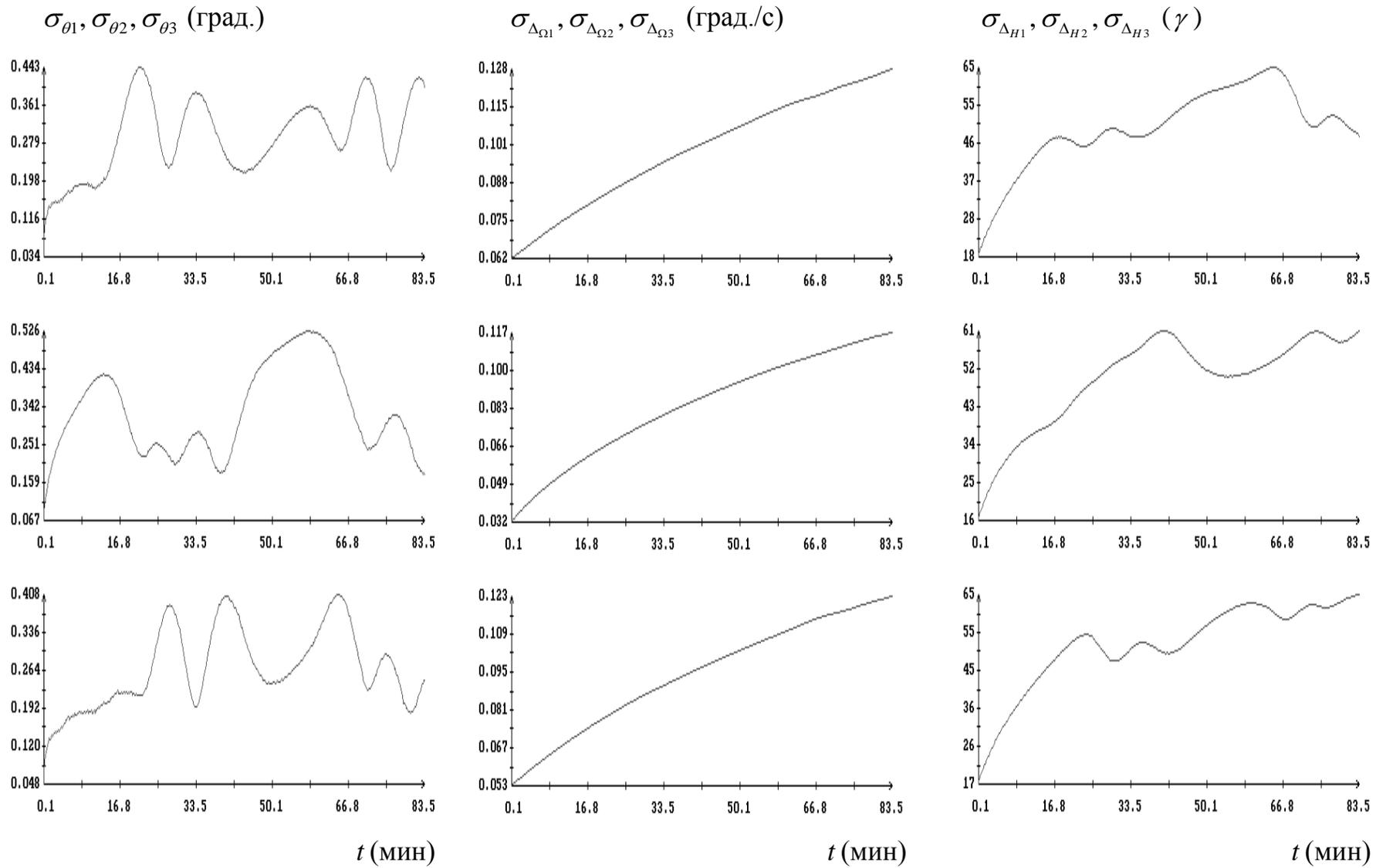


Рис. 2.10. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:11:03 ДМВ 15.09.2007.

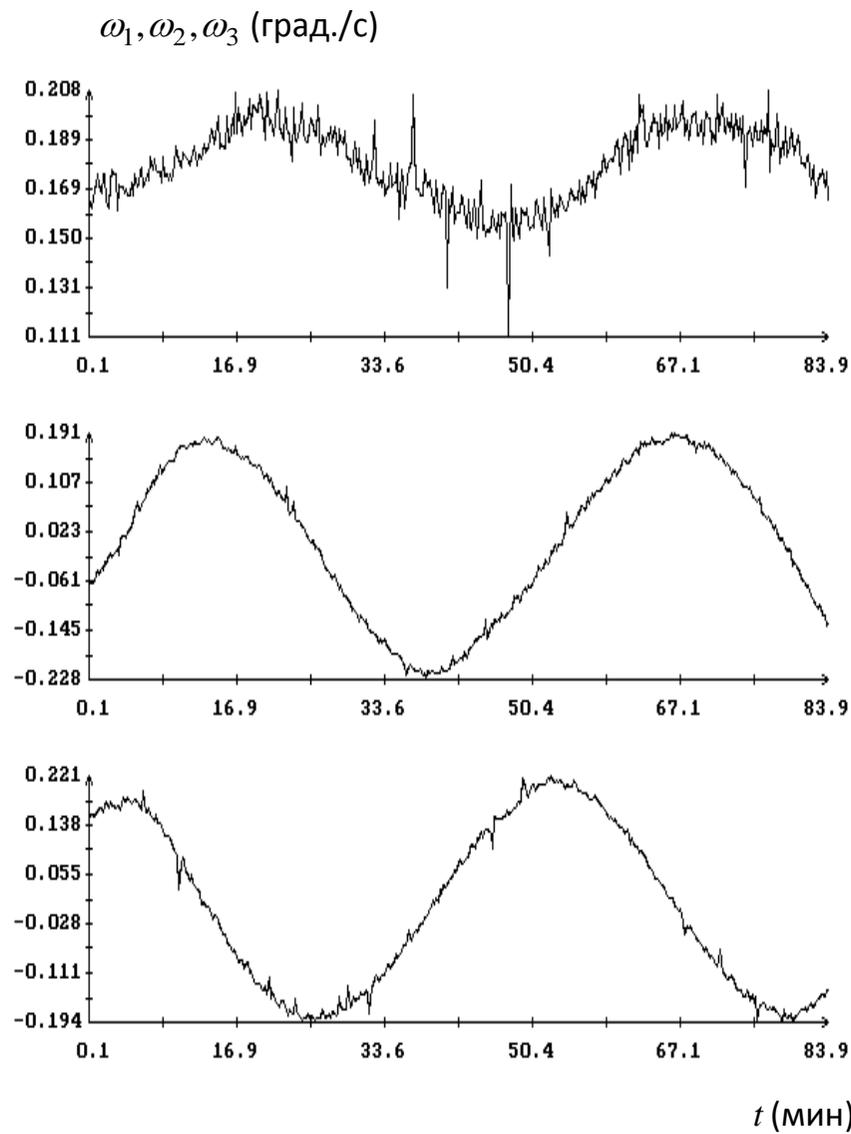
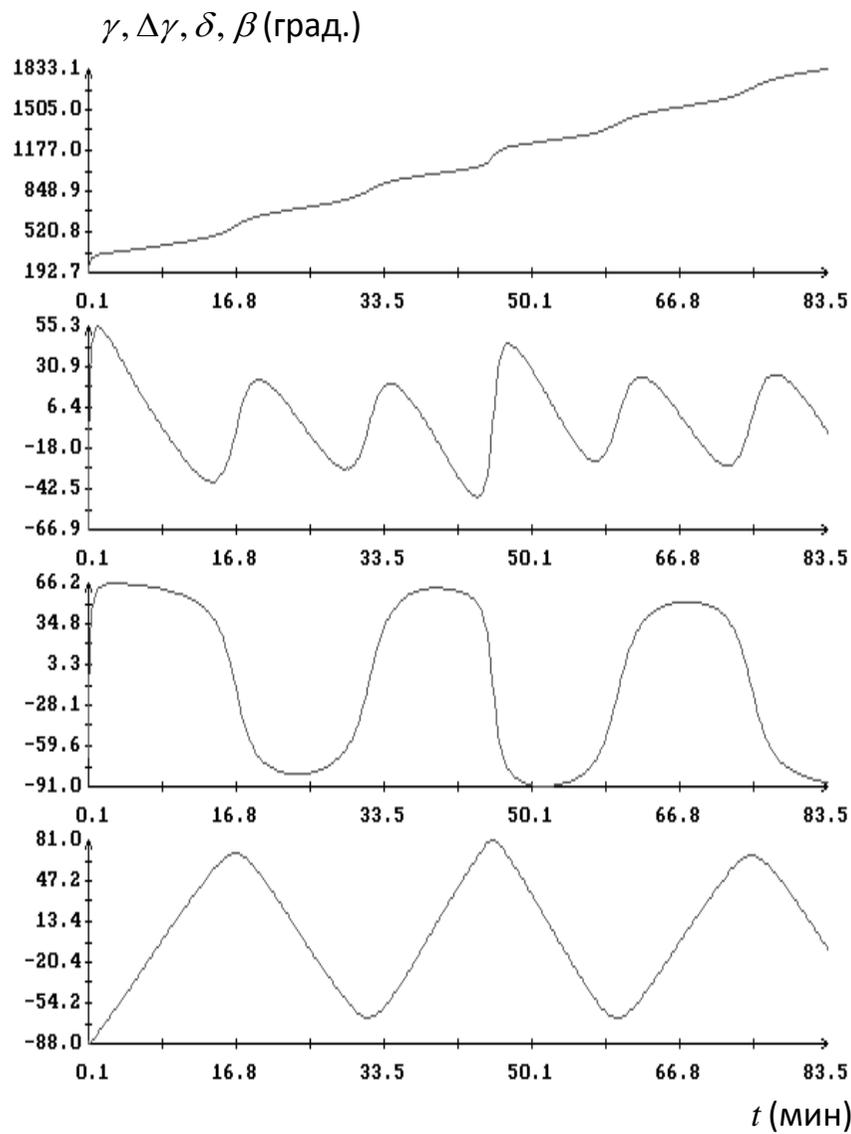


Рис. 2.11. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:05:42 ДМВ 17.09.2007.

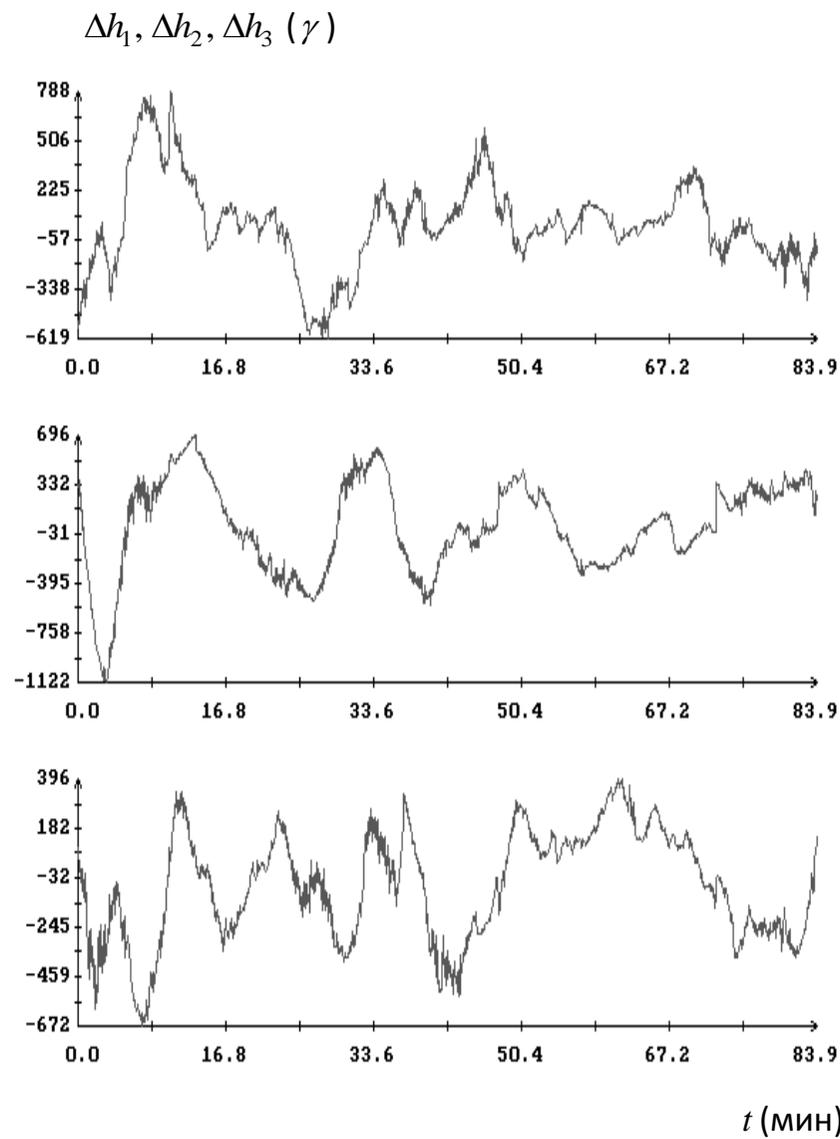
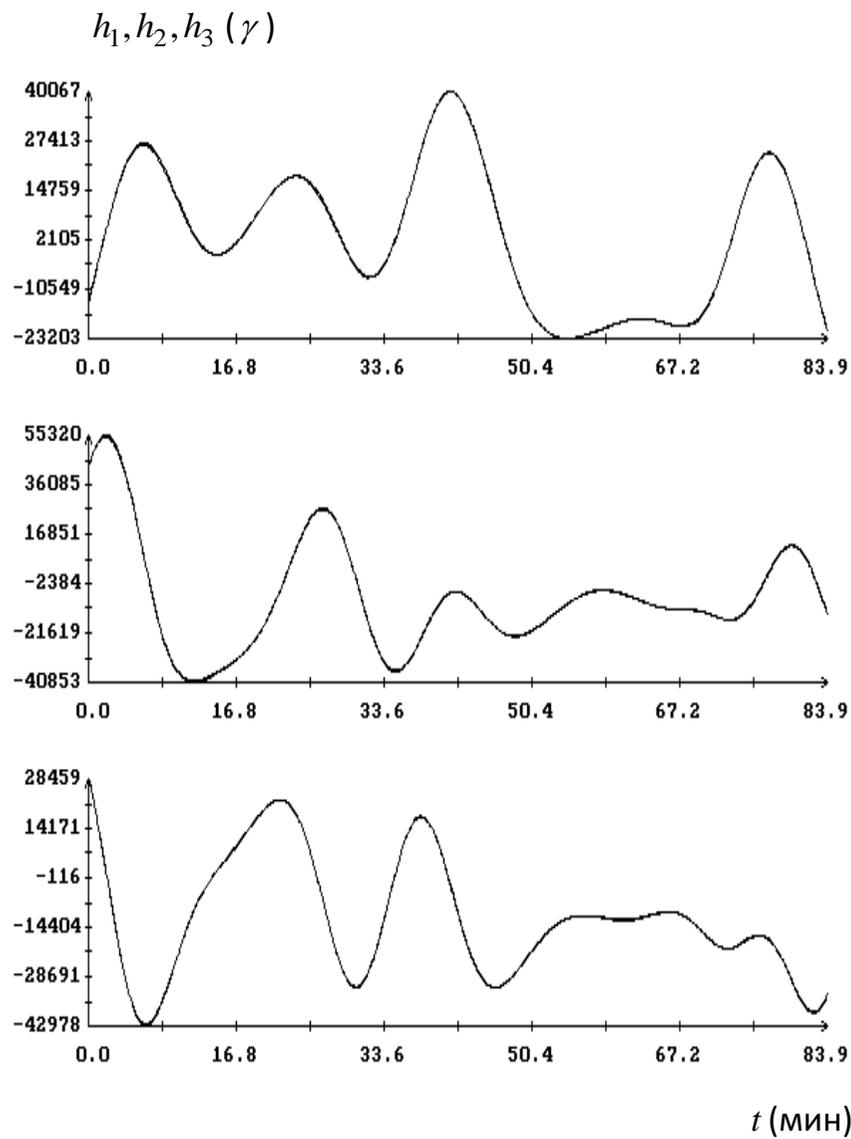


