

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

На правах рукописи

Крутиков Сергей Леонидович

**Базовые инерционные параметры и их  
применение в задачах управления  
манипуляционными роботами**

01.02.01 – Теоретическая механика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических  
наук, профессор  
Зенкевич Станислав Леонидович

Москва – 2013

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Классические инерционные параметры в механике манипуляционных роботов</b> . . . . .	11
1.1. Построение кинематической модели робота-манипулятора с помощью однородных координат и преобразований . . . . .	11
1.2. Уравнения движения манипуляционного механизма в форме Лагранжа . . . . .	17
1.3. Идентификация параметров уравнений движения манипуляционного механизма . . . . .	22
<b>Глава 2. Базовые инерционные параметры и их свойства</b> . . . . .	38
2.1. Понятие о базовых инерционных параметрах . . . . .	38
2.2. Теоремы о равенстве . . . . .	44
2.3. Теорема о базисном множестве . . . . .	56
<b>Глава 3. Методы поиска базовых инерционных параметров</b> . . . . .	74
3.1. Обзор существующих методов . . . . .	74
3.2. Метод проекций . . . . .	85
3.3. Рекуррентное вычисление проекций . . . . .	93
3.4. Некоторые аспекты реализации . . . . .	101
<b>Глава 4. Применение базовых инерционных параметров в динамическом управлении роботами-манипуляторами</b> . . . . .	120
4.1. Уравнения движения манипуляционного механизма в базовых параметрах . . . . .	120
4.2. Идентификация базовых инерционных параметров . . . . .	129

<b>Заключение</b> . . . . .	138
<b>Литература</b> . . . . .	141
<b>Приложение А. Исходные тексты программы расчета базовых инерционных параметров</b> . . . . .	146
<b>Приложение Б. Исходные тексты сценариев среды Matlab</b> . .	165

# Введение

Манипуляционные роботы играют важную роль в современном производстве, характеризующемся высокой степенью гибкости и автоматизированности. Спектр задач выполняемых ими достаточно широк: сборка, сварка, окраска, механическая обработка, перемещение грузов. В условиях рынка любое производство стремится достичь наибольшей эффективности, например, увеличивая количество выполненных технологических операций за то же время, или уменьшая временные затраты на выполнение того же количества операций без привлечения дополнительного оборудования. Для этого необходимо повышать быстродействие технологического оборудования, в том числе и роботов-манипуляторов, не теряя при этом в точности его работы. Однако, при развитии больших скоростей и ускорений или манипулировании тяжелыми грузами на точность исполнения роботом заданного движения начинают оказывать влияние эффекты, связанные с динамикой исполнительного механизма робота. Поэтому в современных системах управления манипуляционными роботами широкое распространение получили т.н. *методы динамического управления*, позволяющие компенсировать это влияние. Для применения таких методов требуется знание уравнений движения исполнительного механизма робота, являющихся, фактически, математической моделью этого механизма. Таким образом, уравнения движения используются также и для моделирования движений робота. Особенно перспективным представляется создание программных комплексов, имитирующих движение реально существующих роботов. С помощью подобных средств возможно решать такие задачи, как обучение операторов робототехнических комплексов или тестирование и отладка алгоритмов и систем управления роботами [40], без риска повреждения этого, весьма дорогостоящего, оборудования.

Исполнительным механизмом робота-манипулятора (далее — *манипуля-*

*ционный механизм*) будем называть систему абсолютно твердых тел (звеньев), связанных вращательными или телескопическими шарнирами и образующих разомкнутую кинематическую цепь, закрепленную на неподвижном основании. Уравнения движения такого механизма полностью определяются геометрическими размерами и масс-инерционными параметрами его звеньев. В число последних входят: масса, координаты центра масс, осевые и центробежные моменты инерции. Выяснить геометрические параметры манипуляционного механизма, как правило, не составляет труда: они присутствуют не только в конструкторской документации, но и в эксплуатационной документации, поставляемой вместе с роботом. Узнать масс-инерционные параметры нетрудно лишь в случае собственной разработки. Действительно, проектирование и конструирование современных машин и механизмов не обходится без использования систем автоматизированного проектирования, с помощью которых можно получить всю необходимую информацию. В противном случае остается надеяться, что требуемые сведения предоставит фирма-производитель. Однако, в условиях высокой конкуренции между разработчиками роботов-манипуляторов это маловероятно. В подобной ситуации крайне полезной оказывается процедура идентификации, суть которой заключается в экспериментальном определении неизвестных параметров по данным о движении робота. Особый интерес представляет проведение идентификации в режиме реального времени. Это дает возможность корректировать параметры математической модели манипуляционного механизма во время выполнения роботом технологических задач, т.е. сделать систему управления роботом адаптивной.

В основе процедуры идентификации лежит эксперимент, состоящий в совершении исследуемым роботом-манипулятором каких-либо заданных движений. В процессе этого эксперимента необходимо измерять или оценивать параметры относительного расположения звеньев робота, скорости и ускоре-

ния их относительного движения, а также силовые факторы в шарнирах. В механике манипуляционных роботов хорошо известен факт линейности уравнений движения манипуляционного механизма относительно масс-инерционных параметров. Подставляя в эти уравнения геометрические параметры механизма, которые предполагаются известными, и величины, измеренные в ходе эксперимента, можно составить переопределенную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных масс-инерционных параметров<sup>1</sup>. Решение упомянутой системы и будет оценкой значений этих параметров. Однако, исследования показали, что имеет место т.н. *проблема идентифицируемости*: идентификационные модели манипуляционных механизмов не имеют единственного решения. Эта проблема вызвана тем, что всякому набору уравнений движения манипуляционного механизма соответствует бесконечное множество наборов масс-инерционных параметров его звеньев. Поэтому было введено понятие *базовых инерционных параметров*, представляющих собой наименьший набор параметров уравнений движения манипуляционного механизма, полностью их определяющий и соответствующий им взаимнооднозначно при неизменных геометрических параметрах. Очевидно, что запись уравнений движения с помощью базовых инерционных параметров позволяет избежать проблемы идентифицируемости. Еще одним преимуществом использования базовых параметров является возможность минимизации количества вычислительных операций при решении обратной задачи динамики (ОЗД). Это оказывается весьма полезным при практической реализации методов динамического управления роботами-манипуляторами.

Таким образом, базовые инерционные параметры являются фундаментальным понятием в механике манипуляционных роботов. Отдельной задачей оказывается поиск такого набора параметров и их связи с обычными

---

<sup>1</sup> Подобные системы уравнений называют *идентификационными моделями*.

масс-инерционными параметрами<sup>2</sup>. В настоящее время существуют аналитические [20, 21, 30, 31] и численные [22, 36] методы решения этой задачи. Однако первые принципиально являются приближенными, причем невозможно определить, в каких случаях результат является точным, а в каких — нет. Вторые же дают точное решение, но только для манипуляторов с параллельными или перпендикулярными осями соседних сочленений. Другой важной задачей является получение уравнений движения манипуляционных механизмов относительно базовых инерционных параметров.

В связи с этим цель данной диссертационной работы состоит в математической формализации понятия базовых инерционных параметров, разработке аналитического метода поиска базовых параметров, справедливого для манипуляторов с произвольно ориентированными осями сочленений, разработке способов формирования уравнений движения и идентификационной модели манипуляционных механизмов в терминах базовых инерционных параметров.

Работа выполнена на кафедре «Робототехнические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана и состоит из четырех глав.

В **первой главе** описано применение классических инерционных параметров в основных задачах механики манипуляционных роботов, используемых для управления ими: это обратная задача динамики, необходимая в расчетах моментов приводов сочленений, а также, требующаяся в ряде случаев, идентификация параметров уравнений движения. Рассмотрены различные идентификационные модели, приведен их сравнительный анализ. Указаны неудобства, возникающие при использовании классических параметров в динамических и идентификационных моделях манипуляционных механизмов.

Во **второй главе** рассмотрено понятие базовых инерционных параметров и некоторые их свойства. Предложена математическая интерпретация базовых параметров, как коэффициентов разложения какого-либо элемента

---

<sup>2</sup> Далее будем называть их *классическими инерционными параметрами*.

некоторой конечной системы векторов линейного пространства функций<sup>3</sup> по базису этой системы. Показана необходимость введения базовых параметров не только для уравнений движения, но и для других фундаментальных понятий лагранжевой механики: полной энергии и функции Лагранжа. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия равенства этих различных множеств базовых параметров. Указан способ конструирования базиса конечномерного линейного пространства, элементами которого являются полная энергия и лагранжиан манипуляционного механизма, а также их коэффициенты влияния. Получены рекуррентные соотношения для вычисления базисных элементов.

**Третья глава** посвящена задаче поиска множества базовых инерционных параметров. Представлен обзор существующих методов, проведен их сравнительный анализ. Предложен метод проекций, позволяющий аналитически решать задачу поиска базовых параметров для манипуляционных механизмов с произвольно ориентированными осями сочленений, рассмотрены примеры его применения. Получены рекуррентные соотношения для вычисления проекций, на их основе разработан эффективный по быстродействию алгоритм реализации метода проекций на вычислительной машине.

**Четвертая глава** посвящена применению базовых инерционных параметров в задачах управления манипуляционными роботами. Выведены рекуррентные соотношения, позволяющие записать уравнения движения манипуляционного механизма относительно базовых параметров, рассмотрен пример. Проведена процедура идентификации базовых параметров первых трех звеньев робота PUMA 560. При выполнении эксперимента реальный манипуляционный механизм заменен его математической моделью.

К главам даны приложения с исходными текстами программы, реализующей разработанный рекуррентный алгоритм, а также тексты сценариев

---

<sup>3</sup> Далее будем называть их *коэффициентами влияния*.

среды Matlab, с помощью которых была проведена симуляция эксперимента.

**Методы исследования.** В работе используются методы линейной алгебры, теоретической механики, математического моделирования.

**Научная новизна** работы заключается в следующем:

Предложена интерпретация полной энергии, лагранжиана и левой части уравнений движения манипуляционного механизма как векторов линейного пространства функций. Показано, что базовые инерционные параметры могут быть определены как коэффициенты разложения этих векторов по базисным коэффициентам влияния. Введены множества базовых параметров отдельно для полной энергии, лагранжиана и уравнений движения, доказаны необходимые и достаточные условия их равенства. Доказана теорема, указывающая способ конструирования конечномерного линейного пространства, включающего коэффициенты влияния на лагранжиан. Предложен новый метод поиска базовых параметров, основанный на определении координат упомянутых коэффициентов влияния в базисе этого пространства. Получены рекуррентные соотношения для вычисления координат коэффициентов влияния, и разработан рекурсивный алгоритм реализации предложенного метода. Выведены уравнения движения манипуляционного механизма в терминах базовых инерционных параметров в форме рекуррентных соотношений.

**Основные результаты, выносимые на защиту:**

- Предложена математическая интерпретация базовых инерционных параметров как коэффициентов базисного разложения, введены множества базовых параметров полной энергии, лагранжиана и уравнений движения, доказаны необходимые и достаточные условия их равенства;
- Доказана теорема о базисном множестве, с ее помощью создан метод проекций для поиска базовых инерционных параметров, справедливый для манипуляционных механизмов с произвольно ориентированными

осями сочленений;

- Получены рекуррентные соотношения для вычисления проекций, на их основе разработан эффективный по быстродействию алгоритм реализации метода проекций;
- Предложен способ формирования уравнений движения в рекуррентной форме в терминах базовых инерционных параметров.

**Апробация работы.** Основные положения работы докладывались и обсуждались на научно-техническом семинаре кафедры «Роботы и робототехнические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2009 г.; на XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в 2011 г.; на специальном семинаре «Динамика относительного движения» кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в декабре 2010 г. и в феврале 2013 г.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах, из них три статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК [9–11], одна статья в сборнике трудов конференций и одна в тезисах докладов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы из 40 наименований и 2 приложений. Основная часть работы составляет 145 страниц машинописного текста, включая 3 таблицы и 10 рисунков.

## Классические инерционные параметры в механике манипуляционных роботов

Прежде, чем переходить непосредственно к решению задач, поставленных в работе, изложим некоторые известные факты, связанные с особенностями математического описания манипуляционных механизмов.

### 1.1. Построение кинематической модели робота-манипулятора с помощью однородных координат и преобразований

Рассмотрим манипуляционный механизм, содержащий  $n$  подвижных звеньев и неподвижное основание. Свяжем с основанием абсолютную систему координат  $O_0X_0Y_0Z_0$ , а с каждым звеном — подвижную систему координат  $O_kX_kY_kZ_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) в соответствии с методом Денавита-Хартенберга [6]. Тогда положение системы координат, связанной с  $k$ -м звеном, относительно системы координат, связанной с  $(k - 1)$ -м звеном, полностью определяется с помощью четырех параметров, показанных на рисунке 1. Каждый из этих параметров задает преобразование вращения вокруг или переноса вдоль некоторой координатной оси. Как видно из рисунка, для совмещения системы координат  $O_{k-1}X_{k-1}Y_{k-1}Z_{k-1}$  с системой координат  $O_kX_kY_kZ_k$  необходимо выполнить следующую последовательность преобразований:

1. вращение вокруг оси  $Z_{k-1}$  на угол  $\theta_k$ ;
2. перенос вдоль оси  $Z_{k-1}$  на расстояние  $d_k$ ;

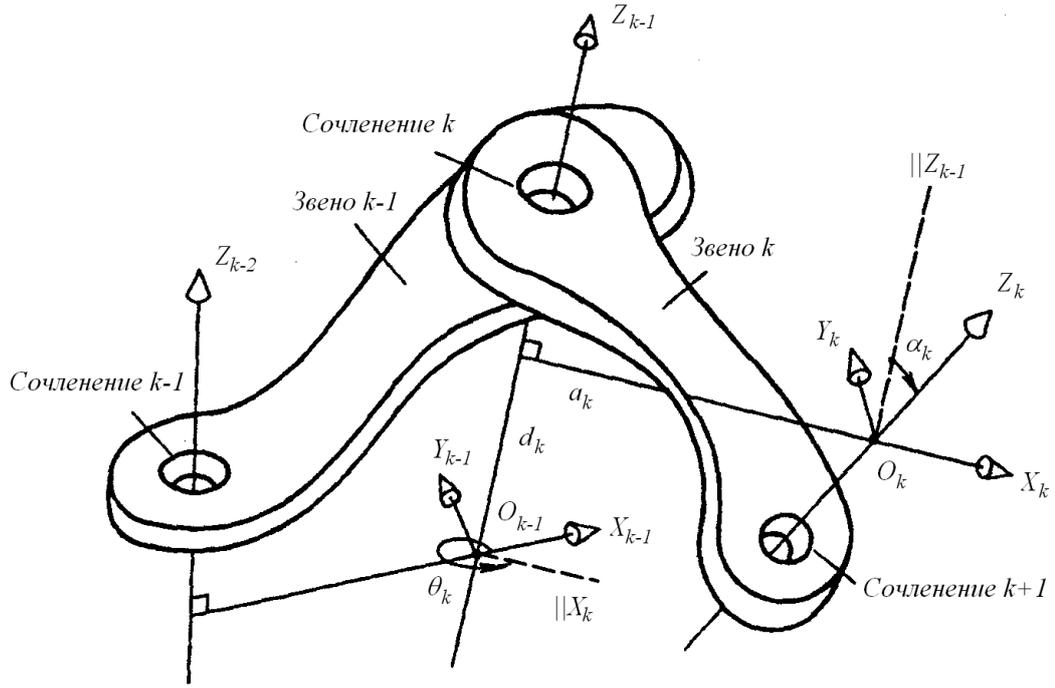


Рис. 1. Взаимное расположение систем координат, связанных с соседними звеньями манипуляционного механизма.

3. перенос вдоль оси  $X_k$  на расстояние  $a_k$ ;
4. вращение вокруг оси  $X_k$  на угол  $\alpha_k$ .

Для их математического описания удобно воспользоваться аппаратом однородных координат и преобразований, поскольку он позволяет осуществлять аффинные преобразования трехмерного евклидова пространства, не являющиеся в нем линейными, с помощью линейных преобразований трехмерной плоскости в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве.

Однородными координатами [13] точки евклидова пространства  $\mathbb{E}^3$  с декартовыми координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  называют четверку чисел  $(y_1, y_2, y_3, w)$  удовлетворяющую следующим соотношениям:

1.  $y_i = wx_i, i = \overline{1, 3}$ ;
2.  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + w^2 \neq 0$ .

Нетрудно видеть, что между декартовыми и однородными координатами нет взаимнооднозначного соответствия: всякая точка пространства  $\mathbb{R}^3$  декартовых координат отображается в прямую в пространстве  $\mathbb{R}^4/\{0\}$  однородных координат. Однако, такое соответствие можно установить рассматривая в этом пространстве плоскости вида  $w = const$ ,  $w \neq 0$ . В частности, если  $w = 1$  оставшиеся однородные координаты равны соответствующим декартовым координатам. Таким образом, существуют биекции  $f_w : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_w$ , где  $M_w = \{(y_1, y_2, y_3, w) \in \mathbb{R}^4/\{0\} : w = const\}$ , причем  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  и  $\forall \mathbf{b} \in M_w \Rightarrow \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} = (w\mathbf{a} \ w)$ . Рассмотрим в пространстве однородных координат линейные преобразования<sup>4</sup>  $T$  с матрицей следующей структуры:

$$T = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{R} \in SO(3)$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ . Применяя такое преобразование к образу  $f_w(\mathbf{a})$  некоторого вектора  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , получим

$$T(f_w(\mathbf{a})) = T \begin{pmatrix} w\mathbf{a} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(\mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{p}) \\ w \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что прообраз  $f_w^{-1}$  этого выражения является результатом аффинного преобразования исходного вектора  $\mathbf{a}$ . Далее будем работать только с отображением  $f_1$  и плоскостью  $M_1$  соответственно, поскольку в этом случае при нахождении образов и прообразов не потребуется избыточная операция умножения или деления на число  $w$ . Кроме того, если ввести в пространстве однородных координат псевдоевклидово скалярное произведение с помощью билинейной формы, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

---

<sup>4</sup> Далее будем называть их *однородными преобразованиями*.

то оно будет сохраняться при отображении  $f_w$  только для элементов плоскости  $M_1$ , т.е.  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3 \Rightarrow \mathbf{ab} = f_w(\mathbf{a}) f_w(\mathbf{b}) \Leftrightarrow w = 1$ . Отметим, что псевдо-евклидова норма, порожденная этим скалярным произведением, сохраняется при линейных преобразованиях вида

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

соответствующих вращениям трехмерного евклидова пространства.

Запишем матрицы однородных преобразований, соответствующих преобразованиям вращения и переноса, необходимым для совмещения системы координат  $(k-1)$ -го звена с системой координат  $k$ -го звена [6]:

1. вращение вокруг оси  $Z_{k-1}$  на угол  $\theta_k$

$$\mathbf{R}_{\theta_k} = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k & 0 & 0 \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2. перенос вдоль оси  $Z_{k-1}$  на расстояние  $d_k$

$$\mathbf{T}_{d_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. перенос вдоль оси  $X_k$  на расстояние  $a_k$

$$\mathbf{T}_{a_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

4. вращение вокруг оси  $X_k$  на угол  $\alpha_k$

$$R_{\alpha_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_k & -\sin \alpha_k & 0 \\ 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для получения матрицы  $A_k$  суммарного преобразования воспользуемся правилами сложения однородных преобразований, согласно которым при использовании пассивного подхода, т.е. при перемещении системы координат, необходимо перемножить соответствующие матрицы преобразований в прямом порядке [14]:

$$A_k = R_{\theta_k} T_{d_k} T_{a_k} R_{\alpha_k}.$$

В результате получим

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \cos \alpha_k & \sin \theta_k \sin \alpha_k & a_k \cos \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \cos \alpha_k & -\cos \theta_k \sin \alpha_k & a_k \sin \theta_k \\ 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу структуры рассматриваемых однородных преобразований совокупность трех первых элементов трех первых столбцов этой матрицы образует ортогональную матрицу  $R_k \in SO(3)$ , определяющую преобразование вращения, необходимое для совмещения осей систем координат  $(k-1)$ -го и  $k$ -го звеньев. Согласно свойствам ортогональных матриц, элементы столбцов матриц  $R_k$  определяют координаты ортов осей системы координат  $O_k X_k Y_k Z_k$  в системе координат  $O_{k-1} X_{k-1} Y_{k-1} Z_{k-1}$ . Первые же три элемента последнего столбца матрицы  $A_k$  являются координатами точки  $O_k$  в системе координат  $(k-1)$ -го звена. В этом легко убедиться найдя результат однородного преобразования с матрицей  $A_k$  вектора  $f_1(\mathbf{0})$ , где  $\mathbf{0} = (0 \ 0 \ 0)$  — декартовы

координаты точки  $O_k$  в собственной системе координат. Отметим также, что каждая из матриц  $A_k$  должна зависеть только от одной обобщенной координаты, поскольку сочленения манипуляционного механизма допускают лишь одну относительную степень свободы. При использовании метода Денавита-Хартенберга в качестве обобщенной координаты  $q_k$  принимается угол поворота  $\theta_k$  в случае вращательного сочленения или перемещение  $d_k$  — в случае поступательного сочленения [6].

Нашей основной задачей при построении кинематической модели манипуляционного механизма является определение положений<sup>5</sup> его звеньев относительно абсолютной системы координат. С учетом сказанного ранее, это можно сделать найдя матрицы  $T_k$  однородных преобразований, определяющих переход от абсолютной системы координат  $O_0X_0Y_0Z_0$  к системе координат  $k$ -го звена  $O_kX_kY_kZ_k$ . Эти матрицы будут содержать координаты радиус-векторов точек  $O_k$ , которые мы будем считать полюсами, в абсолютной системе координат, а также компоненты ортогональных матриц, задающих преобразования вращения, совмещающие оси абсолютной системы координат с осями системы координат  $k$ -го звена. Известно, что всякой матрице вращения соответствует хотя бы один набор значений углов Эйлера [4]. Таким образом, матрицы  $T_k$  полностью определяют положение звеньев механизма в абсолютной системе координат. Вычислить их можно согласно правилам сложения однородных преобразований:

$$T_k = A_1 \dots A_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Отметим, что элементы матриц  $T_k$  являются функциями  $k$  первых обобщенных координат механизма.

---

<sup>5</sup> Под положением твердого тела понимается три декартовых координаты некоторого полюса в этом теле и три параметра, характеризующих вращение относительно полюса, например, углы Эйлера.

## 1.2. Уравнения движения манипуляционного механизма в форме Лагранжа

С точки зрения решения задач управления для вывода уравнений движения манипуляционного механизма удобно воспользоваться методами аналитической механики Лагранжа, поскольку лагранжев формализм оперирует понятиями обобщенных координат и обобщенных сил. Действительно, рассматривая манипуляционный механизм, как объект управления, можно считать, что управляющими воздействиями для него являются силы или моменты, развиваемые приводами звеньев, а сигналами обратной связи — значения углов поворота или перемещений в сочленениях, измеряемые прямо или косвенно соответствующими датчиками. При этом конструктивное исполнение большинства манипуляционных роботов таково, что и приводы звеньев, и датчики обратной связи расположены непосредственно в сочленениях. Таким образом, управлениями являются обобщенные силы от приводных силовых факторов<sup>6</sup>, а сигналами обратной связи — обобщенные координаты. Кроме того, при использовании методов лагранжевой механики существенно уменьшается количество уравнений движения по сравнению с классическими методами, такими как, например, уравнения Ньютона-Эйлера, за счет исключения уравнений, описывающих движения, запрещенные связями. Это снижает вычислительную сложность алгоритмов динамического управления, что оказывается весьма полезным, поскольку задача управления является задачей реального времени.

Из геометрических соотношений (1) следует, что связи, наложенные на движение звеньев манипуляционного механизма являются стационарными, удерживающими и голономными. Предположим также отсутствие трения в

---

<sup>6</sup> Это особенно актуально в связи с растущим применением в приводах роботов-манипуляторов высокомоментных безредукторных электродвигателей.

сочленениях звеньев<sup>7</sup>, что позволяет считать связи идеальными. Тогда для получения уравнений движения механизма можно использовать уравнения Лагранжа 2-го рода, которые имеют вид [14]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^T, \quad (2)$$

где  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  — векторы  $n \times 1$  обобщенных координат и скоростей,  $\mathbf{Q}$  — вектор  $n \times 1$  обобщенных сил от непотенциальных силовых факторов,  $L$  — лагранжиан, равный разности кинетической и потенциальной энергий механизма.

### Кинетическая энергия манипуляционного механизма

Известно, что кинетическая энергия  $K$  механической системы, стесненной стационарными связями, является квадратичной формой относительно обобщенных скоростей [4]:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (3)$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) этой формы для системы  $n$  абсолютно твердых тел могут быть найдены следующим образом:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu_k=1}^{N_k} m_{\nu_k} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu_k}^T}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu_k}}{\partial q_j}.$$

Здесь  $N_k$  — количество материальных точек в  $k$ -м твердом теле,  $m_{\nu_k}$  — масса  $\nu_k$ -й точки  $k$ -го тела, а  $\mathbf{r}_{\nu_k} \in \mathbb{E}^3$  — ее радиус-вектор, заданный в абсолютной системе координат. В соответствии с построенной кинематической моделью, имеет место соотношение

$$f_1(\mathbf{r}_{\nu_k}) = \mathbf{T}_k f_1(\rho_{\nu_k}),$$

---

<sup>7</sup> При необходимости учета трения в шарнирах можно применить стандартный подход: считать соответствующие силовые факторы активными и добавить их к обобщенным силам.

где  $\rho_{\nu_k}$  — радиус-вектор  $\nu_k$ -й точки  $k$ -го звена, заданный в системе координат, связанной с этим звеном. Поскольку  $\rho_{\nu_k} = const$ , очевидно следующее

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{r}_{\nu_k})}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu_k}}{\partial q_i} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial q_i} f_1(\rho_{\nu_k}).$$

Для краткости обозначим частные производные  $\partial \Gamma_k / \partial q_i$  как  $U_{ki}$ . Тогда, рассматривая частные производные  $\partial f_1(\mathbf{r}_{\nu_k}) / \partial q_i$  как элементы обычного евклидова пространства  $\mathbb{E}^4$ , можно записать

$$\frac{\partial f_1^T(\mathbf{r}_{\nu_k})}{\partial q_i} \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_{\nu_k})}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu_k}^T}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu_k}}{\partial q_j} = f_1^T(\rho_{\nu_k}) U_{ki}^T U_{kj} f_1(\rho_{\nu_k}).$$

Воспользуемся следующим очевидным свойством операции  $tr$  взятия следа матрицы:  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbf{a}^T \mathbf{b} = tr(\mathbf{a} \mathbf{b}^T)$ . С учетом этого свойства будем иметь

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu_k=1}^{N_k} m_{\nu_k} tr(U_{ki} f_1(\rho_{\nu_k}) f_1^T(\rho_{\nu_k}) U_{kj}^T),$$

или, пользуясь линейностью следа матрицы,

$$a_{ij} = tr \left( \sum_{k=1}^n U_{ki} \left[ \sum_{\nu_k=1}^{N_k} m_{\nu_k} f_1(\rho_{\nu_k}) f_1^T(\rho_{\nu_k}) \right] U_{kj}^T \right). \quad (4)$$

Выражения в квадратных скобках представляют собой симметрические матрицы размера  $4 \times 4$ , которые называют *матрицами инерции* и обозначают  $H_k$  [6]. Нетрудно убедиться в том, что они состоят из масс-инерционных параметров соответствующих тел и имеют следующий вид

$$H_k = \begin{pmatrix} I_{xx}^k & I_{xy}^k & I_{xz}^k & S_x^k \\ I_{xy}^k & I_{yy}^k & I_{yz}^k & S_y^k \\ I_{xz}^k & I_{yz}^k & I_{zz}^k & S_z^k \\ S_x^k & S_y^k & S_z^k & m_k \end{pmatrix}.$$

Здесь  $m_k$  — масса,  $S_x^k$ ,  $S_y^k$  и  $S_z^k$  — статические моменты, а  $I_{xy}^k$ ,  $I_{xz}^k$  и  $I_{yz}^k$  — центробежные моменты инерции  $k$ -го звена механизма. Параметры  $I_{xx}^k$ ,  $I_{yy}^k$

и  $I_{zz}^k$  физического смысла не имеют и определяются через осевые моменты инерции  $i_{xx}^k$ ,  $i_{yy}^k$ ,  $i_{zz}^k$  с помощью невырожденного линейного преобразования:

$$\begin{pmatrix} I_{xx}^k \\ I_{yy}^k \\ I_{zz}^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{xx}^k \\ i_{yy}^k \\ i_{zz}^k \end{pmatrix}.$$

Отметим, что компоненты матриц инерции меняются при переходе к другой системе координат аналогично преобразованию компонент тензора инерции, только в роли ортогональной матрицы перехода выступает соответствующая матрица однородного преобразования [6]. В соотношении для  $a_{ij}$  элементы матриц инерции  $\mathbf{H}_k$  заданы в собственных системах координат звеньев.

## Внешние силовые факторы

Будем считать манипулятор ненагруженным, т.е. движущимся под действием сил тяжести звеньев, являющихся потенциальными, а также сил и моментов приводов сочленений, не являющихся таковыми. Таким образом,  $k$ -я компонента вектора  $\mathbf{Q}$  обобщенных сил будет равна соответствующему силовому фактору, действующему со стороны привода  $k$ -го сочленения. Найдем потенциальную энергию  $\Pi$  веса всех звеньев манипулятора. По определению дифференциал этой величины равен элементарной работе сил тяжести, взятой с противоположным знаком [4]:

$$d\Pi = - \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{g}^T d\mathbf{r}_{c_k}.$$

Здесь  $\mathbf{g} \in \mathbb{E}^3$  — вектор ускорения свободного падения, а  $\mathbf{r}_{c_k} \in \mathbb{E}^3$  — радиус-вектор центра масс  $k$ -го звена, заданные в абсолютной системе координат механизма. Тогда

$$\Pi = - \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{c_k} + C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Далее будем считать ее выбранной так, чтобы в правой части последнего равенства не было постоянных слагаемых. Запишем скалярное произведение векторов  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{r}_{c_k}$  с помощью псевдоевклидова скалярного произведения их образов в плоскости  $M_1$ , введенного в предыдущем параграфе:

$$\mathbf{g}^T \mathbf{r}_{c_k} = f_1^T(\mathbf{g}) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f_1(\mathbf{r}_{c_k}) = (\mathbf{g}^T \mathbf{0}) f_1(\mathbf{r}_{c_k}).$$

Пусть  $\rho_{c_k} \in \mathbb{R}^3$  — радиус-вектор центра масс  $k$ -го звена в его собственной системе координат. Учитывая связь между образом этого вектора и вектора  $\mathbf{r}_{c_k}$  в плоскости  $M_1$ , получим

$$\mathbf{g}^T \mathbf{r}_{c_k} = (\mathbf{g}^T \mathbf{0}) T_k f_1(\rho_{c_k}).$$

Принимая во внимание, что ускорение свободного падения одинаково для всех звеньев манипулятора, будем иметь для потенциальной энергии следующее соотношение

$$П = -(\mathbf{g}^T \mathbf{0}) \sum_{k=1}^n m_k T_k f_1(\rho_{c_k}) + C.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{S}_k$  статического момента  $k$ -го звена равен произведению его массы на радиус-вектор центра масс очевидно, что произведение  $m_k f_1(\rho_{c_k})$  совпадает с последним столбцом матрицы инерции  $\mathbf{H}_k$  этого звена. Выделить его можно умножив эту матрицу на образ нулевого вектора  $f_1(\mathbf{0})$ . Тогда

$$П = -(\mathbf{g}^T \mathbf{0}) \sum_{k=1}^n T_k \mathbf{H}_k f_1(\mathbf{0}) + C. \quad (5)$$

## Уравнения движения

Вычисляя функцию Лагранжа как разность кинетической и потенциальной энергий и подставляя результат в уравнения Лагранжа, получим извест-

ные уравнения движения манипуляционного механизма [6]

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + b_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + c_i(\mathbf{q}) = Q_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $a_{ij}$  — коэффициенты квадратичной формы кинетической энергии,  $b_i$  — квадратичные формы относительно обобщенных скоростей, коэффициенты  $b_{ijl}$  ( $j, l = \overline{1, n}$ ) которых можно вычислить следующим образом

$$b_{ijl} = \text{tr} \left( \sum_{k=1}^n U_{kjl} \mathbf{H}_k U_{ki}^T \right), \quad U_{kjl} = \frac{\partial^2 T_k}{\partial q_j \partial q_l},$$

а  $c_i$  — обобщенные силы от весов звеньев, причем

$$c_i = -(\mathbf{g}^T \mathbf{0}) \sum_{k=1}^n U_{ki} \mathbf{H}_k f_1(\mathbf{0}).$$

При необходимости в полученных уравнениях движения можно учесть дополнительные внешние силовые факторы, действующие на  $k$ -е звено, приведенные к главному вектору  $\mathbf{F}_k$  и главному моменту  $\mathbf{M}_k$ , добавив к вектору обобщенных сил  $\mathbf{Q}$  слагаемое  $\mathbf{J}_k^T (\mathbf{F}_k^T \mathbf{M}_k^T)^T$ . Здесь  $\mathbf{J}_k$  — матрица Якоби, связывающая линейные скорости точки приложения главного вектора и угловые скорости  $k$ -го звена с обобщенными скоростями.

### 1.3. Идентификация параметров уравнений движения манипуляционного механизма

В предыдущем параграфе были записаны известные уравнения движения манипуляционного механизма в форме удобной для решения задач управления роботом-манипулятором. Коэффициенты этих уравнений полностью определяются  $4n$  геометрическими параметрами Денавита-Хартенберга и  $10n$  масс-инерционными параметрами звеньев. Ранее было отмечено, что в ряде

случаев масс-инерционные параметры оказываются неизвестными и требуется их определение с помощью эксперимента — идентификация. Конечно, существуют ситуации когда геометрические параметры механизма также не могут считаться известными, и необходимо проводить процедуру их идентификации. Подробнее об этом написано в работах [35, 37], здесь же предполагается, что эти параметры определены тем или иным способом.