Рис. 2.12. Движение Фотона М-3, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:05:42 ДМВ 17.09.2007.

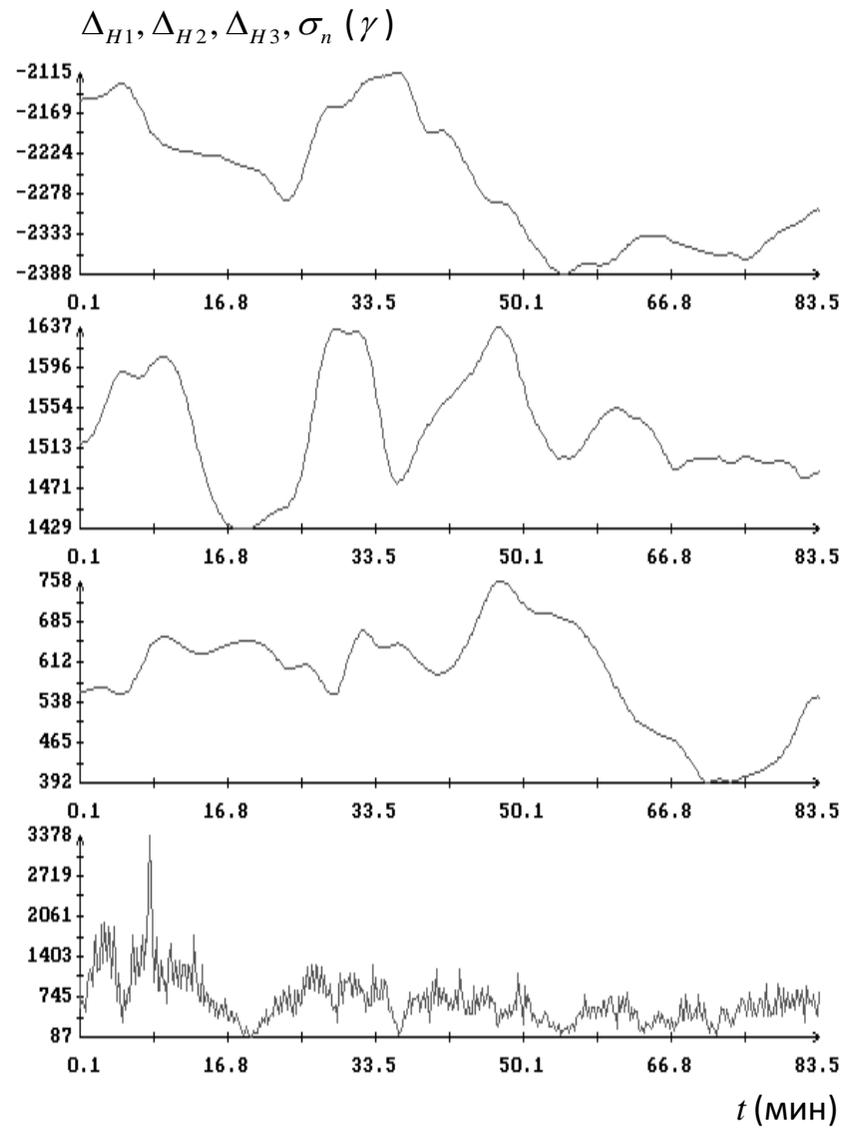
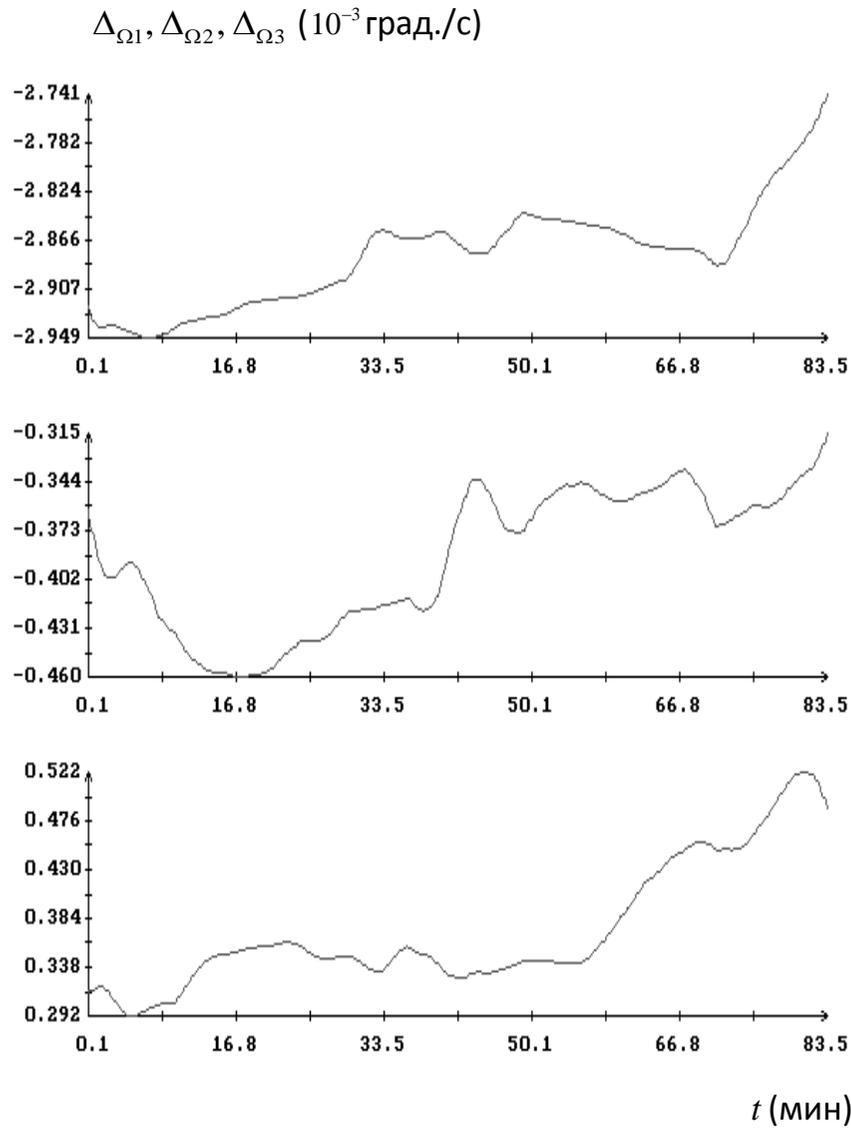


Рис. 2.13. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:05:42 ДМВ 17.09.2007.

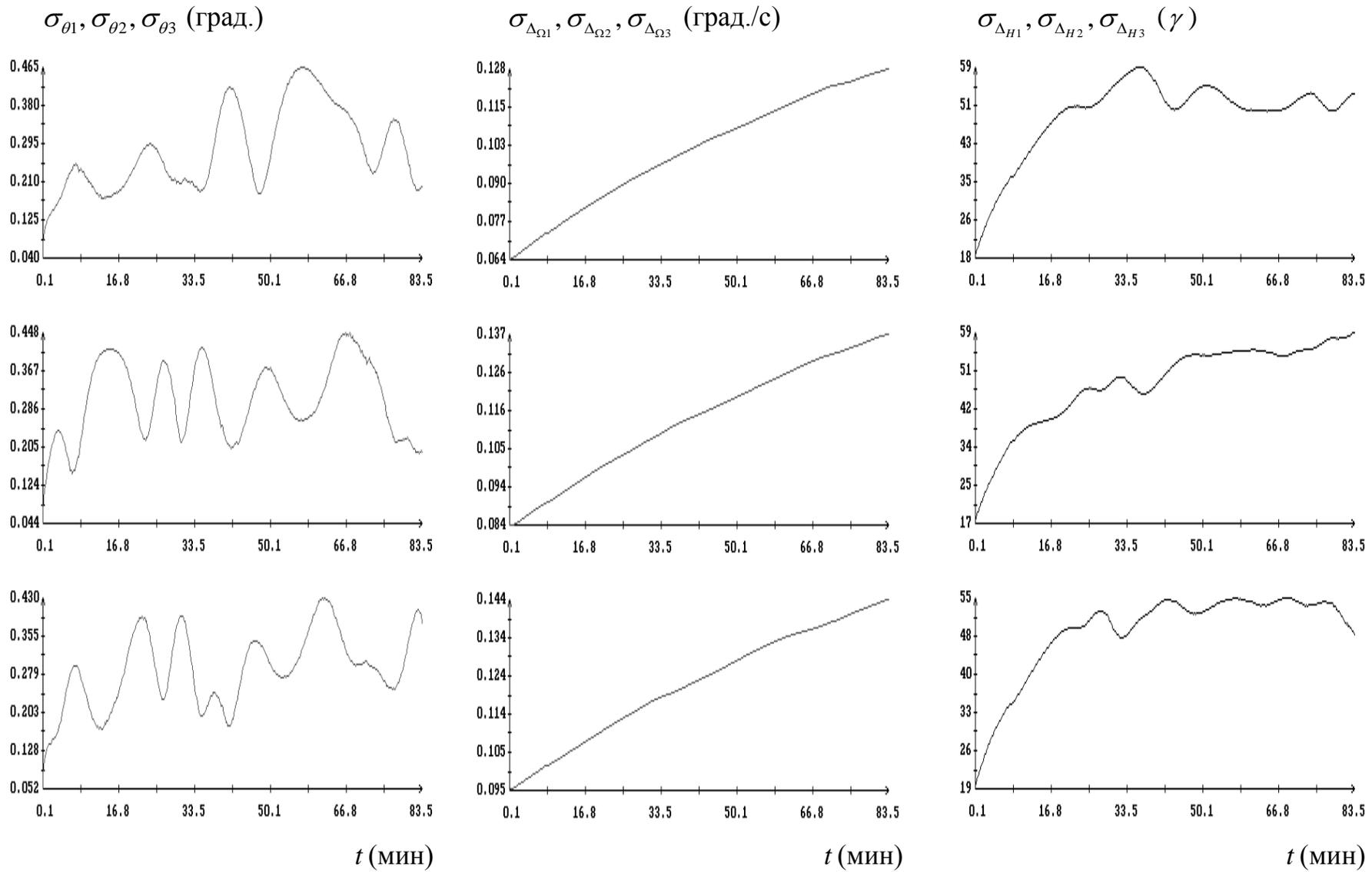


Рис. 2.14. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:05:42 ДМВ 17.09.2007.