### Свойство линейности

Идентификация масс-инерционных параметров основана на известном в механике роботов-манипуляторов факте линейности кинетической и потенциальной энергий манипуляционного механизма относительно этих параметров [26]. Действительно, соответствующие частные производные по некоторому масс-инерционному параметру  $k$ -го звена имеют вид

$$\frac{\partial K}{\partial p_k^l} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{tr} \left( \mathbf{U}_{ki} \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial p_k^l} \mathbf{U}_{kj}^T \right) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l} = -(\mathbf{g}^T \mathbf{0}) \mathbf{T}_k \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial p_k^l} \mathbf{f}_1(\mathbf{0}). \quad (6b)$$

Здесь  $\{p_k^l, l = \overline{1, 10}\} = \{I_{xx}^k, I_{yy}^k, I_{zz}^k, I_{xy}^k, I_{xz}^k, I_{yz}^k, S_x^k, S_y^k, S_z^k, m_k\}$ , причем нумерация параметров  $p_k^l$  соответствует порядку их перечисления. Нетрудно видеть, что частная производная матрицы инерции  $k$ -го звена по  $l$ -му инерционному параметру этого же звена является постоянной матрицей, не зависящей от масс-инерционных параметров, а также от номера звена. Поэтому далее будем  $\partial \mathbf{H}_k / \partial p_k^l$  обозначать как  $\mathbf{DH}_l$ . Таким образом, выражения (6) не содержат масс-инерционных параметров и зависят лишь от обобщенных координат и скоростей. Тогда кинетическая и потенциальная энергии манипуляционного механизма представимы в виде линейных форм

$$K = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{10} \frac{\partial K}{\partial p_k^l} p_k^l, \quad \Pi = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{10} \frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l} p_k^l,$$

или, вводя вектор-столбец  $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=\overline{1,10n}} : p_k^l = p_{10(k-1)+l}$  и векторы-строки  $\mathbf{w}_{K,\Pi} = \{w_{K,\Pi}^i\}_{i=\overline{1,10n}} : \partial K / \partial p_k^l = w_K^{10(k-1)+l}$ ,  $\partial \Pi / \partial p_k^l = w_\Pi^{10(k-1)+l}$ ,

$$K = \mathbf{w}_K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{p}, \quad \Pi = \mathbf{w}_\Pi(\mathbf{q}) \mathbf{p}.$$

Вектор  $\mathbf{p}$  состоит из всех масс-инерционных параметров всех звеньев манипулятора, поэтому будем называть его *вектором масс-инерционных параметров манипулятора*. Компоненты векторов-строк  $\mathbf{w}_K$  и  $\mathbf{w}_\Pi$  являются весовыми коэффициентами, определяющими вклад некоторого масс-инерционного параметра в кинетическую и потенциальную энергию соответственно, поэтому далее будем называть их *коэффициентами влияния*. Вообще, если некоторая, не обязательно скалярная, функция линейно зависит от ряда параметров, то ее частные производные по этим параметрам будем называть коэффициентами влияния соответствующего параметра на эту функцию.

С учетом сказанного, функция Лагранжа  $L$  для манипуляционного механизма, как разность его кинетической и потенциальной энергий, представима в виде линейной формы

$$L = \mathbf{w}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{p}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{w}_L = \mathbf{w}_K - \mathbf{w}_\Pi$ . Поскольку дифференциальное преобразование

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}},$$

применяемое в левой части уравнений Лагранжа (2) к лагранжиану  $L$ , линейно, уравнения движения манипуляционного механизма также оказываются линейными относительно масс-инерционных параметров:

$$W_{em}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \mathbf{p} = \mathbf{Q}, \quad (8)$$

где  $W_{em} = \mathcal{L} \mathbf{w}_L$  — матрица размера  $n \times 10n$ .

## Идентификационные модели

Благодаря свойству линейности процедура идентификации масс-инерционных параметров сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно вектора  $\hat{\mathbf{p}}$  оценок этих параметров. Действительно, измерив в процессе движения робота в  $m \geq 10$  временных отсчетах  $t_i$  значения его обобщенных координат, скоростей и ускорений, а также силовых факторов, действующих со стороны приводов сочленений, и подставив эти значения в уравнения (8) получим т.н. *явную динамическую* идентификационную модель [24]:

$$\mathbf{W}_{em}(\mathbf{q}(t_i), \dot{\mathbf{q}}(t_i), \ddot{\mathbf{q}}(t_i)) \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}(t_i), i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Основным недостатком этой модели является необходимость измерения обобщенных ускорений манипуляционного механизма. Реальные роботы-манипуляторы не оснащаются акселерометрами, поэтому ускорения можно определить лишь путем численного дифференцирования обобщенных скоростей, что при наличии шумов измерений может существенно снизить точность оценки масс-инерционных параметров. Этой проблемы удастся избежать исключив обобщенные ускорения из идентификационной модели, для чего уравнения Лагранжа (2) интегрируют по времени на некотором отрезке  $[t_1, t_2]$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q}^T dt.$$

В результате имеем

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{t=t_2} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{t=t_1} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q}^T dt,$$

или, учитывая (7),

$$\left( \left. \frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{t=t_2} - \left. \frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{t=t_1} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \mathbf{q}} dt \right) \mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q} dt.$$

Подставляя в последнее соотношение измеренные значения обобщенных координат, скоростей и управляющих моментов получаем т.н. *неявную динамическую* модель [24]:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_{t=t_{i+1}} - \frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_{t=t_i} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \mathbf{q}} dt \right) \hat{\mathbf{p}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{Q} dt, i = \overline{1, m-1}, m > 10. \quad (10)$$

Очевидно, что в этой идентификационной модели ускорения не требуются, однако вычислительная сложность расчета выражений в круглых скобках соотношений (10), а, следовательно, и основной матрицы этой системы линейных уравнений, выше, чем при использовании явной динамической модели [18]. В связи с этим чаще всего используют *энергетическую* идентификационную модель [19], в основе которой лежит теорема об изменении полной энергии  $H$  голономной системы в интегральной форме [12]:

$$H(t_2) - H(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q} dt.$$

Поскольку полная энергия есть сумма кинетической и потенциальной энергий, для нее справедливо представление в виде линейной формы

$$H = \mathbf{w}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{p}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{w}_H = \mathbf{w}_K + \mathbf{w}_P$ . В результате, имея те же измерения, что и в случае неявной динамической модели, получим

$$(\mathbf{w}_H(\mathbf{q}(t_{i+1}), \dot{\mathbf{q}}(t_{i+1})) - \mathbf{w}_H(\mathbf{q}(t_i), \dot{\mathbf{q}}(t_i))) \hat{\mathbf{p}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q} dt, i = \overline{1, m-1}, m > 10n. \quad (12)$$

В работе [18] проведено подробное исследование и представлен сравнительный анализ трех приведенных типов идентификационных моделей, согласно

которому выражения в левых частях соотношений (12) имеют наиболее простой вид и требуют наименьших вычислительных затрат при расчетах. При этом ошибка оценки неизвестных параметров во всех трех случаях приблизительно одинакова. В качестве недостатка энергетической модели можно отметить необходимость большего числа точек измерений (в  $n$  раз). Заметим, что теоретически для любой идентификационной модели достаточно такого количества точек измерений, чтобы основная матрица соответствующей системы линейных уравнений была квадратной. Такая ситуация была бы удобна, поскольку подобные системы довольно легко решаются, например, методом исключения Гаусса и различными его модификациями [3]. Однако на практике идентификационные модели обычно приходится делать переопределенными и применять для их решения метод наименьших квадратов с целью уменьшения влияния шумов измерений на оценку неизвестных параметров [16].

## Проблема идентифицируемости

При проведении идентификации масс-инерционных параметров реальных роботов-манипуляторов обнаружилось, что при соответствии измеренных параметров движения управляющим силовым факторам, любая из систем линейных уравнений (9),(10),(12) совместна, но не имеет единственного решения из-за линейной зависимости столбцов основных матриц этих систем [18]. Эта проблема может быть вызвана двумя причинами:

- траектория движения манипулятора  $\mathbf{q}(t)$  в пространстве обобщенных координат такова, что коэффициенты влияния масс-инерционных параметров, как элементы линейного пространства функций времени  $t$ , оказываются линейно зависимыми;
- кинематическая схема и геометрические параметры манипулятора таковы, что коэффициенты влияния масс-инерционных параметров, как

элементы линейного пространства функций обобщенных координат  $\mathbf{q}$ , скоростей  $\dot{\mathbf{q}}$  и, в случае динамических идентификационных моделей, ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}$ , оказываются линейно зависимыми.

Первая причина обусловлена «неудачным» выбором траектории движения и может быть устранена в случае проведения идентификации в режиме *off-line*, для чего необходимо использовать специальные методы формирования экспериментальных траекторий, изложенные в работах [23, 33, 38, 39]. Вторая же причина обусловлена тем, что на движение звеньев манипуляционного механизма наложены связи. Этот факт вытекает из следующей теоремы:

**Теорема 1.** *Коэффициенты влияния классических инерционных параметров на функцию Лагранжа свободного твердого тела, движущегося в поле силы тяжести, как элементы линейного пространства функций обобщенных координат и скоростей, линейно независимы.*

*Доказательство.* Пусть в пространстве  $\mathbb{E}^3$  задана неподвижная система координат, а в произвольно выбранной точке свободного твердого тела помещено начало подвижной системы координат, связанной с этим телом. За обобщенные координаты примем декартовы координаты  $x, y, z$  точки начала подвижной системы координат, заданные в неподвижной системе, и углы поворота  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  вокруг осей неподвижной системы координат. Тогда обобщенными скоростями будут являться компоненты вектора линейной скорости  $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^3$  точки начала подвижной системы координат и вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{E}^3$  твердого тела, заданных в неподвижной системе координат.

Кинетическая энергия свободного твердого тела с учетом (3) и (4), а также свойства цикличности следа матрицы, может быть записана в виде

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \text{tr} \left( \frac{\partial \Gamma^T}{\partial q_j} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} \mathbf{H} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Здесь  $\mathbf{T}$  — однородная матрица перехода к подвижной системе координат, а  $\mathbf{H}$  — матрица инерции рассматриваемого твердого тела, заданная в подвижной системе. Представляя сумму произведений как произведение сумм и принимая во внимание, что

$$\dot{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

получим

$$K = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \dot{\mathbf{T}}^T \dot{\mathbf{T}} \mathbf{H} \right).$$

Поскольку

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{r} = (x \ y \ z)^T$  и  $\mathbf{R}$  — матрица суммарного вращения на углы  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  вокруг соответствующих осей неподвижной системы координат, имеем

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из кинематики манипуляционных механизмов известно [6], что

$$\dot{\mathbf{R}} = \Lambda(\omega) \mathbf{R},$$

где  $\Lambda(\omega)$  — кососимметрическая матрица, компоненты которой определяются следующим образом

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{T}}^T \dot{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}^T \Lambda^2(\omega) \mathbf{R} & -\mathbf{R}^T \Lambda(\omega) \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T \Lambda(\omega) \mathbf{R} & \mathbf{v}^2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим линейную и угловую скорости  $\mathbf{v}$  и  $\omega$ , заданные в подвижной системе координат, как  $\tilde{\mathbf{v}}$  и  $\tilde{\omega}$  соответственно. Очевидно, что  $\mathbf{v} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{v}}$  и  $\omega = \mathbf{R} \tilde{\omega}$ .

В результате, учитывая известное свойство матриц  $\Lambda$  [6]

$$\Lambda(\mathbf{R}\mathbf{a}) = \mathbf{R}\Lambda(\mathbf{a})\mathbf{R}^T, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}^3,$$

получим

$$\dot{\mathbf{T}}^T \dot{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -\Lambda^2(\tilde{\omega}) & -\Lambda(\tilde{\omega})\tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{v}}^T \Lambda(\tilde{\omega}) & \tilde{\mathbf{v}}^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\Lambda^2(\tilde{\omega}) = \begin{pmatrix} -\tilde{\omega}_y^2 - \tilde{\omega}_z^2 & \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_y & \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_z \\ \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_y & -\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_z^2 & \tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_z \\ \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_z & \tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_z & -\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_y^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(\tilde{\omega})\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_y \tilde{v}_z - \tilde{\omega}_z \tilde{v}_y \\ \tilde{\omega}_z \tilde{v}_x - \tilde{\omega}_x \tilde{v}_z \\ \tilde{\omega}_x \tilde{v}_y - \tilde{\omega}_y \tilde{v}_x \end{pmatrix},$$

откуда после алгебраических преобразований вытекает

$$\mathbf{w}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\tilde{\omega}_y^2 + \tilde{\omega}_z^2) & \frac{1}{2}(\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_z^2) & \frac{1}{2}(\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2) & -\tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_y & -\tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_z & -\tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_z \\ \tilde{v}_y \tilde{\omega}_z - \tilde{v}_z \tilde{\omega}_y & \tilde{v}_z \tilde{\omega}_x - \tilde{v}_x \tilde{\omega}_z & \tilde{v}_x \tilde{\omega}_y - \tilde{v}_y \tilde{\omega}_x & \frac{1}{2}(\tilde{v}_x^2 + \tilde{v}_y^2 + \tilde{v}_z^2) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что компоненты вектора-строки  $\mathbf{w}_K$  линейно независимы. В отсутствие связей компоненты вектора обобщенных скоростей  $\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{v}^T \boldsymbol{\omega}^T)^T$  являются независимыми переменными. Тогда компоненты вектора псевдоскоростей  $\dot{\boldsymbol{\pi}} = (\tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T)^T$ , как элементы линейного пространства  $\mathbb{R}^6$  обобщенных скоростей, линейно независимы, поскольку

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}^T = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Y},$$

где

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица  $\mathbf{Y}$  ортогональна при любых значениях обобщенных координат, поэтому интерпретация ее как матрицы координат псевдоскоростей  $\dot{\boldsymbol{\pi}}_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) в базисе  $\{\dot{q}_i, i = \overline{1, 6}\}$  пространства обобщенных скоростей

приводит к истинности утверждения о линейной независимости. Пусть

$$\beta = \left\{ \frac{1}{2}\tilde{v}_x^2, \frac{1}{2}\tilde{v}_y^2, \frac{1}{2}\tilde{v}_z^2, \frac{1}{2}\tilde{\omega}_x^2, \frac{1}{2}\tilde{\omega}_y^2, \frac{1}{2}\tilde{\omega}_z^2, \tilde{v}_x\tilde{\omega}_y, \tilde{v}_x\tilde{\omega}_z, \tilde{v}_y\tilde{\omega}_x, \right. \\ \left. \tilde{v}_y\tilde{\omega}_z, \tilde{v}_z\tilde{\omega}_x, \tilde{v}_z\tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_x\tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_x\tilde{\omega}_z, \tilde{\omega}_y\tilde{\omega}_z \right\}.$$

Тогда нетрудно видеть, что  $\mathbf{w}_K = \mathbf{b}Z$ , где  $\mathbf{b}$  — вектор-строка, составленная из всех элементов множества  $\beta$ , а

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Поскольку псевдоскорости линейно независимы, т.е. просто образуют другой базис в пространстве обобщенных скоростей, то справедлива лемма 7, сформулированная и доказанная в параграфе 2.3, из которой следует линейная независимость элементов множества  $\beta$  как подмножества системы линейно независимых векторов пространства функций, определенных на некотором параллелепипеде пространства обобщенных скоростей. Таким образом, коэффициенты влияния на кинетическую энергию линейно независимы, ибо матрица  $Z$  их координат в базисе пространства  $\text{span}(\beta)$ , имеет максимальный ранг, в чем легко убедиться приведя ее к ступенчатому виду [1].

Найдем коэффициенты влияния на потенциальную энергию. Пользуясь

соотношением (5) при  $n = 1$  и  $C = 0$ , получим

$$\Pi = -\mathbf{g}^T (\mathbf{R}\mathbf{S} + m\mathbf{r}),$$

или, обозначая вектор ускорения свободного падения, заданный в подвижной системе координат, как  $\tilde{\mathbf{g}}$ ,

$$\Pi = -\tilde{\mathbf{g}}^T \mathbf{S} - m\mathbf{g}^T \mathbf{r}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{w}_\Pi = - (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \tilde{g}_x \ \tilde{g}_y \ \tilde{g}_z \ \mathbf{g}^T \mathbf{r}).$$

Пусть  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  — орты осей подвижной системы координат, заданные в неподвижной системе, тогда  $\mathbf{R} = (\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})$  и

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{R}^T \mathbf{g} = (\mathbf{g}^T \mathbf{u} \ \mathbf{g}^T \mathbf{v} \ \mathbf{g}^T \mathbf{w})^T.$$

Покажем, что отличные от нуля компоненты вектора-строки  $\mathbf{w}_\Pi$ , как элементы линейного пространства функций обобщенных координат, линейно независимы. Во-первых,  $w_\Pi^{10}$  является функцией обобщенных координат  $x, y, z$  и, следовательно, никак не зависит от  $w_\Pi^i$  ( $i \in \{7, 8, 9\}$ ), являющихся функциями  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ . Во-вторых, компоненты вектора  $\tilde{\mathbf{g}}$  образуют систему линейно независимых векторов. Действительно, рассмотрим некоторую нетривиальную линейную комбинацию

$$a\tilde{g}_x + b\tilde{g}_y + c\tilde{g}_z$$

или, выполняя подстановку и вынося общий множитель за скобки,

$$\mathbf{g}^T (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}).$$

Выражение в круглых скобках является нетривиальной линейной комбинацией линейно независимых векторов и всегда отлично от нуля [7], поэтому

равенство рассматриваемой линейной комбинации нулю при любых значениях обобщенных координат возможно лишь в случае ортогональности вектора ускорения свободного падения и вектора равного выражению в скобках. Однако для свободного твердого тела это невозможно, поскольку для каждого заданного  $\mathbf{g}$  и любого набора коэффициентов  $a, b, c$  найдется такое положение этого тела и соответствующие ему значения обобщенных координат, что  $\mathbf{g} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$ . Отметим, что ненулевые коэффициенты влияния на потенциальную энергию никак не зависят от коэффициентов влияния на кинетическую энергию, ибо первые являются функциями обобщенных координат, а вторые — псевдоскоростей.

Покажем, наконец, истинность утверждения теоремы. По определению  $\mathbf{w}_L = \mathbf{w}_K - \mathbf{w}_\Pi$ , поэтому коэффициенты влияния на лагранжиан принадлежат пространству  $\text{span}(\beta \cup \{\tilde{g}_x, \tilde{g}_y, \tilde{g}_z, \mathbf{g}^T \mathbf{r}\})$ . Тогда матрица их координат в базисе этого пространства имеет вид

$$\begin{pmatrix} Z \\ 0 \ E_4 \end{pmatrix},$$

нетрудно видеть, что ее ранг максимален. □

Итак, мы установили линейную независимость коэффициентов влияния в случае свободного твердого тела. Теперь нас интересует, будет ли сохраняться это свойство, если на движение тела наложены стационарные, удерживающие, голономные связи, уравнения которых в дифференциальной форме имеют вид

$$\sum_{i=1}^6 a_i(\mathbf{q}) \dot{q}_i = 0. \quad (13)$$

Ясно, что в этом случае элементы множества  $\beta$  уже не образуют системы линейно независимых векторов, но это, вообще говоря, не свидетельствует о линейной зависимости компонент вектора-строки  $\mathbf{w}_L$ . В этом можно убе-

даться рассмотрим, например, связи вида  $\dot{\pi}_i = 0$  или  $\dot{\pi}_i = \alpha \dot{\pi}_j$ . Таким образом, однозначно ответить на интересующий нас вопрос в общем случае не удастся — многое зависит от конкретного вида уравнений связей, а также их количества. Однако для класса манипуляционных механизмов достаточно легко установить факт линейной зависимости коэффициентов влияния. По определению каждое звено такого механизма стеснено пятью связями вида (13), а значит ранг системы векторов  $\{\dot{q}_i, i = \overline{1, 6}\}$  равен единице при любых значениях обобщенных координат. Поскольку линейное преобразование с невырожденной матрицей не меняет ранга системы векторов, множество псевдоскоростей  $\{\dot{\pi}_i, i = \overline{1, 6}\}$  также имеет ранг равный единице. Для определенности будем считать независимым элементом  $\dot{\pi}_1$ , тогда все остальные псевдоскорости могут быть линейно выражены через него

$$\dot{\pi}_i = \alpha_i \dot{\pi}_1, \alpha_i \in R, i = \overline{2, 6}.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае все коэффициенты влияния на кинетическую энергию  $w_K^i$  ( $i = \overline{1, 10}$ ) линейно выражаются через  $\dot{\pi}_1^2$  и, следовательно, являются линейно зависимыми. Поскольку первые шесть компонент вектора-строки  $\mathbf{w}_D$  тождественно равны нулю, по крайней мере шесть компонент вектора-строки  $\mathbf{w}_L$  оказываются линейно зависимыми. Таким образом, коэффициенты влияния на функцию Лагранжа масс-инерционных параметров каждого звена манипуляционного механизма, а значит и совокупности всех звеньев, образуют систему линейно зависимых векторов. Ясно, что эта линейная зависимость будет сохраняться и для уравнений движения, и для полной энергии механизма в силу соотношений (8) и (11). Более того, для многозвенного механизма характерно появление линейной зависимости между коэффициентами влияния масс-инерционных параметров различных звеньев, а не только одного и того же.

Итак, связи, наложенные на движение звеньев манипулятора, делают коэффициенты влияния линейно зависимыми, и, как следствие, не позволяют установить взаимнооднозначного соответствия между множеством всех левых частей уравнений движения и множеством всех наборов масс-инерционных параметров. Очевидно, что всякой векторной функции обобщенных координат, скоростей и ускорений, являющейся левой частью каких-либо уравнений движения, соответствует бесконечное множество наборов масс-инерционных параметров звеньев. С одной стороны, это свойство крайне полезно, например, в теории подобия, но с другой стороны однозначное определение масс-инерционных параметров звеньев манипулятора путем идентификации оказывается принципиально невозможным. В заключение отметим, что помимо проблемы идентифицируемости, линейная зависимость коэффициентов влияния приводит к появлению избыточных вычислительных операций в процессе решения прямой и обратной задач динамики, получения идентификационных моделей и т.п. Это прямо следует из соотношений (8) и (11). Минимизация вычислений может оказаться достаточно актуальной проблемой в свете того, что перечисленные выше задачи зачастую требуется решать в режиме реального времени.

В настоящее время существует два подхода к разрешению указанной проблемы [16]. Первый состоит в регуляризации по Тихонову рассматриваемой задачи, т.е. выборе из бесконечного числа решений системы линейных уравнений единственного решения исходя из некоторого дополнительного критерия. Таковым может служить, например, решение доставляющее минимум квадратической ошибки оценки и имеющее наименьшую норму, которое можно найти с помощью псевдообращения основной матрицы линейной системы [2]. Однако получаемые таким способом оценки масс-инерционных параметров будут существенно отличаться от истинных их значений, хотя и могут быть успешно использованы, например, в алгоритмах динамического управления

для расчета управляющих сил и моментов. Вторым способом заключается во введении уменьшенного набора масс-инерционных параметров, такого, чтобы существовало взаимнооднозначное соответствие между множеством наборов таких параметров и множеством всех левых частей уравнений движения. Элементы уменьшенного набора параметров называют *базовыми инерционными параметрами* по причинам, которые будут показаны далее. Чтобы отличать базовые параметры от элементов обычного набора параметров, последние называют *классическими инерционными параметрами*. Метод базовых параметров позволяет не только решать практические задачи управления роботами-манипуляторами, но также устраняет структурную неоднозначность уравнений движения и полной энергии относительно инерционных параметров. Последнее весьма полезно для решения упомянутой выше задачи минимизации вычислений в прикладных расчетах, а также в компьютерных методах получения уравнений движения манипуляционного механизма в символьном виде. Следующая глава посвящена математическим аспектам понятия базовых инерционных параметров.

## Выводы

1. Классические инерционные параметры при известных геометрических параметрах манипуляционного механизма полностью определяют коэффициенты уравнений движения, поэтому их знание необходимо для решения задач анализа и синтеза современных методов управления роботами-манипуляторами.
2. Нередко априорная информация о классических инерционных параметрах отсутствует или недоступна. В таких ситуациях требуется проведение процедуры идентификации инерционных параметров, которая, бла-

годаря линейности левых частей уравнений движения и полной энергии манипуляционного механизма относительно этих параметров, может быть сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений.

3. Получение однозначной оценки классических инерционных параметров путем идентификации принципиально невозможно вследствие структурной неоднозначности как левых частей уравнений движения, так и полной энергии манипуляционного механизма, относительно этих параметров. Устранение подобной неоднозначности возможно с помощью другой параметризации кинетической и потенциальной энергий механизма — базовых инерционных параметров. Это также позволяет снизить вычислительную сложность расчетов при моделировании движений звеньев манипуляционных роботов и реализации методов динамического управления ими.

# Базовые инерционные параметры и их свойства

## 2.1. Понятие о базовых инерционных параметрах

Итак, базовые инерционные параметры представляют собой специальную параметризацию левой части уравнений движения манипуляционного механизма, устраняющую их структурную неоднозначность. Основываясь на более строгой формулировке понятия базовых инерционных параметров, приведенной в работе [31], являющейся одной из фундаментальных для рассматриваемой проблемы, можно дать общее определение базовых параметров, представленное ниже. *Базовыми параметрами* некоторого многопараметрического<sup>8</sup> семейства скалярных или векторных функций одной или нескольких переменных будем называть совокупность действительных чисел, удовлетворяющих следующим свойствам:

- *Минимальность.* Множество базовых параметров не может быть сведено к меньшему набору параметров, который, в то же время, полностью бы определял заданное семейство функций;
- *Однозначность.* Различные наборы значений базовых параметров задают различные функции семейства.

Однако для разработки методов поиска связи классических и базовых параметров, записи уравнений движения и идентификационных моделей в терминах базовых параметров требуется математическая интерпретация данного выше определения. Ниже рассмотрен предлагаемый подход к формализации

---

<sup>8</sup> Здесь имеется в виду, что перебирая все возможные значения всех параметров можно перебрать все функции данного семейства.

понятия базовых параметров, а в конце параграфа приведено сравнение с существующими способами.

Изучив соотношения (6) можно утверждать, что коэффициенты влияния на кинетическую энергию являются квадратичными формами вида

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

а на потенциальную энергию — некоторыми непрерывными нелинейными функциями  $b(\mathbf{q})$  обобщенных координат. Отметим, что последние не содержат постоянных слагаемых благодаря выбору произвольной постоянной в выражении (5):

$$C = \sum_{i=1}^{10n} c_i,$$

где  $c_i = 0$ , если потенциальная энергия не содержит слагаемого вида  $\alpha_i p_i$  ( $\alpha_i = const$ ), и  $c_i = -\alpha_i p_i$  в противном случае. Очевидно, что такие квадратичные формы и функции  $b(\mathbf{q})$  образуют подпространства в бесконечномерном линейном пространстве непрерывных функций обобщенных координат и скоростей, определенных на некотором параллелепипеде  $P$  фазового пространства. Далее будем обозначать их  $\mathbb{F}_K$  и  $\mathbb{F}_\Pi$  соответственно. Покажем, что эти подпространства имеют только один общий элемент — нулевой. Предположим, что существуют такие не равные тождественно нулю квадратичная форма из  $\mathbb{F}_K$  с матрицей  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})$  и функция  $\hat{b}(\mathbf{q})$  из  $\mathbb{F}_\Pi$ , что

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \hat{b}(\mathbf{q}), \quad \forall (\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in P.$$

Выберем произвольное значение вектора обобщенных координат  $\mathbf{q}^*$  и введем обозначения  $\hat{\mathbf{B}}^* = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q}^*)$ ,  $\hat{b}^* = \hat{b}(\mathbf{q}^*)$  и  $P^* = \{\dot{\mathbf{q}} : ((\mathbf{q}^*)^T \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in P\}$ . Тогда должно быть справедливо

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{B}}^* \dot{\mathbf{q}} - \hat{b}^* 1(\dot{\mathbf{q}}) = 0, \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \in P^*.$$

Здесь  $1(\dot{\mathbf{q}})$  — функция, тождественно равная единице во всех точках множества  $P^*$ . Из последнего равенства следует, что некоторая линейная комбинация системы векторов  $\{1(\dot{\mathbf{q}})\} \cup \{\dot{q}_i^2/2, i = \overline{1, n}\} \cup \{\dot{q}_i\dot{q}_j, i = \overline{2, n}, j = \overline{1, i-1}\}$  пространства непрерывных функций обобщенных скоростей, определенных на множестве  $P^*$ , равна нулю. Согласно лемме 7, сформулированной и доказанной ниже в данной главе, указанная система векторов линейно независима, поэтому  $\hat{b}^* = 0$  и  $\dot{\mathbf{q}}^T \hat{B}^* \dot{\mathbf{q}} \equiv 0$ , откуда, в силу произвольности  $\mathbf{q}^*$ , немедленно следует, что  $\hat{b}(\mathbf{q}) \equiv 0$  и  $\dot{\mathbf{q}}^T \hat{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \equiv 0$ . С учетом сказанного коэффициенты влияния на функцию Лагранжа и на полную энергию механизма являются элементами пространства  $\mathbb{F}_e = \mathbb{F}_K \oplus \mathbb{F}_H$  [1]. Тогда соотношения (7) и (11) можно интерпретировать как разложения некоторых векторов  $L$  и  $H$  пространства  $\mathbb{F}_e$  по элементам конечных систем векторов  $\mathbf{w}_L$  и  $\mathbf{w}_H$  соответственно этого же пространства, причем масс-инерционные параметры являются коэффициентами этих разложений. Аналогичные рассуждения справедливы и в отношении коэффициентов влияния на левую часть уравнений движения. Действительно, результатом применения линейного оператора  $\mathcal{L}$  к любому вектору пространства  $\mathbb{F}_e$  является вектор-функция вида  $B(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Нетрудно видеть, что последние образуют линейное подпространство  $\mathbb{F}_{em}$  в бесконечномерном линейном пространстве непрерывных векторов-функций обобщенных координат, скоростей и ускорений, определенных на некотором параллелепипеде  $P_1$  пространства  $\mathbb{R}^{3n}$ . Таким образом, соотношение (8) может быть истолковано как разложение вектора пространства  $\mathbb{F}_{em}$  по элементам конечной системы векторов того же пространства.

Итак, функция Лагранжа  $L$ , полная энергия  $H$  и левая часть уравнений движения  $\mathcal{L}L$  являются элементами линейных оболочек конечных систем векторов:  $L \in span(\mathbf{w}_L)$ ,  $H \in span(\mathbf{w}_H)$  и  $\mathcal{L}L \in span(W_{em})$ . Это значит, что существуют разложения указанных элементов по базисам этих линейных пространств [2]. Пусть среди компонент векторов-строк  $\mathbf{w}_L$  и  $\mathbf{w}_H$  найдется не бо-

лее  $r_L$  и  $r_H$  соответственно линейно независимых элементов, а в матрице  $W_{em}$  — не более  $r_{em}$  линейно независимых столбцов. Тогда векторы-строки  $\tilde{\mathbf{w}}_L = (w_L^{i_1} \dots w_L^{i_{r_L}})$  и  $\tilde{\mathbf{w}}_H = (w_H^{i_1} \dots w_H^{i_{r_H}})$  и матрица  $\tilde{W}_{em} = (\mathbf{w}_{em}^{i_1} \dots \mathbf{w}_{em}^{i_{r_{em}}})$ , составленные из линейно независимых элементов соответствующих систем векторов, являются «естественными» базисами пространств  $span(\mathbf{w}_L)$ ,  $span(\mathbf{w}_H)$  и  $span(W_{em})$ . Рассмотрим следующие базисные разложения:

$$L = \tilde{\mathbf{w}}_L \tilde{\mathbf{p}}_L, \quad (14a)$$

$$H = \tilde{\mathbf{w}}_H \tilde{\mathbf{p}}_H, \quad (14b)$$

$$\mathcal{L}L = \tilde{W}_{em} \tilde{\mathbf{p}}_{em}, \quad (14c)$$

где  $\tilde{\mathbf{p}}_L \in \mathbb{R}^{r_L}$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_H \in \mathbb{R}^{r_H}$  и  $\tilde{\mathbf{p}}_{em} \in \mathbb{R}^{r_{em}}$  — векторы-столбцы, составленные из коэффициентов этих разложений. Из соотношений (6) видно, что коэффициенты влияния на кинетическую и потенциальную энергию механизма определяются только его геометрическими параметрами. Из (7), (11) и (8) ясно, что этот вывод справедлив и для коэффициентов влияния на функцию Лагранжа, полную энергию и левую часть уравнений движения. Поэтому при заданной кинематической схеме манипулятора и выбранных базисах  $\tilde{\mathbf{w}}_L$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_H$  и  $\tilde{W}_{em}$  в силу единственности базисного разложения имеют место взаимнооднозначные соответствия  $L \leftrightarrow \tilde{\mathbf{p}}_L$ ,  $H \leftrightarrow \tilde{\mathbf{p}}_H$  и  $\mathcal{L}L \leftrightarrow \tilde{\mathbf{p}}_{em}$ . Кроме того, исключение из базисной системы векторов хотя бы одного элемента, и, как следствие, уменьшение размерности столбца коэффициентов этого разложения, приводит к невозможности представления всех элементов соответствующего линейного пространства как линейных комбинаций векторов редуцированной базисной системы. Это означает, что редуцированная система базисных векторов не обладает полнотой описания рассматриваемого линейного пространства. Таким образом, коэффициенты базисного разложения являются наименьшим набором параметров, полностью определяющим в выбранном базисе все элементы соответствующего пространства. Из сказанного следует,

что совокупности элементов столбцов  $\tilde{\mathbf{p}}_L$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_H$  и  $\tilde{\mathbf{p}}_{em}$  удовлетворяют данному выше определению базовых параметров. Заметим, что в общем случае коэффициенты разложений (14) различны, откуда вытекает необходимость введения базовых параметров отдельно для лагранжиана, для полной энергии и для левой части уравнений движения. Кроме того, любое невырожденное линейное преобразование с матрицей  $\mathbf{A}$  любого из трех векторов базовых параметров также является вектором базовых параметров, но соответствующим другому базису, переход к которому определяется матрицей  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Теперь найдем связь между базовыми и классическими инерционными параметрами. Поскольку  $w_L^i \in span(\mathbf{w}_L)$ ,  $w_H^i \in span(\mathbf{w}_H)$  и  $w_{em}^i \in span(\mathbf{W}_{em})$ , где  $i = \overline{1, 10n}$ , справедливы соотношения

$$\begin{aligned} w_L^i &= \tilde{\mathbf{w}}_L \mathbf{y}_L^i, \\ w_H^i &= \tilde{\mathbf{w}}_H \mathbf{y}_H^i, \\ \mathbf{w}_{em}^i &= \tilde{\mathbf{W}}_{em} \mathbf{y}_{em}^i. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{y}_L^i \in \mathbb{R}^{r_L}$ ,  $\mathbf{y}_H^i \in \mathbb{R}^{r_H}$  и  $\mathbf{y}_{em}^i \in \mathbb{R}^{r_{em}}$  — векторы-столбцы, составленные из координат соответствующих коэффициентов влияния в «естественных» базисах указанных пространств. Введем матрицы  $\mathbf{Y}_L = (\mathbf{y}_L^1 \dots \mathbf{y}_L^{10n})$ ,  $\mathbf{Y}_H = (\mathbf{y}_H^1 \dots \mathbf{y}_H^{10n})$  и  $\mathbf{Y}_{em} = (\mathbf{y}_{em}^1 \dots \mathbf{y}_{em}^{10n})$ , тогда имеет место следующее

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_L &= \tilde{\mathbf{w}}_L \mathbf{Y}_L, \\ \mathbf{w}_H &= \tilde{\mathbf{w}}_H \mathbf{Y}_H, \\ \mathbf{W}_{em} &= \tilde{\mathbf{W}}_{em} \mathbf{Y}_{em}. \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим условия инвариантности лагранжиана, полной энергии и левой части уравнений движения

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_L \mathbf{p} &= \tilde{\mathbf{w}}_L \tilde{\mathbf{p}}_L, \\ \mathbf{w}_H \mathbf{p} &= \tilde{\mathbf{w}}_H \tilde{\mathbf{p}}_H, \\ \mathbf{W}_{em} \mathbf{p} &= \tilde{\mathbf{W}}_{em} \tilde{\mathbf{p}}_{em}, \end{aligned}$$

которые с учетом (15) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}_L (Y_L \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_L) &= \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{w}}_H (Y_H \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_H) &= \mathbf{0}, \\ \tilde{W}_{em} (Y_{em} \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{em}) &= 0.\end{aligned}$$

Каждое из этих соотношений можно интерпретировать как равенство нулевому вектору некоторой линейной комбинации базисных векторов. Ясно, что это возможно лишь в случае тривиальных коэффициентов этой комбинации [7], откуда следует

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}}_L &= Y_L \mathbf{p}, \\ \tilde{\mathbf{p}}_H &= Y_H \mathbf{p}, \\ \tilde{\mathbf{p}}_{em} &= Y_{em} \mathbf{p}.\end{aligned}\tag{16}$$

Таким образом, базовые инерционные параметры являются некоторыми линейными комбинациями классических параметров, причем коэффициенты этих комбинаций равны координатам соответствующих коэффициентов влияния в «естественных» базисах пространств  $\text{span}(\mathbf{w}_L)$ ,  $\text{span}(\mathbf{w}_H)$  и  $\text{span}(W_{em})$ .

В заключение сравним предложенный подход с другими, существующими на сегодняшний день. В работах [30, 31] используется иная интерпретация соотношений (7), (11) и (8): элементами линейного пространства считаются масс-инерционные параметры  $p_i$ , а их коэффициенты влияния — коэффициентами соответствующих разложений. С этой точки зрения базовые инерционные параметры являются базисом пространства всевозможных масс-инерционных параметров. В другом подходе, применяемом в [22, 36], базовые параметры трактуются с точки зрения их приложения к решению проблемы идентифицируемости и определяются из условия инвариантности идентификационной модели как координаты вектора ее правой части в базисе пространства, задаваемого столбцами основной матрицы соответствующей линейной системы. Наконец, в работах [20, 21, 27] применяется подход, подобный предложен-

ному выше, также основанный на поиске линейно зависимых и независимых коэффициентов влияния. Однако, по мнению диссертанта он недостаточно проработан с математической точки зрения, в частности, самоочевидным считается факт равенства базовых параметров полной энергии и уравнений движения, что, вообще говоря, имеет место лишь при выполнении определенных условий, сформулированных и доказанных в следующем параграфе. Так или иначе, все перечисленные способы формализации базовых инерционных параметров позволяют находить связь последних с классическими параметрами, обзор соответствующих методов представлен в главе 3, целиком посвященной этой задаче. Однако, эти методы либо справедливы лишь для манипуляционных механизмов с параллельными или перпендикулярными осями соседних вращательных сочленений, либо принципиально являются приближенными и не гарантируют получения истинного решения. Предложенный же выше способ формализации базовых параметров, как будет показано далее, позволяет не только находить связь с классическими параметрами для любых манипуляционных механизмов, но и получить замкнутую форму уравнений движения и энергетической идентификационной модели таких механизмов.

## 2.2. Теоремы о равенстве

Рассмотренный в предыдущем параграфе подход к понятию базовых инерционных параметров с одной стороны позволяет установить достаточно простую связь с классическими параметрами, но, с другой стороны, приводит к появлению трех различных вариантов базовых параметров, причем остается неясным какие из них могут иметь практическое применение. На первый взгляд необходимы только параметры левой части уравнений движения  $\tilde{\mathbf{p}}_{em}$ , ведь и управление, и идентификация осуществляются на основе уравнений движения, как, собственно, и моделирование. С другой стороны, оценка

масс-инерционных параметров возможна и с помощью теоремы об изменении полной энергии в интегральной форме, причем такой способ имеет определенные преимущества с точки зрения минимизации вычислений. То же можно сказать и о моделировании движений манипулятора с помощью принципа Гамильтона<sup>9</sup>. Наконец, кажется логичным, что для поиска базовых инерционных параметров, как линейных комбинаций классических инерционных параметров, достаточно иметь выражения для кинетической и потенциальной энергии и не обязательно требовать знания уравнений движения. Таким образом, использование базовых параметров лагранжиана  $\tilde{\mathbf{p}}_L$  и полной энергии  $\tilde{\mathbf{p}}_H$ , а также соответствующих представлений (14) этих величин позволяет получить выигрыш в быстродействии при решении прикладных задач. Все это говорит о крайней полезности нахождения какой-либо связи между этими тремя различными вариантами базовых инерционных параметров, для чего были доказаны необходимые и достаточные условия их равенства, сформулированные в виде следующих теорем:

**Теорема 2.** *Для равенства базовых инерционных параметров функции Лагранжа  $\tilde{\mathbf{p}}_L$  и полной энергии  $\tilde{\mathbf{p}}_H$  манипуляционного механизма необходимо и достаточно выполнения следующего соотношения между их коэффициентами влияния*

$$\tilde{\mathbf{w}}_H = \mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L,$$

где  $\mathcal{G} : \mathbb{F}_e \rightarrow \mathbb{F}_e$  — преобразование Лежандра, причем

$$\forall f \in \mathbb{F}_e \Rightarrow \mathcal{G}f = \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - f.$$

**Теорема 3.** *Для равенства базовых инерционных параметров функции Лагранжа  $\tilde{\mathbf{p}}_L$  и уравнений движения  $\tilde{\mathbf{p}}_{em}$  манипуляционного механизма необходи-*

---

<sup>9</sup> Так называемое «вариационное интегрирование». Соответствующие теоретические основы подробно изложены в работе [29], а примеры использования для моделирования транспортных средств — в работе [28].

мо и достаточно выполнения следующего соотношения между их коэффициентами влияния

$$\tilde{W}_{em} = \mathcal{L}\tilde{\mathbf{w}}_L.$$

Для доказательства этих теорем сначала сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

**Лемма 1.** *Если вектор-строка  $\mathbf{a}$  из  $r$  элементов представляет собой систему линейно независимых векторов пространства  $\mathbb{F}_e$ , то система векторов  $\mathcal{G}\mathbf{a} \subset \mathbb{F}_e$  также линейно независима.*

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда, по определению [7], должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^r c_i \mathcal{G}a_i = 0,$$

где не все  $c_i \in \mathbb{R}$  равны нулю. Это равенство может выполняться в следующих случаях:

1.

$$\frac{\partial a_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} = a_i \equiv 0, \quad i = \overline{1, r};$$

Выполнение этого равенства невозможно, поскольку в этом случае система векторов  $\mathbf{a}$  должна быть линейно зависимой, что противоречит условию леммы.

2.

$$\frac{\partial a_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} = a_i, \quad i = \overline{1, r};$$

Поскольку  $a_i \in \mathbb{F}_e$ , справедливо следующее

$$a_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + b_i(\mathbf{q}), \quad i = \overline{1, r}. \quad (17)$$

Тогда рассматриваемое условие можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + b_i(\mathbf{q}),$$

или, приводя подобные слагаемые,

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = b_i(\mathbf{q}), \quad i = \overline{1, r}.$$

Нетрудно видеть, что левая часть последнего равенства является элементом подпространства  $\mathbb{F}_K$ , а правая — подпространства  $\mathbb{F}_\Pi$ . Ранее было показано, что  $\mathbb{F}_K \cap \mathbb{F}_\Pi = \{0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\}$ , поэтому выполнение этого равенства возможно лишь в случае  $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \equiv 0$  и  $b_i(\mathbf{q}) \equiv 0$ , и, следовательно,  $a_i \equiv 0$  ( $i = \overline{1, r}$ ), что противоречит линейной независимости системы векторов  $\mathbf{a}$ .

3.

$$\sum_{i=1}^r c_i \frac{\partial a_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^r c_i a_i \equiv 0;$$

Выполнение этого равенства невозможно, поскольку невозможно равенство нулевому вектору нетривиальной линейной комбинации системы линейно независимых векторов  $\mathbf{a}$  [7].

4.

$$\sum_{i=1}^r c_i \frac{\partial a_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^r c_i a_i.$$

С учетом (17) рассматриваемое условие можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^r c_i \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^r c_i \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + b_i(\mathbf{q}) \right),$$

или, упрощая выражения,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r c_i \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^r c_i b_i(\mathbf{q}).$$

Левая часть последнего равенства является линейной комбинацией элементов подпространства  $\mathbb{F}_K$ , а правая — элементов подпространства  $\mathbb{F}_\Pi$ . В силу замкнутости линейных подпространств [7], выполнение рассматриваемого условия оказывается возможным лишь в случае равенства

упомянутых линейных комбинаций нулевому вектору, откуда следует равенство нулю нетривиальной линейной комбинации

$$\sum_{i=1}^r c_i a_i,$$

что невозможно.

Таким образом, выполнение ни одного из перечисленных условий невозможно, а, значит, наше предположение неверно и система векторов  $\mathcal{G}\mathbf{a}$  является линейно независимой, ясно, что ее ранг равен  $r$ .

□

**Лемма 2.** *Если вектор-строка  $\mathbf{a}$  из  $r$  элементов представляет собой систему линейно независимых векторов пространства  $\mathbb{F}_e$ , то система векторов  $\mathcal{L}\mathbf{a} \subset \mathbb{F}_{em}$  также линейно независима.*

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда, по определению, должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^r c_i \mathcal{L}a_i = 0,$$

где не все  $c_i \in \mathbb{R}$  равны нулю. Это возможно в следующих случаях:

1.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial a_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial a_i}{\partial \mathbf{q}} \equiv 0, \quad i = \overline{1, r};$$

Из равенства нулю частных производных  $a_i$  по обобщенным координатам и представления (17) следует, что квадратичные формы  $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  тождественно равны нулю либо их матрицы являются постоянными. Кроме того, поскольку функции  $b_i(\mathbf{q})$  не могут содержать постоянных слагаемых, в частности, не могут быть тождественно равными константе, они тождественно равны нулю. Таким образом, возможны два варианта:  $a_i \equiv 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), и  $a_i = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{q}}/2$ , причем  $\mathbf{B}_i$  — постоянные

матрицы. Первый вариант противоречит факту линейной независимости системы векторов  $\mathbf{a}$ , являющемуся условием леммы. Из второго же вкуже с рассматриваемым условием следует

$$\mathbf{B}_i^T \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad i = \overline{1, r}.$$

Эти  $n$  линейных уравнений для каждого  $\mathcal{L}a_i$  выделяют в пространстве обобщенных ускорений  $\mathbb{R}^n$  часть плоскости размерности  $n - \text{rank}(\mathbf{B}_i)$  ограниченной параллелепипедом  $P_{\ddot{\mathbf{q}}}$ , являющимся сужением области определения  $P_1$  функций-элементов пространства  $\mathbb{F}_{em}$  на  $n$ -мерное подпространство обобщенных ускорений. Однако это противоречит тому факту, что обобщенные ускорения, как аргументы функций  $\mathcal{L}a_i$ , могут принимать любые значения из соответствующей области определения  $P_{\ddot{\mathbf{q}}}$ , поэтому выполнение рассматриваемого условия невозможно.

2.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial a_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial a_i}{\partial \mathbf{q}}, \quad i = \overline{1, r};$$

С учетом (17) рассматриваемое условие примет вид

$$\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial b_i}{\partial \mathbf{q}},$$

или, перенося все в левую часть равенства,

$$\left[ \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i - \frac{\partial b_i}{\partial \mathbf{q}} \right] + \left[ \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}_i - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{q}}) \right] = 0, \quad \forall (\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T \quad \ddot{\mathbf{q}}^T)^T \in P_1. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что выражение в правых квадратных скобках представляет собой вектор-строку, элементы которой являются квадратичными формами относительно обобщенных скоростей. Действительно, если  $\mathbf{B}_i = \{b_{ijk}\}_{j,k=\overline{1,n}}$ , то  $l$ -й элемент этого вектора-строки будет равен

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ijl}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{ijk}}{\partial q_l} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k.$$

Ясно, что выражения в круглых скобках, являющиеся коэффициентами этих квадратичных форм, зависят только от обобщенных координат. Будем обозначать матрицы коэффициентов соответствующих квадратичных форм как  $B_{il}$  ( $l = \overline{1, n}$ ). Выберем некоторое произвольное значение вектора обобщенных ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}^*$  из  $P_{\ddot{\mathbf{q}}}$ . Тогда выражения в левых квадратных скобках равенств (18) станут векторами-строками  $\mathbf{h}_i = \{h_{il}\}_{l=\overline{1, n}}$ , составленными из непрерывных нелинейных функций обобщенных координат, причем

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{q}) = (\ddot{\mathbf{q}}^*)^T B_i(\mathbf{q}) - \frac{\partial b_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.$$

С учетом этого рассматриваемое условие приобретет вид

$$\dot{\mathbf{q}}^T B_{il}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + h_{il}(\mathbf{q}) = 0, \quad \forall (\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in P_1^*, \quad l = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, r},$$

где  $P_1^* = \{(\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in \mathbb{R}^{2n} : (\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^T (\ddot{\mathbf{q}}^*)^T)^T \in P_1\}$ . Очевидно, что первые слагаемые в этих равенствах представляют собой элементы пространства  $\mathbb{F}_K$ . Вторые же слагаемые принадлежат расширенному пространству  $\mathbb{F}'_{II}$ , которое помимо элементов пространства  $\mathbb{F}_{II}$  содержит функции обобщенных координат с постоянными слагаемыми, в частности, функции-константы. Из доказательства в первом параграфе главы того, что  $\mathbb{F}_K \cap \mathbb{F}_{II} = \mathbf{0}$  следует справедливость этого факта и для пространств  $\mathbb{F}_K$  и  $\mathbb{F}'_{II}$ . Тогда  $h_{il}(\mathbf{q}) \equiv 0$  и  $\dot{\mathbf{q}}^T B_{il}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \equiv 0$ . Но значение  $\ddot{\mathbf{q}}^*$  было выбрано произвольно, поэтому должно быть справедливо следующее

$$\ddot{\mathbf{q}}^T B_i(\mathbf{q}) - \frac{\partial b_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad \forall (\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^T \ddot{\mathbf{q}}^T)^T \in P_1.$$

Выберем произвольные значения обобщенных координат  $\mathbf{q}^*$  и скоростей  $\dot{\mathbf{q}}^*$  из параллелепипеда  $P_{ph}$ , являющегося сужением области определения  $P_1$  функций-элементов пространства  $\mathbb{F}_{em}$  на  $2n$ -мерное фазовое под-

пространство, и введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i^* &= \mathbf{B}_i(\mathbf{q}^*), \\ \mathbf{b}_i^* &= \left( \frac{\partial b_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^*}. \end{aligned}$$

С учетом этого, рассматриваемое условие приводит к совокупности систем линейных уравнений

$$(\mathbf{B}_i^*)^T \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_i^*,$$

каждая из которых в пространстве  $\mathbb{R}^n$  обобщенных ускорений задает часть плоскости размерности  $n - \text{rank}(\mathbf{B}_i^*)$ , ограниченной параллелепипедом  $P_{\ddot{\mathbf{q}}}$ . Но обобщенные ускорения могут принимать любые значения из  $P_{\ddot{\mathbf{q}}}$ , что вкупе с произвольным выбором значений  $\mathbf{q}^*$  и  $\dot{\mathbf{q}}^*$  означает невозможность выполнения рассматриваемого условия.

3.

$$\sum_{i=1}^r c_i \frac{d}{dt} \frac{\partial a_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \sum_{i=1}^r c_i \frac{\partial a_i}{\partial \mathbf{q}} \equiv 0.$$

Внося постоянные множители под знак частного дифференциала, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \sum_{i=1}^r c_i a_i \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \sum_{i=1}^r c_i a_i \right) \equiv 0.$$

В силу замкнутости линейных подпространств, стоящая в круглых скобках последнего равенства нетривиальная линейная комбинация линейно независимых векторов подпространства  $\mathbb{F}_e$  является ненулевым вектором этого же пространства. Проводя далее рассуждения, аналогичные первому пункту, получим противоречие и, следовательно, невозможность выполнения данного условия.

4.

$$\sum_{i=1}^r c_i \frac{d}{dt} \frac{\partial a_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \sum_{i=1}^r c_i \frac{\partial a_i}{\partial \mathbf{q}};$$

Невозможность выполнения рассматриваемого условия доказывается аналогично предыдущему пункту, но с заменой ссылки на ход рассуждений в первом пункте ссылкой на второй пункт.

Таким образом, выполнение ни одного из перечисленных условий невозможно, а, значит, наше предположение неверно и система векторов  $\mathcal{L}\mathbf{a}$  является линейно независимой, ясно, что ее ранг равен  $r$ .  $\square$

**Лемма 3.** *Системы векторов  $\tilde{\mathbf{w}}_H$  и  $\mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L$  являются базисами одного и того же конечномерного линейного подпространства пространства  $\mathbb{F}_e$ .*

*Доказательство.* По определению системы векторов  $\tilde{\mathbf{w}}_H \in \mathbb{F}_e$  и  $\tilde{\mathbf{w}}_L \in \mathbb{F}_e$  линейно независимы, это же, согласно лемме 1, справедливо и для  $\mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L$ . Покажем, что рассматриваемые системы линейно независимых векторов имеют одинаковый размер. Действительно, полная энергия механической системы связана с функцией Лагранжа преобразованием Лежандра  $H = \mathcal{G}L$  [12]. Учитывая (14) и (16), получим

$$\tilde{\mathbf{w}}_H Y_H \mathbf{p} = \mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L Y_L \mathbf{p}.$$

Поскольку это должно быть справедливо для любых значений  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{10n}$ , имеет место следующее равенство

$$\tilde{\mathbf{w}}_H Y_H = \mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L Y_L. \quad (19)$$

Линейно независимые системы векторов  $\tilde{\mathbf{w}}_H$  и  $\mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L$  являются базисами линейных подпространств  $\text{span}(\mathbf{w}_H)$  и  $\text{span}(\mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L)$ . В силу (15) последнее равенство можно интерпретировать как базисные разложения элементов системы векторов  $\mathbf{w}_H$ , принадлежащей обоим этим пространствам, причем столбцы матриц  $Y_H$  и  $Y_L$  определяют их координаты в соответствующих базисах. Известно, что ранг произвольной системы векторов может быть найден как ранг ее матрицы координат в некотором базисе [7]. Из определения матриц

$Y_H$  и  $Y_L$  очевидно, что их ранги максимальны и равны  $r_H$  и  $r_L$  соответственно. Тогда из сказанного выше следует, что величины  $r_H$  и  $r_L$  не могут быть различными.

Таким образом, пространства  $\text{span}(\tilde{\mathbf{w}}_H)$  и  $\text{span}(\mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L)$  имеют одинаковую размерность, покажем, что они совпадают. Поскольку ранг системы векторов  $\mathbf{w}_H$  равен  $r_H$ , в ней наберется именно столько линейно независимых векторов [7]. Без ограничения общности можно считать, что линейно независимыми являются первые  $r_H$  векторов этой системы. В самом деле, этого всегда можно добиться перестановкой элементов вектора-строки  $\mathbf{w}_H$  и столбцов матриц координат  $Y_H$  и  $Y_L$ . Обозначим матрицы, составленные из координат векторов  $w_H^1, \dots, w_H^{r_H}$  в базисах  $\tilde{\mathbf{w}}_H$  и  $\mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L$  как  $Y'_H$  и  $Y'_L$  соответственно. С учетом этого будем иметь

$$\tilde{\mathbf{w}}_H Y'_H = \mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L Y'_L.$$

Заметим, что матрицы  $Y'_H$  и  $Y'_L$  являются квадратными и невырожденными. Это следует из того, что вектора  $w_H^1, \dots, w_H^{r_H}$  линейно независимы и  $r_H = r_L$ . Тогда, умножая последнее равенство справа на  $(Y'_H)^{-1}$  и обозначая матричное произведение  $Y'_L (Y'_H)^{-1}$  как  $Y'_{LH}$ , получим

$$\tilde{\mathbf{w}}_H = \mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L Y'_{LH}.$$

Очевидно, что матрица  $Y'_{LH}$  также является квадратной и невырожденной. Рассмотрим теперь произвольный ненулевой вектор  $\tilde{\mathbf{w}}_H \mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{r_H}, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  из  $\text{span}(\mathbf{w}_H)$ . С учетом последнего соотношения этот вектор может быть представлен в виде

$$\tilde{\mathbf{w}}_H \mathbf{a} = \mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L Y'_{LH} \mathbf{a}.$$

Но поскольку матрица  $Y'_{LH}$  — квадратная и невырожденная и  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , вектор коэффициентов равный их произведению также отличен от нулевого вектора. Это означает, что любой ненулевой вектор из  $\text{span}(\tilde{\mathbf{w}}_H)$  в то же время

является и ненулевым вектором в  $\text{span}(\mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L)$ , что окончательно доказывает утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 4.** *Системы векторов  $\tilde{W}_{em}$  и  $\mathcal{L}\tilde{\mathbf{w}}_L$  являются базисами одного и того же конечномерного линейного подпространства пространства  $\mathbb{F}_{em}$ .*

*Доказательство.* Левая часть уравнений движения манипуляционного механизма в форме Лагранжа (2) имеет вид  $\mathcal{L}L$ , или, учитывая (14a) и (16),  $\mathcal{L}\tilde{\mathbf{w}}_L Y_L \mathbf{p}$ . С другой стороны, для нее имеет место представление (14c). Тогда справедливо равенство

$$\tilde{W}_{em} Y_{em} \mathbf{p} = \mathcal{L}\tilde{\mathbf{w}}_L Y_L \mathbf{p},$$

которое должно выполняться для любых значений  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{10n}$ . В результате получаем

$$\tilde{W}_{em} Y_{em} = \mathcal{L}\tilde{\mathbf{w}}_L Y_L. \quad (20)$$

Проводя далее рассуждения аналогичные доказательству леммы 3, но с использованием леммы 2 вместо леммы 1, очевидно, получим справедливость доказываемого утверждения.  $\square$

Теперь докажем непосредственно утверждение теоремы 2.

*Доказательство.* Запишем полную энергию манипуляционного механизма как преобразование Лежандра функции Лагранжа с учетом соотношений (14b) и (14a):

$$\tilde{\mathbf{w}}_H \tilde{\mathbf{p}}_H = \mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L \tilde{\mathbf{p}}_L. \quad (21)$$

Согласно лемме 3 это равенство представляет собой разложение одного и того же вектора  $H$  по двум различным базисам одного и того же линейного подпространства. Как известно, для перехода от одного базиса к другому достаточно осуществить невырожденное линейное преобразование одного из этих базисов [1]. Но поскольку в общем случае рассматриваемые базисные

системы векторов могут оказаться ортонормированными, потребуем дополнительно ортогональности преобразования. Таким образом, справедливо следующее равенство

$$\tilde{\mathbf{w}}_H = \mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L\mathbf{T},$$

где  $\mathbf{T}$  — ортогональная матрица перехода от базиса  $\mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L$  к базису  $\tilde{\mathbf{w}}_H$ . К этой матрице не предъявляется никаких иных требований, кроме ортогональности, в остальном же матрица перехода может быть выбрана произвольно. Выберем ее равной единичной матрице, которая соответствует тождественному преобразованию. Тогда рассматриваемые базисные системы векторов являются одним и тем же базисом, а, значит, столбцы координат  $\tilde{\mathbf{p}}_H$  и  $\tilde{\mathbf{p}}_L$  вектора  $H$  в этих базисах равны. Наоборот — если координаты указанного вектора в рассматриваемых базисах одинаковы, то системы векторов  $\tilde{\mathbf{w}}_H$  и  $\mathcal{G}\tilde{\mathbf{w}}_L$  совпадают в силу единственности базисного разложения.  $\square$

Теорема 3 доказывается аналогично, но с использованием соотношения

$$\tilde{W}_{em}\tilde{\mathbf{p}}_{em} = \mathcal{L}\tilde{\mathbf{w}}_L\tilde{\mathbf{p}}_L$$

вместо (21) и леммы 4 вместо леммы 3.

Таким образом, при соблюдении условий теорем о равенстве существуют только одни базовые инерционные параметры  $\tilde{\mathbf{p}}$ , одинаковые и для лагранжиана, и для полной энергии, и для левой части уравнений движения манипуляционного механизма. Далее, если не будет оговорено особо, будем полагать, что необходимые и достаточные условия равенства базовых параметров выполнены. Кроме того, в этом случае матрицы координат коэффициентов влияния классических инерционных параметров  $Y_L$ ,  $Y_H$  и  $Y_{em}$  в соответствующих базисах  $\tilde{\mathbf{w}}_H$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_L$  и  $\tilde{W}_{em}$  также одинаковы, что следует из равенств (19) и (20). В заключение отметим, что необходимые и достаточные условия равенства базовых параметров также позволяют, задавшись базисными коэффициента-

ми влияния на функцию Лагранжа  $\tilde{\mathbf{w}}_L$ , определить базисные коэффициенты влияния на энергию  $\tilde{\mathbf{w}}_H$  и на уравнения движения  $\tilde{W}_{em}$ , что упрощает решение задачи исключения из левой части уравнений движения и выражения полной энергии манипуляционного механизма избыточных вычислительных операций.

### 2.3. Теорема о базисном множестве

Ранее в данной главе было показано, что поиск связи между базовыми и классическими инерционными параметрами сводится к выявлению линейно независимых элементов конечной системы векторов бесконечномерного функционального пространства. Поскольку была также установлена единственность базовых параметров при соблюдении условий теорем 2 и 3, для проведения указанного анализа удобнее рассматривать систему коэффициентов влияния на функцию Лагранжа  $\mathbf{w}_L$ , ибо их выражения проще коэффициентов влияния на уравнения движения  $W_{em}$ , и при этом связаны с ними напрямую линейным преобразованием  $\mathcal{L}$ , в отличие от коэффициентов влияния на полную энергию  $\mathbf{w}_H$ , которые связаны с  $W_{em}$  композицией преобразований  $\mathcal{L} \circ \mathcal{G}$ . Для решения поставленной задачи удобно использовать методы матричного анализа, однако для их применения необходимо найти координаты рассматриваемых коэффициентов влияния в каком-либо базисе некоторого конечномерного линейного подпространства пространства  $\mathbb{F}_e$ . Благодаря особой структуре кинетической и потенциальной энергии манипуляционного механизма оказывается возможным отыскать такое подпространство и способ задания в нем «естественного» базиса, что утверждается следующей теоремой:

**Теорема 4** (о базисном множестве). *Все компоненты вектора-строки  $\mathbf{w}_L$  принадлежат конечномерному линейному подпространству  $\mathbb{F}_L$  простран-*

ства  $\mathbb{F}_e$ , которое может быть представлено в виде тензорного произведения пространств

$$\mathbb{F}_L = \mathbb{Y}_0 \otimes \mathbb{Y}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{Y}_n,$$

где  $n$  — количество звеньев манипулятора, а пространства  $\mathbb{Y}_k$  определяются следующим образом:

1. при  $k = 0$

$$\mathbb{Y}_0 = \text{span} \{ \{1(\dot{\mathbf{q}})\} \cup \{ \dot{q}_i^2/2, i = \overline{1, n} \} \cup \{ \dot{q}_i \dot{q}_j, i = \overline{2, n}, j = \overline{1, i-1} \} \};$$

2. при  $k = \overline{1, n}$

- в случае вращательного сочленения

$$\mathbb{Y}_k = \text{span} \{ 1(q_k), \cos q_k, \sin q_k, \cos(2q_k), \sin(2q_k) \};$$

- в случае поступательного сочленения

$$\mathbb{Y}_k = \text{span} \{ 1(q_k), q_k, q_k^2 \}.$$

Размерность этого пространства равна  $(1 + (n^2 + n)/2) 5^\nu 3^{n-\nu}$ , где  $\nu$  — количество вращательных сочленений.

Отметим, что под функциями вида  $1(x)$  понимается функция равная единице на всей области определения своего аргумента. Для доказательства теоремы нам понадобится несколько вспомогательных лемм, формулировка и доказательство которых приведено ниже.

**Лемма 5.** Подмножество  $\{1(x), \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x)\}$  линейного пространства  $\mathbb{C}[a, b]$  функций непрерывных на некотором отрезке  $[a, b]$  действительной числовой оси образует систему линейно независимых векторов этого пространства.

*Доказательство.* Предположим, что это не так. Тогда должны существовать такие  $c_i \in \mathbb{R}$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) не все равные нулю, что

$$c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 \cos(2x) + c_5 \sin(2x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (22)$$

Возьмем пять точек действительной оси, задаваемых соотношениями  $x_i = a + (i - 1)\delta$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , причем  $0 < \delta \leq (b - a)/4$ . Это значит, что все  $x_i \in [a, b]$ , поэтому должны быть справедливы равенства

$$c_1 + c_2 \cos x_i + c_3 \sin x_i + c_4 \cos(2x_i) + c_5 \sin(2x_i) = 0, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (23)$$

представляющие собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $c_i$ . Поскольку, согласно предположению, не все  $c_i$  равны нулю, эта система должна иметь ненулевое решение, что возможно тогда и только тогда, когда определитель ее основной матрицы равен нулю [2]:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) & \cos(2a) & \sin(2a) \\ 1 & \cos(a + \delta) & \sin(a + \delta) & \cos(2a + 2\delta) & \sin(2a + 2\delta) \\ 1 & \cos(a + 2\delta) & \sin(a + 2\delta) & \cos(2a + 4\delta) & \sin(2a + 4\delta) \\ 1 & \cos(a + 3\delta) & \sin(a + 3\delta) & \cos(2a + 6\delta) & \sin(2a + 6\delta) \\ 1 & \cos(a + 4\delta) & \sin(a + 4\delta) & \cos(2a + 8\delta) & \sin(2a + 8\delta) \end{vmatrix} = 0.$$

После алгебраических преобразований получим

$$64 \cos \delta (1 - \cos \delta)^5 (2 \cos^2 \delta + 3 \cos \delta + 1)^2 = 0,$$

откуда следует, что рассматриваемый определитель равен нулю в следующих случаях:

1.  $\delta = \pi k/2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq (b - a)/2\pi$ ;
2.  $\delta = -2\pi/3 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq (3(b - a) + 8\pi)/24\pi$ ;
3.  $\delta = 2\pi/3 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \leq (3(b - a) - 8\pi)/24\pi$ .

Но величина  $\delta$ , определяющая точки  $x_i$ , может принимать любые значения из промежутка  $(0, (b - a)/4]$ . Это значит, что на отрезке  $[a, b]$  существуют совокупности пяти точек, в которых определитель основной матрицы системы (23) отличен от нуля, и имеет место только тривиальное решение  $c_i = 0$ . Таким образом, выполнение равенства (22) одновременно для всех точек отрезка  $[a, b]$  невозможно, что противоречит предположению о линейной зависимости системы векторов из условия леммы. Следовательно, предположение неверно, и рассматриваемые вектора линейно независимы.  $\square$

**Лемма 6.** *Подмножество  $\{1(x), x, x^2\}$  линейного пространства  $\mathbb{C}[a, b]$  функций непрерывных на некотором отрезке  $[a, b]$  действительной числовой оси образует систему линейно независимых векторов этого пространства.*

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда должны существовать такие  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  не все равные нулю, что  $\forall x \in [a, b]$  справедливо равенство

$$c_1 + c_2x + c_3x^2 = 0.$$

Следовательно система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & (a+b)/2 & (a+b)^2/4 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$$

должна иметь отличное от нуля решение. Однако определитель основной матрицы этой системы равен  $(b - a)^3/4$ , поэтому возможно только тривиальное решение. Отсюда следуют те же выводы, что и при доказательстве леммы 5, означающие линейную независимость рассматриваемой системы векторов.  $\square$

**Лемма 7.** *В линейном пространстве функций непрерывных на некотором параллелепипеде  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max}, i = \overline{1, n}\}$   $n$ -мерного ариф-*

метрического пространства подмножество

$$\{\{1(\mathbf{x})\} \cup \{x_i^2/2, i = \overline{1, n}\} \cup \{x_i x_j, i = \overline{2, n}, j = \overline{1, i-1}\}\}$$

образует систему линейно независимых векторов.

*Доказательство.* Предположим обратное. Тогда должны существовать такие  $c, c_{ij} \in \mathbb{R}$  ( $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, i}$ ) не все равные нулю, что  $\forall \mathbf{x} \in P$  справедливо равенство

$$c + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{ii} x_i^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_i x_j = 0,$$

или в векторно-матричной записи

$$c + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0,$$

где  $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ , причем  $C_{ij} = c_{ij}$  при  $i \geq j$  и  $C_{ij} = c_{ji}$  при  $i < j$ . Дифференциал левой части этого равенства имеет вид  $\mathbf{x}^T \mathbf{C} d\mathbf{x}$  и также равен нулю, т.е.

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_i c_{ij} \right) dx_j = 0.$$

Дифференциалы независимых переменных  $dx_j$  являются произвольными приращениями соответствующих координат и потому независимы. Тогда их линейная комбинация равная нулю может быть только тривиальной, т.е.

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} x_i = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

откуда следует, что все  $c_{ij}$  равны нулю. Действительно, пусть в  $k$  из  $n$  последних уравнений имеются отличные от нуля коэффициенты. Следовательно, точка с радиусом-вектором  $\mathbf{x}$  должна принадлежать части плоскости размерности  $n - k$ , ограниченной параллелепипедом  $P$ . Но  $\mathbf{x}$  может принимать любые значения из  $P$ , что означает невозможность существования отличных

от нуля коэффициентов  $c_{ij}$ . Также, можно заметить, что если все  $c_{ij}$  равны нулю, то  $s$  также равно нулю. Таким образом, исходное предположение неверно, и рассматриваемая система векторов линейно независима.  $\square$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4.