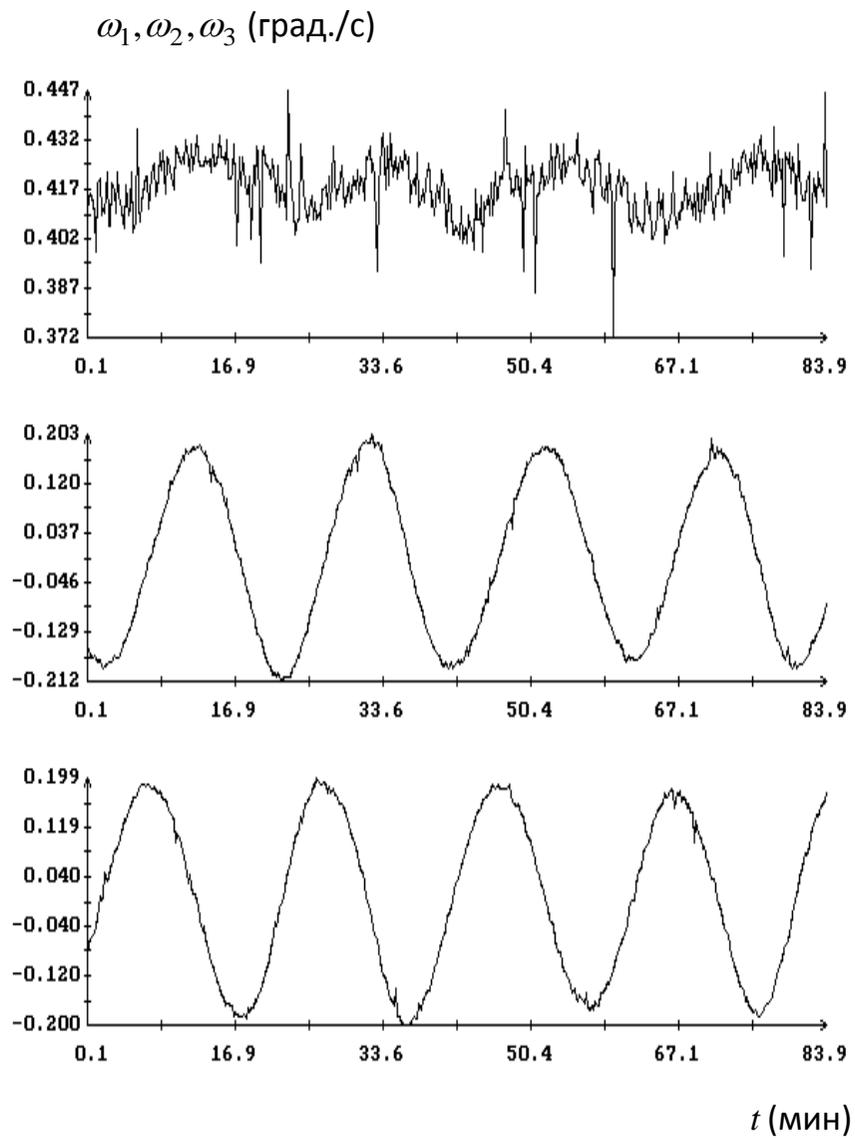
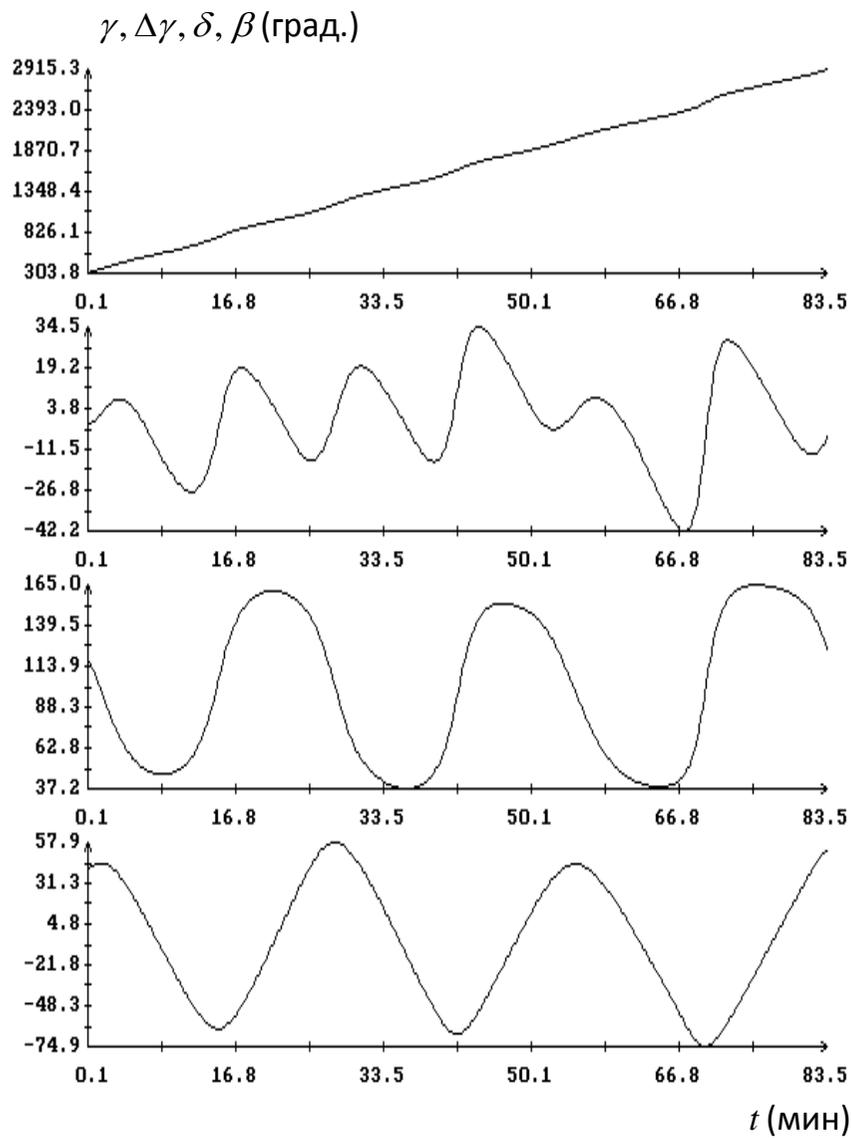


Рис. 2.15. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 12:27:18 ДМВ 22.09.2007.

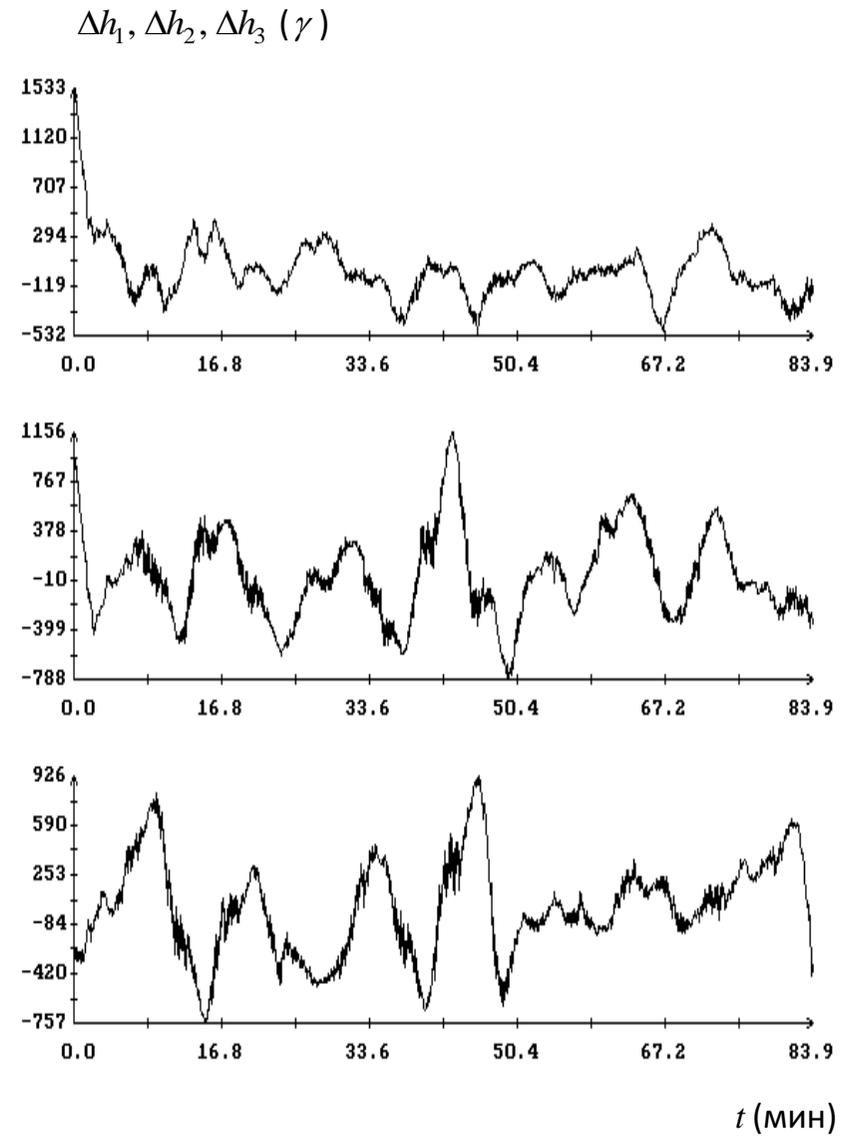
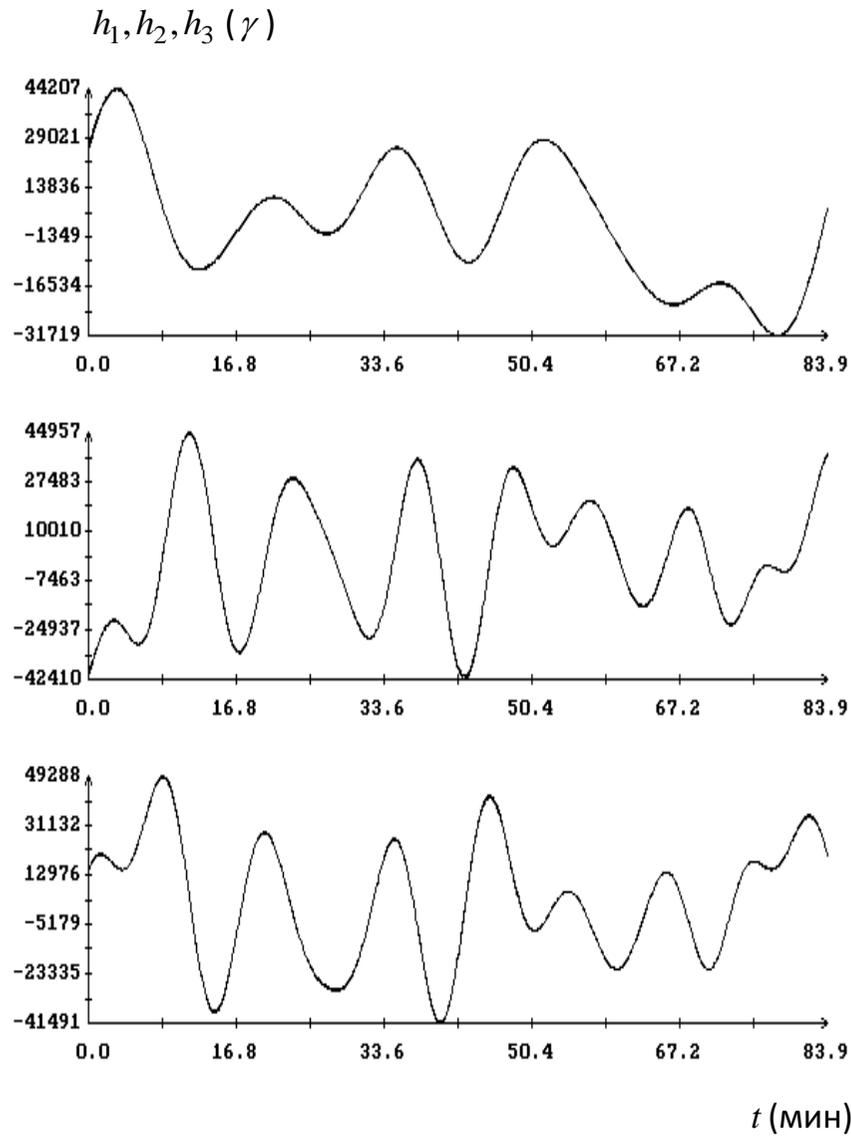


Рис. 2.16. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 12:27:18 ДМВ 22.09.2007.

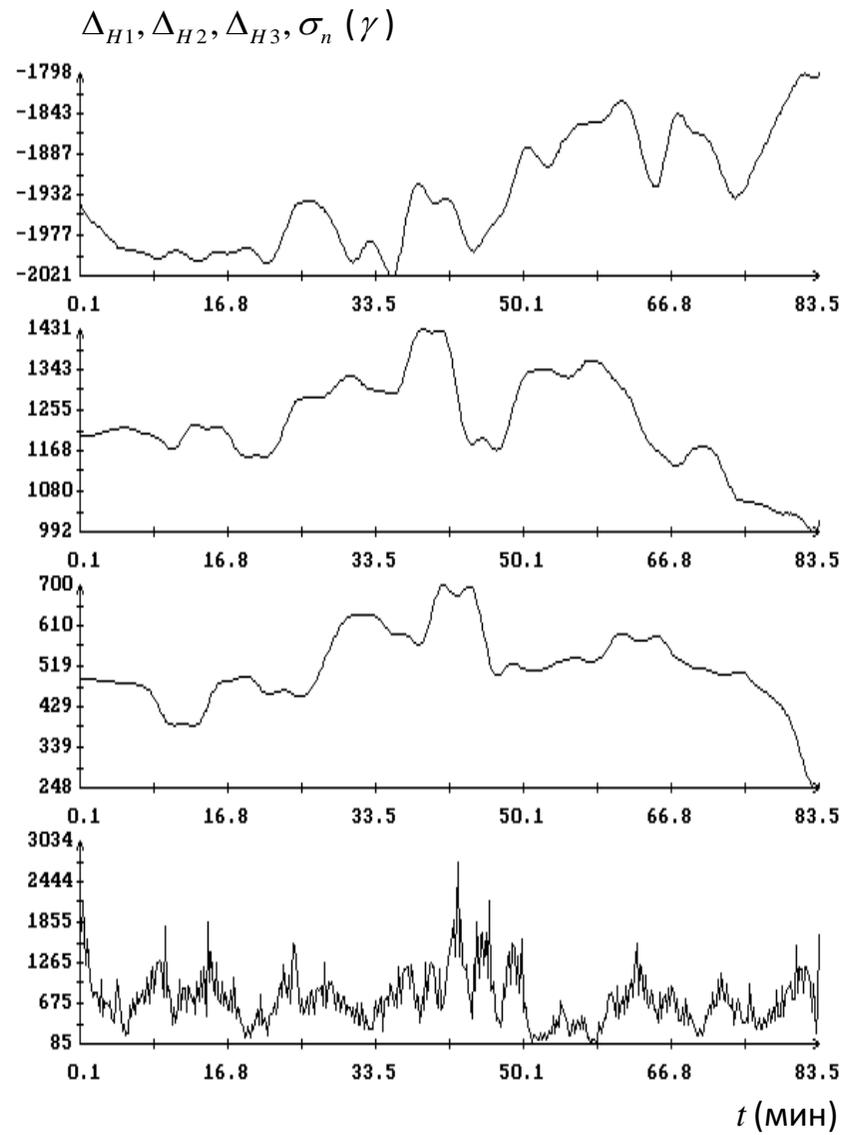
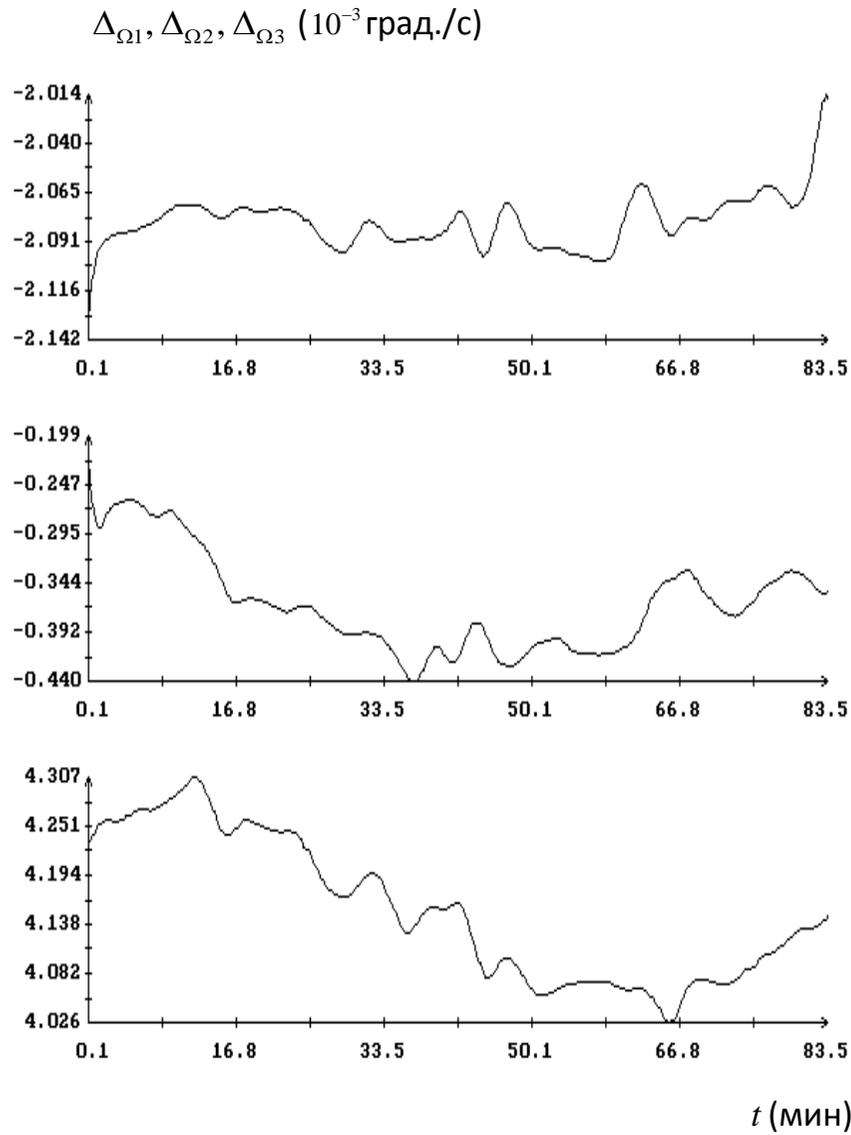


Рис. 2.17. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 12:27:18 ДМВ 22.09.2007.

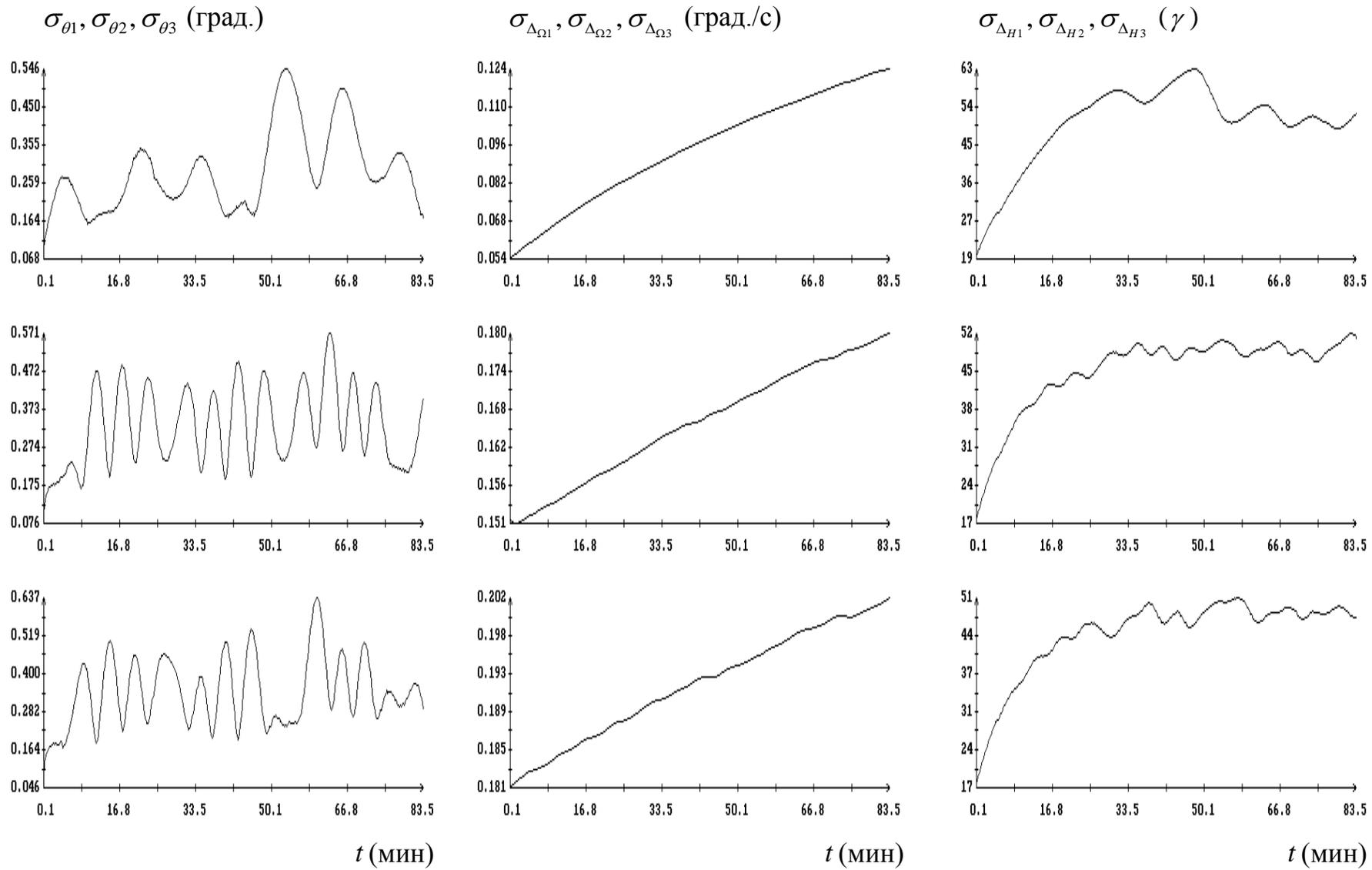


Рис. 2.18. Движение *Фотона М-3*, реконструированное с помощью фильтра Калмана. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 12:27:18 ДМВ 22.09.2007.

## Глава 3

# Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ

### 3.1. Введение

Обработка данных измерений магнитного поля Земли, полученных на борту ИСЗ, обычно выполняется с использованием достаточно сложных математических моделей. Желательно провести предварительную проверку имеющихся данных простыми средствами. Если измерения проводились одновременно несколькими магнитометрами, то в качестве такой проверки можно использовать проверку геометрической согласованности их показаний. Если проверка оказывается успешной, то в результате удастся оценить постоянные смещения в измерениях и матрицы перехода между собственными системами координат магнитометров. В данной главе описана методика проверки согласованности измерений двух магнитометров. Приведены примеры ее применения при обработке данных, полученных аппаратурой DIMAS (см. п. 1.3). Подобная проверка данных измерений МПЗ, полученных аппаратурой "Мираж", на спутнике *Фотон М-2* была приведена в статьях [49, 50]. Ниже описан один из возможных вариантов такой проверки, который использовался при обработке данных, полученных аппаратурой DIMAS (см. п. 1.3).

Аппаратура DIMAS имела четыре трехкомпонентных магнитометра, установленных в разных частях спускаемого аппарата и занумерованных числами 0, 1, 2 и 3. Измерения проводились в течение всего полета. Оцифровка показаний всех магнитометров выполнялась для одних и тех же моментов времени. Интервалы между соседними измерениями не были постоянными. Их длина варьируется в пределах  $1 \div 12$  с, а в среднем составляет около 5 с.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [49, 50].

## 3.2. Методика проверки согласованности данных измерений бортовых магнитометров

Пусть на борту искусственного спутника Земли установлены два магнитометра. Обозначим их II и III. Магнитометры расположены в разных местах, но измеряют одно и то же поле — МПЗ. Требуется проверить согласованность полученных данных. При этом допускается, что измерения обоих магнитометров могут содержать постоянные смещения.

Точная постановка задачи состоит в следующем. На некоторой временной сетке  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  заданы два набора компонент вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Компоненты  $h_i$  относятся к собственной системе координат магнитометра II, компоненты  $H_i$  — к собственной системе координат магнитометра III ( $i = 1, 2, 3$ ). Величины  $h_i^{(n)} \approx h_i(t_n)$  и  $H_i^{(n)} \approx H_i(t_n)$  представляют собой данные измерений магнитометров II и III соответственно, выполненные с малыми ошибками в момент времени  $t_n$ . Если пренебречь ошибками, то при каждом  $n$  величины  $h_i^{(n)}$  и  $H_i^{(n)}$  являются компонентами одного и того же вектора  $\mathbf{H}(t_n)$  и поэтому связаны определенными соотношениями. Эти соотношения, игнорируя случайные ошибки в данных измерений и учитывая ошибки систематические (постоянные смещения), можно записать в виде

$$h_i^{(n)} = \Delta_i + \sum_{j=1}^3 b_{ij} H_j^{(n)} \quad (i = 1, 2, 3; n = 0, 1, \dots, N). \quad (3.1)$$

Здесь  $\Delta_i$  — пересчитанные в систему координат магнитометра II постоянные смещения в данных измерений,  $b_{ij}$  — элементы матрицы перехода  $B = \| b_{ij} \|_{i,j=1}^3$  от системы координат магнитометра III к системе координат магнитометра II. При наличии случайных ошибок в данных измерений соотношения (3.1) становятся приближенными.