*Доказательство.* Тензорным произведением векторных пространств  $\mathbb{V}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) называют [1] такое векторное пространство  $\mathbb{U}$ , снабженное полилинейным отображением

$$\otimes : \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{U},$$

что если элементы множеств  $\{v_i^l, l = \overline{1, n_i}\} \in \mathbb{V}_i$  образуют базисы соответствующих пространств, то элементы множества

$$\left\{ \otimes \left( v_1^{l_1}, \dots, v_n^{l_n} \right), l_i = \overline{1, n_i}, i = \overline{1, n} \right\}$$

образуют базис пространства  $\mathbb{U}$ . Поэтому сначала необходимо доказать, что если в качестве отображения  $\otimes$  выступает обычное скалярное умножение, то существует тензорное произведение пространств  $\mathbb{Y}_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ). Воспользуемся методом математической индукции: пусть  $\mathbb{F}_k = \mathbb{Y}_0 \otimes \dots \otimes \mathbb{Y}_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), докажем, что существует  $\mathbb{F}_1$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы элементы множества  $F_1 = \left\{ y_0^{l_0} y_1^{l_1}, l_0 = \overline{1, n_0}, l_1 = \overline{1, n_1} \right\}$  были линейно независимы. Здесь  $y_0^{l_0} \in \mathbb{Y}_0, y_1^{l_1} \in \mathbb{Y}_1$  — базисные векторы соответствующих пространств,  $n_0 = \dim(\mathbb{Y}_0), n_1 = \dim(\mathbb{Y}_1)$ . Очевидно, что элементы пространства  $\mathbb{Y}_0$  являются непрерывными скалярными функциями, определенными на множестве  $P_0 = \left\{ \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n : |\dot{q}_i| \leq \dot{q}_i^{max}, i = \overline{1, n} \right\}$ , а элементы пространства  $\mathbb{Y}_1$  — функциями одной переменной  $q_1$ , определенными на отрезке  $[q_1^{min}, q_1^{max}]$ . Поэтому элементы пространства  $\mathbb{F}_1$  являются непрерывными функциями, определенными на множестве  $P_1 = \left\{ (q_1 \dot{\mathbf{q}}^T) \in \mathbb{R}^{n+1} : q_1 \in [q_1^{min}, q_1^{max}], |\dot{q}_i| \leq \dot{q}_i^{max}, i = \overline{1, n} \right\}$ . Предположим теперь, что элементы  $F_1$  линейно зависимы. Тогда должны су-

существовать такие  $c_{ij}$  ( $i = \overline{1, n_0}, j = \overline{1, n_1}$ ) не все равные нулю, что

$$\sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{n_1} c_{ij} y_0^i(\dot{\mathbf{q}}) y_1^j(q_1) = 0, \forall (q_1 \dot{\mathbf{q}}^T) \in P_1. \quad (24)$$

Поскольку  $y_1^j$  линейно независимы и не все  $c_{ij}$  равны нулю, существует такое  $q_1^* \in [q_1^{min}, q_1^{max}]$ , что по крайней мере одна из  $n_0$  линейных комбинаций  $\sum_{j=1}^{n_1} c_{ij} y_1^j(q_1^*)$  отлична от нуля. Но  $y_0^i$  также линейно независимы, поэтому их нетривиальная линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^{n_0} \left( \sum_{j=1}^{n_1} c_{ij} y_1^j(q_1^*) \right) y_0^i(\dot{\mathbf{q}})$$

не может быть равна нулю во всех точках множества  $P_0$ . Это значит, что существует непустое подмножество множества  $P_1$ , в точках которого равенство (24) не выполняется. Поэтому наше предположение неверно, и элементы множества  $F_1$  линейно независимы.

Теперь для доказательства существования  $\mathbb{F}_n$  необходимо доказать, что если существует  $\mathbb{F}_k$  ( $1 \leq k < n$ ), то существует и  $\mathbb{F}_{k+1}$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы элементы множества

$$F_{k+1} = \left\{ f_k^{l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}}, l_k = \overline{1, r_k}, l_{k+1} = \overline{1, n_{k+1}} \right\}$$

были линейно независимы. Здесь  $f_k^{l_k} \in \mathbb{F}_k$ ,  $y_{k+1}^{l_{k+1}} \in \mathbb{Y}_{k+1}$  — базисные векторы соответствующих пространств,  $r_k = \dim(\mathbb{F}_k)$ ,  $n_{k+1} = \dim(\mathbb{Y}_{k+1})$ . Нетрудно видеть, что элементы пространства  $\mathbb{F}_k$  являются непрерывными функциями, определенными на множестве

$$P_k = \left\{ (q_1 \dots q_k \dot{\mathbf{q}}^T) \in \mathbb{R}^{n+k} : q_i \in [q_i^{min}, q_i^{max}], |\dot{q}_j| \leq \dot{q}_j^{max}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n} \right\},$$

а элементы пространства  $\mathbb{Y}_{k+1}$  — функциями одной переменной  $q_{k+1}$ , определенными на отрезке  $[q_{k+1}^{min}, q_{k+1}^{max}]$ . Следовательно элементы пространства  $\mathbb{F}_{k+1}$

являются непрерывными функциями, определенными на множестве

$$P_{k+1} = \left\{ (q_1 \dots q_{k+1} \dot{\mathbf{q}}^T) \in \mathbb{R}^{n+k+1} : q_i \in [q_i^{min}, q_i^{max}], |\dot{q}_j| \leq \dot{q}_j^{max}, \right. \\ \left. i = \overline{1, k+1}, j = \overline{1, n} \right\}.$$

Предположим теперь, что элементы  $F_{k+1}$  линейно зависимы. Тогда должны существовать такие  $c_{ij}$  ( $i = \overline{1, r_k}, j = \overline{1, n_{k+1}}$ ) не все равные нулю, что

$$\sum_{i=1}^{r_k} \sum_{j=1}^{n_{k+1}} c_{ij} f_k^i(q_1, \dots, q_k, \dot{\mathbf{q}}) y_{k+1}^j(q_{k+1}) = 0, \forall (q_1 \dots q_{k+1} \dot{\mathbf{q}}^T) \in P_{k+1}. \quad (25)$$

Поскольку  $y_{k+1}^j$  линейно независимы и не все  $c_{ij}$  равны нулю, существует такое  $q_{k+1}^* \in [q_{k+1}^{min}, q_{k+1}^{max}]$ , что по крайней мере одна из  $r_k$  линейных комбинаций  $\sum_{j=1}^{n_{k+1}} c_{ij} y_{k+1}^j(q_{k+1}^*)$  отлична от нуля. Но  $f_k^i$  также линейно независимы, поэтому их нетривиальная линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^{r_k} \left( \sum_{j=1}^{n_{k+1}} c_{ij} y_{k+1}^j(q_{k+1}^*) \right) f_k^i(q_1, \dots, q_k, \dot{\mathbf{q}})$$

не может быть равна нулю во всех точках множества  $P_k$ . Это значит, что существует непустое подмножество множества  $P_{k+1}$ , для которого равенство (25) не выполняется. Поэтому наше предположение неверно, и элементы множества  $F_{k+1}$  линейно независимы. Таким образом, согласно методу математической индукции пространство  $\mathbb{F}_L = \mathbb{F}_n$  существует. Поскольку это пространство является тензорным произведением, его базисные векторы полностью определяются базисными векторами пространств-сомножителей  $\mathbb{Y}_k$ , а также отображением  $\otimes$ . Согласно лемме 7 элементы множества

$$Y_0 = \left\{ \{1(\dot{\mathbf{q}})\} \cup \{\dot{q}_i^2/2, i = \overline{1, n}\} \cup \{\dot{q}_i \dot{q}_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, i-1}\} \right\}$$

линейно независимы, и, следовательно, образуют базис пространства  $\mathbb{Y}_0$ . Можно подсчитать размерность этого пространства:

$$n_0 = |Y_0| = 1 + n + \frac{n^2 - n}{2} = 1 + \frac{n^2 + n}{2}.$$

В соответствии с леммами 5 и 6 за множество  $Y_k$  базисных векторов пространства  $\mathbb{Y}_k$  можно принять множество  $\{1(q_k), \cos q_k, \sin q_k, \cos(2q_k), \sin(2q_k)\}$ , если  $k$ -е сочленение вращательное, и множество  $\{1(q_k), q_k, q_k^2\}$  — если поступательное. Очевидно, что  $n_k = 5$  в первом случае, и  $n_k = 3$  — во втором. Поскольку пространства  $\mathbb{Y}_k$  конечномерны, и  $n$  конечно, пространство  $\mathbb{F}_L$  также конечномерно, причем

$$\dim(\mathbb{F}_L) = \prod_{i=0}^n n_i = \left(1 + \frac{n^2 + n}{2}\right) 5^\nu 3^{n-\nu},$$

где  $\nu$  — количество вращательных сочленений.

Итак, искомое пространство  $\mathbb{F}_L$  существует, является конечномерным и имеет указанную размерность. Для окончательного доказательства утверждения теоремы необходимо показать, что каждый элемент вектора-строки  $\mathbf{w}_L$  может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов этого пространства. Пусть базисные векторы пространств  $\mathbb{F}_k$  занумерованы, т.е. определены биекции между некоторыми конечными подмножествами  $N_k$  множества  $\mathbb{N}_0$  и множествами  $Y_k$ . Базисный вектор пространства  $\mathbb{F}_k$ , соответствующий индексу  $l \in \mathbb{N}_0$ , будем обозначать  $y_k^l$ . Тогда любой базисный вектор пространства  $\mathbb{F}_L$  однозначно определяется набором индексов  $(l_0, \dots, l_n)$ , где  $l_k \in N_k$ . Обозначая соответствующий этому набору базисный вектор как  $b^{l_0 \dots l_n}$ , можно записать

$$b^{l_0 \dots l_n} = \otimes (y_0^{l_0}, \dots, y_n^{l_n}) = y_0^{l_0} \dots y_n^{l_n}. \quad (26)$$

Введем нумерацию элементов множеств  $Y_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) следующим образом:

- если  $k$ -е сочленение — поступательное:

$$\begin{aligned} 1(q_k) &\leftrightarrow 1; \\ q_k &\leftrightarrow 2; \\ q_k^2 &\leftrightarrow 3; \end{aligned}$$

- если  $k$ -е сочленение — вращательное:

$$\begin{aligned}
1(q_k) &\leftrightarrow 1; \\
\cos q_k &\leftrightarrow 2; \\
\sin q_k &\leftrightarrow 3; \\
\cos(2q_k) &\leftrightarrow 4; \\
\sin(2q_k) &\leftrightarrow 5.
\end{aligned}$$

Для задания нумерации элементов множества  $Y_0$  обозначим подмножества  $\{0, \dots, n\}$  и  $\{0, \dots, (n^2 + n)/2\}$  множества  $\mathbb{N}_0$  как  $M$  и  $N_0$  соответственно и рассмотрим отображения  $\mathcal{I} : Y_0 \rightarrow M \times M$  и  $\mathcal{J} : M \times M \rightarrow N_0$ . Первое из них задается следующими правилами:

$$\begin{aligned}
1(\dot{\mathbf{q}}) &\leftrightarrow (0, 0); \\
\dot{q}_i^2/2 &\leftrightarrow (i, i); \\
\dot{q}_i\dot{q}_j &\leftrightarrow (i, j).
\end{aligned}$$

Второе — формулой  $\mathcal{J}(i, j) = \max(i, j)(\max(i, j) - 1)/2 + \min(i, j)$ , где  $i, j \in M$ . Нетрудно проверить, что композиция отображений  $\mathcal{J} \circ \mathcal{I}$  является искомой биекцией множеств  $Y_0$  и  $N_0$ , если определить обратное отображение  $\mathcal{J}^{-1}$  для некоторой пары  $(i, j) \in M \times M$  и некоторого числа  $l_0 \in N_0$  следующим образом:

$$i = \left\lceil \frac{(\sqrt{1 + 8l_0} - 1)}{2} \right\rceil; \quad (27a)$$

$$j = l_0 - \frac{i(i - 1)}{2}. \quad (27b)$$

Заметим, что в этом случае в результате обратного отображения число  $j$  не может превосходить числа  $i$ .

С учетом сказанного матрицы  $A_k$  перехода от системы координат  $(k - 1)$ -го звена к системе координат  $k$ -го звена представимы в виде следующей

линейной комбинации:

$$A_k = \sum_{l=1}^{m_k} \tilde{A}_k^l y_k^l, \quad (28)$$

где  $\tilde{A}_k^l$  — постоянные матрицы, элементы которых определяются геометрическими параметрами механизма. Действительно, если  $k$ -е сочленение вращательное, то  $m_k = 3$ , а матрицы  $\tilde{A}_k^l$  имеют вид<sup>10</sup>:

$$\tilde{A}_k^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{\alpha_k} & c_{\alpha_k} & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_k^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & c_{\alpha_k} & -s_{\alpha_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_k^3 = \begin{pmatrix} 0 & -c_{\alpha_k} & s_{\alpha_k} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если же  $k$ -е сочленение поступательное, то  $m_k = 2$ ,

$$\tilde{A}_k^1 = \begin{pmatrix} c_{\theta_k} & -s_{\theta_k} c_{\alpha_k} & s_{\theta_k} s_{\alpha_k} & a_k c_{\theta_k} \\ s_{\theta_k} & c_{\theta_k} c_{\alpha_k} & -c_{\theta_k} s_{\alpha_k} & a_k s_{\theta_k} \\ 0 & s_{\alpha_k} & c_{\alpha_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от системы координат  $k$ -го звена к абсолютной системе координат определяется соотношением  $T_k = A_1 \dots A_k$ . С учетом (28) это соотношение запишется в виде

$$T_k = \left( \sum_{l_1=1}^{m_1} \tilde{A}_1^{l_1} y_1^{l_1} \right) \dots \left( \sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{A}_k^{l_k} y_k^{l_k} \right).$$

<sup>10</sup> Здесь и далее используются следующие обозначения:  $s_\varphi = \sin \varphi$ ,  $c_\varphi = \cos \varphi$ .

Раскрывая скобки, получим

$$\Gamma_k = \sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l_k=1}^{m_k} \left( \tilde{A}_1^{l_1} \dots \tilde{A}_k^{l_k} \right) y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k}.$$

Обозначим выражение в круглых скобках как  $\tilde{\Gamma}_k^{l_1 \dots l_k}$ . Тогда имеем

$$\Gamma_k = \sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{\Gamma}_k^{l_1 \dots l_k} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k}. \quad (29)$$

Будем считать, что матрицы  $\tilde{\Gamma}_k^{l_1 \dots l_k}$  являются нулевыми, если хотя бы один индекс  $l_i \in N_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) больше  $m_k$ . Запишем выражение для коэффициента влияния  $l$ -го инерционного параметра  $k$ -го звена на потенциальную энергию механизма. С учетом последнего соотношения, а также имея ввиду, что  $y_i^1(q_i) \equiv 1$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и  $y_0^0(\dot{\mathbf{q}}) \equiv 1$ , получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l} = - \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_k=1}^{n_k} \left[ (\mathbf{g}^T \ 0) \tilde{\Gamma}_k^{l_1 \dots l_k} \mathbf{D} \mathbf{H}_k^l \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^T \right] y_0^0 y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} y_{k+1}^1 \dots y_n^1.$$

Нетрудно видеть, что выражение в квадратных скобках является постоянной скалярной величиной. Обозначая его как  $c_{10(k-1)+l}^{0l_1 \dots l_k 1 \dots 1}$ , и принимая во внимание (26), получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l} = - \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_k=1}^{n_k} c_{10(k-1)+l}^{0l_1 \dots l_k 1 \dots 1} b^{0l_1 \dots l_k 1 \dots 1}. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь частные производные  $U_{ki} = \partial \Gamma_k / \partial q_i$ . Они могут быть вычислены следующим образом:

$$U_{ki} = \begin{cases} 0, & k < i, \\ A_1 \dots D_i A_i \dots A_k, & k \geq i, \end{cases} \quad (31)$$

где  $D_i$  — постоянная матрица [6]. Тогда, с учетом (28), имеем

$$U_{ki} = \left( \sum_{l_1=1}^{m_1} \tilde{A}_1^{l_1} y_1^{l_1} \right) \dots D_i \left( \sum_{l_i=1}^{m_i} \tilde{A}_i^{l_i} y_i^{l_i} \right) \dots \left( \sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{A}_k^{l_k} y_k^{l_k} \right). \quad (32)$$

Раскрывая скобки, получим

$$U_{ki} = \sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l_k=1}^{m_k} \left( \tilde{A}_1^{l_1} \dots D_i \tilde{A}_i^{l_i} \dots \tilde{A}_k^{l_k} \right) y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k}.$$

Обозначим матричное произведение в круглых скобках как  $\tilde{U}_{ki}^{l_1 \dots l_k}$ . Тогда матричное произведение  $U_{kj}^T U_{ki}$  можно записать в виде

$$U_{kj}^T U_{ki} = \left( \sum_{l'_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l'_k=1}^{m_k} \tilde{U}_{kj}^{l'_1 \dots l'_k} y_1^{l'_1} \dots y_k^{l'_k} \right)^T \left( \sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{U}_{ki}^{l_1 \dots l_k} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} \right).$$

Раскрыв скобки, получим

$$U_{kj}^T U_{ki} = \sum_{l'_1=1}^{m_1} \sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l'_k=1}^{m_k} \sum_{l_k=1}^{m_k} \left[ \left( \tilde{U}_{kj}^{l'_1 \dots l'_k} \right)^T \tilde{U}_{ki}^{l_1 \dots l_k} \right] y_1^{l'_1} y_1^{l_1} \dots y_k^{l'_k} y_k^{l_k}. \quad (33)$$

Непосредственно проверяется, что произведения базисных векторов пространства  $\mathbb{Y}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) вида  $y_i^{l'} y_i^l$  ( $l, l' = \overline{1, m_i}$ ) могут быть представлены как линейные комбинации базисных векторов того же пространства следующим образом:

- если  $i$ -е сочленение — вращательное:

$$y_i^{l'} y_i^l = \begin{cases} y_i^1, & (l', l) = (1, 1); \\ y_i^2, & (l', l) \in \{(1, 2), (2, 1)\}; \\ y_i^3, & (l', l) \in \{(1, 3), (3, 1)\}; \\ y_i^5/2, & (l', l) \in \{(2, 3), (3, 2)\}; \\ (y_i^1 + y_i^4)/2, & (l', l) = (2, 2); \\ (y_i^1 - y_i^4)/2, & (l', l) = (3, 3); \end{cases} \quad (34a)$$

- если  $i$ -е сочленение — поступательное:

$$y_i^{l'} y_i^l = \begin{cases} y_i^1, & (l', l) = (1, 1); \\ y_i^2, & (l', l) \in \{(1, 2), (2, 1)\}; \\ y_i^3, & (l', l) = (2, 2). \end{cases} \quad (34b)$$

Применяя эти правила ко всем  $(m_1^2 \dots m_k^2)$  слагаемым правой части равенства (33) и приводя подобные слагаемые, очевидно получим

$$U_{kj}^T U_{ki} = \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_k=1}^{n_k} \hat{U}_{kji}^{l_1 \dots l_k} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k}, \quad (35)$$

где постоянные матрицы  $\hat{U}_{kji}^{l_1 \dots l_k}$  являются некоторыми линейными комбинациями матричных произведений  $\left(\tilde{U}_{kj}^{l'_1 \dots l'_k}\right)^T \tilde{U}_{ki}^{l_1 \dots l_k}$ . Тогда выражение для коэффициента влияния  $l$ -го инерционного параметра  $k$ -го звена на кинетическую энергию механизма примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial p_k^l} = & \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_k=1}^{n_k} \left[ \sum_{i=1}^n \text{tr} \left( \hat{U}_{kii}^{l_1 \dots l_k} \text{DH}_k^l \right) \frac{1}{2} \dot{q}_i^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \text{tr} \left( \hat{U}_{kji}^{l_1 \dots l_k} \text{DH}_k^l \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \right] y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k}. \end{aligned}$$

Имея ввиду, что  $y_i^1(q_i) \equiv 1$  ( $i = \overline{1, n}$ ), и учитывая введенную ранее нумерацию элементов множества  $Y_0$ , можно записать

$$\frac{\partial K}{\partial p_k^l} = \sum_{l_0=1}^{n_0-1} \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_k=1}^{n_k} \text{tr} \left( \hat{U}_{kl_0}^{l_1 \dots l_k} \text{DH}_k^l \right) y_0^{l_0} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} y_{k+1}^1 \dots y_n^1,$$

где  $\hat{U}_{kl_0}^{l_1 \dots l_k} = \hat{U}_{kji}^{l_1 \dots l_k}$ , если  $(i, j) = \mathcal{J}^{-1}(l_0)$ . Очевидно, что выражение в квадратных скобках предпоследнего равенства является постоянной скалярной величиной. Обозначая его как  $c_{10(k-1)+l}^{l_0 l_1 \dots l_k 1 \dots 1}$ , и принимая во внимание (26), получим

$$\frac{\partial K}{\partial p_k^l} = \sum_{l_0=1}^{n_0-1} \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_k=1}^{n_k} c_{10(k-1)+l}^{l_0 l_1 \dots l_k 1 \dots 1} b^{l_0 l_1 \dots l_k 1 \dots 1}. \quad (36)$$

По определению коэффициент влияния  $l$ -го инерционного параметра  $k$ -го звена на функцию Лагранжа имеет вид

$$w_L^{10(k-1)+l} = \frac{\partial L}{\partial p_k^l} = \frac{\partial K}{\partial p_k^l} - \frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l}.$$

С учетом равенств (30) и (36), окончательно получим

$$w_L^{10(k-1)+l} = \sum_{l_0=0}^{n_0-1} \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_k=1}^{n_k} c_{10(k-1)+l}^{l_0 l_1 \dots l_k 1 \dots 1} b^{l_0 l_1 \dots l_k 1 \dots 1}.$$

Поскольку натуральные индексы  $k$  и  $l$  пробегает значения от 1 до  $n$  и от 1 до 10 соответственно, коэффициенты влияния на лагранжиан всех массинерционных параметров всех звеньев манипулятора представляются в виде линейных комбинаций базисных векторов пространства  $\mathbb{F}_L$ . Таким образом, утверждение теоремы полностью доказано.  $\square$

Помимо основного утверждения из доказательства данной теоремы следует еще несколько важных фактов:

1. При фиксированном числе  $n$  звеньев манипулятора существует взаимнооднозначное соответствие между множеством  $\beta$  базисных векторов пространства  $\mathbb{F}_L$  и множеством кортежей длины  $n + 1$ ,  $k$ -е элементы которых ( $k = \overline{0, n}$ ) принадлежат множеству  $N_k$ , причем при  $k > 0$   $N_k = \{1, \dots, 5\}$ , если  $k$ -е сочленение является вращательным, и  $N_k = \{1, \dots, 3\}$  — если поступательным, а  $N_0 = \{0, \dots, n(n + 1)/2\}$ . Представление базисных векторов в виде  $(n + 1)$ -разрядных натуральных индексов удобно в реализации данной концепции на цифровой вычислительной машине.
2. Базисный вектор  $(l_0, \dots, l_n)$  пространства  $\mathbb{F}_L^n$   $n$ -звенного манипулятора и базисный вектор  $(l_0, \dots, l_n, 1)$  пространства  $\mathbb{F}_L^{n+1}$   $(n + 1)$ -звенного манипулятора представляют собой одно и то же в силу предыдущего пункта и соотношения (26). Таким образом, множество базисных векторов пространства  $\mathbb{F}_L^{n+1}$  содержит множество базисных векторов пространства  $\mathbb{F}_L^n$  в качестве подмножества, и, следовательно, пространство  $\mathbb{F}_L^n$  является подпространством пространства  $\mathbb{F}_L^{n+1}$ . Это означает, что часть координат коэффициентов влияния на функцию Лагранжа сохраняется

при добавлении звеньев в конец кинематической цепи манипуляционного механизма, поэтому некоторые результаты анализа, полученные ранее для механизма с меньшим числом звеньев, могут быть использованы позднее в анализе механизма с большим числом звеньев.

3. Коэффициенты влияния на полную энергию  $w_H^i$  ( $i = \overline{1, 10n}$ ) также принадлежат подпространству  $\mathbb{F}_L$ , причем их координаты в «естественном» базисе этого подпространства  $h_i^{l_0 \dots l_n}$  связаны с координатами соответствующих коэффициентов влияния на лагранжиан  $c_i^{l_0 \dots l_n}$  следующими соотношениями:

$$h_i^{l_0 \dots l_n} = \begin{cases} c_i^{l_0 \dots l_n}, & l_0 > 0; \\ -c_i^{l_0 \dots l_n}, & l_0 = 0. \end{cases}$$

Это очевидным образом следует из соотношений (30) и (36) и определения коэффициентов влияния:

$$w_H^{10(k-1)+l} = \frac{\partial H}{\partial p_k^l} = \frac{\partial K}{\partial p_k^l} + \frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l}.$$

Этот факт позволяет вычислять коэффициенты влияния классических или базовых инерционных параметров на полную энергию не с помощью преобразования Лежандра соответствующих коэффициентов влияния на функцию Лагранжа, а напрямую — как линейные комбинации векторов «естественного» базиса пространства  $\mathbb{F}_L$ .

4. Для базисных векторов пространства  $\mathbb{F}_L^n$  справедливы следующие рекуррентные соотношения

$$b^{l_0 \dots l_k l_{k+1} 1 \dots 1} = b^{l_0 \dots l_k 1 1 \dots 1} y_k^{l_{k+1}}, \quad k = \overline{1, n}, \quad b^{l_0 1 \dots 1} = y_0^{l_0}, \quad (37)$$

что следует из (26). Как известно, рекурсия является одним из источников повышения быстродействия численных расчетов. Расчет значений базисных векторов в конкретных точках фазового пространства может

быть использован для исключения избыточных вычислений при расчете значений функции Лагранжа и полной энергии манипуляционного механизма, что полезно в решении прикладных задач.

5. Проекции  $c_{10(k-1)+l}^{l_0 \dots l_n}$  ( $k = \overline{1, n}$ ,  $l = \overline{1, 10}$ ) коэффициентов влияния на функцию Лагранжа заведомо равны нулю в следующих случаях:

- хотя бы один индекс  $l_i$  ( $i = \overline{k+1, n}$ ) больше 1;
- $l_0 = 0$  и  $1 \leq l \leq 6$ ;
- $l_0 = 0$  и все индексы  $l_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) равны 1;
- $l_0 = 0$  и хотя бы один индекс  $l_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) больше  $m_k$ ;
- $k(k+1)/2 < l_0 \leq n(n+1)/2$ .

## Выводы

1. На основе классического определения базовых инерционных параметров уравнений движения введено общее определение понятия базовых параметров некоторого многопараметрического семейства функций. Применение этого определения к семействам функций Лагранжа, полных энергий и левых частей уравнений движения манипуляционных механизмов и рассмотрение перечисленных функций и коэффициентов влияния на них классических инерционных параметров как элементов линейных пространств приводит к интерпретации базовых параметров как коэффициентов базисных разложений (14). Базовые параметры упомянутых выше семейств функций в общем случае не совпадают, поэтому имеется три варианта базовых инерционных параметров: для лагранжиана, для полной энергии, для левой части уравнений движения. Каждый из этих наборов параметров связан с набором классических инерци-

онных параметров линейным преобразованием (16), матрица которого совпадает с координатами их коэффициентов влияния в «естественном» базисе соответствующего линейного пространства.

2. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия равенства различных вариантов базовых инерционных параметров. Соглашение о выполнении этих условий приводит к единственности базовых инерционных параметров, и, кроме того, устанавливает связь между базисными коэффициентами влияния на функцию Лагранжа, на полную энергию и на левую часть уравнений движения. Рассуждения, приведенные в первых двух параграфах главы, справедливы не только для класса манипуляционных механизмов, но и для произвольных систем твердых тел, стесненных стационарными, удерживающими, голономными связями.
3. Доказано существование и указан способ конструирования базиса конечномерного линейного пространства, содержащего коэффициенты влияния классических инерционных параметров на лагранжиан и полную энергию, что позволяет применять аппарат теории матриц для решения различных задач, связанных с базовыми инерционными параметрами. Получены рекуррентные соотношения для вычисления базисных векторов упомянутого пространства в конкретных точках фазового пространства, что способствует повышению быстродействия расчетов в некоторых прикладных задачах.

## Глава 3

# Методы поиска базовых инерционных параметров

Из предыдущей главы становится ясно, что задача поиска связи между базовыми и классическими инерционными параметрами в виде линейного преобразования (16) очень важна, ибо матрица этого преобразования является также матрицей координат коэффициентов влияния в их «естественном» базисе. Приведение этой матрицы к ступенчатому виду позволяет определить базисные коэффициенты влияния, что, согласно (14), необходимо для получения уравнений движения и идентификационных моделей в терминах базовых инерционных параметров. В данной главе представлен обзор известных методов решения упомянутой задачи и предложен альтернативный метод.

### 3.1. Обзор существующих методов

#### Рекуррентные соотношения Готье-Халила

Получены путем анализа и сравнения выражений кинетической и потенциальной энергий манипуляционного механизма с  $k - 1$  и  $k$  звеньями. Используется следующая интерпретация базовых параметров: если коэффициент влияния на кинетическую или потенциальную энергию  $l$ -го классического параметра  $k$ -го звена связан линейной зависимостью с коэффициентами влияния классических параметров предыдущих звеньев или того же звена

$$w_K^j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ji} w_K^i, \quad w_{II}^j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ji} w_{II}^i, \quad j = 10(k - 1) + l, \quad l_i \leq 10k, \quad (38)$$

то этот коэффициент влияния можно исключить из рассмотрения, а неизменности выражений кинетической и потенциальной энергии, а, следовательно,

и уравнений движения, добиться заменой параметров  $p_{l_i}$  т.н. *перегруппированными* параметрами

$$\hat{p}_{l_i} = p_{l_i} + \alpha_{ji} p_j.$$

Подробно математические основы данного подхода, а также примеры, рассмотрены в работах [20, 21, 26]. В результате получается следующий алгоритм:

1. Инициализировать множество базовых инерционных параметров элементами множества классических инерционных параметров. Отметим, что среди последних место параметров  $I_{uu}^j$  ( $u \in \{x, y, z\}$ ) занимают осевые моменты инерции  $i_{uu}^j$  ( $u \in \{x, y, z\}$ ).
2. Исключить из множества базовых параметров элементы, не входящие в полную энергию, а, следовательно, и в уравнения движения манипуляционного механизма, согласно приведенным ниже правилам. Пусть  $r_1$  — номер первого вращательного сочленения, а  $r_2$  — номер первого из последующих вращательных сочленений, ось которого не параллельна оси сочленения  $r_1$ , тогда, если
  - $j$ -е сочленение поступательное и  $j < r_1$ , параметры  $i_{xx}^j, I_{xy}^j, I_{xz}^j, i_{yy}^j, I_{yz}^j, i_{zz}^j, S_x^j, S_y^j, S_z^j$  могут быть исключены;
  - ось  $r_1$ -го сочленения параллельна вектору силы тяжести и оси сочленений  $j < r_1$  параллельны оси  $r_1$ -го сочленения либо  $r_1 = 1$ , параметры  $S_x^{r_1}$  и  $S_y^{r_1}$  могут быть исключены. Это же касается и параметра  $m_1$  в случае  $r_1 = 1$ ;
  - ось  $j$ -го сочленения ( $r_1 \leq j < r_2$ ) параллельна оси  $r_1$ -го сочленения, параметры  $i_{xx}^j, I_{xy}^j, I_{xz}^j, i_{yy}^j, I_{yz}^j, S_z^j$  могут быть исключены.
3. Найти перегруппированные параметры с помощью следующих соотношений:

- если  $j$ -е сочленение вращательное:

$$\begin{aligned}
\hat{i}_{xx}^j &= i_{xx}^j - i_{yy}^j; \\
\hat{i}_{xx}^{j-1} &= i_{xx}^{j-1} + i_{yy}^j + 2d_j S_z^j + m_j d_j^2; \\
\hat{i}_{yy}^{j-1} &= i_{yy}^{j-1} + c_{\alpha_j}^2 i_{yy}^j + 2d_j c_{\alpha_j}^2 S_z^j + (a_j^2 + d_j^2 c_{\alpha_j}^2) m_j; \\
\hat{i}_{zz}^{j-1} &= i_{zz}^{j-1} + s_{\alpha_j}^2 i_{yy}^j + 2d_j s_{\alpha_j}^2 S_z^j + (a_j^2 + d_j^2 s_{\alpha_j}^2) m_j; \\
\hat{I}_{xy}^{j-1} &= I_{xy}^{j-1} + a_j s_{\alpha_j} S_z^j + a_j d_j s_{\alpha_j} m_j; \\
\hat{I}_{xz}^{j-1} &= I_{xz}^{j-1} + a_j c_{\alpha_j} S_z^j + a_j d_j c_{\alpha_j} m_j; \\
\hat{I}_{yz}^{j-1} &= I_{yz}^{j-1} + c_{\alpha_j} s_{\alpha_j} i_{yy}^j + 2d_j c_{\alpha_j} s_{\alpha_j} S_z^j + d_j^2 c_{\alpha_j} s_{\alpha_j} m_j; \\
\hat{S}_x^{j-1} &= S_x^{j-1} + m_j a_j; \\
\hat{S}_y^{j-1} &= S_y^{j-1} - s_{\alpha_j} S_z^j - d_j s_{\alpha_j} m_j; \\
\hat{S}_z^{j-1} &= S_z^{j-1} + c_{\alpha_j} S_z^j + d_j c_{\alpha_j} m_j; \\
\hat{m}_{j-1} &= m_{j-1} + m_j;
\end{aligned} \tag{39a}$$

- если  $j$ -е сочленение поступательное:

$$\hat{\mathbf{J}}_{j-1} = \mathbf{J}_{j-1} + \mathbf{R}_{j-1,j} \mathbf{J}_j \mathbf{R}_{j-1,j}^T, \tag{39b}$$

где  $\hat{\mathbf{J}}_{j-1}$  — тензор инерции  $(j-1)$ -го звена, составленный из соответствующих перегруппированных параметров,  $\mathbf{J}_j$  — тензор инерции  $j$ -го звена, заданный в собственной системе координат,  $\mathbf{R}_{j-1,j}$  — ортогональная матрица перехода от системы координат  $(j-1)$ -го звена к системе координат  $j$ -го звена.

На каждом шаге этой обратной рекурсии в множество базовых параметров включаются все перегруппированные параметры  $\hat{p}_r$ , не равные соответствующим классическим параметрам  $p_r$ , и исключаются из него все классические параметры, входящие в выражения таких перегруппированных параметров. При возникновении в расчетах на последующих шагах исключенных классических параметров, вместо них используются соответствующие перегруппированные параметры.

Достоинствами рассматриваемого метода являются возможность получения аналитического решения с помощью простых рекуррентных соотношений, а также существование модификации, применимой к классу манипуляционных механизмов с древовидной кинематической схемой [20]. Что же касается недостатков, то, хотя приведенный выше алгоритм справедлив для любых манипуляционных механизмов, точное решение имеет место лишь в случае кинематических схем с параллельными или перпендикулярными осями соседних сочленений. В остальных случаях этот алгоритм лишь позволяет определить верхнюю грань количества базовых параметров и часть подмножества классических параметров, не входящих в уравнения движения. Наконец, отсутствует замкнутая форма уравнений движения относительно получаемых базовых параметров. Для вывода уравнений движения манипуляционного механизма необходимо либо подставлять выражения кинетической и потенциальной энергий, записанные с помощью базовых параметров, в уравнения Лагранжа 2-го рода, либо использовать специальную численную процедуру, алгоритм которой описан в работе [27]. Причем во втором случае базовые параметры придется определять заново, находя линейные зависимости вида (38), но уже для коэффициентов влияния на левую часть уравнений движения, в отсутствие соотношений, аналогичных (39), из-за чего теряется основное достоинство метода.

## **Метод кластеризации Майеды-Йошиды**

Рассматриваются только такие манипуляционные механизмы, у которых оси ближайших друг к другу вращательных сочленений параллельны или перпендикулярны. Ниже приведены основные соотношения метода в случае механизмов без поступательных сочленений, подробно изложенные в работе [31], поскольку в противном случае они становятся довольно громоздкими.

При необходимости рассмотрения именно таких механизмов следует прибегнуть к результатам работы [30], в которой используются те же принципы.

Все звенья механизма разбиваются на кластеры следующим образом: если  $i$  и  $j$  ( $i < j$ ) — два ближайших друг к другу звена, оси сочленений<sup>11</sup> которых ортогональны, то звенья с  $i$ -го по  $(j - 1)$ -е составляют кластер. Вводятся обозначения:  $a(i)$  и  $b(i)$  — номера первого и последнего звена соответственно в  $i$ -м кластере,  $k(i)$  — номер кластера, содержащего  $i$ -е звено,  $m$  — количество кластеров в механизме. Кроме того, полагают  $a(1) = 1$  и  $b(m) = n$ . В результате анализ уравнений движения манипуляционного механизма вкупе с кластеризацией и интерпретацией множества базовых инерционных параметров как базисного множества линейной оболочки множества классических инерционных параметров, позволяет получить список базовых параметров в следующем виде:

- $J_i^z + JYB(i), R_i^x, R_i^y - RZB(i), i = \overline{1, n};$
- $J_i^x - J_i^y + JYB(i), J_i^{xy} + l_i^x RZB(i), J_i^{xz} - l_i^x RZ(i), J_i^{yz} + l_i^z RZB(i), i = \overline{a(2), n}.$

Вспомогательные параметры  $RZ$ ,  $RZB$  и  $JYB$  вычисляются по правилам:

- $RZ(i) = 0$ , если  $i = b(k(i))$ , и

$$RZ(i) = \sum_{j=i+1}^{b(k(i))} R_j^z$$

в остальных случаях;

---

<sup>11</sup> Сочленением  $i$ -го звена называют сочленение между ним и  $(i - 1)$ -м звеном.

- если  $i = b(k(i))$  и  $k(i) \neq m$ , то

$$JYB(i) = \sum_{j=a(k(i)+1)}^{b(k(i)+1)} J_j^y + 2l_j^z RZ(j),$$

$$RZB(i) = \sum_{j=a(k(i)+1)}^{b(k(i)+1)} R_z^j,$$

в противном случае  $JYB(i) = 0$  и  $RZB(i) = 0$ .

Кроме того, величины

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} J_i^x & J_i^{xy} & J_i^{xz} \\ J_i^{xy} & J_i^y & J_i^{yz} \\ J_i^{xz} & J_i^{yz} & J_i^z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} R_i^x \\ R_i^y \\ R_i^z \end{pmatrix}$$

и  $M_i$  называют тензором инерции, статическим моментом и массой дополненного звена для  $i$ -го звена манипуляционного механизма и определяют по формулам

$$M_i = \sum_{j=i}^n m_j,$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{S}_i + M_{i+1} \mathbf{l}_i,$$

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{I}_i + M_{i+1} (\mathbf{l}_i^T \mathbf{l}_i \mathbf{E}_3 - \mathbf{l}_i \mathbf{l}_i^T),$$

где  $\mathbf{l}_i = (l_i^x \ l_i^y \ l_i^z)^T$  — радиус-вектор точки начала системы координат  $(i+1)$ -го звена в системе координат  $i$ -го звена,  $\mathbf{S}_i$  и  $\mathbf{I}_i$  — вектор статического момента и тензор инерции  $i$ -го звена в собственной системе координат.

Достоинствами рассматриваемого метода являются получение точного аналитического решения при помощи относительно простых конечных соотношений, а также наличие прямой связи с уравнениями движения. Однако эти соотношения не справедливы в случае манипуляционного механизма с произвольной кинематической схемой. Кроме того, выражаясь введенными

в параграфе 2.1 терминами, получаемые базовые параметры являются параметрами левой части уравнений движения, и неясна их связь с полной энергией и лагранжианом механизма. Это делает невозможным использование найденных базовых параметров для минимизации вычислений в задачах идентификации и моделирования.

## Численные методы

Данные методы отличаются от рассмотренных выше тем, что здесь анализу подвергаются левые части идентификационных моделей (9) или (12), составленных на произвольно сгенерированных наборах значений обобщенных координат, скоростей и, при необходимости, ускорений, а не символьные выражения кинетической и потенциальной энергий или левых частей уравнений движения.

В работе [22], исходя из условия инвариантности соответствующей идентификационной модели

$$W\mathbf{p} = \tilde{W}\tilde{\mathbf{p}},$$

где  $W$  — основная матрица линейной системы (9) или (12), а  $\tilde{W}$  — матрица, составленная из базисных столбцов матрицы  $W$ , получено следующее соотношение, связывающее базовые и классические параметры,

$$\tilde{\mathbf{p}} = (E \ K) P^T \mathbf{p}.$$

Здесь  $P$  — матрица перестановок, удовлетворяющая условию  $WP = (\tilde{W} \ W')$ ,  $W'$  — матрица, составленная из линейно зависимых столбцов  $W$ , а  $K$  — матрица координат столбцов  $W'$  в базисе  $\tilde{W}$ . Предлагается два способа определения матриц  $K$  и  $P$ :

- применяя к матрице  $W$   $QR$ -разложение с выбором ведущего столбца

$$WP = Q \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $R_1$  — невырожденная матрица, ранг которой равен рангу  $W$ ,  $Q$  — ортогональная матрица, получаем, что  $P$  — искомая матрица перестановок, а  $K = R_1^{-1}R_2$ ;

- пользуясь сингулярным разложением

$$W = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T,$$

где  $U, V$  — ортогональные матрицы,  $S$  — диагональная матрица сингулярных чисел, будем иметь  $K = -V'_1(V'_2)^{-1}$ , если для матрицы  $V'$ , составленной из  $m$  последних столбцов матрицы  $V$ , задающих нулевое пространство  $W$ , искомой матрицы перестановок  $P$  и невырожденной матрицы  $V'_2$  справедливо соотношение

$$P^T V' = \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix}.$$

Предпочтительнее использовать первый из этих способов, ибо алгоритм поиска  $QR$ -разложения имеет более простую реализацию и высокое быстродействие. Однако, если возникают проблемы численного характера, например, матрица  $W$  оказывается плохо обусловленной, применение второго способа дает лучшие результаты. Отметим, что рассмотренный метод позволяет легко найти базисные коэффициенты влияния, соответствующие используемому типу идентификационной модели. Для этого достаточно умножить строку коэффициентов влияния классических параметров на матрицу перестановок  $P$  и взять первые  $r$  элементов, где  $r = \text{rank}(W)$ .

Другой метод, изложенный в работе [36], также основан на сингулярном разложении матрицы  $W$ , известное свойство которого позволяет представить ее следующим образом

$$W = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

где  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  — столбцы ортогональных матриц  $U$  и  $V$  соответственно,  $\sigma_i$  — отличные от нуля сингулярные числа матрицы  $W$ , а  $r = \text{rank}(W)$ . С учетом этого условие инвариантности идентификационной модели принимает вид

$$W\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \sigma_i (\mathbf{v}_i^T \mathbf{p}) \mathbf{u}_i.$$

Поскольку первые  $r$  столбцов матрицы  $U$ , а, следовательно, и их произведения на соответствующие ненулевые сингулярные числа, образуют базис линейного пространства, задаваемого столбцами матрицы  $W$ , скалярные произведения  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{p}$  являются базовыми инерционными параметрами как координаты в этом базисе столбца  $W\mathbf{p}$ . Таким образом, если  $V_1 = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r)$ , то  $\tilde{\mathbf{p}} = V_1^T \mathbf{p}$ . Примечательно, что столбцы матрицы  $V_1$  образуют базис ортогонального дополнения нулевого пространства матрицы  $W$ , а базовые параметры, следовательно, являются координатами вектора классических параметров  $\mathbf{p}$  в этом базисе. Еще одна особенность данного метода состоит в том, что выбранный базис пространства  $\text{range}(W)$  не является «естественным», т.е. его элементы не являются столбцами матрицы  $W$ . Аналогичный вывод, очевидно, справедлив и для пространства, задаваемого коэффициентами влияния, соответствующими используемому типу идентификационной модели. Поэтому использовать найденные таким способом базовые параметры для получения идентификационной модели или уравнений движения в символьном виде напрямую не удастся. Для этого потребуется выполнение некоторых дополнительных расчетов: определение «естественного» базиса коэффициентов влияния, а, затем, матрицы перехода от него к базису, которому соответству-

ют найденные базовые параметры.

Основным достоинством рассмотренных численных методов является возможность применения не только к манипуляционным механизмам, но и к механизмам с ветвлениями и замкнутыми контурами, а также кинематическими парами произвольного класса. Однако, использование численных методов требует составления «виртуальных» идентификационных моделей, для чего необходимо выполнить довольно трудоемкие расчеты, такие как, например, вычисление значений коэффициентов влияния классических инерционных параметров на полную энергию механизма в ряде точек фазового пространства<sup>12</sup>. Кроме того, как отмечалось ранее, неполнота ранга основных матриц линейных систем (9) и (12) может быть вызвана данными, на которых была получена идентификационная модель, что приводит к принципиальной неопределенности в интерпретации решения: невозможно определить является оно истинным или же приближенным, давая лишь оценку снизу.

## Выводы

Для проведения сравнительного анализа рассмотренных методов была составлена сводная таблица, содержащая основные их характеристики: тип получаемого решения (точное или приближенное), класс механизмов, для которых справедлив данный метод, входные данные, необходимые для получения решения, и, наконец, наличие соотношений, позволяющих напрямую записать уравнения движения и идентификационные модели в терминах найденных базовых инерционных параметров. Из данных таблицы 1 следует, что среди известных на сегодняшний день методов поиска базовых инерционных параметров нет такого метода, который позволял бы найти точное аналитическое решение рассматриваемой задачи для любых манипуляционных

---

<sup>12</sup> В случае использования энергетической идентификационной модели.

Метод	Тип решения	Область применимости	Входные данные	Связь с моделями
Халил и Готье	точное	манип. механизмы с параллельными или перпендикулярными осями соседних сочленений, допускаются ветвления в кинем. цепи	параметры Денавита-Хартенберга	с энергетической идентиф. моделью
	прибл.	любые манип. механизмы с древовидной кинем. схемой		
Майеда, Йошида и др.	точное	манип. механизмы с параллельными или перпендикулярными осями ближайших вращательных сочленений	параметры Денавита-Хартенберга, разбиение звеньев на кластеры	с уравнениями движения и явной динамической идентиф. моделью
численные	прибл.	любые механизмы с ветвлениями и замкнутыми контурами в кинем. цепи и произвольными кинем. парами	значения коэффициентов влияния в ряде точек пространства обобщ. коор., скоростей и ускорений	либо с энергетической идентиф. моделью, либо с уравн. движения и динамической идентиф. моделью

Таблица 1. Основные характеристики существующих методов поиска базовых инерционных параметров.

механизмов, имеющее при этом прямую связь с уравнениями движения и энергетической идентификационной моделью.

## 3.2. Метод проекций

Итак, анализ существующих методов поиска базовых инерционных параметров, проведенный в предыдущем параграфе, показал, что ни один из них не гарантирует получения точного аналитического решения рассматриваемой задачи для произвольной механической системы из класса манипуляционных механизмов. Поэтому в рамках данной работы был создан альтернативный метод, разрешающий указанную проблему. Этот метод основан на предложенной в работе интерпретации понятия базовых инерционных параметров и некоторых следующих из нее свойствах, изложенных в предыдущей главе.

Рассмотрим произвольный  $n$ -звенный манипулятор, для которого требуется найти связь между базовыми и классическими инерционными параметрами. Как следует из соотношений (16) для этого достаточно найти матрицу  $Y$ , составленную из координат коэффициентов влияния, например, на функцию Лагранжа в «естественном» базисе соответствующего пространства. Последнюю задачу достаточно легко решить с помощью методов матричного анализа. Пусть в соответствии с теоремой 4 построено такое конечномерное линейное пространство  $\mathbb{F}_L$ , что  $\mathbf{w}_L \subset \mathbb{F}_L$ . Обозначим вектор-строку, составленную из всех базисных элементов этого пространства как  $\mathbf{b}$ . Пусть  $Z$  — матрица координат коэффициентов влияния на лагранжиан в «естественном» базисе пространства  $\mathbb{F}_L$ . Поскольку система векторов  $\tilde{\mathbf{w}}_L$  является «естественным» базисом пространства  $span(\mathbf{w}_L)$ , то их координаты в том же базисе пространства  $\mathbb{F}_L$  будут столбцами матрицы  $Z$ . Составим из них матрицу  $\tilde{Z}$ . Тогда справедливо следующее:

$$\mathbf{w}_L = \mathbf{b}Z,$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_L = \mathbf{b}\tilde{\mathbf{Z}}. \quad (40)$$

С учетом этого, нужное из соотношений (15) примет вид:

$$\mathbf{b}\mathbf{Z} = \mathbf{b}\tilde{\mathbf{Z}}\mathbf{Y},$$

или, перенося все в левую часть,

$$\mathbf{b}(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}\mathbf{Y}) = \mathbf{0}.$$

Последнее соотношение представляет собой совокупность различных линейных комбинаций линейно независимой системы векторов, каждая из которых равна нулю. Это возможно лишь в случае тривиальных коэффициентов, поэтому

$$\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{Z}}\mathbf{Y}.$$

Это равенство можно интерпретировать как совокупность неоднородных систем линейных алгебраических уравнений относительно столбцов матрицы  $\mathbf{Y}$  с одинаковыми основными матрицами  $\tilde{\mathbf{Z}}$ . Поскольку матрица  $\tilde{\mathbf{Z}}$  является матрицей координат линейно независимой системы векторов, ее столбцевой ранг максимален, причем количество столбцов не превышает количества строк. Тогда решение каждой из упомянутых систем получается путем домножения слева на псевдообратную матрицу  $\tilde{\mathbf{Z}}^+$ , которая в данном случае вычисляется по формуле [7]:

$$\tilde{\mathbf{Z}}^+ = (\tilde{\mathbf{Z}}^T \tilde{\mathbf{Z}})^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}^T. \quad (41)$$

В результате имеем

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Z}}^+ \mathbf{Z}. \quad (42)$$

Таким образом, для вычисления матрицы  $\mathbf{Y}$  и, соответственно, нахождения связи между базовыми и классическими параметрами требуется выполнить следующую последовательность шагов:

1. Найти функцию Лагранжа  $L$  для заданного механизма;

2. Определить коэффициенты влияния  $w_L^i$  классических параметров как частные производные вида  $\partial L/\partial p_i$ ;
3. Сформировать «естественный» базис пространства  $\mathbb{F}_L$  согласно теореме 4;
4. Найти координаты коэффициентов влияния в полученном базисе пространства  $\mathbb{F}_L$  и составить из них матрицу  $Z$ ;
5. Определить базисные столбцы матрицы  $Z$ , например, с помощью приведения ее к ступенчатому виду, и составить из них матрицу  $\tilde{Z}$ ;
6. Вычислить искомую матрицу  $Y$  согласно формулам (41) и (42).

С целью наглядной иллюстрации использования данного метода, ниже приведены примеры его применения к простейшим механизмам.

Рассмотрим механизм, состоящий из одного твердого тела неизвестной формы и распределения массы, вращающегося вокруг неподвижной горизонтальной оси. Его кинематическая схема представлена на рисунке 2: система

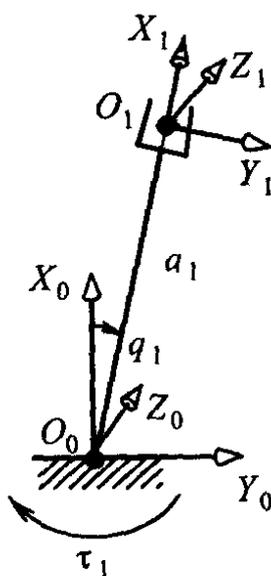


Рис. 2. Кинематическая схема плоского маятника.

координат  $X_0Y_0Z_0$  связана с неподвижным основанием, система координат  $X_1Y_1Z_1$  — с вращающимся звеном,  $a_1$  — расстояние между точками начала этих систем координат, вектор ускорения свободного падения направлен противоположно оси  $X_0$ . По определению вектор классических инерционных параметров механизма имеет вид:

$$\mathbf{p} = (I_{xx}^1 \quad I_{xy}^1 \quad I_{xz}^1 \quad I_{yy}^1 \quad I_{yz}^1 \quad I_{zz}^1 \quad S_x^1 \quad S_y^1 \quad S_z^1 \quad m_1)^T.$$

Отметим, что классические параметры заданы в подвижной системе координат  $X_1Y_1Z_1$ . Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий рассматриваемого механизма согласно формулам (3), (4) и (5):

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 (I_{xx}^1 + I_{yy}^1 + 2a_1S_x^1 + a_1^2m_1), \\ \Pi &= g (c_{q_1}S_x^1 - s_{q_1}S_y^1 + a_1c_{q_1}m_1). \end{aligned}$$

Теперь нетрудно найти коэффициенты влияния классических параметров на функцию Лагранжа  $L = K - \Pi$ :

$$\mathbf{w}_L = \left( \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \quad 0 \quad 0 \quad a_1\dot{q}_1^2 - gc_{q_1} \quad gs_{q_1} \quad 0 \quad \frac{1}{2}a_1^2\dot{q}_1^2 - a_1gc_{q_1} \right).$$

Сформируем множество базисных векторов вспомогательного пространства  $\mathbb{F}_L$ :

$$\left\{ \frac{1}{2}\dot{q}_1^2, \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \cos q_1, \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \sin q_1, \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \cos 2q_1, \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \sin 2q_1, 1, \cos q_1, \sin q_1 \right\}.$$

Найдем координаты коэффициентов влияния в указанном базисе и составим

из них матрицу:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a_1 & 0 & 0 & a_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & -a_1g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для поиска базисных столбцов матрицы  $Z$  воспользуемся процедурой приведения к ступенчатому виду. В данном случае эта матрица фактически уже приведена к нему: очевидно, что, произведя перестановку 2-й и 7-й, а также 3-й и 8-й строк мы получим требуемый вид. Тогда базис системы столбцов матрицы  $Z$  образуют 1-й, 7-й и 8-й столбцы. В результате базисная подсистема коэффициентов влияния на лагранжиан будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{w}}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 & a_1\dot{q}_1^2 - gc_1 & gs_1 \end{pmatrix},$$

а матрица координат ее компонент в базисе пространства  $\mathbb{F}_L$  — вид

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}^T.$$

Теперь можно вычислить матрицу  $Y$ , определяющую вектор базовых инерционных параметров через вектор классических инерционных параметров. После выполнения арифметических действий и упрощения выражений получим:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор базовых инерционных параметров для рассматриваемого механизма будет равен

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Y}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} I_{xx}^1 + I_{yy}^1 - a_1^2 m_1 & S_x^1 + a_1 m_1 & S_y^1 \end{pmatrix}^T.$$

Проверить полученный результат можно убедившись в справедливости тождества

$$K - \Pi \equiv \tilde{\mathbf{w}}_L \tilde{\mathbf{p}}.$$

Отметим, что рассмотрение такого тривиального примера имеет своей целью лишь наглядность иллюстрации предложенного метода, реальное же его применение имеет смысл для механизмов не менее чем с тремя звеньями.

Теперь рассмотрим плоский двухзвенный манипуляционный механизм с кинематической схемой, приведенной на рисунке 3. Звенья этого механизма

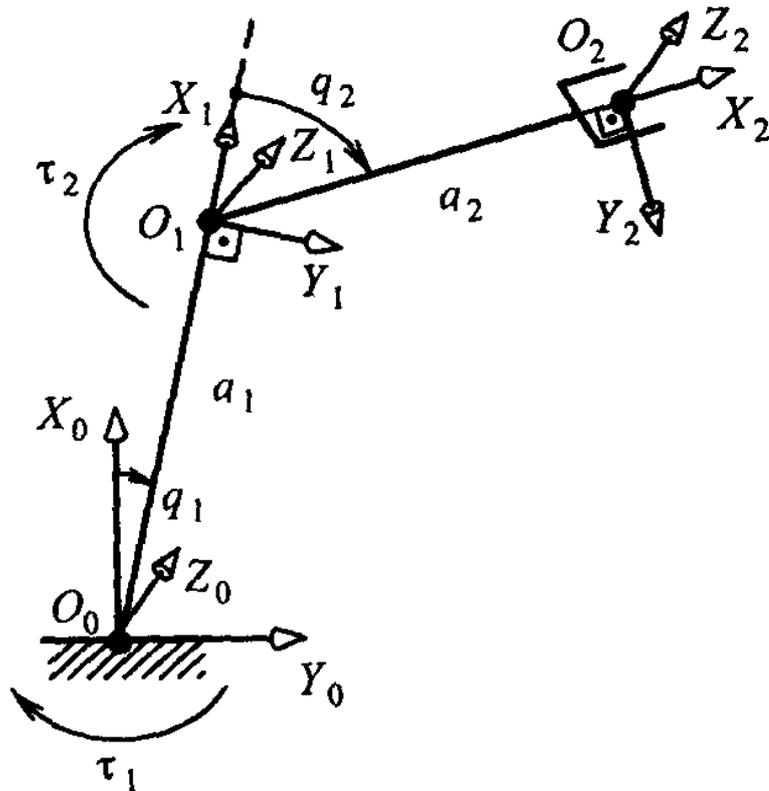


Рис. 3. Кинематическая схема плоского двухзвенника.

являются твердыми телами неизвестной формы и распределения массы, соединенные вращательными шарнирами с параллельными осями вращения, ортогональными направлению действия силы тяжести. Система координат  $X_0Y_0Z_0$  связана с неподвижным основанием, системы координат  $X_1Y_1Z_1$  и  $X_2Y_2Z_2$  — с вращающимися звеньями,  $a_1$  и  $a_2$  — расстояния между точками начала соответствующих систем координат, вектор ускорения свободного падения направлен противоположно оси  $X_0$ . Вектор классических инерционных параметров  $i$ -го звена механизма ( $i = 1, 2$ ) имеет вид

$$\mathbf{p}_i = \left( I_{xx}^i \quad I_{xy}^i \quad I_{xz}^i \quad I_{yy}^i \quad I_{yz}^i \quad I_{zz}^i \quad S_x^i \quad S_y^i \quad S_z^i \quad m_i \right)^T,$$

причем элементы вектора  $\mathbf{p}_i$  заданы в системе координат, связанной с  $i$ -м звеном. Вектор классических инерционных параметров всего механизма:

$$\mathbf{p} = \left( \mathbf{p}_1^T \quad \mathbf{p}_2^T \right)^T.$$

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \left( I_{xx}^1 + I_{yy}^1 + 2a_1 S_x^1 + a_1^2 m_1 + I_{xx}^2 + I_{yy}^2 + 2(a_1 c_{q_2} + a_2) S_x^2 - 2a_1 s_{q_2} S_y^2 + \right. \\ & \left. + (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_{q_2}) m_2 \right) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left( I_{xx}^2 + I_{yy}^2 + (a_1 c_{q_2} + 2a_2) S_x^2 - a_1 s_{q_2} S_y^2 + \right. \\ & \left. + (a_2^2 + a_1 a_2 c_{q_2}) m_2 \right) + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \left( I_{xx}^2 + I_{yy}^2 + 2a_2 S_x^2 + a_2^2 m_2 \right), \end{aligned}$$

$$\Pi = g \left( c_{q_1} S_x^1 - s_{q_1} S_y^1 + a_1 c_{q_1} m_1 + c_{q_1+q_2} S_x^2 - s_{q_1+q_2} S_y^2 + (a_1 c_{q_1} + a_2 c_{q_1+q_2}) m_2 \right).$$

Тогда следующие коэффициенты влияния на функцию Лагранжа  $\mathbf{w}_L$  будут отличны от тождественного нуля:

$$\begin{aligned} w_L^1 & \equiv w_L^4 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2, \quad w_L^7 = a_1 \dot{q}_1^2 - g c_{q_1}, \quad w_L^8 = g s_{q_1}, \quad w_L^{10} = \frac{1}{2} a_1^2 \dot{q}_1^2 - a_1 g c_{q_1}, \\ w_L^{11} & \equiv w_L^{14} = \frac{1}{2} a_1^2 \dot{q}_1^2 - a_1 g c_{q_1}, \\ w_L^{17} & = (a_1 c_{q_2} + a_2) \dot{q}_1^2 + (a_1 c_{q_2} + 2a_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_2 \dot{q}_2^2 - g c_{q_1+q_2}, \\ w_L^{18} & = -a_1 s_{q_2} \dot{q}_1^2 - a_1 s_{q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + g s_{q_1+q_2}, \\ w_L^{20} & = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_{q_2}) \dot{q}_1^2 + (a_2^2 + a_1 a_2 c_{q_2}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} a_2^2 \dot{q}_2^2 - (a_1 c_{q_1} + a_2 c_{q_1+q_2}) g. \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты влияния классических параметров первого звена идентичны коэффициентам влияния однозвенника, рассмотренного в предыдущем примере. Это связано с тем, что однозвенник является частью кинематической цепи двухзвенника.

Дальнейшие расчеты, проведенные на остальных этапах метода, здесь не представлены ввиду крайней громоздкости получаемых выражений, тем более, что соответствующие расчеты выполнялись с использованием вычислительного пакета GNU Octave, схожего по возможностям с пакетом Matlab. Поэтому сразу запишем окончательный результат:

$$\tilde{\mathbf{w}}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \\ a_1\dot{q}_1^2 - gc_{q_1} \\ gs_{q_1} \\ \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 \\ (a_1c_{q_2} + a_2)\dot{q}_1^2 + (a_1c_{q_2} + 2a_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_2\dot{q}_2^2 - gc_{q_1+q_2} \\ -a_1s_{q_2}\dot{q}_1^2 - a_1s_{q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + gs_{q_1+q_2} \end{pmatrix}^T,$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} I_{xx}^1 + I_{yy}^1 - a_1^2m_1 - a_1^2m_2 \\ S_x^1 + a_1m_1 + a_1m_2 \\ S_y^1 \\ I_{xx}^2 + I_{yy}^2 - a_2^2m_2 \\ S_x^2 + a_2m_2 \\ S_y^2 \end{pmatrix}.$$

Проверка полученного решения осуществляется так же, как и в предыдущем примере.

Последний пример хорошо иллюстрирует фактическую невозможность решить задачу предложенным методом вручную. Это связано с быстрым возрастанием размерности пространства  $\mathbb{F}_L$ , а, следовательно, и матрицы координат коэффициентов влияния, при увеличении числа звеньев механизма:

уже для двухзвенника она составляет  $84 \times 20$  элементов. Поэтому необходима реализация этого метода на вычислительной машине. Действительно, шаги, связанные с приведением матрицы к ступенчатому виду и расчетом псевдообратной матрицы, трудоемкие при решении вручную, не представляют особой сложности при реализации на вычислительной машине, особенно учитывая тот факт, что в большинстве математических пакетов эти функции являются стандартными. Это же касается и нахождения аналитического выражения функции Лагранжа в контексте возможностей современных пакетов компьютерной алгебры. Но при таком подходе на шаге 2 потребуются применение методов символьного дифференцирования, а шаг 4 сведется к весьма нетривиальному лексическому и синтаксическому анализу довольно громоздкого символьного выражения. В процессе выполнения данной работы сначала использовался именно такой способ реализации, однако затем эксперименты показали его высокую ресурсоемкость и низкое быстродействие. Поэтому для практического применения предложенного метода оказалось необходимо разработать процедуру, позволяющую вычислять координаты коэффициентов влияния напрямую, без использования сложных с вычислительной точки зрения методов анализа символьных выражений. Решению этой задачи посвящен следующий параграф.

### 3.3. Рекуррентное вычисление проекций

Рассмотрим матрицы  $T_{k-1}$  и  $T_k$  перехода от абсолютной системы координат манипуляционного механизма к системам координат  $(k-1)$ -го и  $k$ -го звена соответственно, которые связаны соотношениями:

$$T_k = T_{k-1}A_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad T_0 = E,$$

или, учитывая (28) и (29),

$$\mathbf{T}_k = \sum_{l_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{l_{k-1}=1}^{m_{k-1}} \sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^{l_k} y_1^{l_1} \cdots y_{k-1}^{l_{k-1}} y_k^{l_k}.$$

Сравнивая последнее равенство с (29), получим следующие рекуррентные соотношения

$$\tilde{\mathbf{T}}_k^{l_1 \dots l_k} = \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^{l_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l_j = \overline{1, m_j}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (43)$$

Основание механизма считается неподвижным  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{E}$ , поэтому для инициализации рекуррентной процедуры следует положить  $\tilde{\mathbf{T}}_0 = \mathbf{E}$ . В процессе доказательства теоремы 4 (раздел 2.3) было установлено, что проекции коэффициентов влияния  $w_L^i$  ( $i = \overline{1, 10n}$ ) на вспомогательное пространство  $\mathbb{F}_L$ , соответствующие потенциальной энергии, могут быть вычислены по формуле

$$c_{10(k-1)+l}^{0l_1 \dots l_k 1 \dots 1} = (\mathbf{g}^T \ 0) \tilde{\mathbf{T}}_k^{l_1 \dots l_k} \mathbf{DH}_l (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, 10},$$

причем матрицы  $\mathbf{DH}_l$  являются постоянными (см. раздел 1.3), а вектор ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$  неизменен для конкретного механизма. Таким образом, указанное подмножество координат коэффициентов влияния может быть найдено с помощью рекуррентной процедуры, основанной на соотношениях (43), при этом на каждом ее шаге вычисляется одна координата.

Также в процессе доказательства теоремы 4 было установлено, что

$$c_{10(k-1)+l}^{l_0 l_1 \dots l_k 1 \dots 1} = tr \left( \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_k} \mathbf{DH}_l \right), \quad l_0 > 0.$$

Поэтому, чтобы построить аналогичную процедуру для остальных проекций необходимо получить рекуррентные соотношения для вычисления матричных коэффициентов  $\hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_k}$ . Для этого проанализируем (31): нетрудно видеть, что для отличных от нуля матриц  $\mathbf{U}_{ki}$  имеют место рекуррентные соотношения:

$$\mathbf{U}_{ki} = \begin{cases} \mathbf{U}_{k-1, i} \mathbf{A}_k, & i < k; \\ \mathbf{T}_{k-1} \mathbf{D}_k \mathbf{A}_k, & i = k; \end{cases} \quad (44)$$

где матрица  $D_k$  имеет вид

$$D_{rot} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

если  $k$ -е сочленение вращательное, и вид

$$D_{tr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

если  $k$ -е сочленение телескопическое [6]. Тогда, действуя аналогично процедуре вывода соотношений (43), получим

$$\tilde{U}_{ki}^{l_1 \dots l_k} = \begin{cases} \tilde{U}_{k-1,i}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^{l_k}, & i < k; \\ \tilde{T}_{k-1}^{l_1 \dots l_{k-1}} D_k \tilde{A}_k^{l_k}, & i = k. \end{cases} \quad (45)$$

Далее, рассмотрение матричного произведения  $U_{kj}^T U_{ki}$  с учетом (44) приводит к равенствам

$$U_{kj}^T U_{ki} = \begin{cases} A_k^T U_{k-1,j}^T U_{k-1,i} A_k, & j \leq i < k; \\ A_k^T U_{k-1,j}^T T_{k-1} D_k A_k, & j < k, i = k; \\ A_k^T D_k^T T_{k-1}^T T_{k-1} D_k A_k, & j = i = k; \end{cases} \quad (46)$$

из которых, принимая во внимание (45), ясно, что рекуррентные соотношения для матричных коэффициентов  $\hat{U}_{k\mathcal{J}(i,j)}^{l_1 \dots l_k} = \left( \tilde{U}_{kj}^{l_1 \dots l_k} \right)^T \tilde{U}_{ki}^{l_1 \dots l_k}$  возможны лишь в случае  $j \leq i < k$  ( $1 \leq l_0 \leq k(k-1)/2$ ). Получим их, записав первое из равенств (46) учитывая (28) и (35):

$$U_{kj}^T U_{ki} = \left( \sum_{l'_k=1}^{m_k} \tilde{A}_k^{l'_k} y_k^{l'_k} \right)^T \left( \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_{k-1}=1}^{n_{k-1}} \tilde{U}_{k-1,l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} y_1^{l_1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1}} \right) \left( \sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{A}_k^{l_k} y_k^{l_k} \right),$$

или, раскрывая скобки и меняя порядок суммирования,

$$\mathbf{U}_{kj}^T \mathbf{U}_{ki} = \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_{k-1}=1}^{n_{k-1}} \sum_{l'_k=1}^{m_k} \sum_{l_k=1}^{m_k} \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^{l'_k} \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^{l_k} y_1^{l_1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1}} y_k^{l'_k} y_k^{l_k}.$$

Сравнивая последнее соотношение с (35), можно видеть, что

$$\sum_{l_k=1}^{n_k} \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_k} y_k^{l_k} = \sum_{l'_k=1}^{m_k} \sum_{l_k=1}^{m_k} \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^{l'_k} \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^{l_k} y_k^{l'_k} y_k^{l_k},$$

откуда, приводя подобные слагаемые с учетом правил (34), получаем следующие рекуррентные соотношения:

- если  $k$ -е сочленение — вращательное:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_{k-1} 1} &= \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^1 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^1 + \frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^2 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^2 + \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^3 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^3 \right]; \\ \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_{k-1} 2} &= \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^1 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^2 + \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^2 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^1; \\ \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_{k-1} 3} &= \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^1 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^3 + \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^3 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^1; \\ \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_{k-1} 4} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^2 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^2 - \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^3 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^3 \right]; \\ \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_{k-1} 5} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^2 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^3 + \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^3 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^2 \right]; \end{aligned} \quad (47a)$$

- если  $k$ -е сочленение — поступательное:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_{k-1} 1} &= \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^1 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^1; \\ \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_{k-1} 2} &= \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^1 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^2 + \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^2 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^1; \\ \hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_{k-1} 3} &= \left( \tilde{\mathbf{A}}_k^2 \right)^T \hat{\mathbf{U}}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^2. \end{aligned} \quad (47b)$$

Поскольку выражения базисных векторов пространства  $\mathbb{F}_L$  могут быть использованы в расчетах левой части уравнения движения при решении обратной задачи динамики или энергии манипулятора при идентификации базовых инерционных параметров, в качестве базиса пространств  $\mathbb{Y}_k$ , если  $k$ -е сочленение вращательное, лучше использовать множество

$$\mathbf{Y}'_k = \{1(q_k), \cos q_k, \sin q_k, \cos^2 q_k, \sin q_k \cos q_k\}.$$

Эта система векторов является линейно независимой, ибо ее матрица координат в «естественном» базисе пространства  $\mathbb{Y}_k$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

имеет отличный от нуля определитель. Преимущество использования модифицированного базиса состоит в том, что с точки зрения быстродействия эффективнее перемножить уже вычисленные значения синуса и косинуса, нежели заново вычислять эти функции от двойного аргумента. Кроме того, в этом случае правила (47a) приобретают более простой вид

$$\hat{U}_{kl_0}^{l_1 \dots l_k} = \begin{cases} \left( \tilde{A}_k^1 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^1 + \left( \tilde{A}_k^3 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^3, & l_k = 1; \\ \left( \tilde{A}_k^1 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^2 + \left( \tilde{A}_k^2 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^1, & l_k = 2; \\ \left( \tilde{A}_k^1 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^3 + \left( \tilde{A}_k^3 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^1, & l_k = 3; \\ \left( \tilde{A}_k^2 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^2 - \left( \tilde{A}_k^3 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^3, & l_k = 4; \\ \left( \tilde{A}_k^2 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^3 + \left( \tilde{A}_k^3 \right)^T \hat{U}_{k-1, l_0}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{A}_k^2, & l_k = 5. \end{cases} \quad (47a')$$

Далее, пользуясь результатами теоремы 4, будем предполагать использование модифицированного базиса.