Если на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_N$  спутник совершает сложное вращательное движение, то в общем случае уравнения (3.1) достаточны для определения матрицы  $B$  и смещений  $\Delta_i$  уже при  $N \geq 5$ . Однако в реальных ситуациях  $N$  и

$t_N - t_0$  велики. Учитывая приближенность соотношений (3.1) и большое значение  $N$ , для отыскания матрицы  $B$  и смещений  $\Delta_i$  удобно воспользоваться методом наименьших квадратов. Применение этого метода означает принятие следующей гипотезы: ошибки в соотношениях (3.1) некоррелированы, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии. Следуя методу наименьших квадратов, будем искать минимум выражения

$$Z = \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 \left( h_i^{(n)} - \Delta_i - \sum_{j=1}^3 b_{ij} H_j^{(n)} \right)^2 \quad (3.2)$$

по величинам  $\Delta_i$  и  $b_{ij}$  при условии, что матрица  $B$  ортогональна и имеет положительный определитель. Решение несколько более простой задачи, когда  $\Delta_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и требуется минимизировать выражение (3.2) только по элементам матрицы  $B$ , хорошо известно (см., например, [51]). Незначительная модификация этого решения, позволяет выполнить полную минимизацию  $Z$ .

Выражение (3.2) с учетом ортогональности  $B$  представим в виде

$$\begin{aligned} Z = (N + 1) \sum_{i=1}^3 \Delta_i^2 - 2 \sum_{i=1}^3 a_i \Delta_i + 2 \sum_{i,j=1}^3 b_{ij} (\Delta_i A_j - s_{ij}) + \\ + \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 \left( [h_i^{(n)}]^2 + [H_i^{(n)}]^2 \right), \\ a_i = \sum_{n=0}^N h_i^{(n)}, \quad A_i = \sum_{n=0}^N H_i^{(n)}, \quad s_{ij} = \sum_{n=0}^N h_i^{(n)} H_j^{(n)}. \end{aligned}$$

Поставленная задача минимизации  $Z$  является задачей на условный экстремум — при минимизации необходимо учитывать условия ортогональности матрицы  $B$

$$\sum_{k=1}^3 b_{ki} b_{kj} = \delta_{ij}.$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Для решения задачи воспользуемся методом

неопределенных множителей Лагранжа. Составим функцию

$$L = (N + 1) \sum_{i=1}^3 \Delta_i^2 - 2 \sum_{i=1}^3 a_i \Delta_i + 2 \sum_{i,j=1}^3 b_{ij} (\Delta_i A_j - s_{ij}) + \sum_{i,j=1}^3 \lambda_{ij} \left( \sum_{k=1}^3 b_{ki} b_{kj} - \delta_{ij} \right),$$

где  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$  — неопределенные множители Лагранжа и в выражении для  $Z$  опущены слагаемые, не зависящие от  $\Delta_i$  и  $b_{ij}$ . Условия безусловного минимума  $L$  по величинам  $\Delta_i$  и  $b_{ij}$  имеют вид

$$(N + 1) \Delta_i + \sum_{k=1}^3 b_{ik} A_k = a_i, \quad \Delta_i A_j + \sum_{k=1}^3 b_{ik} \lambda_{kj} = s_{ij}.$$

Из первой группы этих условий находим

$$\Delta_i = \frac{1}{N + 1} \left( a_i - \sum_{k=1}^3 b_{ik} A_k \right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.3)$$

Подставив результат во вторую группу условий, получим

$$\sum_{k=1}^3 b_{ik} \left( \lambda_{kj} - \frac{A_k A_j}{N + 1} \right) = s_{ij} - \frac{a_i A_j}{N + 1} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Последние соотношения запишем в матричном виде

$$B \Lambda = S, \quad \Lambda = \left\| \lambda_{ij} - \frac{A_i A_j}{N + 1} \right\|_{i,j=1}^3, \quad S = \left\| s_{ij} - \frac{a_i A_j}{N + 1} \right\|_{i,j=1}^3. \quad (3.4)$$

Здесь  $B$  — ортогональная, а  $\Lambda$  — симметричная матрицы. Уравнение (3.4) решается следующим образом [51]. Рассмотрим сингулярное разложение матрицы [52]  $S$ :  $S = U D V^T$ . Здесь  $U$  и  $V$  — ортогональные матрицы порядка 3,  $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$ ,  $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 0$ . Полагаем, что  $d_3 > 0$ , т. е. матрица  $S$  не вырождена. Введем матрицу  $F = \text{diag}(f_1, f_2, f_3)$ ,  $f_i = \pm 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ), но выбор знаков пока не фиксируем. На основании сингулярного разложения  $S$  запишем  $S = U F^2 D V^T = U F V^T V F D V^T$ . Положим  $B = U F V^T$ ,  $\Lambda = V F D V^T$ . Это наиболее общий вид матриц  $B$  и  $\Lambda$  с требуемыми свойствами.

Полученные формулы определяют несколько решений уравнения (3.4). Выберем из них то, которое доставляет  $Z$  минимум и удовлетворяет условию  $\det B = 1$ . На решениях уравнения (3.4)  $Z = -2\text{tr} BS^T + Z_0$ , где  $Z_0$  не зависит от  $B$ . Простые преобразования дают

$$\begin{aligned} Z - Z_0 &= -2\text{tr} (UFV^T)(VDU^T) = -2\text{tr} UFDU^T = \\ &= -2\text{tr} U^T UFD = -2\text{tr} FD = -2(d_1 f_1 + d_2 f_2 + d_3 f_3). \end{aligned}$$

Поскольку  $\det UFV^T = f_1 f_2 f_3 \det U \det V$ , следует положить  $f_1 = f_2 = 1$ ,  $f_3 = \det U \det V$ . Окончательное выражение для матрицы  $B$  имеет вид

$$B = U \text{diag} (1, 1, \det U \det V) V^T.$$

После того, как матрица  $B$  найдена, смещения  $\Delta_i$  вычисляются по формулам (3.3). Для вычисления сингулярного разложения матрицы  $S$  используется соответствующая подпрограмма из [53], переписанная на C#.

Найденное решение обозначим  $\Delta_i^\circ$ ,  $B^\circ = \|b_{ij}^\circ\|$ . Оценим его точность. С этой целью линеаризуем задачу минимизации выражения (3.2) в окрестности точки минимума. Малые ошибки в задании ориентации системы координат магнитометра III по отношению к системе координат магнитометра II будем описывать в терминах вектора ее бесконечно малого поворота  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Компоненты этого вектора будем указывать в системе координат магнитометра II. Элементы произвольной ортогональной матрицы  $B = \|b_{ij}\|$ ,  $B \approx B^\circ$ , можно в линейном приближении по  $\boldsymbol{\theta}$  представить в виде

$$b_{ij} = b_{ij}^\circ + \sum_{k,l=1}^3 e_{ikl} \theta_k b_{lj}^\circ \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.5)$$

Здесь  $e_{ikl}$  — символ Леви-Чивиты.

Соотношения (3.1), учитывая наличие в них ошибок, представим в виде

$$h_i^{(n)} = \Delta_i + \sum_{j=1}^3 b_{ij} H_j^{(n)} + \varepsilon_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, 3; n = 0, 1, \dots, N). \quad (3.6)$$

Здесь  $\varepsilon_i^{(n)}$  — ошибки. Положим

$$\hat{h}_i^{(n)} = \Delta_i^\circ + \sum_{j=1}^3 b_{ij}^\circ H_j^{(n)} \quad (i = 1, 2, 3; n = 0, 1, \dots, N).$$

Вычтем последние соотношения из соотношений (3.6) и в полученных равенствах перегруппируем члены. Будем иметь

$$\Delta_i - \Delta_i^\circ + \sum_{j=1}^3 (b_{ij} - b_{ij}^\circ) H_j^{(n)} = -\varepsilon_i^{(n)} + h_i^{(n)} - \hat{h}_i^{(n)}.$$

Подставим сюда соотношения (3.5), при этом в левой части изменим порядок суммирования. В результате придем к равенствам

$$\Delta_i - \Delta_i^\circ + \sum_{k,l=1}^3 e_{ikl} \theta_k \left( \sum_{j=1}^3 b_{lj}^\circ H_j^{(n)} \right) = -\varepsilon_i^{(n)} + h_i^{(n)} - \hat{h}_i^{(n)}. \quad (3.7)$$

Напомним, здесь  $i = 1, 2, 3; n = 0, 1, \dots, N$ . Полученные соотношения будем рассматривать как линейную задачу метода наименьших квадратов для определения величин  $\Delta_i - \Delta_i^\circ$  и  $\theta_k$ . Это и есть упоминавшаяся выше линейная задача минимизации выражения (3.2). Введем вектор  $x = (\Delta_1 - \Delta_1^\circ, \Delta_2 - \Delta_2^\circ, \Delta_3 - \Delta_3^\circ, \theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ , определим подходящим образом матрицу  $A$ , вектор правой части  $b$  (при определении  $b$  надо положить  $\varepsilon_i^{(n)} = 0$ ) и запишем задачу (3.7) в виде  $Ax \approx b$ . Ее решение имеет вид  $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ , ковариационная матрица оценки  $\hat{x}$  равна

$$K_x = \sigma^2 (A^T A)^{-1}, \quad \sigma^2 = \frac{(A\hat{x} - b)^T (A\hat{x} - b)}{3(N - 1)}.$$

По смыслу линейаризации в данном случае  $\hat{x} = 0$ ,  $(A\hat{x} - b)^T (A\hat{x} - b)$  — значение выражения (3.2) в точке минимума. Обозначим это значение  $Z_{\min}$  и положим  $\sigma^2 = Z_{\min}/3(N - 1)$  в выражении для  $K_x$ , получим формулу оценки ковариационной матрицы  $K = \|k_{ij}\|_{i,j=1}^6$  в нелинейной задаче. Определенная по-новому величина  $\sigma$  — оценка стандартного отклонения ошибок выполнения соотношений (3.1). В общем случае величины  $\sqrt{k_{ii}}$  суть стандартные отклонения оцениваемых параметров; в данном случае при  $i = 1, 2, 3$  это — стандартные

отклонения  $\sigma_{\Delta_i}$  оценок смещений  $\Delta_i^\circ$ , при  $i = 4, 5, 6$  — среднеквадратичные значения углов  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Указанные среднеквадратичные значения обозначим  $\sigma_{\theta_1}, \sigma_{\theta_2}, \sigma_{\theta_3}$  и будем использовать как характеристики точности оценки  $B^\circ$ . Знание величин  $\sigma, \sigma_{\Delta_i}$  и  $\sigma_{\theta_i}$  позволяет обоснованно судить о согласованности показаний магнитометров II и III.

Наряду с описанным подходом рассмотрим классический подход. Матрицу  $B$  параметризуем углами  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , которые введем с помощью следующего условия. При совмещении с помощью параллельного переноса начал систем координат обоих магнитометров система магнитометра II переводится в систему магнитометра III тремя последовательными поворотами вокруг своих осей: 1) на угол  $\alpha$  вокруг оси 2; 2) на угол  $\beta$  вокруг оси 3, преобразованной первым поворотом; 3) на угол  $\gamma$  вокруг дважды преобразованной оси 1, совпадающей с осью 1 системы координат магнитометра III. Элементы матрицы  $B$  выражаются через введённые углы по формулам

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos \alpha \cos \beta, & b_{21} &= \sin \beta, \\ b_{12} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, & b_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ b_{13} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, & b_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ b_{31} &= -\sin \alpha \cos \beta, \\ b_{32} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ b_{33} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Ниже для удобства записи формул используются обозначения:  $\alpha = \psi_2, \beta = \psi_3, \gamma = \psi_1$ .

Отыскание углов  $\alpha, \beta, \gamma$  и смещений  $\Delta_i$  сводится к минимизации по этим величинам выражения (3.2). Минимизация выполнялась методом Гаусса-Ньютона [28]. На каждой итерации этого метода поправки  $\delta\Delta_i, \delta\psi_i$ , уточняющие

имеющиеся оценки  $\Delta_i$  и  $\psi_i$ , определяется системой

$$\begin{aligned}
(N+1)\delta\Delta_i + \sum_{j=1}^3 p_{ij} \delta\psi_j &= c_i, & \sum_{j=1}^3 (p_{ji} \delta\Delta_j + q_{ij} \delta\psi_j) &= d_i, \\
p_{ij} &= \sum_{k,l=1}^3 e_{ikl} \omega_{k,j} \sum_{n=0}^N \tilde{h}_i^{(n)}, & \tilde{h}_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^3 b_{ik} H_k^{(n)}, \\
q_{ij} &= \left( \sum_{k=1}^3 \omega_{k,i} \omega_{k,j} \right) \left( \sum_{n=0}^N \sum_{l=1}^3 [\tilde{h}_l^{(n)}]^2 \right) - \sum_{k,l=1}^3 \omega_{k,i} \omega_{l,j} \sum_{n=0}^N \tilde{h}_k^{(n)} \tilde{h}_l^{(n)}, \\
c_i &= \sum_{n=0}^N [h_i^{(n)} - \tilde{h}_i^{(n)} - \Delta_i], & d_i &= \sum_{j,k,l=1}^3 e_{jkl} \omega_{k,i} \sum_{n=0}^N \tilde{h}_l^{(n)} [h_j^{(n)} - \tilde{h}_j^{(n)} - \Delta_j], \\
\|\omega_{k,j}\|_{k,j=1}^3 &= \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & 0 & \sin \alpha \\ b_{21} & 1 & 0 \\ b_{31} & 0 & \cos \alpha \end{array} \right\|.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Использованные здесь величины  $\omega_{k,j}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) играют роль компонент угловой скорости, отвечающей параметру  $\psi_j$ . Они служат для представления производных элементов матрицы  $B$  по этому параметру:

$$\frac{\partial b_{ik}}{\partial \psi_j} = \sum_{m,l=1}^3 e_{iml} \omega_{m,j} b_{lk}$$

(обычная угловая скорость служит для представления производных по времени). Компоненты  $\omega_{k,j}$  относятся к системе координат магнитометра II.