Чтобы найти рекуррентные соотношения для остальных матриц  $\hat{U}_{kl_0}^{l_1 \dots l_k}$ , где  $k(k-1)/2 < l_0 \leq k(k+1)/2$  ( $j \leq i = k$ ), перепишем равенство (33) с учетом (45):

$$\mathbf{U}_{kj}^T \mathbf{U}_{kk} = \sum_{l'_1=1}^{m_1} \sum_{l_1=1}^{m_k} \dots \sum_{l'_k=1}^{m_k} \sum_{l_k=1}^{m_k} \left[ \left( \tilde{A}_1^{l'_1} \dots \mathbf{D}_j \tilde{A}_j^{l'_j} \dots \tilde{A}_k^{l'_k} \right)^T \tilde{A}_1^{l_1} \dots \tilde{A}_j^{l_j} \dots \right. \\ \left. \dots \mathbf{D}_k \tilde{A}_k^{l_k} \right] y_1^{l'_1} y_1^{l_1} \dots y_k^{l'_k} y_k^{l_k}.$$

Меняя порядок суммирования и пользуясь свойством дистрибутивности, представим последнее равенство в виде

$$\begin{aligned} U_{kj}^T U_{kk} = & \sum_{l'_k=1}^{m_k} \sum_{l_k=1}^{m_k} \left( \tilde{A}_k^{l'_k} \right)^T \left( \sum_{l'_{k-1}=1}^{m_{k-1}} \sum_{l_{k-1}=1}^{m_{k-1}} \dots \left( \sum_{l'_j=1}^{m_j} \sum_{l_j=1}^{m_j} \left( D_j \tilde{A}_j^{l'_j} \right)^T \left( \sum_{l'_{j-1}=1}^{m_{j-1}} \sum_{l_{j-1}=1}^{m_{j-1}} \dots \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \dots \left( \sum_{l'_1=1}^{m_1} \sum_{l_1=1}^{m_1} \left( \tilde{A}_1^{l'_1} \right)^T \tilde{A}_1^{l_1} y_1^{l'_1} y_1^{l_1} \right) \dots \right) \tilde{A}_j^{l_j} y_j^{l'_j} y_j^{l_j} \right) \dots \right) D_k \tilde{A}_k^{l_k} y_k^{l'_k} y_k^{l_k}. \quad (48) \end{aligned}$$

В соответствии с правилами (34) двойная сумма в круглых скобках, находящаяся на самом высоком уровне вложенности, может быть представлена следующим образом

$$\sum_{l'_1=1}^{m_1} \sum_{l_1=1}^{m_1} \left( \tilde{A}_1^{l'_1} \right)^T E \tilde{A}_1^{l_1} y_1^{l'_1} y_1^{l_1} = \sum_{l_1=1}^{n_1} \hat{A}_{1jk}^{l_1} y_1^{l_1},$$

причем матричные коэффициенты  $\hat{A}_{1jk}^{l_1}$  определяются по правилам аналогичным (47). Подставляя в соотношение (48) вместо левой части последнего выражения его правую часть, раскрывая скобки и меняя порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned} U_{kj}^T U_{kk} = & \sum_{l_1=1}^{n_1} \left( \sum_{l'_k=1}^{m_k} \sum_{l_k=1}^{m_k} \left( \tilde{A}_k^{l'_k} \right)^T \left( \sum_{l'_{k-1}=1}^{m_{k-1}} \sum_{l_{k-1}=1}^{m_{k-1}} \dots \left( \sum_{l'_j=1}^{m_j} \sum_{l_j=1}^{m_j} \left( D_j \tilde{A}_j^{l'_j} \right)^T \left( \sum_{l'_{j-1}=1}^{m_{j-1}} \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \sum_{l_{j-1}=1}^{m_{j-1}} \dots \left( \sum_{l'_2=1}^{m_2} \sum_{l_2=1}^{m_2} \left( \tilde{A}_2^{l'_2} \right)^T \hat{A}_{1jk}^{l_1} \tilde{A}_2^{l_2} y_2^{l'_2} y_2^{l_2} \right) \dots \right) \tilde{A}_j^{l_j} y_j^{l'_j} y_j^{l_j} \right) \dots \right) D_k \tilde{A}_k^{l_k} y_k^{l'_k} y_k^{l_k} \right) y_1^{l_1}. \end{aligned}$$

Повторяя эту процедуру еще  $(k-1)$  раз приходим к следующему результату

$$U_{kj}^T U_{kk} = \sum_{l_1=1}^{n_1} \dots \sum_{l_k=1}^{n_k} \hat{A}_{kjk}^{l_1 \dots l_k} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k}.$$

Сравнив его с равенством (35) можно заметить, что  $\hat{U}_{kjk}^{l_1 \dots l_k} = \hat{A}_{kjk}^{l_1 \dots l_k}$ . Из приведенных выше рассуждений ясно, что вспомогательные матрицы  $\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_i}$  ( $i = \overline{1, k}$ ,  $j = \overline{1, k}$ ) определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

- если  $k$ -е сочленение — вращательное:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_{i-1} 1} &= \left( D_i^1 \tilde{A}_i^1 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{k-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^1 + \left( D_i^1 \tilde{A}_i^3 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^3; \\
\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_{k-1} 2} &= \left( D_i^1 \tilde{A}_i^1 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^2 + \left( D_i^1 \tilde{A}_i^2 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^1; \\
\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_{k-1} 3} &= \left( D_i^1 \tilde{A}_i^1 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^3 + \left( D_i^1 \tilde{A}_i^3 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^1; \\
\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_{k-1} 4} &= \left( D_i^1 \tilde{A}_i^2 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^2 - \left( D_i^1 \tilde{A}_i^3 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^3; \\
\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_{k-1} 5} &= \left( D_i^1 \tilde{A}_i^2 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^3 + \left( D_i^1 \tilde{A}_i^3 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^2;
\end{aligned} \tag{49a}$$

- если  $k$ -е сочленение — поступательное:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_{k-1} 1} &= \left( D_i^1 \tilde{A}_i^1 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^1; \\
\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_{k-1} 2} &= \left( D_i^1 \tilde{A}_i^1 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^2 + \left( D_i^1 \tilde{A}_i^2 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^1; \\
\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_{k-1} 3} &= \left( D_i^1 \tilde{A}_i^2 \right)^T \hat{A}_{i-1, jk}^{l_1 \dots l_{i-1}} D_i^2 \tilde{A}_i^2;
\end{aligned} \tag{49b}$$

где

$$D_i^1 = \begin{cases} E, & i \neq j; \\ D_j, & i = j; \end{cases} \quad D_i^2 = \begin{cases} E, & i \neq k; \\ D_k, & i = k. \end{cases}$$

Для инициализации итерационного процесса следует положить  $\hat{A}_{0jk} = E$ .

Таким образом, матричные коэффициенты

$$\hat{U}_{k\mathcal{J}(k,j)}^{l_1 \dots l_k} = \hat{A}_{kjk}^{l_1 \dots l_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}, \tag{50}$$

могут быть вычислены с помощью рекуррентной процедуры, основанной на соотношениях (49), а коэффициенты  $\hat{U}_{k\mathcal{J}(i,j)}^{l_1 \dots l_k}$  ( $k = \overline{2, n}$ ,  $j \leq i < k$ ) — с помощью рекуррентных соотношений (47), которые инициализируются матрицами  $\hat{U}_{11}^{l_1}$  ( $1 \leq l_1 \leq n_1$ ).

С целью компактной записи полученных соотношений введем в пространстве матриц размера  $4 \times 4$  линейный оператор  $\mathcal{A}_{ifs}^{\sigma l}$  ( $B$ ) ( $i = \overline{1, n}$ ,  $f, s, \sigma \in \{0, 1\}$ ,  $l = \overline{1, 3 + 2\sigma}$ ), отображающий это пространство в себя и действующий

следующим образом:

$$\mathcal{A}_{ifs}^{1l}(\mathbf{B}) = \begin{cases} \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right) + \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^3 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^3 \right), & l = 1; \\ \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right) + \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right), & l = 2; \\ \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^3 \right) + \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^3 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right), & l = 3; \\ \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right) - \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^3 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^3 \right), & l = 4; \\ \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^3 \right) + \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^3 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right), & l = 5; \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{ifs}^{0l}(\mathbf{B}) = \begin{cases} \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right), & l = 1; \\ \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right) + \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^1 \right), & l = 2; \\ \left( \mathbf{D}_f \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right)^T \mathbf{B} \left( \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{A}}_i^2 \right), & l = 3. \end{cases}$$

Здесь  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{E}$ , а  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_{rot}\sigma + \mathbf{D}_{tr}(1 - \sigma)$ . Пусть  $\sigma_k = 1$  ( $k = \overline{1, n}$ ), если  $k$ -е сочленение вращательное, и  $\sigma_k = 0$  — если поступательное. Тогда соотношения (47) и (50) для расчета матричных коэффициентов  $\hat{\mathbf{U}}$  примут вид

$$\hat{\mathbf{U}}_{k\mathcal{J}(i,j)}^{l_1 \dots l_k} = \begin{cases} \mathcal{A}_{k00}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{\mathbf{U}}_{k-1, \mathcal{J}(i,j)}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & i = \overline{1, k-1}, j = \overline{1, i}; \\ \mathcal{A}_{k01}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{\mathbf{A}}_{k-1, jk}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & i = k, j = \overline{1, k-1}; \\ \mathcal{A}_{k11}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{\mathbf{A}}_{k-1, kk}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & i = j = k; \end{cases} \quad (51)$$

а соотношения (49) для вспомогательных матриц  $\hat{\mathbf{A}}$  — вид

$$\hat{\mathbf{A}}_{kji}^{l_1 \dots l_k} = \mathcal{A}_{kfs}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{\mathbf{A}}_{k-1, ji}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), \quad (52)$$

причем

$$f = \begin{cases} 0, & k \neq j; \\ 1, & k = j; \end{cases} \quad s = \begin{cases} 0, & k \neq i; \\ 1, & k = i. \end{cases}$$

В заключение отметим, что в полученных рекуррентных соотношениях учитывается априорное равенство нулю проекций коэффициентов влияния на

базисные векторы пространства  $\mathbb{F}_L$ , которые определяются согласно следствию 5 из теоремы 4, т.е. возможность заведомо ненужных вычислений исключается.

### 3.4. Некоторые аспекты реализации

Итак, соотношения (43), (51) и (52) определяют рекуррентный алгоритм вычисления проекций. Однако эта обратная рекурсивная схема вычислений (от  $n$ -го звена к первому) оказывается неэффективной, поскольку одни и те же матрицы  $\tilde{T}$ ,  $\hat{U}$  и  $\hat{A}$  рассчитываются множество раз. Гораздо эффективнее применение прямой рекурсии, которая позволяет вычислять указанные матрицы только один раз. Правда в этом случае требуется дополнительно хранить в оперативной памяти  $2 + \sum_{k=1}^n (k(k+1)/2 + k + 2)$  матриц  $4 \times 4$  (на максимальной глубине рекурсии). Например, для  $n = 6$  эта величина равна 56. Если элементы матриц являются числами с плавающей точкой двойной точности согласно IEEE 754 дополнительное потребление памяти составит около 7 килобайт. При этом для хранения матрицы координат в случае всех вращательных сочленений для любого типа рекурсии необходимо около 150 мегабайт. Таким образом, при использовании прямой рекурсии потребление памяти несущественно превышает аналогичный показатель в случае обратной рекурсии. Выигрыш же в быстродействии оказывается весьма существенен. Так, например, время работы программы, вычисляющей все элементы матрицы координат, построенной на базе обратной рекурсии превышает аналогичный показатель для прямой рекурсии почти в 20 раз. Ниже предлагается вариант реализации алгоритма вычисления проекций на основе прямой рекурсии.

Из (52) вытекает справедливость следующих соотношений

$$\hat{A}_{k,j,k+1}^{l_1 \dots l_k} = \begin{cases} \mathcal{A}_{k00}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{A}_{k-1,j,k+1}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = \overline{1, k-1}; \\ \mathcal{A}_{k10}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{A}_{k-1,k,k+1}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = k; \\ \mathcal{A}_{k00}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{A}_{k-1,k+1,k+1}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = k+1. \end{cases} \quad (53)$$

С помощью (49) нетрудно проверить, что матрицы  $\hat{A}_{ijk}^{l_1 \dots l_i}$  ( $i < k$ ,  $j = \overline{i+1, k}$ ) одинаковы, поэтому далее будем их обозначать  $\hat{A}_{i0k}^{l_1 \dots l_i}$ . Индекс 0 выбран не случайно, ибо при рекуррентном вычислении этих матриц параметры  $f$  и  $s$  оператора  $\mathcal{A}$ , «разрешающие» умножение на матрицу дифференцирования  $D_1$  слева и справа соответственно, всегда равны нулю. Кроме того, проанализировав правила (49) можно заметить, что для любых  $j$  справедливо равенство  $\hat{A}_{k-1,jk}^{l_1 \dots l_{k-1}} = \hat{A}_{k-1,j,k+1}^{l_1 \dots l_{k-1}}$ . С учетом сказанного, соотношения (53) запишутся в виде

$$\hat{A}_{k,j,k+1}^{l_1 \dots l_k} = \begin{cases} \mathcal{A}_{k00}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{A}_{k-1,jk}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = \overline{1, k-1}; \\ \mathcal{A}_{k10}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{A}_{k-1,0k}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = k; \\ \mathcal{A}_{k00}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{A}_{k-1,0k}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = 0; \end{cases}$$

или, совмещая первое и третье равенства,

$$\hat{A}_{k,j,k+1}^{l_1 \dots l_k} = \begin{cases} \mathcal{A}_{k00}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{A}_{k-1,jk}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = \overline{0, k-1}; \\ \mathcal{A}_{k10}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{A}_{k-1,0k}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = k. \end{cases} \quad (54)$$

Очевидно, что инициализация полученных рекуррентных соотношений осуществляется матрицей  $\hat{A}_{001} = E$ . Учитывая, что третье из соотношений (51) в результате принимает вид

$$\hat{U}_{k\mathcal{J}(k,k)}^{l_1 \dots l_k} = \mathcal{A}_{k11}^{\sigma_k l_k} \left( \hat{A}_{k-1,0k}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right),$$

на  $k$ -м шаге ( $k = \overline{1, n}$ ) прямой рекурсии  $k$  матриц  $\hat{U}_{k\mathcal{J}(k,j)}^{l_1 \dots l_k}$  ( $j = \overline{1, k}$ ) вычисляются с помощью  $k$  матриц  $\hat{A}_{k-1,jk}^{l_1 \dots l_{k-1}}$  ( $j = \overline{0, k-1}$ ), полученных на предыдущем,  $(k-1)$ -м, шаге. Таким образом, на каждой итерации осуществляется

расчет матричных коэффициентов  $\hat{U}$ , необходимых для вычисления проекций  $c_i^{l_0 l_1 \dots l_k 1 \dots 1}$  ( $i = \overline{1, 10n}$ ,  $l_0 > 0$ ), соответствующих кинетической энергии, с помощью модифицированных соотношений (51) и вспомогательных матриц  $\hat{A}$ , требующихся на следующей итерации, с помощью соотношений (54). Ниже приведен псевдокод функции, реализующей данный алгоритм.

```

function ProjKinEnergy (list, prev_u, prev_a, ДН, coor_matr)
//list — список, состоящий из элементов  $l_1, \dots, l_n$  индекса базисного
//вектора, упорядоченный по возрастанию номера элемента
//prev_u — массив, содержащий матрицы  $\hat{U}_{k-1, \mathcal{J}(i,j)}^{l_1 \dots l_{k-1}}$ ,  $i = \overline{1, k-1}$ ,  $j = \overline{1, i}$ 
//prev_a — массив, содержащий матрицы  $\hat{A}_{k-1, jk}^{l_1 \dots l_{k-1}}$ ,  $j = \overline{0, k-1}$ 
    n := число звеньев манипулятора;
    k := номер текущего звена;
    Создать массив cur_u матриц  $4 \times 4$  из size(prev_u)+k элементов;
    //cur_u содержит матрицы  $\hat{U}_{k \mathcal{J}(i,j)}^{l_1 \dots l_k}$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $j = \overline{1, i}$ 
    Создать массив cur_a матриц  $4 \times 4$  из k+1 элемента;
    //cur_a содержит матрицы  $\hat{A}_{kj, k+1}^{l_1 \dots l_k}$ ,  $j = \overline{0, k}$ 
    sigma := TRUE, если  $\sigma_k = 1$ , и FALSE, если  $\sigma_k = 0$ ;
    m :=  $n_k$ ;
    for l := 1 to m do
        Добавить l в конец list;
        r := 0;
        //Вычисление  $\hat{U}_{k \mathcal{J}(i,j)}^{l_1 \dots l_k}$ ,  $i = \overline{1, k-1}$ ,  $j = \overline{1, i}$ 
        for i := 1 to k-1 do
            for j := 1 to i do
                cur_u[r] := oper (l, prev_u[r], FALSE, FALSE, sigma);
                r := r + 1;
            end for
    end for

```

```

end for
//Вычисление  $\hat{U}_{k\mathcal{J}(k,j)}^{l_1 \dots l_k}$ ,  $j = \overline{1, k}$ 
for i := 1 to k-1 do
    cur_u[r] := oper (l, prev_a[i], FALSE, TRUE, sigma);
    r := r + 1;
end for
cur_u[r] = oper (l, prev_a[0], TRUE, TRUE, sigma);
//Вычисление  $\hat{A}_{k,j,k+1}$ ,  $j = \overline{0, k}$ 
for i := 0 to k-1 do
    cur_a[i] := oper (l, prev_a[i], FALSE, FALSE, sigma);
end for
cur_a[k] := oper (l, prev_a[0], TRUE, FALSE, sigma);
//Вычисление проекций
r := 0;
for i := 1 to k do
    for j := 1 to i do
        for p := 1 to 10 do
            l0 := i*(i - 1) / 2 + j;
            row := idx_to_row_number (list, l0);
            col := 10 * (k - 1) + p;
            coor_matr[row, col] := trace (cur_u[r] * DH[p]);
        end for
        r := r + 1;
    end for
end for
//Рекурсивный вызов функции, если текущее звено не последнее
if k != n then

```

```

        ProjKinEnergy (list, cur_u, cur_a, DH, coor_matr);
    end if
    Убрать из list последний элемент;
end for
end func

```

Функция `idx_to_row_number()` определяет строку матрицы координат  $Z$ , соответствующую базисному вектору  $(l_0, l_1, \dots, l_k, 1, \dots, 1)$ . Детали реализации этой функции будут рассмотрены ниже, поскольку это несущественно с точки зрения принципа работы рассматриваемого алгоритма. Псевдокод функции `oper()`, осуществляющей действие оператора  $\mathcal{A}_{kfs}^{\sigma l}$ , не приводится ввиду его очевидности.

Прямая рекурсивная схема вычисления проекций потенциальной энергии не вызывает затруднений и может быть реализована следующим образом:

```

function ProjPotEnergy (list, prev_t, DH, coor_matr)
//list — то же, что и ранее, prev_t — матрица  $\tilde{T}_{k-1}^{l_1 \dots l_{k-1}}$ 
    n := число звеньев манипулятора;
    k := номер текущего звена;
    g := (g_x g_y g_z 0);
    u := (0 0 0 1)T;
    m := m_k;
    for l := 1 to m do
        Добавить l в конец list;
        a :=  $\tilde{A}_k^{l_k}$ ;
        //Вычисление  $\tilde{T}_k^{l_1 \dots l_k}$ 
        cur_t := prev_t * a;
        //Вычисление проекций
    
```

```

for p := 7 to 10 do
    row := idx_to_row_number (list, 0);
    col := 10 * (k - 1) + p;
    coor_matr[row, col] := g * cur_t * DH[p] * u;
end for

//Рекурсивный вызов функции, если текущее звено не последнее
if k != n then
    ProjPotEnergy (list, cur_t, DH, coor_matr);
end if

Убрать из list последний элемент;

end for
end func

```

Тогда процедура вычисления проекций полностью может быть выполнена с помощью функции, псевдокод которой представлен ниже.

```

function CalcProjections (coor_matr)
    Создать пустой список list целых чисел;
    Создать пустой массив u матриц  $4 \times 4$ ;
    Создать массив a матриц  $4 \times 4$  из одного элемента;
    Создать массив DH матриц  $4 \times 4$  из 10 элементов;
    a[0] :=  $E_4$ ;
    t :=  $E_4$ ;
    for l := 1 to 10 do
        DH[l] :=  $DH_l$ ;
    end for
    ProjKinEnergy (list, u, a, DH, coor_matr);
    ProjPotEnergy (list, t, DH, coor_matr);
end func

```

Матрица координат `coor_matr`, заполняемая в процессе работы этой функции, в случае небольшого числа звеньев (не более 4) хранится в оперативной памяти вычислительной машины. В противном случае она представляется в виде файла базы данных, расположенного на жестком диске, вследствие своего большого размера. Так, например, для пятизвенного механизма с вращательными сочленениями эта величина равна  $47118 \times 50$ . Для приведения матрицы координат к ступенчатому виду применяется модифицированный алгоритм исключения Гаусса с частичным выбором ведущего элемента [3], широко распространенный в такого рода вычислениях.

Из определения матриц  $\tilde{A}$  можно видеть, что они содержат много нулевых элементов. Это, очевидно, справедливо и для остальных матричных коэффициентов, вычисляемых на основе  $\tilde{A}$ . Поэтому одним из источников повышения быстродействия является специализированное представление разреженных матриц, ориентированное, главным образом, на минимизацию времени выполнения операции умножения матриц. В данной реализации предлагается упрощенное представление в виде ассоциативного массива, содержащего в качестве данных ненулевые элементы матрицы, а в качестве ключей — соответствующие им линейные индексы. Под линейным индексом здесь понимается натуральное число, вычисляемое как  $l = in + j$ , где  $i$  — номер строки,  $j$  — номер столбца, а  $n$  — количество столбцов матрицы соответственно. Очевидно, что при известном размере матрицы номер строки и столбца определяется однозначно для каждого значения линейного индекса:

$$i = l/n, \quad j = l\%n,$$

где под операцией «/» понимается целочисленное деление, а под операцией «%» — остаток от целочисленного деления. Отметим, что индексы  $i$ ,  $j$ ,  $l$  отсчитываются от 0. Это позволяет исключить избыточные операции при пересчете матричных индексов в линейный и наоборот. Недостатком подоб-

ной реализации является необходимость постоянного извлечения матричных индексов элемента из его линейного индекса при выполнении операции матричного умножения. Избавиться от него можно используя табличный метод: создается массив, в каждом элементе которого хранится пара матричных индексов, соответствующих номеру этого элемента, как линейному индексу. Тогда задача определения матричных индексов по линейному сводится просто к индексации массива, имеющей вычислительную сложность  $O(1)$ . Однако, этот вариант реализации эффективен лишь в случае разреженных матриц небольшого размера, что и имеет место в данном случае, ибо в предложенном рекурсивном алгоритме встречаются только матрицы размера  $4 \times 4$ . Если же такое допущение не справедливо, необходима полноценная реализация механизма разреженных матриц с хранением обоих индексов [17].

В рамках данной работы была создана программа<sup>13</sup> на языке C++, осуществляющая поиск базовых инерционных параметров манипуляционного механизма, если заданы его геометрические параметры. Разработанное приложение основано на методе проекций и использует рекурсивный подход к их вычислению. Эта часть программы полностью реализована согласно алгоритму, предложенному в данном параграфе. Проиллюстрируем корректность работы приложения на примере хорошо известного манипулятора PUMA 560. Кинематическая схема робота представлена на рисунке 4, а геометрические параметры — в таблице 2. Вообще говоря, расстояние  $d_6$  зависит от конкретного рабочего органа манипулятора, но для определенности будем полагать размеры оснастки такими, что это расстояние составляет 70 мм. Вводя параметры из этой таблицы в программу и запуская ее на исполнение, получаем

---

<sup>13</sup> Фрагменты исходных текстов приведены в приложении А.

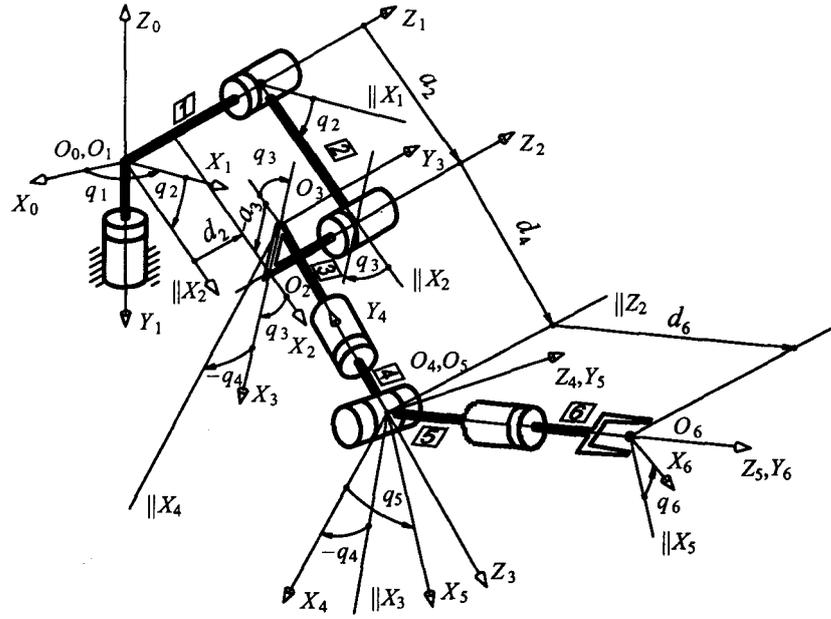


Рис. 4. Кинематическая схема манипулятора PUMA 560.

в результате следующие базовые инерционные параметры<sup>14</sup>:

$$\tilde{p}_1 = I_{xx}^1 + I_{zz}^1 + I_{zz}^2 + I_{yy}^3 + 300(S_z^2 + S_y^3) + 22500(m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6);$$

$$\tilde{p}_2 = I_{zz}^3 + I_{yy}^4 - 866,2 S_y^4 + 187576(m_4 + m_5 + m_6);$$

$$\tilde{p}_3 = I_{xx}^2 - 186451(m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6);$$

$$\tilde{p}_4 = S_x^2 + 431,8(m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6);$$

$$\tilde{p}_5 = I_{xx}^3 - 412,09(m_3 + m_4 + m_5 + m_6);$$

$$\tilde{p}_6 = S_z^3 - S_y^4 + 433,1(m_4 + m_5 + m_6);$$

$$\tilde{p}_7 = S_x^3 - 20,3(m_3 + m_4 + m_5 + m_6);$$

$$\tilde{p}_8 = I_{zz}^5 + I_{zz}^6 + 140 S_z^6 + 4900 m_6;$$

$$\tilde{p}_9 = I_{xz}^2 + 431,8(S_z^2 + S_y^3);$$

$$\tilde{p}_{10} = S_z^5 + S_z^6 + 70 m_6;$$

$$\tilde{p}_{11} = I_{xy}^3 - 20,3 S_y^3;$$

$$\tilde{p}_{12} = I_{zz}^4 + I_{yy}^5;$$

<sup>14</sup> Коэффициенты при статических моментах имеют размерность мм, при массах — мм для  $\tilde{p}_4, \tilde{p}_6, \tilde{p}_7, \tilde{p}_{10}$ , и мм<sup>2</sup> в остальных случаях.

N	$\sigma_i$	$q_i$	$\alpha_i$ , град	$a_i$ , мм	$d_i$ , мм
1	1	<i>var</i>	-90	0	0
2	1	<i>var</i>	0	431,8	150
3	1	<i>var</i>	90	-20,3	0
4	1	<i>var</i>	-90	0	433,1
5	1	<i>var</i>	90	0	0
6	1	<i>var</i>	0	0	70

Таблица 2. Геометрические параметры манипулятора PUMA 560.

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{13} &= S_z^4 + S_y^5; & \tilde{p}_{14} &= I_{yy}^2; & \tilde{p}_{15} &= I_{xy}^2; & \tilde{p}_{16} &= I_{yz}^2; & \tilde{p}_{17} &= S_y^2; & \tilde{p}_{18} &= I_{xz}^3; \\
\tilde{p}_{19} &= I_{yz}^3; & \tilde{p}_{20} &= I_{xx}^4; & \tilde{p}_{21} &= I_{xy}^4; & \tilde{p}_{22} &= I_{xz}^4; & \tilde{p}_{23} &= I_{yz}^4; & \tilde{p}_{24} &= S_x^4; \\
\tilde{p}_{25} &= I_{xx}^5; & \tilde{p}_{26} &= I_{xy}^5; & \tilde{p}_{27} &= I_{xz}^5; & \tilde{p}_{28} &= I_{yz}^5; & \tilde{p}_{29} &= S_x^5; & \tilde{p}_{30} &= I_{xz}^6; \\
\tilde{p}_{31} &= I_{yy}^6; & \tilde{p}_{32} &= I_{xy}^6; & \tilde{p}_{33} &= I_{xz}^6; & \tilde{p}_{34} &= I_{yz}^6; & \tilde{p}_{35} &= S_x^6; & \tilde{p}_{36} &= S_y^6.
\end{aligned}$$

Количество базовых инерционных параметров и их выражения через классические инерционные параметры соответствуют результатам, полученным в работах [21, 22, 36]. Полное время работы программы составило около 200 мс на персональном компьютере средней мощности, что сравнимо с аналогичными показателями численных методов поиска базовых параметров. При этом численные методы не дают гарантий получения точного решения, в отличие от метода проекций. Приведем еще некоторые результаты, полученные при тестировании разработанной программы:

- для 9-звенного манипулятора с  $a_i \neq 0$ ,  $d_i \neq 0$  и  $\alpha_i \neq m\pi/2$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , ( $i = \overline{1,9}$ ) полное время поиска базовых параметров составило 176 с, причем время вычисления матрицы координат коэффициентов влияния составило 58 с, количество базовых параметров равно 57;

- для 10-звенного плоского манипулятора ( $a_i \neq 0, d_i = 0, \alpha_i = 0, i = \overline{1, 10}$ ) те же показатели составили 211 с, 209 с и 28 элементов соответственно.

В заключение отметим, что еще одним источником повышения быстродействия является использование реальной или виртуальной многозадачности при приведении матрицы координат коэффициентов влияния к ступенчатому виду. Однако, это можно сделать только представив ее в блочно-ступенчатом виде

$$\left( \begin{array}{c|ccc} Z_{1,n} & & & \\ \hline 0 & Z_{2,n} & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & Z_{n-1,n} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \mid Z_{n,n} \end{array} \right) \quad (55)$$

Здесь под  $Z_{k,n}$  понимается матрица, содержащая проекции коэффициентов влияния классических инерционных параметров звеньев с  $k$ -го по  $n$ -е на те базисные векторы, на которые проекции коэффициентов влияния параметров звеньев с 1-го по  $(k - 1)$ -е заведомо равны нулю, а звеньев с  $k$ -го по  $n$ -е — нет. Очевидно, что в этом случае каждая из ненулевых матриц, входящих в  $Z$ , может быть приведена к ступенчатому виду независимо от остальных в рамках отдельной задачи вычислительной машины. Кроме того, блочно-ступенчатое представление полезно и без использования многозадачности, поскольку исключает необходимость перестановки строк матрицы  $Z$ , соответствующих различным  $Z_{k,n}$ . Из следствия 5 теоремы 4 ясно, что матрица  $Z_{k,n}$  содержит проекции на базисные векторы  $(l_0, \dots, l_k, 1, \dots, 1)$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1)  $1 \leq l_0 \leq k(k - 1)/2, 1 \leq l_i \leq n_i (i = \overline{1, k - 1}), 2 \leq l_k \leq n_k;$
- 2)  $k(k - 1)/2 + 1 \leq l_0 \leq k(k + 1)/2, 1 \leq l_i \leq n_i (i = \overline{1, k});$

3)  $l_0 = 0, 1 \leq l_i \leq m_i (i = \overline{1, k-1}), 2 \leq l_k \leq m_k$ .

Тогда матрица  $Z_{k,n}$  также может быть представлена в блочно-ступенчатом виде

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} & & & Z_{k,n}^1 & & & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Z_{k,n}^0 \end{array} \right),$$

причем  $Z_{k,n}^1$  содержит проекции на базисные векторы, удовлетворяющие первому и второму условиям, а  $Z_{k,n}^0$  — третьему условию. Таким образом, матрица  $Z_{k,n}^1$  имеет

$$\frac{k(k+1)}{2} n_1 \dots n_k - \frac{k(k-1)}{2} n_1 \dots n_{k-1}$$

строк и  $10(n-k+1)$  столбцов, а матрица  $Z_{k,n}^0$  —  $m_1 \dots m_{k-1}(m_k - 1)$  строк и  $10(n-k) + 4$  столбцов.

Теперь построим алгоритм приведения матрицы координат к виду (55). Для этого необходимо чтобы номер строки, содержащей проекции на базисный вектор, соответствующий матрице  $Z_{i,n}$ , был больше номера строки, содержащей проекции на базисный вектор, соответствующий матрице  $Z_{j,n}$  ( $i > j$ ). Анализ условий соответствия базисных векторов  $(l_0, \dots, l_n)$  матрицам  $Z_{k,n}$  позволяет установить, что, если  $i = \max\{0, 1, \dots, n\} : l_i > 1$ , где  $l_i$  есть  $i$ -й элемент кортежа  $(l_0 + 1, l_1, \dots, l_n)$ , и  $(i_1, j) = \mathcal{J}^{-1}(l_0)$ , то при выполнении первого условия  $0 < i_1 < i = k$ , второго —  $0 \leq i \leq i_1 = k$  и третьего —  $i_1 = 0, i = k$ . Тогда с помощью функции, псевдокод которой приведен ниже, можно определить индекс  $k$  матрицы  $Z_{k,n}$ , которой соответствует заданный базисный вектор.