Пусть по-прежнему  $Z_{\min}$  — значение выражения (3.2) в точке минимума. Матрицу системы (3.8), вычисленную в этой точке, обозначим  $C$ . Тогда ковариационная матрица параметров  $\Delta_i, \psi_i$  имеет вид

$$\tilde{K} = \sigma^2 C^{-1} = \|\tilde{k}_{ij}\|_{i,j=1}^6, \quad \sigma^2 = \frac{Z_{\min}}{3(N-1)}. \tag{3.9}$$

Введенные выше векторы бесконечно малого поворота  $\theta_i$  и вариации углов  $\psi_j$  связаны соотношениями

$$\theta_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{i,j} \delta\psi_j \quad (i = 1, 2, 3). \tag{3.10}$$

Отсюда следует формула  $K = P\tilde{K}P^T$ , где  $P = \text{diag}(E_3, \Omega)$ ,  $E_3$  — единичная матрица порядка 3, матрица  $\Omega = \|\omega_{i,j}\|_{i,j=1}^3$  вычислена в точке минимума выражения (3.2). Эта формула позволяет найти среднеквадратичные значения углов  $\theta_i$  по стандартным отклонениям углов  $\psi_i$ .

### 3.3. Примеры проверки согласованности показаний магнитометров

Методики предыдущего раздела проиллюстрируем результатами проверки согласованности данных измерений магнитометров 1, 2 и 3 аппаратуры DIMAS на *Фотоне М-3*. Проверка выполнялась обоими описанными способами. Начальным приближением для метода Гаусса-Ньютона в классическом способе служили  $\Delta_i^\circ$  и углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , рассчитанные по матрице  $B^\circ$ . Результаты применения разных способов совпали. Некоторые полученные результаты представлены в табл. 3.1 – 3.4 и на рис. 3.1 – 3.3.

В табл. 3.1 указаны интервалы времени, на которых проводилась проверка согласования данных. Первый столбец таблицы содержит номер интервала, второй и третий столбцы — декретное московское время (ДМВ) его начальной и конечной точек. Интервалы 1 и 12 относятся к началу и концу измерений соответственно и имеют длину около 10 часов. Измерения МПЗ, относящиеся к 18.09.2007 и 24.09.2007, из-за наличия в них лакуны разбиты на два интервала. Каждый из остальных интервалов охватывает примерно сутки. Табл. 3.2 – 3.4 демонстрируют согласованность данных измерений различных пар магнитометров. Табл. 3.2 составлена для пары (1, 2), табл. 3.3 — для пары (1, 3), табл. 3.4 — для пары (2, 3). В каждой перечисленной паре первый магнитометр выступал в роли магнитометра II, второй — в роли магнитометра III. Структура табл. 3.2 – 3.4 одинакова. В них для интервалов из табл. 3.1 приведены оценки параметров согласования  $\Delta_i$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , стандартные отклонения этих параметров  $\sigma_{\Delta_i}$ ,  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  и  $\sigma_\gamma$ , а также стандартное отклонение ошибок согласования

данных  $\sigma$ . Размерности перечисленных величин:  $[\Delta_i] = [\sigma_{\Delta_i}] = [\sigma] = = 10^{-5}\Theta$ ,  
 $[\alpha] = [\beta] = [\gamma] = [\sigma_\alpha] = [\sigma_\beta] = [\sigma_\gamma] = \text{рад.}$

Таблица 3.1. Временные интервалы сравнения показаний магнитометров

№ инт.	$t_0$ (дата, ДМВ)	$t_{N_H}$ (дата, ДМВ)
1	14.09.2007 14:10:20	14.09.2007 23:52:38
2	15.09.2007 0:07:24	15.09.2007 23:52:43
3	16.09.2007 0:07:44	16.09.2007 23:52:04
4	17.09.2007 0:07:38	17.09.2007 23:52:32
5	18.09.2007 0:08:01	18.09.2007 16:58:41
6	18.09.2007 18:00:38	18.09.2007 23:52:23
7	19.09.2007 0:07:48	19.09.2007 23:52:21
8	20.09.2007 0:08:00	20.09.2007 23:52:41
9	21.09.2007 0:07:31	21.09.2007 23:52:29
10	22.09.2007 0:07:49	22.09.2007 19:57:30
11	23.09.2007 6:46:14	23.09.2007 23:52:24
12	24.09.2007 0:07:46	24.09.2007 15:18:34
13	24.09.2007 20:09:08	24.09.2007 23:52:29
14	25.09.2007 0:07:18	25.09.2007 6:35:42

Таблица 3.2. Результаты сравнения показаний магнитометров 1 и 2,  $[\sigma] = [\Delta_i] = [\sigma_{\Delta_i}] = \text{нТ}$  ( $i = 1, 2, 3$ )

№ инт.	$\sigma$	$\Delta_1$	$\sigma_{\Delta_1}$	$\Delta_2$	$\sigma_{\Delta_2}$	$\Delta_3$	$\sigma_{\Delta_3}$	$\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\beta$	$\sigma_\beta$	$\gamma$	$\sigma_\gamma$
1	533	-9028	6	1461	6	-5855	6	0.01369	0.00018	-0.01762	0.00020	-0.00755	0.00020
2	546	-8933	4	1403	4	-5670	4	0.01358	0.00012	-0.01974	0.00013	-0.00709	0.00013
3	588	-8792	4	1288	4	-5824	4	0.01413	0.00013	-0.01935	0.00014	-0.00636	0.00013
4	576	-8745	4	1332	4	-5998	4	0.01137	0.00013	-0.01910	0.00014	-0.00594	0.00013
5	577	-8626	5	1288	5	-5857	5	0.01360	0.00016	-0.02115	0.00017	-0.00677	0.00016
6	606	-8584	9	1242	9	-5805	9	0.01389	0.00026	-0.02201	0.00028	-0.00767	0.00026
7	598	-8601	4	1264	4	-5696	4	0.01178	0.00013	-0.01986	0.00014	-0.00792	0.00014
8	584	-8486	4	1276	4	-5718	4	0.01250	0.00013	-0.02121	0.00013	-0.00692	0.00013
9	629	-8588	5	1460	5	-5976	5	0.01398	0.00014	-0.02274	0.00014	-0.00743	0.00014
10	592	-8313	5	1655	5	-6043	5	0.01239	0.00015	-0.02125	0.00015	-0.00705	0.00015
11	591	-8670	5	1237	5	-5992	5	0.01337	0.00016	-0.02156	0.00016	-0.00759	0.00016
12	562	-8853	5	1317	5	-5998	5	0.01340	0.00016	-0.02091	0.00017	-0.00670	0.00016
13	591	-9030	11	1290	11	-5538	11	0.01511	0.00032	-0.02209	0.00032	-0.00813	0.00032
14	501	-8989	7	1299	7	-5817	7	0.01478	0.00022	-0.02444	0.00024	-0.00618	0.00020

Таблица 3.3. Результаты сравнения показаний магнитометров 1 и 3,  $[\sigma] = [\Delta_i] = [\sigma_{\Delta_i}] = \text{нТ}$  ( $i = 1, 2, 3$ )

№ инт.	$\sigma$	$\Delta_1$	$\sigma_{\Delta_1}$	$\Delta_2$	$\sigma_{\Delta_2}$	$\Delta_3$	$\sigma_{\Delta_3}$	$\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\beta$	$\sigma_\beta$	$\gamma$	$\sigma_\gamma$
1	724	-21950	9	-12822	9	-10033	10	0.00359	0.00025	-0.00601	0.00028	-0.01382	0.00027
2	688	-21702	5	-12892	6	-9703	6	0.00259	0.00015	-0.01037	0.00016	-0.01107	0.00016
3	740	-21165	6	-13086	6	-9873	6	0.00150	0.00016	-0.01102	0.00018	-0.01214	0.00017
4	727	-20828	5	-13132	6	-9994	6	-0.00109	0.00016	-0.01068	0.00017	-0.01055	0.00017
5	729	-20390	7	-13203	7	-9912	7	0.00151	0.00020	-0.01260	0.00021	-0.01134	0.00020
6	756	-20293	11	-13297	12	-9930	12	0.00177	0.00032	-0.01431	0.00034	-0.01171	0.00032
7	744	-20274	6	-13127	6	-9850	6	0.00061	0.00016	-0.01008	0.00017	-0.01260	0.00017
8	734	-20130	6	-13211	6	-10013	6	0.00037	0.00016	-0.01348	0.00017	-0.01046	0.00016
9	770	-20306	6	-13297	6	-10560	6	0.00225	0.00018	-0.01506	0.00018	-0.01000	0.00017
10	724	-20284	6	-13446	6	-10895	6	0.00061	0.00018	-0.01327	0.00018	-0.01043	0.00018
11	870	-20066	8	-12271	8	-10390	8	0.00230	0.00023	-0.01411	0.00023	-0.01064	0.00023
12	848	-21568	8	-12166	9	-11458	9	0.00224	0.00025	-0.01219	0.00025	-0.01115	0.00025
13	746	-22694	14	-11985	16	-11251	17	0.00390	0.00040	-0.01338	0.00041	-0.01177	0.00040
14	648	-22631	9	-12003	11	-11510	11	0.00060	0.00028	-0.01890	0.00031	-0.01094	0.00026

Таблица 3.4. Результаты сравнения показаний магнитометров 2 и 3,  $[\sigma] = [\Delta_i] = [\sigma_{\Delta_i}] = \text{нТ}$  ( $i = 1, 2, 3$ )

№ инт.	$\sigma$	$\Delta_1$	$\sigma_{\Delta_1}$	$\Delta_2$	$\sigma_{\Delta_2}$	$\Delta_3$	$\sigma_{\Delta_3}$	$\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\beta$	$\sigma_\beta$	$\gamma$	$\sigma_\gamma$
1	438	-12884	6	-14434	6	-3755	6	-0.01000	0.00015	0.01155	0.00017	-0.00629	0.00016
2	373	-12744	3	-14436	3	-3586	3	-0.01085	0.00008	0.00934	0.00009	-0.00401	0.00009
3	393	-12356	3	-14507	3	-3606	3	-0.01248	0.00009	0.00825	0.00009	-0.00579	0.00009
4	390	-12070	3	-14578	3	-3600	3	-0.01231	0.00009	0.00837	0.00009	-0.00459	0.00009
5	382	-11747	4	-14622	4	-3608	4	-0.01195	0.00010	0.00852	0.00011	-0.00456	0.00010
6	395	-11685	6	-14683	6	-3663	6	-0.01197	0.00017	0.00768	0.00018	-0.00403	0.00017
7	381	-11638	3	-14530	3	-3752	3	-0.01104	0.00008	0.00974	0.00009	-0.00468	0.00009
8	382	-11631	3	-14618	3	-3867	3	-0.01197	0.00008	0.00772	0.00009	-0.00353	0.00009
9	469	-11708	4	-14903	4	-4111	4	-0.01152	0.00011	0.00760	0.00011	-0.00251	0.00011
10	447	-11963	4	-15242	4	-4410	4	-0.01164	0.00011	0.00795	0.00011	-0.00330	0.00011
11	582	-11385	5	-13649	5	-3971	6	-0.01084	0.00015	0.00744	0.00016	-0.00311	0.00015
12	615	-12736	6	-13637	6	-5012	7	-0.01095	0.00018	0.00873	0.00018	-0.00453	0.00018
13	393	-13677	8	-13469	9	-5208	9	-0.01108	0.00021	0.00868	0.00022	-0.00366	0.00021
14	372	-13694	5	-13466	6	-5162	6	-0.01403	0.00016	0.00546	0.00018	-0.00474	0.00015

Рис. 3.1 — 3.3 иллюстрируют достигнутое согласие показаний магнитометров на некоторых интервалах из табл. 3.1. Момент времени  $t = 0$  на этих рисунках соответствует моменту включения аппаратуры DIMAC — 14:10:20 ДМВ 14.09.2007. Левые части рисунков иллюстрируют согласие данных двух магнитометров на интервале 1, средняя — на интервале 7, правая — на интервале 13. На рисунках в каждой системе координат изображены два графика. Графики практически сливаются. Один из них представляет собой ломаную с вершинами в точках  $(t^H, h_i^{(n)})$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , ординаты которых определены левыми частями формулы (3.1). Каждое звено ломаной соединяет две точки с индексами  $n$ , отличающимися на 1. Другой график представляет собой аналогичную ломаную, ординаты вершин которой определены правыми частями той же формулы.

Рис. 3.4 иллюстрирует сравнение данных магнитометров 0 и 1. Его структура идентична рис. 3.1 — 3.3. Выделение рис. 3.4 обусловлено несколько худшей согласованностью измерений магнитометра 0 с измерениями остальных.