**function** GetBlockIndex (list, l0)

//list — то же, что и ранее

//l0 — элемент  $l_0$  индекса базисного вектора

i := 0;

```

p := указатель на последний элемент list;
for j := количество элементов в list to 1 do
    r := значение, на которое указывает p;
    if r > 1 then
        i := j;
        break;
    end if
    p := указатель на элемент, предшествующий p;
end for
i1 := Jinv (l0, j);
if i1 = 0 then
    k := i;
else if i1 < i then
    k := i;
else
    k := i1;
end if
return k;
end func

```

Функция  $Jinv()$  вычисляет результат обратного отображения  $\mathcal{J}^{-1}(l_0)$  согласно формулам (27). Однако в соотношении (27a) присутствуют операции с плавающей точкой, которые, в особенности извлечение корня, являются весьма трудоемкими, учитывая необходимость их многократного выполнения. Поэтому в целях повышения быстродействия эффективнее использовать табличный метод расчетов, индексируя предварительно созданный массив размера  $N(N + 1)/2$ , где  $N$  — максимально допустимое количество звеньев манипуляционного механизма, заполненный соответствующими парами чисел  $(i, j)$ .

Такой способ требует дополнительного выделения памяти, которое на поверку оказывается крайне незначительным. Например, в случае  $N = 20$  и использовании для хранения  $i$  и  $j$  восьмибитного беззнакового целочисленного типа данных таблица обратных отображений займет 420 байт, что по меркам современных вычислительных машин является несущественной величиной.

Обозначим суммарное количество строк в матрицах  $Z_{1,n}^\gamma, \dots, Z_{k,n}^\gamma$ , где  $\gamma \in \{0, 1\}$ , как  $r_k^\gamma$ . Тогда

$$r_k^1 = \sum_{i=1}^k \left( \frac{i(i+1)}{2} n_1 \dots n_i - \frac{i(i-1)}{2} n_1 \dots n_{i-1} \right);$$

$$r_k^0 = \sum_{i=1}^k (m_1 \dots m_i - m_1 \dots m_{i-1}) - 1.$$

Во втором равенстве требуется дополнительное уменьшение суммы на единицу, поскольку коэффициенты влияния на потенциальную энергию не содержат постоянных слагаемых, т.е. их проекции на базисный вектор  $(0, 1, \dots, 1)$  равны нулю. Замечая, что вычитаемое в  $i$ -й разности равно уменьшаемому в  $(i-1)$ -й разности, получим

$$r_k^1 = \frac{k(k+1)}{2} n_1 \dots n_k;$$

$$r_k^0 = m_1 \dots m_k - 1.$$

Зная какой из матриц  $Z_{k,n}^\gamma$  должна принадлежать проекция на заданный базисный вектор, можно определить диапазон допустимых значений номера строки  $r$ , соответствующей этому базисному вектору:  $r_{k-1}^0 + r_{k-\gamma}^1 < r \leq r_{k-\gamma}^0 + r_k^1$ . В результате приведение матрицы координат к блочно-ступенчатому виду оказывается возможным на этапе вычисления ее элементов с помощью специальной реализации функции `idx_to_row_number()`, псевдокод которой представлен ниже.

```

function idx_to_row_number (list, l0)
//list, l0 — то же, что и ранее
    k := GetBlockIndex (list, l0);
    row := 1;
    for j := 1 to k-1 do
        row := row * mj;
    end for
    tmp := k;
    for j := 1 to k-1 do
        tmp := tmp * nj;
    end for
    if l0 = 0 then
        tmp := tmp * nk * (k + 1) / 2;
    else
        tmp := tmp * (k - 1) / 2;
    end if
    row := row - 1 + tmp + idx_in_z (list, l0);
    return row;
end func

```

Функция  $\text{idx\_in\_z}()$  вычисляет смещение номера строки в пределах диапазона его допустимых значений. Задача ее реализации является весьма непростой, но в рамках рассматриваемого алгоритма это не существенно, ибо последовательность размещения строк в матрицах  $Z_{k,n}^\gamma$  не влияет на представление в виде (55).

Однако, с точки зрения использования вычислительных ресурсов эффективнее хранить не всю матрицу координат  $Z$ , а только составляющие ее блоки  $Z_{k,n}^\gamma$  заведомо не равные нулю. Каждую из матриц-блоков удобно представить

в виде ассоциативного массива, представляющего собой набор пар «ключ-значение», причем все ключи в массиве являются уникальными. Ключами в данном случае являются элементы множества кортежей  $(l_0, \dots, l_n)$ , соответствующих базисным векторам пространства  $\mathbb{F}_L$ , а значениями — строки матриц-блоков. Удобство такого представления заключается в том, что, во-первых, реально можно хранить только те строки, в которых имеется хотя бы одна отличная от нуля проекция на соответствующий базисный вектор, а, во-вторых, при добавлении, изменении или чтении значений проекций не требуется вычислять номер строки. Еще одним преимуществом ассоциативного массива является оптимизация по времени выполнения словарных операций: поиск и удаление элемента по ключу, добавление новой пары «ключ-значение». Существует две основных реализации ассоциативных массивов: на основе хеш-таблиц и на основе сбалансированных двоичных деревьев поиска [8]. Первый вариант при некоторых дополнительных условиях обеспечивает время выполнения основных операций  $O(1)$ , что сопоставимо с обычными массивами. Для использования хеш-таблиц необходимо составить т.н. хеш-функцию, ставящую в соответствие каждому ключу целое число в диапазоне от 0 до  $a$ , причем  $a$  должно быть меньше количества ключей. По значению хеш-функции и индексируется таблица элементов массива. Однако, различные ключи могут иметь одинаковое значение хеш-функции, что порождает проблему коллизий и нетривиальные способы ее решения. В результате задача составления хеш-функции оказывается не легче задачи составления функции  $\text{idx\_in\_z}()$ , поэтому проще использовать второй вариант реализации ассоциативных массивов, имеющий несколько худшее быстродействие  $O(\log n)$ . Но для этого на множестве ключей должна быть определена операция сравнения, чего можно легко добиться введя на множестве кортежей  $(l_0, \dots, l_n)$  отношение строгого порядка, например, следующим образом: если  $I_1 = (l_0, \dots, l_n)$

и  $I_2 = (l'_0, \dots, l'_n)$ , то

$$I_1 > I_2 \Leftrightarrow \exists i \in \{0, \dots, n\} : \forall j \in \{0, \dots, i-1\} \Rightarrow l_j = l'_j \text{ и } l_i > l'_i.$$

Нетрудно видеть, что указанное множество кортежей вкупе с введенным отношением порядка является линейно упорядоченным, т.е. все элементы множества ключей будут сравнимы. Рассмотренный способ представления блоков матрицы координат, удобный при заполнении их значениями, не подходит для задачи приведения к ступенчатому виду, поскольку ассоциативный массив на основе деревьев поиска всегда хранит свои элементы упорядоченными по ключу. В связи с этим, применение операции перестановки строк матрицы, необходимой в любых алгоритмах решения подобных задач, оказывается невозможным. Поэтому после вычисления всех элементов всех матриц-блоков, каждую из них следует преобразовать в специальное представление в виде разреженной матрицы, оптимизированное по времени выполнения операции перестановки строк<sup>15</sup>, и лишь затем приводить к ступенчатому виду. Может показаться, что изначальное представление в виде ассоциативного массива является бессмысленным, ибо в итоге все равно приходится переходить к другому представлению. Это, однако, не так: во-первых, не требуется разрабатывать алгоритм расчета номера строки в матрицах-блоках для заданного базисного вектора, а, во-вторых, естественным образом получается список базисных векторов, которым соответствует хотя бы одна ненулевая проекция. Отметим, что предложенные идеи по повышению быстродействия и экономии вычислительных ресурсов были, за исключением многозадачности, частично реализованы в упомянутой ранее в данном параграфе программе.

---

<sup>15</sup> Такое представление может быть реализовано, например, в виде массива указателей на строки, каждая из которых является ассоциативным массивом с натуральными ключами, хранящим ненулевые элементы строки.

## Выводы

1. Приведены основные идеи и соотношения известных на сегодняшний день методов поиска базовых инерционных параметров манипуляционных механизмов. Рассмотрены как аналитические, так и численные подходы, указаны их достоинства и недостатки. Проведенный сравнительный анализ показывает отсутствие универсального метода, т.е. такого, который бы предоставлял точное решение задачи для манипуляционных механизмов произвольной конфигурации.
2. Предложен метод проекций для поиска связи между базовыми и классическими инерционными параметрами, позволяющий получить истинное решение для любых механических систем класса манипуляционных механизмов. Метод основан на интерпретации базовых параметров и коэффициентов влияния, изложенной в параграфе 2.1, и использует аппарат теории матриц. Для его применения необходимо получить матрицу координат коэффициентов влияния классических параметров в некотором конечномерном линейном пространстве функций обобщенных координат и скоростей. Это делается с помощью теоремы 4 и ее следствий. Отметим, что метод проекций в принципе справедлив для произвольных систем твердых тел, стесненных стационарными, удерживающими, голономными связями. Однако, для его применения в этом случае необходимо получить результаты аналогичные теореме 4 для указанного класса механических систем.
3. Получены рекуррентные соотношения для матричных коэффициентов, определяющих значения проекций коэффициентов влияния классических параметров на вспомогательное пространство  $\mathbb{F}_L$ . На основе этих соотношений разработан прямой рекурсивный алгоритм, позволяющий

вычислять по одной проекции на каждой итерации. Тестирование программы, реализующей этот алгоритм, показало, что получаемое решение соответствует известным результатам и достигается за приемлемое время. Также указаны некоторые особенности реализации алгоритма, способные повысить быстродействие прикладной программы, в том числе и с применением параллельных вычислений.

# Применение базовых инерционных параметров в динамическом управлении роботами-манипуляторами

Ранее отмечалось, что в современных системах управления манипуляционными роботами активно используются методы динамического управления, которые можно разделить на три группы: классические, адаптивные и оптимальные. В первых рассчитываются управляющие моменты для приводов сочленений манипулятора на основе динамической модели исполнительного механизма, во вторых дополнительно осуществляется коррекция параметров этой модели, в последних же вычисляемое управление доставляет минимум или максимум некоторому критерию, например, величине энергопотребления. Значительная часть методов из первой группы и некоторые из второй при расчете управляющих моментов используют решение обратной задачи динамики манипуляционного механизма [26, 37], для получения которого необходимо знать уравнения движения этого механизма.

### 4.1. Уравнения движения манипуляционного механизма в базовых параметрах

Уравнения Лагранжа 2-го рода (2) для манипуляционного механизма, учитывая соотношение (14с) и считая выполненным условие теоремы 3, примут вид

$$\mathcal{L}\tilde{\mathbf{w}}_L\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}. \quad (56)$$

Если известна матрица  $Y$ , связывающая базовые и классические инерционные параметры, то, как было отмечено ранее, можно определить базисные коэффициенты влияния на функцию Лагранжа, а затем, применяя к ним оператор  $\mathcal{L}$  (см. раздел 1.3), получить базисные коэффициенты влияния на левую часть уравнений движения.

Найдем уравнения движения однозвенного механизма, рассмотренного в параграфе 3.2. Поскольку базовые параметры и их коэффициенты влияния на лагранжиан уже найдены, вычислим результат применения к последним оператора  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}\tilde{\mathbf{w}}_L = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & 2a_1\ddot{q}_1 - gs_{q_1} & -gc_{q_1} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения движения этого механизма в базовых параметрах примут вид

$$\ddot{q}_1 (\tilde{p}_1 + 2a_1\tilde{p}_2) - g (s_{q_1}\tilde{p}_2 + c_{q_1}\tilde{p}_3) = \tau_1.$$

Если учесть связь базовых и классических параметров и считать звено механизма бесконечно тонким однородным стержнем, то при отсутствии управляющего момента  $\tau_1$  получим известные уравнения движения плоского маятника [12]:

$$i_{zz}^1 \ddot{q}_1 - \frac{m_1 g a_1}{2} s_{q_1} = 0.$$

Как видно, для получения уравнений движения напрямую с помощью соотношения (56) должны быть известны символьные выражения коэффициентов влияния классических параметров на функцию Лагранжа, для которых следует вычислить соответствующие производные. Последнее оказывается весьма трудоемкой задачей при аналитических расчетах для механизмов с числом звеньев более трех. К тому же при использовании в методе проекций рекурсивного алгоритма вычисления координат нет необходимости в явных выражениях коэффициентов влияния, что влечет за собой дополнительные расчеты. Применение современных пакетов компьютерной алгебры избавля-

ет от указанных аналитических расчетов, но требует значительных вычислительных мощностей. Чтобы устранить перечисленные неудобства перепишем уравнения движения (56) с учетом (40):

$$\mathcal{L}\mathbf{b}\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}. \quad (57)$$

Нетрудно видеть, что результат действия оператора  $\mathcal{L}$  на вектор-строку  $\mathbf{b}$  базисных элементов пространства  $\mathbb{F}_L$  является матрицей размера  $n \times \dim(\mathbb{F}_L)$ , далее будем обозначать ее  $\mathbf{B}$ . Отметим, что согласно лемме 2 столбцы этой матрицы как элементы пространства  $\mathbb{F}_{em}$  линейно независимы, и задают в этом пространстве такое конечномерное подпространство  $\mathbb{F}_{EM}$ , что  $\tilde{\mathbb{W}}_{em} \subset \mathbb{F}_{EM}$ . В частности, из инвариантности левых частей уравнений движения в формах (14с) и (57), а также максимальности ранга матрицы  $\tilde{\mathbf{Z}}$ , следует, что  $\tilde{\mathbb{W}}_{em} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{Z}}$ . Преимущество уравнений движения в форме (57) по сравнению с формой (56) состоит в том, что элементы вектора-строки  $\mathbf{b}$ , а, следовательно, и столбцы матрицы  $\mathbf{B}$ , одинаковы для любых манипуляционных механизмов и могут быть найдены заранее. При этом уравнения движения конкретного механизма задаются вектором-столбцом  $\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{p}}$ , определяемым геометрическими и базовыми инерционными параметрами.

Итак, уравнения движения в форме (57) избавляют от громоздких символьных вычислений, но для использования этого преимущества необходимо получить замкнутые соотношения для вычисления базисных векторов пространства  $\mathbb{F}_{EM}$ . Для этого найдем результат действия оператора  $\mathcal{L}$  на базисный вектор пространства  $\mathbb{F}_L$ , соответствующий кортежу  $(l_0, \dots, l_{k+1}, 1, \dots, 1)$ , где  $0 \leq k < n$ . Учитывая соотношение (26) и тот факт, что от обобщенных скоростей зависит только сомножитель  $y_0^{l_0}$ , можно записать

$$\frac{\partial b^{l_0 \dots l_{k+1}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}}.$$

Здесь и далее согласно следствию 2 из теоремы 4 в  $(n+1)$ -позиционном индек-

се  $l_0 \dots l_k 1 \dots 1$  отбрасываются незначащие единицы в старших позициях до первой значащей позиции. Дифференцируя последнее равенство по времени получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial b^{l_0 \dots l_{k+1}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} \right) y_{k+1}^{l_{k+1}} + \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} \dot{y}_{k+1}^{l_{k+1}}. \quad (58)$$

Кроме того, очевидно следующее

$$\frac{\partial b^{l_0 \dots l_{k+1}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( y_0^{l_0} \dots y_k^{l_k} \right) y_{k+1}^{l_{k+1}} + y_0^{l_0} \dots y_k^{l_k} \frac{\partial y_{k+1}^{l_{k+1}}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (59)$$

Заметим, что  $y_{k+1}^{l_{k+1}}$  является функцией только  $q_{k+1}$ , поэтому

$$\dot{y}_{k+1}^{l_{k+1}} = \frac{\partial y_{k+1}^{l_{k+1}}}{\partial q_{k+1}} \dot{q}_{k+1}. \quad (60)$$

Для краткости обозначим  $\partial y_{k+1}^{l_{k+1}} / \partial q_{k+1}$  как  $h_{k+1}^{l_{k+1}}$ . Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости следующих правил:

- в случае вращательного сочленения

$$h_k^{l_k} = \begin{cases} 0, & l_k = 1; \\ -y_k^3, & l_k = 2; \\ y_k^2, & l_k = 3; \\ -2y_k^5, & l_k = 4; \\ 2y_k^4, & l_k = 5; \end{cases} \quad (61a)$$

- в случае поступательного сочленения

$$h_k^{l_k} = \begin{cases} 0, & l_k = 1; \\ y_k^1, & l_k = 2; \\ 2y_k^2, & l_k = 3. \end{cases} \quad (61b)$$

При использовании в случае вращательного сочленения модифицированного базисного множества  $Y'_k$ , приведенные выше правила необходимо скорректировать:  $h_k^4 = -2y_k^2 y_k^3$ ,  $h_k^5 = 2y_k^4 - y_k^1$ . Введем единичный вектор  $\mathbf{e}_k$  размера  $n \times 1$  такой, что  $k$ -я его компонента равна 1. Для упрощения записи будем далее полагать, что производная скалярной функции по векторному аргументу является вектором-столбцом. Тогда можно записать, что

$$\frac{\partial y_{k+1}^{l_{k+1}}}{\partial \mathbf{q}} = h_{k+1}^{l_{k+1}} \mathbf{e}_{k+1}, \quad (62)$$

а также

$$\frac{\partial y_0^{\mathcal{J}(i,j)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{cases} \dot{q}_i \mathbf{e}_i, & i = j \neq 0; \\ \dot{q}_i \mathbf{e}_j + \dot{q}_j \mathbf{e}_i, & i \neq j; \\ \mathbf{0}, & i = j = 0. \end{cases} \quad (63)$$

Пусть вектор-столбец  $\mathbf{B}^{l_0 \dots l_k}$  размера  $n \times 1$  есть результат действия оператора  $\mathcal{L}$  на базисный вектор  $b^{l_0 \dots l_k}$ . С учетом соотношений (58), (59), (60) и (62), получим

$$\mathbf{B}^{l_0 \dots l_k l_{k+1}} = \mathbf{B}^{l_0 \dots l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}} + \left( \dot{q}_{k+1} \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} - b^{l_0 \dots l_k} \mathbf{e}_{k+1} \right) h_{k+1}^{l_{k+1}}.$$

Обозначим выражение в круглых скобках как  $\mathbf{Y}_{k+1}^{l_0 \dots l_k}$ . Тогда

$$\mathbf{B}^{l_0 \dots l_{k+1}} = \mathbf{B}^{l_0 \dots l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}} + \mathbf{Y}_{k+1}^{l_0 \dots l_k} h_{k+1}^{l_{k+1}}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (64)$$

Из соотношения (63) следует, что

$$\dot{q}_{k+1} \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{cases} y_0^{\mathcal{J}(k+1,i)} \mathbf{e}_i, & k+1 \neq i = j \neq 0; \\ 2y_0^{l_0} \mathbf{e}_i, & k+1 = i = j \neq 0; \\ y_0^{\mathcal{J}(k+1,i)} \mathbf{e}_j + y_0^{\mathcal{J}(k+1,j)} \mathbf{e}_i, & k+1 \neq i \neq j; \\ 2y_0^{\mathcal{J}(i,i)} \mathbf{e}_j + y_0^{l_0} \mathbf{e}_i, & k+1 = i \neq j; \\ y_0^{l_0} \mathbf{e}_j + 2y_0^{\mathcal{J}(j,j)} \mathbf{e}_i, & k+1 = j \neq i; \\ \mathbf{0}, & i = j = 0. \end{cases}$$

Здесь и далее предполагается, что  $(i, j) = \mathcal{J}^{-1}(l_0)$ . Учитывая (26) имеем

$$\dot{q}_{k+1} \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} y_1^{l_1} \dots y_k^{l_k} = \begin{cases} b^{\mathcal{J}(k+1,i)\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 \neq i = j \neq 0; \\ 2b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = i = j \neq 0; \\ b^{\mathcal{J}(k+1,i)\dots l_k} \mathbf{e}_j + b^{\mathcal{J}(k+1,j)\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 \neq i \neq j; \\ 2b^{\mathcal{J}(i,i)\dots l_k} \mathbf{e}_j + b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = i \neq j; \\ b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_j + 2b^{\mathcal{J}(j,j)\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = j \neq i; \\ \mathbf{0}, & i = j = 0. \end{cases}$$

Тогда векторные коэффициенты  $\mathbf{Y}_{k+1}^{l_0\dots l_k}$  могут быть вычислены по правилам:

$$\mathbf{Y}_{k+1}^{l_0\dots l_k} = \begin{cases} b^{\mathcal{J}(k+1,i)\dots l_k} \mathbf{e}_i - b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_{k+1}, & k+1 \neq i = j \neq 0; \\ b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = i = j \neq 0; \\ b^{\mathcal{J}(k+1,i)\dots l_k} \mathbf{e}_j + b^{\mathcal{J}(k+1,j)\dots l_k} \mathbf{e}_i - \\ - b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_{k+1}, & k+1 \neq i \neq j; \\ 2b^{\mathcal{J}(i,i)\dots l_k} \mathbf{e}_j, & k+1 = i \neq j; \\ 2b^{\mathcal{J}(j,j)\dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = j \neq i; \\ -b^{l_0\dots l_k} \mathbf{e}_{k+1}, & i = j = 0. \end{cases} \quad (65)$$

Базисные векторы  $b^{l_0\dots l_k}$ , определяющие эти правила рассчитываются с помощью рекуррентных соотношений (37). Для инициализации рекурсивной процедуры (64) необходимо знать  $\mathbf{V}^{l_0}$ . По определению  $\mathbf{V}^{l_0} = \mathcal{L}b^{l_0}$ , но  $b^{l_0} = y_0^{l_0}$ , поэтому

$$\mathbf{V}^{l_0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial y_0^{l_0}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{cases} \ddot{q}_i \mathbf{e}_i, & i = j \neq 0; \\ \ddot{q}_i \mathbf{e}_j + \ddot{q}_j \mathbf{e}_i, & i \neq j; \\ \mathbf{0}, & i = j = 0. \end{cases} \quad (66)$$

Таким образом, рекуррентные соотношения (64) и (37) совместно с правилами

расчета  $y_k^{l_k}$  ( $k = \overline{0, n}$ ) и правилами (61), (65), (66) образуют замкнутую систему, позволяющую вычислять векторы-столбцы  $\mathbf{B}^{l_0 \dots l_k}$ , составляющие матрицу  $\mathbf{B}$ .

Проверим корректность полученных соотношений на примере плоского двухзвенного механизма с двумя вращательными сочленениями, рассмотренного в параграфе 3.2. Для наглядности будем считать звенья механизма бесконечно тонкими однородными стержнями одинаковой массы  $m$  и длины  $l$ , т.е.  $a_1 = a_2 = l$ ,  $m_1 = m_2 = m$ . Тогда можно вычислить моменты инерции и статические моменты, входящие в выражение базовых параметров:  $I_{xx}^1 = I_{xx}^2 = ml^2/3$ ,  $I_{yy}^1 = I_{yy}^2 = 0$ ,  $S_x^1 = S_x^2 = -ml/2$ ,  $S_y^1 = S_y^2 = 0$ . В результате найденный ранее вектор базовых параметров примет вид

$$\tilde{\mathbf{p}} = \left( -\frac{5}{3}ml^2 \quad \frac{3}{2}ml \quad 0 \quad -\frac{2}{3}ml^2 \quad \frac{1}{2}ml \quad 0 \right)^T.$$

В процессе вычисления координат коэффициентов влияния при использовании метода проекций были установлены базисные векторы пространства  $\mathbb{F}_L$ , на которые имеется хотя бы одна ненулевая проекция:

$$\mathbf{b} = (b^{111} \ b^{211} \ b^{311} \ b^{021} \ b^{031} \ b^{112} \ b^{113} \ b^{212} \ b^{213} \ b^{022} \ b^{023} \ b^{032} \ b^{033}).$$

Соответствующая матрица координат базисных коэффициентов влияния имеет вид

$$\tilde{\mathbf{Z}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2l & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2l & 2l & 2l & 0 & 0 & 2l & 0 & l & 0 & -g & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2l & 0 & -l & 0 & g & g & 0 \end{pmatrix}.$$

Для составления уравнений движения необходимо вычислить столбцы матрицы  $\mathbf{B} = \mathcal{L}\mathbf{b}$  согласно рекуррентным соотношениям (64) и (37), а также

правилам (61), (65) и (66). На первом шаге итерационного процесса имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{111} &= \mathbf{B}^{11}y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{11}h_2^1 = \mathbf{B}^{11}, \\
\mathbf{B}^{211} &= \mathbf{B}^{21}y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{21}h_2^1 = \mathbf{B}^{21}, \\
\mathbf{B}^{311} &= \mathbf{B}^{31}y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{31}h_2^1 = \mathbf{B}^{31}, \\
\mathbf{B}^{021} &= \mathbf{B}^{02}y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{02}h_2^1 = \mathbf{B}^{02}, \\
\mathbf{B}^{031} &= \mathbf{B}^{03}y_2^1 + \mathbf{Y}_2^{03}h_2^1 = \mathbf{B}^{03}, \\
\mathbf{B}^{112} &= \mathbf{B}^{11}y_2^2 + \mathbf{Y}_2^{11}h_2^2 = \mathbf{B}^{11}y_2^2 - (b^{21}\mathbf{e}_1 - b^{11}\mathbf{e}_2)y_2^3, \\
\mathbf{B}^{113} &= \mathbf{B}^{11}y_2^3 + \mathbf{Y}_2^{11}h_2^3 = \mathbf{B}^{11}y_2^3 + (b^{21}\mathbf{e}_1 - b^{11}\mathbf{e}_2)y_2^2, \\
\mathbf{B}^{212} &= \mathbf{B}^{21}y_2^2 + \mathbf{Y}_2^{21}h_2^2 = \mathbf{B}^{21}y_2^2 - 2b^{31}\mathbf{e}_1y_2^3, \\
\mathbf{B}^{213} &= \mathbf{B}^{21}y_2^3 + \mathbf{Y}_2^{21}h_2^3 = \mathbf{B}^{21}y_2^3 + 2b^{31}\mathbf{e}_1y_2^2, \\
\mathbf{B}^{022} &= \mathbf{B}^{02}y_2^2 + \mathbf{Y}_2^{02}h_2^2 = \mathbf{B}^{02}y_2^2 + b^{02}\mathbf{e}_2y_2^3, \\
\mathbf{B}^{023} &= \mathbf{B}^{02}y_2^3 + \mathbf{Y}_2^{02}h_2^3 = \mathbf{B}^{02}y_2^2 - b^{02}\mathbf{e}_2y_2^2, \\
\mathbf{B}^{032} &= \mathbf{B}^{03}y_2^2 + \mathbf{Y}_2^{03}h_2^2 = \mathbf{B}^{03}y_2^2 + b^{03}\mathbf{e}_2y_2^3, \\
\mathbf{B}^{033} &= \mathbf{B}^{03}y_2^3 + \mathbf{Y}_2^{03}h_2^3 = \mathbf{B}^{03}y_2^2 - b^{03}\mathbf{e}_2y_2^2.
\end{aligned} \tag{67}$$

Можно видеть, что столбцы матрицы  $\mathbf{B}$  зависят от векторов-столбцов  $\mathbf{B}^{11}$ ,  $\mathbf{B}^{21}$ ,  $\mathbf{B}^{31}$ ,  $\mathbf{B}^{02}$ ,  $\mathbf{B}^{03}$  и скалярных коэффициентов  $b^{11}$ ,  $b^{21}$ ,  $b^{31}$ ,  $b^{02}$ ,  $b^{03}$ . Известные векторы-столбцы непосредственно вычисляются на второй итерации:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{11} &= \mathbf{B}^1y_1^1 + \mathbf{Y}_1^1h_1^1 = \ddot{q}_1\mathbf{e}_1, \\
\mathbf{B}^{21} &= \mathbf{B}^2y_1^1 + \mathbf{Y}_1^2h_1^1 = \ddot{q}_1\mathbf{e}_2 + \ddot{q}_2\mathbf{e}_1, \\
\mathbf{B}^{31} &= \mathbf{B}^3y_1^1 + \mathbf{Y}_1^3h_1^1 = \ddot{q}_2\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{B}^{02} &= \mathbf{B}^0y_1^2 + \mathbf{Y}_1^0h_1^2 = \mathbf{e}_1y_1^3, \\
\mathbf{B}^{03} &= \mathbf{B}^0y_1^3 + \mathbf{Y}_1^0h_1^3 = -\mathbf{e}_1y_1^2.
\end{aligned} \tag{68}$$

Для вычисления неизвестных скалярных величин должен быть инициирован отдельный итерационный процесс согласно соотношениям (37), состоящий в

данном случае из одного шага:

$$\begin{aligned}
b^{11} &= b^1 y_1^1 = \dot{q}_1^2/2, \\
b^{21} &= b^2 y_1^1 = \dot{q}_1 \dot{q}_2, \\
b^{31} &= b^3 y_1^1 = \dot{q}_2^2/2, \\
b^{02} &= b^0 y_1^2 = y_1^2, \\
b^{03} &= b^0 y_1^3 = y_1^3.
\end{aligned} \tag{69}$$

После подстановки (68) и (69) в (67) с учетом правил расчета  $y_k^{l_k}$  и алгебраических преобразований получим

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 & 0 & s_{q_1} & -c_{q_1} & \ddot{q}_1 c_{q_2} - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_{q_2} & \ddot{q}_1 s_{q_2} + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_{q_2} \\ 0 & \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 & 0 & 0 & \dot{q}_1^2 s_{q_2}/2 & -\dot{q}_1^2 c_{q_2}/2 \\ \ddot{q}_2 c_{q_2} - \dot{q}_2^2 s_{q_2} & \ddot{q}_2 s_{q_2} + \dot{q}_2^2 c_{q_2} & s_{q_1} c_{q_2} & s_{q_1} s_{q_2} & -c_{q_1} c_{q_2} & -c_{q_1} s_{q_2} \\ \ddot{q}_1 c_{q_2} & \ddot{q}_1 s_{q_2} & c_{q_1} s_{q_2} & -c_{q_1} c_{q_2} & s_{q_1} s_{q_2} & -s_{q_1} c_{q_2} \end{pmatrix}.$$

Используя соотношение (57) окончательно получаем известные уравнения движения плоского двухзвенного механизма [6]:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \left(\frac{5}{3}ml^2 + ml^2 c_{q_2}\right)\ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}ml^2 c_{q_2}\right)\ddot{q}_2 - ml^2 s_{q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{1}{2}ml^2 s_{q_2} \dot{q}_2^2 - \\
&\quad - \frac{3}{2}mgl s_{q_1} - \frac{1}{2}mgl s_{q_1+q_2}, \\
\tau_2 &= \left(\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}ml^2 c_{q_2}\right)\ddot{q}_1 + \frac{1}{3}ml^2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{2}ml^2 s_{q_2} \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}mgl s_{q_1+q_2}.
\end{aligned}$$

В заключение отметим, что использование для решения обратной задачи динамики рекуррентных соотношений (64) напрямую менее эффективно с точки зрения количества вычислительных операций, чем традиционно применяемый метод Ньютона-Эйлера [26]. Однако, на основе этих соотношений можно построить численную процедуру, аналогичную описанной в работе [27], автоматически генерирующую исходный текст программы, например, на языке С, для расчета левой части уравнений движения в форме (57) с количеством вычислений близким к минимальному.

## 4.2. Идентификация базовых инерционных параметров

Уравнения движения манипуляционного механизма в базовых параметрах позволяют решать обратную задачу динамики для конкретного механизма только, если известны значения этих параметров. Последние можно вычислить, с помощью классических инерционных параметров и матрицы связи  $Y$ . Это возможно, например, при разработке нового робота-манипулятора, когда имеется твердотельная модель исполнительного механизма в каком-либо пакете САПР. Но, как отмечалось ранее, существует ряд ситуаций, в которых классические параметры оказываются неизвестными, и требуется их идентификация. Однако, согласно теореме 1 классические параметры являются принципиально неидентифицируемыми, поэтому процедуру идентификации следует применять сразу к базовым параметрам, для чего необходимо получить соответствующую идентификационную модель в терминах этих параметров. Воспользуемся энергетической моделью (12) как наиболее простой и эффективной, и перепишем ее с учетом (14b):

$$(\tilde{\mathbf{w}}_H(\mathbf{q}(t_{i+1}), \dot{\mathbf{q}}(t_{i+1})) - \tilde{\mathbf{w}}_H(\mathbf{q}(t_i), \dot{\mathbf{q}}(t_i))) \hat{\mathbf{p}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q} dt, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Количество временных отсчетов  $m$ , в которых выполняются измерения, должно превышать количество базовых параметров. Энергетическая модель в такой форме имеет тот же недостаток, что и уравнения движения в форме (56): необходимы излишние, трудоемкие, символьные вычисления. Чтобы избавиться от него обратимся к следствию 3 теоремы 4, из которого ясно, что матрица  $\tilde{Z}_H$  координат базисных коэффициентов влияния на полную энергию может быть найдена по формуле

$$\tilde{Z}_H = P\tilde{Z},$$

где  $\mathbf{P}$  — такая диагональная матрица, что  $i$ -й диагональный элемент равен 1, если базисный вектор  $(l_0, \dots, l_n)$ , соответствующий  $i$ -й строке  $\tilde{\mathbf{Z}}$ , удовлетворяет условию  $l_0 > 0$ , и  $-1$ , если удовлетворяет условию  $l_0 = 0$ . Тогда энергетическая идентификационная модель в базовых параметрах примет вид

$$(\mathbf{b}(\mathbf{q}(t_{i+1}), \dot{\mathbf{q}}(t_{i+1})) - \mathbf{b}(\mathbf{q}(t_i), \dot{\mathbf{q}}(t_i))) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{p}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q} dt, i = \overline{1, m-1}. \quad (70)$$

Достоинством такого представления является то, что матрицы  $\tilde{\mathbf{Z}}$  и  $\mathbf{P}$  вычисляются заранее программой, реализующей рекурсивный алгоритм метода проекций, а расчет значений базисных векторов пространства  $\mathbb{F}_L$  в опорных точках экспериментальной траектории выполняется с помощью рекуррентных соотношений (37).

Проиллюстрируем применение полученной модели в решении задачи параметрической идентификации на примере робота PUMA 560. Для простоты рассматривается движение только трех первых степеней подвижности, т.е. манипулятор считается трехзвенным, а звенья запястья являются составными частями третьего звена. Соответствующая кинематическая схема и геометрические параметры представлены на рисунке 5. Расчет идентификационной

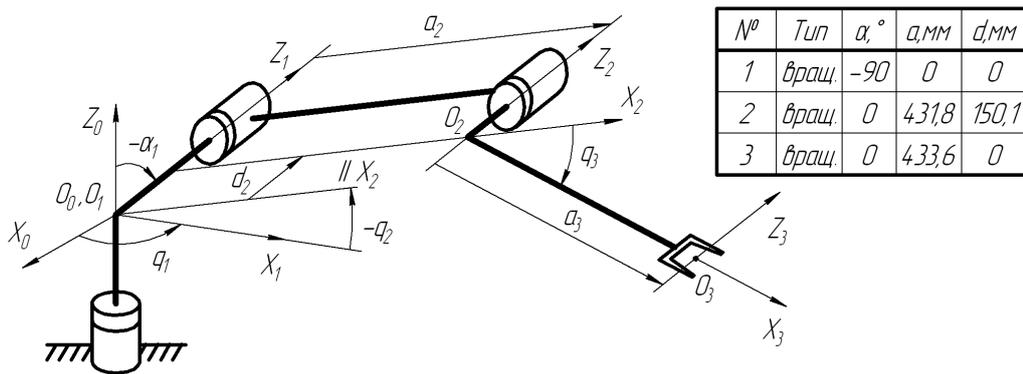


Рис. 5. Кинематическая схема и геометрические параметры трехзвенного манипулятора.