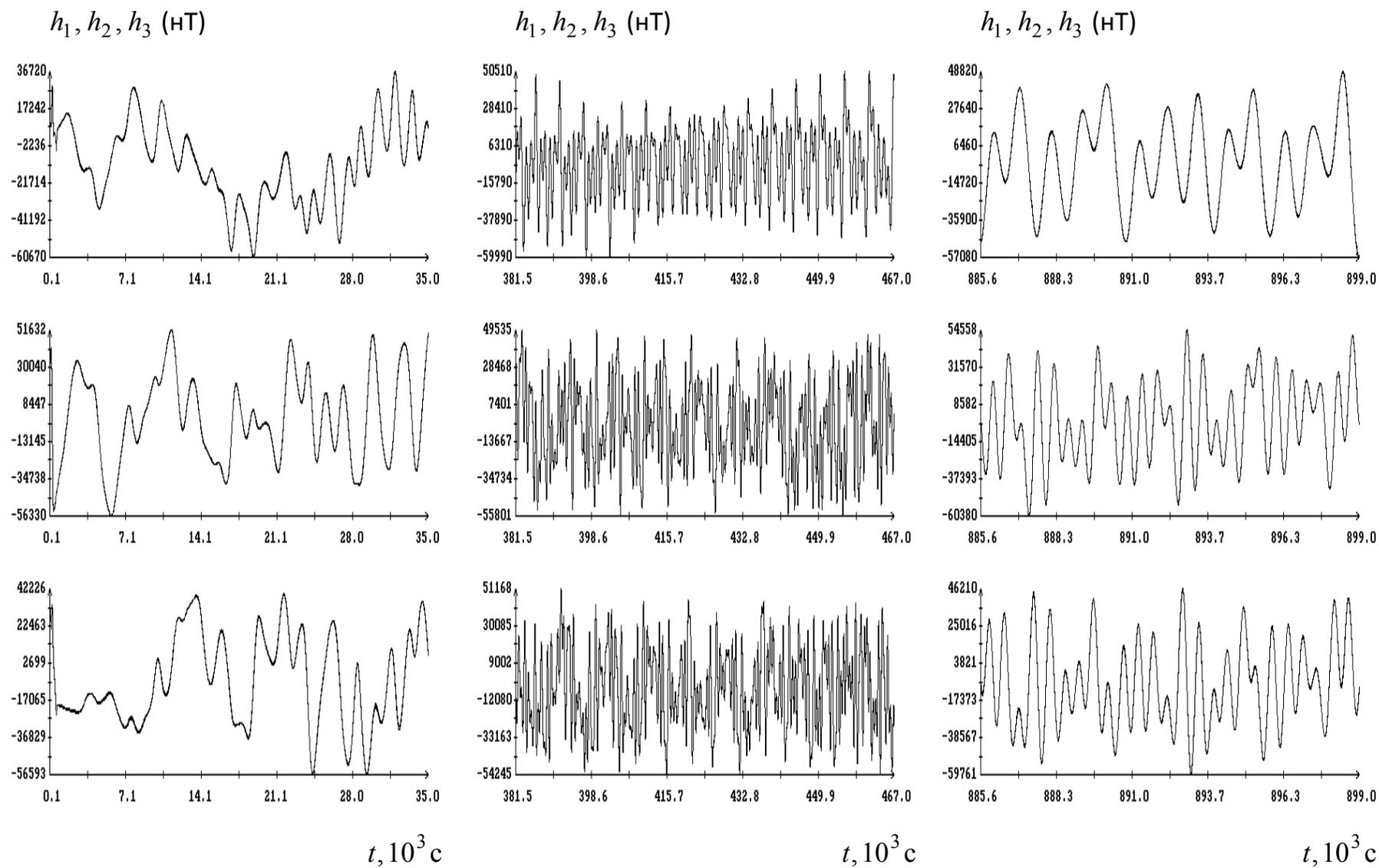


Рис. 3.1. Сравнение данных измерений магнитометров 1 и 2 на интервалах 1, 7 и 13

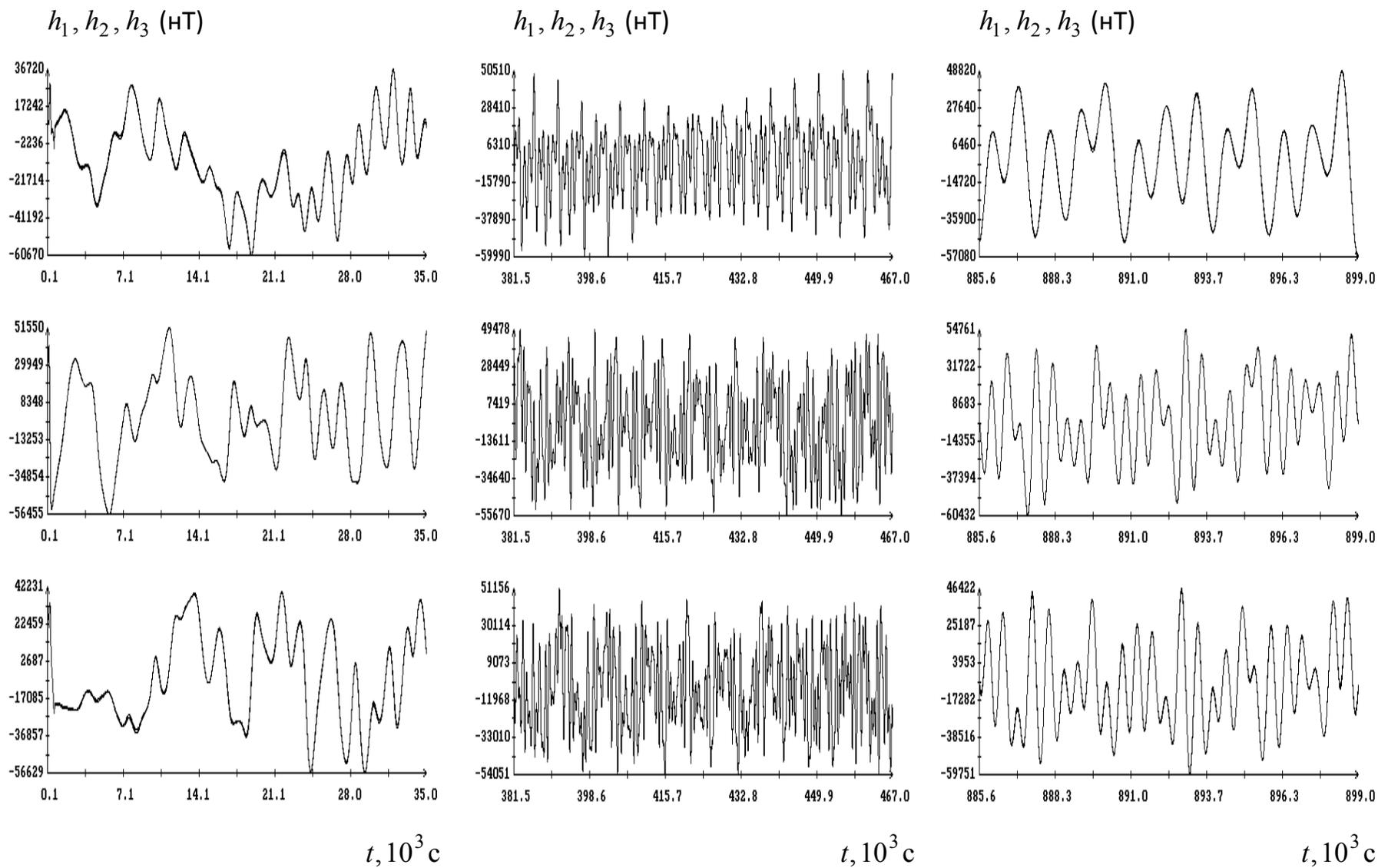


Рис. 3.2. Сравнение данных измерений магнитометров 1 и 3 на интервалах 1, 7 и 13

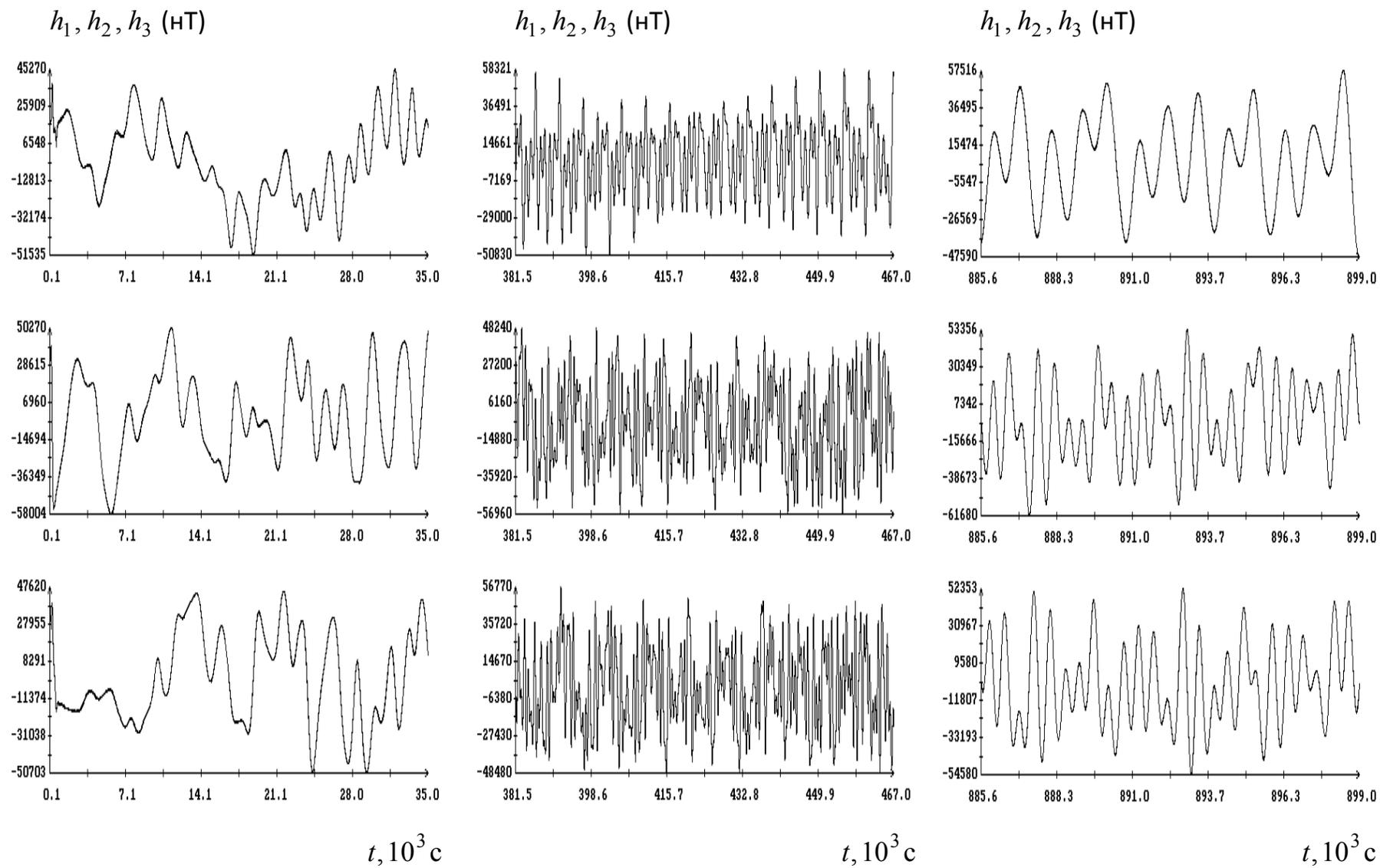


Рис. 3.3. Сравнение данных измерений магнитометров 2 и 3 на интервалах 1, 7 и 13

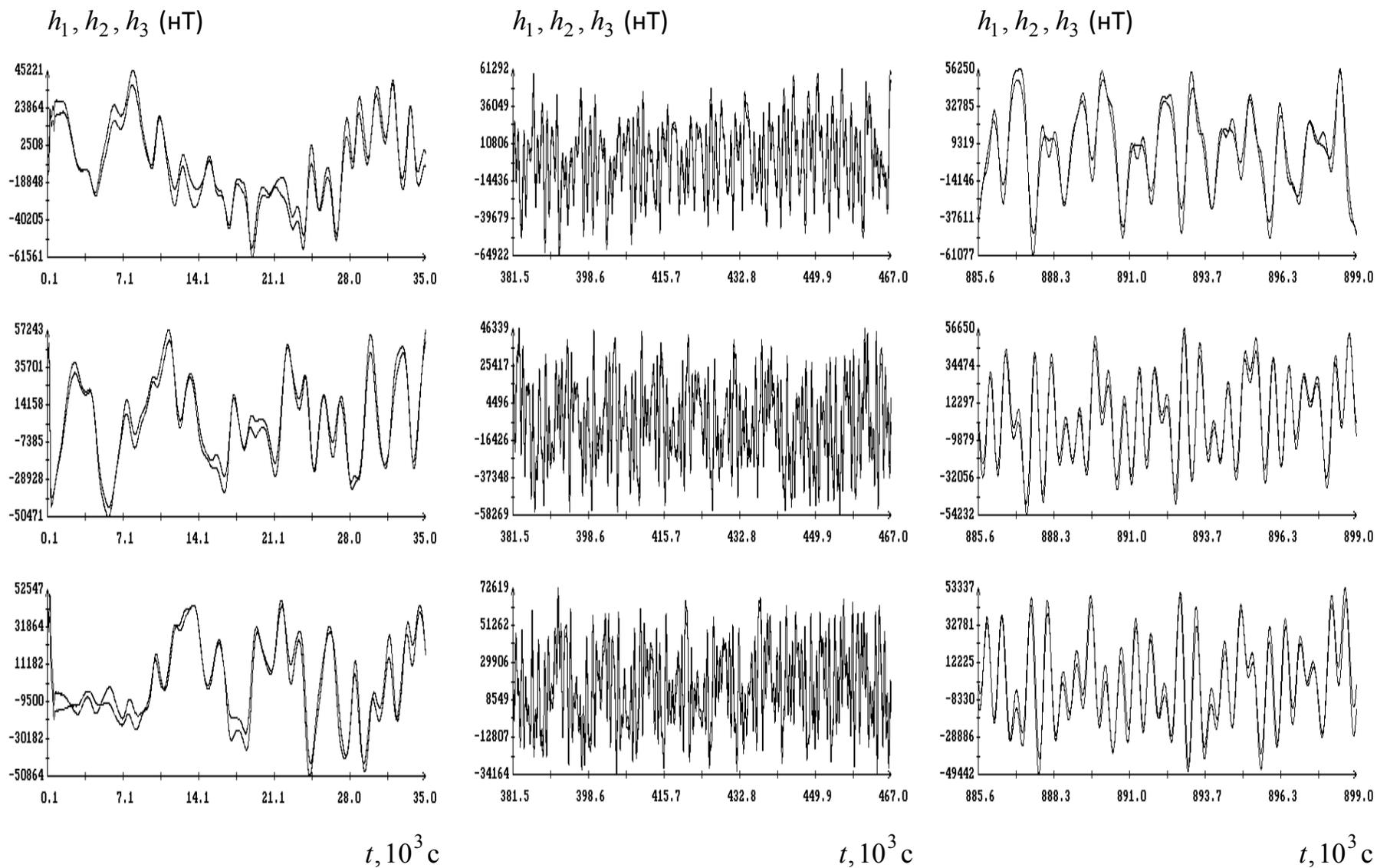


Рис. 3.4. Сравнение данных измерений магнитометров 1 и 2 на интервалах 1, 7 и 13

Судя по таблицам и рисункам, показания магнитометров 1, 2 и 3 хорошо согласованы между собой и являются достаточно точными измерениями МПЗ. Большие значения смещений  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в табл. 3.2 — 3.4 можно объяснить наличием на борту спутника большого количества проводов с током. Показания магнитометра 0 несколько отличаются от показаний остальных магнитометров. Возможно, различия в показаниях объясняются неисправностью магнитометра 0; возможно, показания магнитометра 0 искажены влиянием другого магнитного поля. Магнитометры аппаратуры DIMАС, размещались в разных местах спускаемого аппарата, а на спутниках *Фотон* достаточно много приборов, генерирующих локальные магнитные поля.

В случае пар магнитометров (1, 2), (1, 3) и (2, 3) углы  $\theta_i$  связаны с вариациями углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соотношениями  $\theta_1 \approx \delta\gamma$ ,  $\theta_2 \approx \delta\alpha$ ,  $\theta_3 \approx \delta\beta$ , причем выписанные приближенные равенства выполнены с высокой точностью. В силу этих соотношений

$$\sigma_{\theta 1} \approx \sigma_{\gamma}, \sigma_{\theta 2} \approx \sigma_{\alpha}, \sigma_{\theta 3} \approx \sigma_{\beta}.$$

Найденные значения углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  довольно малы (см. табл. 3.2 — 3.4). Учитывая это обстоятельство и принимая во внимание большие значения  $\sigma$ , при обработке магнитных измерений, выполненных магнитометрами 1, 2 и 3, приближенные равенства  $\alpha \approx 0$ ,  $\beta \approx 0$ ,  $\gamma \approx 0$  были заменены соответствующими точными равенствами. Конкретные значения углов определялись выбором пары магнитометров. Измерениями компонент магнитного поля, полученными аппаратурой DIMАС в некоторый момент времени, считались величины

$$h_1 = \frac{H_1 + H'_1 + H''_1}{3}, \quad h_2 = \frac{H_2 + H'_2 + H''_2}{3}, \quad h_3 = \frac{H_3 + H'_3 + H''_3}{3},$$

где  $H_i$ ,  $H'_i$  и  $H''_i$  — показания магнитометров 1, 2 и 3 в их собственных системах координат, полученные в тот же момент. Компоненты  $h_i$  относятся к системе координат магнитометра 1. Интерпретированные таким способом измерения магнитометров аппаратуры DIMАС, позволили выполнить реконструкцию вращательного движения спутника *Фотон М-3* [11, 40].

## Заключение

### Основные результаты работы:

1. Разработана методика нелинейной калмановской фильтрации данных измерений напряженности МПЗ, позволяющая реконструировать неуправляемое вращательное движение спутника на продолжительных интервалах времени. Новизна методики состоит в использовании векторов измерений переменной длины и способе вычисления расчетных аналогов измерений.
2. Разработана интегральная статистическая методика определения вращательного движения спутника по данным измерений угловой скорости и напряженности МПЗ. Методика использует только уравнения кинематики твердого тела и пригодна для определения как управляемого, так и неуправляемого движения спутника при любых действующих на него внешних механических моментах. С помощью этой методики можно верифицировать методики реконструкции вращательного движения, основанные на полных уравнениях движения.
3. Разработана методика калмановской фильтрации данных измерений угловой скорости и напряженности МПЗ, основанная на кинематических уравнениях движения и подходе, упоминаемом в п. 1. Новизна здесь заключается в использовании оригинальной разностной схемы интегрирования кинематических уравнений, в переменной размерности вектора измерений и в способе вычисления расчетных аналогов данных измерений.
4. Разработана методика проверки векторной согласованности данных измерений пары магнитометров. В результате проверки оцениваются векторная разность постоянных смещений в измерениях магнитометров и матрица перехода между их собственными системами координат.

5. Все методики испытаны посредством обработки данных измерений, полученных на спутниках *Фотон-12*, *Фотон М-2* и *Фотон М-3*. Осуществлена проверка согласованности предложенных методик посредством сопоставления их результатов.

Адекватность предложенных алгоритмов проверена посредством реконструкций вращательного движения КА *Фотон-М3* по реальным данным измерений. Разработанные для этого программные комплексы, могут использоваться для обработки данных измерений полученных на перспективных ИСЗ научного назначения.

## Литература

1. Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K. Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1990. Vol. 13, no. 3. P. 506–514.
2. Psiaki M. L., Oshman Y. Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic field measurements // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2003. Vol. 26, no. 2. P. 244–252.
3. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Абрашкин В. И., Казакова А. Е., Зайцев А. С. Анализ низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ *Фотон-11* // Космические исследования. 2001. Т. 39, № 4. С. 419–435.
4. Абрашкин В. И., Балакин В. Л., Белоконов И. В. и др. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 1. С. 45–56.
5. Абрашкин В. И., Волков М. В., Егоров А. В., Зайцев А. С., Казакова А. Е., Сазонов В. В. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях угловой скорости и микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон-12* // Космические исследования. 2003. Vol. 41, no. 6. P. 632–651.
6. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Абрашкин В. И., Казакова А. Е., Зайцев А. С. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ *Фотон-11* // Космические исследования. 2004. Т. 42, № 2. С. 185–200.
7. Абрашкин В. И., Богоявленский Н. Л., Воронов К. Е., Казакова А. Е., Пузин Ю. Я., Сазонов В. В., Семкин Н. Д., Чебуков С. Ю. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон М-2*, и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 5. С. 450–470.

8. Абрашкин В. И., Казакова А. Е., Сазонов В. В., Чебуков С. Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2*, по данным бортовых измерений угловой скорости // Космические исследования. 2008. Т. 46, № 2. С. 148–167.
9. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В. В., Чебуков С. Ю. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон М-2* // Космические исследования. 2008. Т. 46, № 5. С. 463–483.
10. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., В. В., Чебуков С. Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным измерений микроускорения // Космические исследования. 2009. Т. 47, № 6. С. 463–483.
11. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В. И., Казакова А. Е., Сазонов В. В. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-3* по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Космические исследования. 2010. Т. 48, № 3. С. 252–265.
12. Сазонов В. В. Обработка данных измерений угловой скорости и микроускорения, полученных на спутнике *Фотон-12* // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2008. № 62.
13. Beuselinck T., Van Bavinchove C., Sazonov V. V. Quasi-steady accelerations onboard *Foton M-3* spacecraft // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2010. № 8.
14. Beuselinck T., Van Bavinchove C., Sazonov V. V. Some tests of acceleration measurement data obtained onboard *Foton M-3* // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2010. № 16.
15. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Мир, 1972.

16. Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений. Москва: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2011. С. 416.
17. Глотов Ю. Н., Сазонов В. В. Мониторинг микроускорений на борту ориентированного космического аппарата // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. № 63.
18. Панкратов В. А., Сазонов В. В. Реконструкция вращательного движения космического аппарата с помощью фильтра Калмана // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2013. № 61.
19. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Дубошина Г. Н. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1976. С. 864.
20. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики. Москва: Изд-во МГУ, 1992. С. 525.
21. Голубев Ю. Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2013. № 39. С. 23.
22. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. Москва: Наука, 1973. С. 320.
23. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. Москва: Мир, 1985.
24. Лурье А. И. Аналитическая механика. Москва: ГИФМЛ, 1961. С. 824.
25. Hairer E., Norset S. P., Wanner G. Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 1993.
26. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Москва: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. Т. 2. С. 752.

27. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Введение в математическую статистику. Москва: Издательство ЛКИ, 2010. С. 600.
28. Бард Ё. Нелинейное оценивание параметров. Москва: Статистика, 1979.
29. Yu B. M., Shenoy K. V., Sahani M. Derivation of Kalman filtering and smoothing equations. URL: [http://www-npl.stanford.edu/~byronyu/papers/derive\\_ks.pdf](http://www-npl.stanford.edu/~byronyu/papers/derive_ks.pdf) (дата обращения: 12.08.2013).
30. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. Москва: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1963.
31. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. Москва: Наука, 1982. С. 199.
32. Балакришнан А. В. Теория фильтрации Калмана. Москва: Мир, 1988. С. 168.
33. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. Москва: Физматлит, 1978. С. 352.
34. Богуславский И. А. Прикладные задачи фильтрации и управления. Москва: Наука, 1983. С. 400.
35. Rauch H. E., Tung F., Striebel C. T. Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems // AIAA Journal. 1965. Vol. 3, no. 8. P. 1445–1450.
36. Пивоваров М. Л. Определение ориентации ИСЗ с использованием измерений угловых скоростей // Космические исследования. 1985. Т. 23, № 3. С. 331–334.
37. Абрашкин В. И., Волков М. В., Воронов К. Е., Егоров А. В., Казакова А., Панкратов В. А., Сазонов В. В., Семкин Н. Д. Определение вращательного

- движения спутника по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2003. № 8.
38. Абрашкин В. И., Волков М. В., Воронов К. Е., Егоров А. В., Казакова А. Е., Панкратов В. А., Сазонов В. В., Семкин Н. Д. Определение вращательного движения спутника по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения // Космические исследования. 2005. Т. 43, № 4. С. 295–305.
39. Абрашкин В. И., Богоявленский Н. Л., Воронов К. Е., Казакова А. Е., Панкратов В. А., Сазонов В. В., Семкин Н. Д., Стратилатов Н. Р. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2006. № 60.
40. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В. И., Казакова А. Е., Панкратов В. А., Сазонов В. В. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-3* по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2009. № 69.
41. Панкратов В. А. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-3* по измерениям его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 2, № 4. С. 271–273.
42. Абрашкин В. И., Богоявленский Н. Л., Воронов К. Е., Казакова А. Е., Панкратов В. А., Сазонов В. В., Семкин Н. Д., Стратилатов Н. Р. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным измерений его

- угловой скорости и напряженности магнитного поля земли с использованием кинематической модели движения // Тезисы докладов XXXI академических чтений по космонавтике. Москва: 2007.
43. Панкратов В. А., Сазонов В. В. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-3* по данным измерений // Тезисы докладов Второй международной научно-технической конференции "Аэрокосмические технологии", посвященной 95-летию со дня рождения академика В. Н. Челомея. Москва: 2009.
44. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Москва: ГИФМЛ, 1961. С. 524.
45. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Москва: ГИФМЛ, 1958. С. 334.
46. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. Москва: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2011. С. 544.
47. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1968. С. 548.
48. Хемминг Р. В. Численные методы (для научных работников и инженеров). Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1972. С. 400.
49. Панкратов В. А., Сазонов В. В. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2010. № 43.
50. Панкратов В. А., Сазонов В. В. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ // Наука и образова-

ние. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/236884.html> (дата обращения: 02.02.2014).

51. Markley F. L. Attitude determination using vector observation and singular value decomposition // The Journal of the Astronautical Sciences. 1988. Vol. 36, no. 3. P. 245–258.
52. Голуб Д., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Москва: Мир, 1999.
53. Уилкинсон, Райнш. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. Москва: Машиностроение, 1976.