модели в форме (70) осуществлялся с помощью специально разработанного

сценария среды Matlab, а ее верификация была выполнена путем математического моделирования эксперимента [5]. Для этого была создана модель манипуляционного механизма в пакете SimMechanics, входящем в состав среды Matlab, структурная схема которой представлена на рисунке 6 и состоит из трех звеньев, соединенных последовательно и закрепленных на неподвижном основании, блока осциллографа, отображающего и сохраняющего измерения, и блока задания движения звеньев. Последний задает каждому звену закон

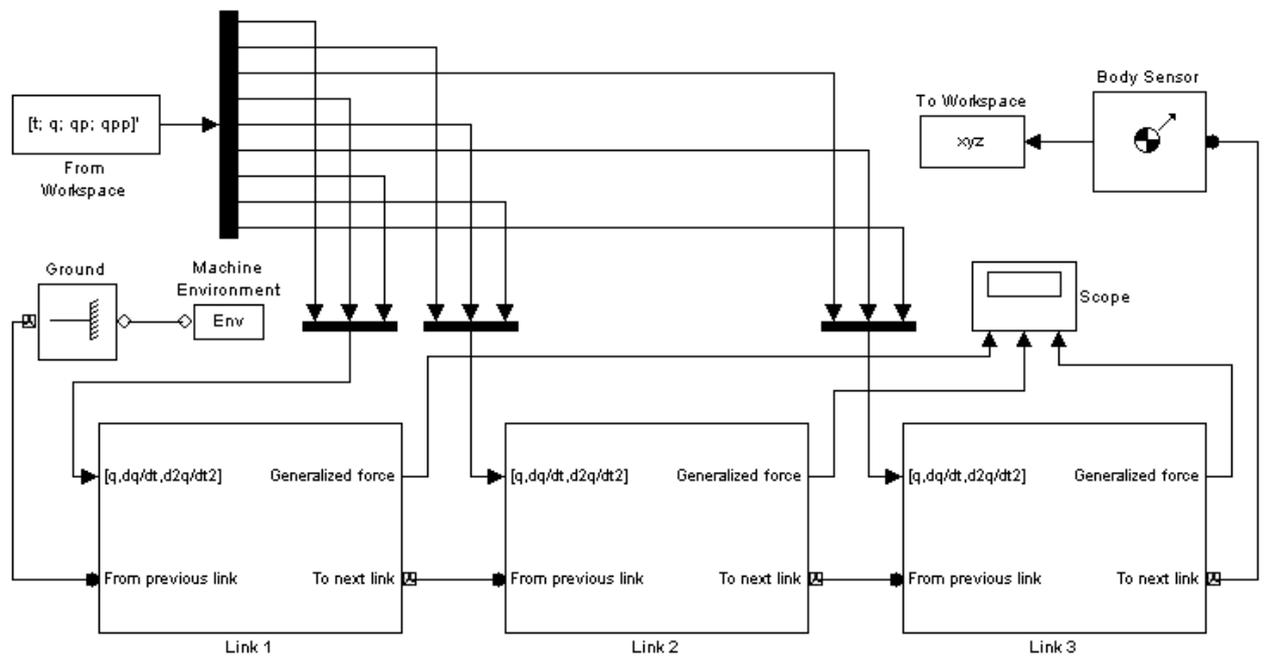


Рис. 6. Структурная схема динамической модели трехзвенного манипуляционного механизма.

изменения от времени соответствующей обобщенной координаты  $q_i(t)$ , скорости  $\dot{q}_i(t)$  и ускорения  $\ddot{q}_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Экспериментальные траектории  $q_i(t)$  для каждой степени подвижности были сформированы методом профилей скорости. Для обеспечения непрерывности самих траекторий, а также скоростей и ускорений на этих траекториях, использовался профиль скорости, задаваемый формулой  $\dot{q}_i = v_i^{max} \sin^2(\omega_i t)$ , где  $\omega_i = k_i \pi / T$ . Коэффициенты  $k_i$  выбираются близкими к единице, но различными для того, чтобы обоб-

щенные скорости были линейно независимы. Максимальные скорости  $v_i^{max}$  и время эксперимента  $T$  выбираются так, чтобы приращение каждой обобщенной координаты составило около  $\pi$  радиан. Начальная конфигурация манипулятора задается следующим значением вектора обобщенных координат  $\mathbf{q} = (-\pi \ 0 \ \pi/2)^T$ . Полученные в результате траектории, а также соответствующие им профили скорости, представлены на рисунке 7. Модель каждого

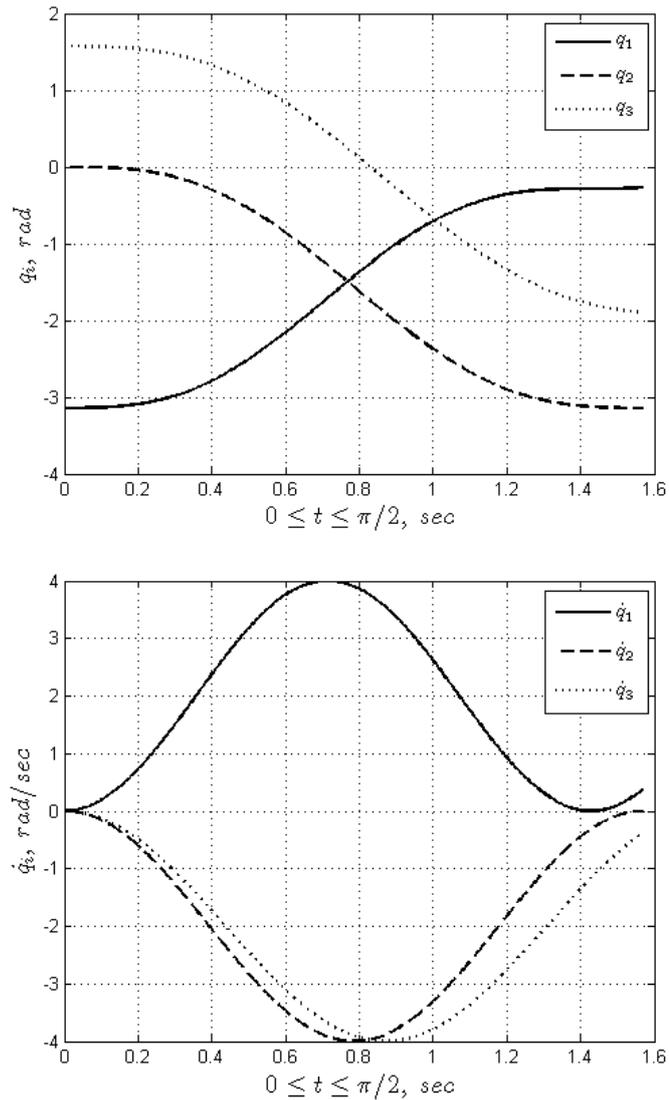


Рис. 7. Обобщенные координаты и скорости на экспериментальной траектории.

звена состоит из абсолютно твердого тела, вращательного сочленения, ось которого совпадает с осью  $Z$  системы координат, связанной с предыдущим

звеном, и блоков воздействия и измерения, первый из которых обеспечивает заданный закон движения в соответствующем сочленении, а второй измеряет управляющий момент в этом же сочленении. Соответствующая структурная схема приведена на рисунке 8. Для моделирования движений каждого

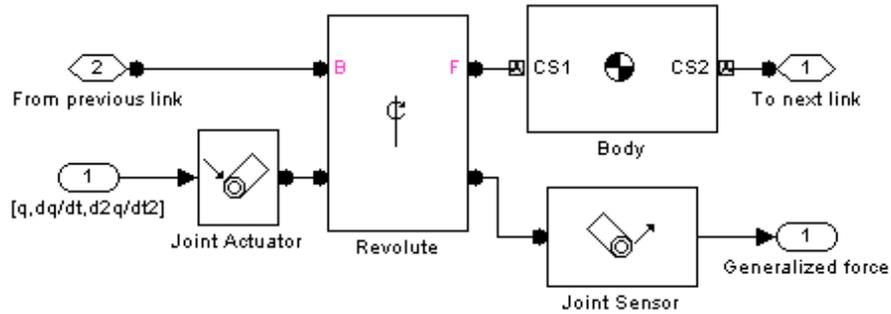


Рис. 8. Структурная схема математической модели звена манипуляционного механизма.

звена необходимо указать следующие параметры: масса, тензор инерции в системе координат  $C_i X_{c_i} Y_{c_i} Z_{c_i}$ , связанной с центром масс, положение начала и ориентация осей системы координат  $O_i X_i Y_i Z_i$ , построенной по методу Денавита-Хартенберга, относительно системы координат предыдущего звена в начальный момент времени, координаты центра масс  $C_i$  в системе  $O_i X_i Y_i Z_i$ . Предполагается, что оси системы координат  $C_i X_{c_i} Y_{c_i} Z_{c_i}$  сонаправлены с осями системы  $O_i X_i Y_i Z_i$ . Задание перечисленных выше параметров происходит с помощью диалогового окна блока абсолютно твердого тела, общий вид которого показан на рисунке 9. Эталонные геометрические и масс-инерционные параметры звеньев, используемые в рассматриваемой модели, были взяты из работы [15] и пересчитаны относительно используемых здесь систем координат.

Моделирование эксперимента проводилось следующим образом: с помощью пакета SimMechanics и описанной выше модели манипуляционного механизма была решена обратная задача динамики для заданных экспериментальных траекторий. В результате были получены моменты, развиваемые приво-

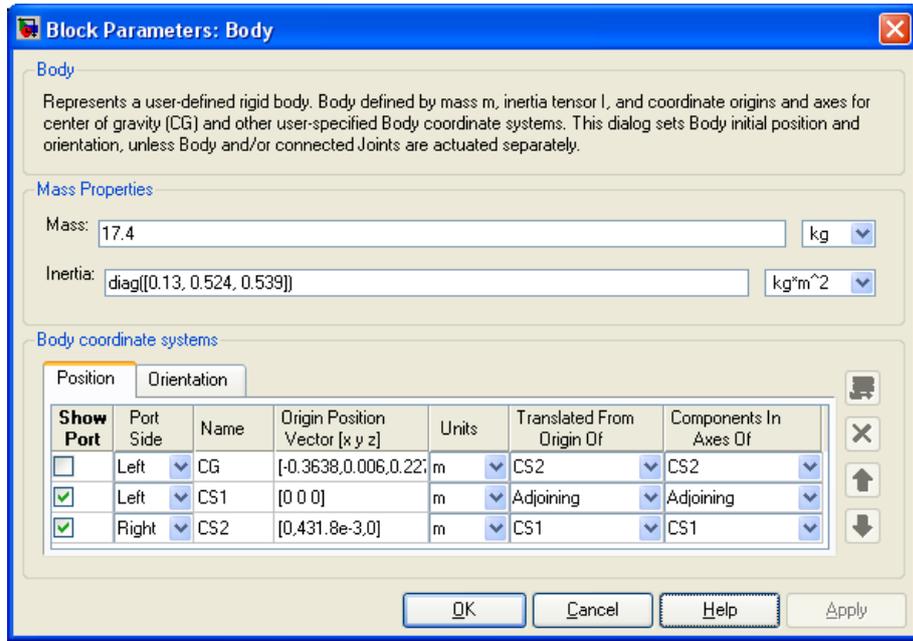


Рис. 9. Диалоговое окно для задания геометрических и масс-инерционных параметров звена.

дами сочленений манипулятора при заданном движении, графики изменения которых приведены на рисунке 10. Затем в среде Matlab были вычислены основная матрица и вектор правой части системы (70). Отметим, что ранг основной матрицы действительно оказался максимально возможным. Наконец, была найдена оценка вектора базовых инерционных параметров как решение системы линейных уравнений (70) путем псевдообращения ее основной матрицы, что соответствует критерию минимума квадратической ошибки. В целях проверки корректности проведенного расчета были вычислены эталонные значения базовых параметров с помощью следующих соотношений связи с классическими параметрами:

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_1 &= I_{xx}^1 + I_{zz}^1 + I_{zz}^2 + I_{zz}^3 + 2d_2(S_z^2 + S_z^3) + d_2^2(m_2 + m_3); \\
 \tilde{p}_2 &= I_{xx}^2 - a_2^2(m_2 + m_3); \quad \tilde{p}_3 = I_{yy}^2; \quad \tilde{p}_4 = I_{xy}^2; \quad \tilde{p}_5 = I_{xz}^2 + a_2(S_z^2 + S_z^3); \\
 \tilde{p}_6 &= I_{yz}^2; \quad \tilde{p}_7 = S_x^2 + a_2(m_2 + m_3); \quad \tilde{p}_8 = S_y^2; \quad \tilde{p}_9 = I_{xx}^3 - a_3^2 m_3;
 \end{aligned}$$

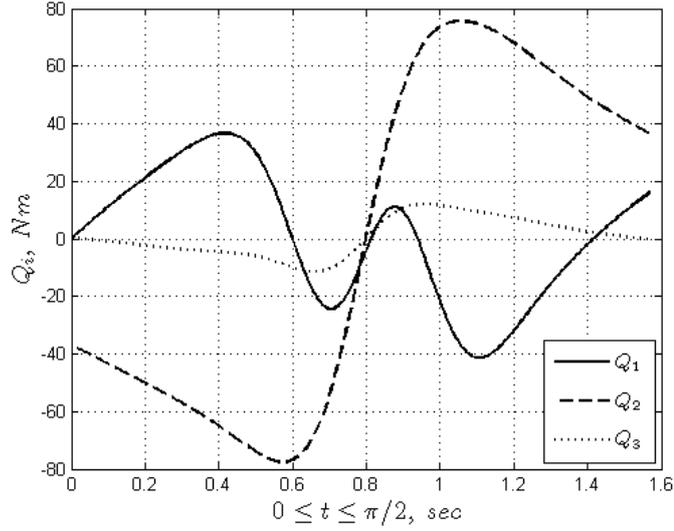


Рис. 10. Моменты в сочленениях на экспериментальной траектории.

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{10} &= I_{yy}^3; & \tilde{p}_{11} &= I_{xy}^3; & \tilde{p}_{12} &= I_{xz}^3 + a_3 S_z^3; \\ \tilde{p}_{13} &= I_{yz}^3; & \tilde{p}_{14} &= S_x^3 + a_3 m_3; & \tilde{p}_{15} &= S_y^3. \end{aligned}$$

Приведенные соотношения были получены с использованием упомянутой в параграфе 3.4 программы, реализующей метод проекций согласно предложенному там же рекурсивному алгоритму. Рассчитанные и эталонные значения базовых инерционных параметров, а также погрешности оценки приведены в таблице 3. Как видно, в условиях идеального эксперимента точность идентификации оказывается достаточно высокой. Конечно, в реальных измерениях будут присутствовать шумы, поэтому потребуется применение фильтров низких частот и некоторых других способов обработки измерений [18]. Однако, даже при их использовании стандартный метод наименьших квадратов зачастую дает неудовлетворительные результаты. В этом случае необходимо использовать альтернативные методы оценивания, изложенные в работах [25, 32, 34]. Кроме того, в используемой идентификационной модели не учитывалось трение в сочленениях манипулятора. Обычно при идентификации используется стандартная модель трения [20] в виде

N	$\tilde{p}_i^{\text{ЭТ}}$ , ед. СИ	$\hat{p}_i$ , ед. СИ	$\epsilon_i = \left  \frac{\tilde{p}_i^{\text{ЭТ}} - \hat{p}_i}{\tilde{p}_i^{\text{ЭТ}}} \right  100/\tilde{p}_i^{\text{ЭТ}}$ , %
1	1,4763	1,4548	1,4542
2	-1,6010	-1,6129	0,7404
3	0,0731	0,0730	0,1647
4	-0,0380	-0,0385	1,2954
5	0,1282	0,1280	0,1020
6	0,0081	0,0081	0,2441
7	3,7913	3,8307	1,0387
8	0,1044	0,1045	0,0755
9	-0,4319	-0,4281	0,8921
10	0,0107	0,0107	0,5164
11	-0,0032	-0,0032	1,0144
12	0,0121	0,0119	1,4411
13	0,0006	0,0006	0,5438
14	0,8629	0,8598	0,3616
15	0,0404	0,0408	0,9954

Таблица 3. Результаты моделирования эксперимента.

$Q_i^{fr} = -k_i^{fs} \text{sign}(\dot{q}_i) - k_i^{fv} \dot{q}_i$ , где  $k_i^{fs}$  и  $k_i^{fv}$  — коэффициенты сухого и вязкого трения соответственно для  $i$ -го сочленения, которые необходимо будет включить в число оцениваемых параметров. Это также касается и моментов инерции роторов двигателей приводов сочленений, кинетическая энергия вращения которых должна быть добавлена к полной энергии механизма. В заключение отметим, что результаты моделирования подтверждают адекватность полученной идентификационной модели для рассмотренного механизма с учетом сделанных допущений. При проведении реального эксперимента данная модель должна быть уточнена согласно сделанным замечаниям.

## Выводы

1. Выведены рекуррентные соотношения, позволяющие записать уравнения движения манипуляционного механизма относительно базовых инерционных параметров. Прямое использование этих соотношений для решения ОЗД малоэффективно с вычислительной точки зрения, однако их применение удобно для автоматизированного вывода уравнений движения в символьном виде, а также генерации исходных текстов программ расчета левой части уравнений движения.
2. Получена энергетическая идентификационная модель в терминах базовых инерционных параметров. Рассмотрена задача идентификации базовых параметров с помощью этой модели на примере первых трех звеньев робота Puma 560. Проведено моделирование эксперимента, расчет эталонных значений и оценок базовых параметров с использованием пакета Matlab. Незначительность ошибок оценки в отсутствие трения и шумов измерений свидетельствует о корректности полученной идентификационной модели.

## Заключение

В рамках данной работы были получены следующие основные результаты:

1. Доказана неоднозначность описания динамики манипуляционных механизмов с помощью классических инерционных параметров, приводящая к проблеме идентифицируемости параметров их уравнений движения и избыточности вычислений при решении задач управления и моделирования для роботов-манипуляторов.
2. Введено обобщенное понятие базовых параметров многопараметрического семейства функций, порождающее в рамках лагранжевой механики три различных варианта базовых инерционных параметров: для лагранжиана, полной энергии и левой части уравнений движения. Для каждого из этих вариантов базовых инерционных параметров предложена математическая интерпретация в форме набора координат соответствующих коэффициентов влияния классических параметров в «естественных» базисах задаваемых ими линейных пространств. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия единственности базовых инерционных параметров при согласованности базисов упомянутых пространств. Установлена связь между базовыми и классическими инерционными параметрами.
3. Для класса манипуляционных механизмов разработана методика составления элементов базисного множества конечномерного линейного пространства, которому принадлежат все коэффициенты влияния классических параметров на функцию Лагранжа и полную энергию. Выведены рекуррентные соотношения для расчета значений базисных элементов этого пространства в заданных точках фазового пространства.

Указана связь между координатами коэффициентов влияния на лагранжиан и полную энергию в базисе упомянутого пространства, а также даны правила определения координат, заведомо равных нулю.

4. Проведен сравнительный анализ современных методов поиска связи между базовыми и классическими инерционными параметрами, показавший отсутствие метода, гарантирующего получение точного решения для произвольных манипуляционных механизмов. На базе полученных теоретических результатов разработан такой метод — метод проекций. В его основе лежит анализ матрицы координат коэффициентов влияния классических параметров на функцию Лагранжа в базисе некоторого вспомогательного пространства. Кроме того, рассмотрены примеры использования разработанного метода для простейших механизмов.
5. Выведены рекуррентные соотношения для вычисления координат упомянутых коэффициентов влияния в базисе вспомогательного пространства, составленном по предложенной методике. На их основе разработан рекурсивный алгоритм реализации метода проекций, согласно которому написана на языке C++ программа поиска базовых инерционных параметров. С помощью этой программы получены базовые параметры робота Puma 560, соответствующие известным результатам. Предложены пути повышения быстродействия разработанного алгоритма. Указан алгоритмический способ приведения матрицы координат к блочно-ступенчатому виду и описано его использование для распараллеливания вычислений.
6. Предложен способ формирования уравнений движения манипуляционного механизма относительно базовых параметров на основе рекуррент-

ной процедуры. Рассмотрено его применение на примере плоского двухзвенного механизма.

7. Получено представление энергетической идентификационной модели в терминах базовых инерционных параметров. Проиллюстрировано применение этих параметров в задаче идентификации параметров уравнений движения манипуляционного механизма на примере математической модели трех первых звеньев робота Puma 560. Компьютерная симуляция движения исследуемого механизма и получения необходимых измерений была выполнена с помощью пакета Matlab. Проведенные расчеты подтвердили идентифицируемость базовых параметров, а также корректность идентификационной модели.

## Литература

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры, 2-е изд. Москва: Изд. "Факториал пресс 2001. 544 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 4-е изд. Москва: Наука, 1988.
3. Голуб Д., Лоун Ч. В. Матричные вычисления. Москва: Мир, 1999.
4. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики. Москва: Изд. МГУ, 2000.
5. Зенкевич С. Л., Крутиков С. Л. Идентификация параметров уравнений движения манипуляционных роботов // Труды междунар. науч.-технич. конф. «Экстремальная робототехника», Санкт-Петербург, 23–25 ноября 2011. 2011. С. 125–129.
6. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами. Москва: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 480 с.
7. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Линейная алгебра: учебник для вузов. 3-е изд. / Под ред. В. С. Зарубин, А. П. Крищенко. Москва: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 336 с.
8. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. Москва: Изд. дом "Вильямс 2005. 1296 с.
9. Крутиков С. Л. Базовые инерционные параметры манипуляционных роботов // Вестник МГТУ. Серия «Приборостроение». 2011. № 1. С. 28–45.
10. Крутиков С. Л. Рекурсивный метод поиска базовых инерционных параметров манипуляционных механизмов // Вестник МГТУ. Серия «Приборостроение». 2012. № 1. С. 38–59.

11. Крутиков С. Л. Способ получения уравнений движения роботов-манипуляторов в терминах базовых инерционных параметров // Мехатроника, автоматизация и управление. 2012. № 4. С. 50–55.
12. Маркеев А. П. Теоретическая механика: учебник для университетов. 2-е изд. Москва: ЧеРо, 1999. 572 с.
13. Моденов П. С. Аналитическая геометрия. Москва: Изд. МГУ, 1967.
14. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. Москва: Мир, 1989.
15. Armstrong B., Khatib O., Burdick J. The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA 560 arm // Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation. 1986. P. 510–518.
16. Atkeson C. G., An C. H., Hollerbach J. M. Estimation of inertial parameters of manipulator loads and links // Intl. Journal of Robotics Research. 1986. Vol. 5, no. 3. P. 101–118.
17. Barret R., et al. M. B. Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods. PA Philadelphia: SIAM, 1994. 115 p.
18. Gautier M. A comparison of filtered models for dynamic identification of robots // Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, December 1996. 1996. P. 875–880.
19. Gautier M. Dynamic identification of robots with power model // Proceedings of IEEE Intl. Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, April 1997. 1997. P. 1922–1927.
20. Gautier M., Khalil W. Identification of the minimum inertial parameters of robots // Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation. 1989. P. 1529–1534.

21. Gautier M., Khalil W. Direct calculation of minimum set of inertial parameters of serial robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1990. Vol. 6, no. 3. P. 368–373.
22. Gautier M., Khalil W. Numerical calculation of the base inertial parameters // Journal of Robotics Systems. 1991. Vol. 8, no. 4. P. 485–506.
23. Gautier M., Khalil W. Exciting trajectories for the identification of base inertial parameters of robots // The Intl. Journal of Robotics Research. 1992. Vol. 11, no. 4. P. 362–375.
24. Gautier M., Restrepo P., Khalil W. Identification of an industrial robot using filtered dynamic model // Proceedings of the 3rd ECC, Rome, September 1995. 1995. P. 2380–2385.
25. Janot A., Vandanjon P. O., Gautier M. Identification of robots dynamics with the instrumental variable method // Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation. 2009. P. 1762–1767.
26. Khalil W., Dombre E. Modelling, identification and control of robots. Butterworth-Heinemann, 2004. 500 p.
27. Khalil W., Kleinfinger J.-F. Minimum operations and minimum parameters of the dynamic models of tree structure robots // IEEE Journal of Robotics and Automation. 1987. Vol. RA-3, no. 6. P. 517–525.
28. Kobilarov M., Crane K., Desbrun M. Lie group integrators for animation and control of vehicles // ACM Transactions on Graphics. 2009. Vol. 28, no. 2. P. 1–14.
29. Marsden J., West M. Discrete mechanics and variational integrators // Acta Numerica. 2001. no. 10. P. 357–514.

30. Mayeda H., Yoshida K., Ohashi K. Base parameters of dynamic models for manipulators with rotational and translational joints // Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation. 1989. P. 1523–1528.
31. Mayeda H., Yoshida K., Osuka K. Base parameters of manipulator dynamic models // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1990. Vol. 6, no. 3. P. 312–320.
32. Olsen M. M., Petersen H. G. A new method for estimating parameters of a dynamic robot model // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2001. Vol. 17, no. 1. P. 95–100.
33. Press C., Gautier M. New criteria of exciting trajectories for robot identification // Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation, Atlanta, USA, 1993. 1989. P. 907–912.
34. Presse C., Gautier M. Bayesian estimation of inertial parameters of robots // Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation. Vol. 1. 1992. P. 364–369.
35. Renders J. M., Rossignol E., Becquet M., Hanus R. Kinematic calibration and geometrical parameter identification for robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1991. Vol. 7, no. 6. P. 721–732.
36. Sheu S.-Y., Walker M. W. Basis sets for manipulator inertial parameters // Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation. 1989. P. 1517–1522.
37. Springer Handbook of Robotics / Ed. by B. Siciliano, O. Khatib. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 1628 p.

38. Swevers J., et al. Optimal robot excitation and identification // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 1997. Vol. 13, no. 5. P. 730–739.
39. Vandanjon P. O., Gautier M., Desbats P. Identification of robots inertial parameters by means of spectrum analysis // *Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation*. Vol. 3. 1995. P. 3033–3038.
40. Zenkevich S., Nazarova A., Nagy S. Computer-based arm // *Proceedings of 23rd International Symposium on Industrial Robots*. 1992. P. 116–121.

## Приложение А

# Исходные тексты программы расчета базовых инерционных параметров

### Файл «main.cpp»

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <map>
#include <QtCore/QTime>
#include "robot.h"
#include "index.h"
#include "tab_idxd.hpp"
#include "sparse_tab.hpp"

//-----
//                               Main program
//-----
int main    (void)
{
    Robot   r(0,0,-9.81);

    r.append_link(Link(-M_PI_2, 0, 0)).append_link(Link(0, 431.8, 150)).\
    append_link(Link(M_PI_2, -20.3, 0)).append_link(Link(-M_PI_2, 0, 433.1)).\
    append_link(Link(M_PI_2, 0, 0)).append_link(Link(0, 0, 70));

    QTime   t;
    t.start();

    r.CalcProjections();

    std::cout << t.elapsed() << std::endl;

    return 0;
}
```

### Файл «robot.h»

```
#ifndef _ROBOT_H_
#define _ROBOT_H_

#include <vector>
#include <map>
#include <string>
#include <iostream>
#include "link.h"
#include "index.h"
#include "sparse_fp.h"
#include "tab_idxd.hpp"
```

```

//-----
//          Class 'Robot'
//
// represents serial manipulator as array of links
//-----
//-----
//          Description
//-----
class Robot
{
    static tab_bvec_idxd<double,fp_cmp>    proj_tab;

    static unsigned    cnt;
    static vector<double> tmp;
    static std::string parTags[];

    static std::vector<unsigned>    parse_rref (const sparse_tab<double,fp_cmp>&,\
        std::ostream& = std::cout);
    static std::string parse_rref_tex (const sparse_tab<double,fp_cmp>&);
    static inline void    add_kin_proj (const smatrix&, const bvec_idx&);
    static inline void    add_pot_proj (const smatrix&, const bvec_idx&);
    static inline
    smatrix tau (unsigned, const smatrix&, bool, bool, bool, const vector<smatrix>&);

    void    ProjKinEnergy (bvec_idx&, const vector<smatrix>&,const vector<smatrix>&);
    void    ProjPotEnergy (bvec_idx&, const smatrix&);

    vector<Link*>    link_arr;
    smatrix    g;

public:
    Robot (double, double, double);
    ~Robot ();

    void    CalcProjections ();

    Robot&    config_link (int, const Link&);
    Robot&    append_link (const Link&);

    inline int LinkNum () const    {return link_arr.size();};
};

#endif

```

## Файл «robot.cpp»

```

#include    <QtCore/QTime>
#include    "robot.h"
//-----
//          Static data init
//-----
unsigned    Robot::cnt = 0;
vector<double>    Robot::tmp(10, 0);
tab_bvec_idxd<double,fp_cmp>    Robot::proj_tab;
std::string Robot::parTags[] = {"Ixx", "Iyy", "Izz", "Ixy", "Ixz", "Iyz", "Sx", "Sy", "Sz", "m"};

```

```

//-----
//          static method 'parse_rref_tex'
//-----
std::string Robot::parse_rref_tex (const sparse_tab<double,fp_cmp>& t)
{
    std::string str;

    return str;
}

//-----
//          static method 'parse_rref'
//-----
std::vector<unsigned> Robot::parse_rref (const sparse_tab<double,fp_cmp>& t,\
                                        std::ostream& out)
{
    unsigned    col = 0;
    unsigned    row = 0;
    unsigned    k, l, i;
    std::vector<unsigned> res;

    res.reserve(t.row_num());

    while (col < t.col_num() && row < t.row_num())
    {
        if (fp_cmp::neq(t[row][col], 0))
        {
            res.push_back(col);
            out << "pbase" << row + 1 << " = ";
            for (i = col; i < t.col_num(); i++)
            {
                if (fp_cmp::neq(t[row][i], 0))
                {
                    k = i / 10 + 1;
                    l = i % 10;

                    out << "(" << t[row][i] << ")" << parTags[l] << k << "+";
                }
            }
            out << "\b;" << std::endl;
            row++;
        }
        col++;
    }

    return res;
}

//-----
//          static method 'add_kin_proj'
//-----
void Robot::add_kin_proj (const smatrix& m, const bvec_idx& idx)
{
    tmp[0] = m(0,0);
    tmp[1] = m(1,1);
    tmp[2] = m(2,2);

    tmp[3] = m(0,1) + m(1,0);
}

```

```

    tmp[4] = m(0,2) + m(2,0);
    tmp[5] = m(1,2) + m(2,1);

    tmp[6] = m(0,3) + m(3,0);
    tmp[7] = m(1,3) + m(3,1);
    tmp[8] = m(2,3) + m(3,2);

    tmp[9] = m(3,3);

    for (unsigned i = 0; i < 10; i++)
        if (tmp[i])
        {
            cnt++;
            proj_tab(idx, 10 * (idx.size() - 1) + i) = tmp[i];
        }
}

//-----
//                               static method 'add_pot_proj'
//-----
void Robot::add_pot_proj (const smatrix& m, const bvec_idx& idx)
{
    tmp[6] = m(0,0);
    tmp[7] = m(0,1);
    tmp[8] = m(0,2);

    tmp[9] = m(0,3);

    for (unsigned i = 6; i < 10; i++)
        if (tmp[i])
        {
            cnt++;
            proj_tab(idx, 10 * (idx.size() - 1) + i) = tmp[i];
        }
}

//-----
//                               static method 'tau'
//-----
smatrix Robot::tau (unsigned idx, const smatrix& prev, bool f, bool s, bool is_rot,\
                    const vector<smatrix>& vec)
{
    smatrix    res(4,4);

    unsigned   j1 = f ? 9 : 6;
    unsigned   j2 = f ? 10 : 7;
    unsigned   j3 = f ? 11 : 8;

    unsigned   i1 = s ? 3 : 0;
    unsigned   i2 = s ? 4 : 1;
    unsigned   i3 = s ? 5 : 2;

    switch (idx)
    {
        case 1:
        {
            res = vec[j1] * prev * vec[i1];

```

```

        if (is_rot)
        {
            res += vec[j3]*(prev)*(vec[i3]);
        }

        break;
    }

    case 2:
    {
        res = vec[j1]*(prev)*(vec[i2]) +
              vec[j2]*(prev)*(vec[i1]);

        break;
    }

    case 3:
    {
        if (is_rot)
        {
            res = vec[j1]*(prev)*(vec[i3]) +
                  vec[j3]*(prev)*(vec[i1]);
        }

        else
        {
            res = vec[j2]*(prev)*(vec[i2]);
        }

        break;
    }

    case 4:
    {
        res = vec[j2]*(prev)*(vec[i2]) -
              vec[j3]*(prev)*(vec[i3]);

        break;
    }

    case 5:
    {
        res = vec[j2]*(prev)*(vec[i3]) +
              vec[j3]*(prev)*(vec[i2]);

        break;
    }

    default:
    {break;
    }
}

return res;
}

//-----
//                               Main constructor

```

```

//-----
Robot::Robot    (double gx, double gy, double gz)    :    link_arr(), g(1,4)
{
    g    =    gx,gy,gz,0;
}

//-----
//
//                      Destructor
//-----
Robot::~Robot    ()
{
    vector<Link*>::iterator i    =    link_arr.begin();

    for (;i != link_arr.end(); i++)
        delete *i;
}

//-----
//
//                      method 'config_link'
//-----
Robot&    Robot::config_link    (int i, const Link& link)
{
    link_arr.at(i - 1)    =    new Link(link);

    return *this;
}

//-----
//
//                      method 'append_link'
//-----
Robot&    Robot::append_link    (const Link& link)
{
    link_arr.push_back(new    Link(link));

    return *this;
}

//-----
//
//                      method 'CalcProjections'
//-----
void    Robot::CalcProjections    ()
{
    unsigned        n    =    link_arr.size();
    bvec_idx        idx(n);
    vector<smatrix> Uhat;
    vector<smatrix> Ahat(1, smatrix::identity(4));
    smatrix        tildeT    =    smatrix::identity(4);

    unsigned        m    =    1, r    =    1;
    unsigned        kin    =    0;
    unsigned        pot    =    0;

    for (unsigned k    =    0; k    <    n; k++)
    {
        r    *=    (link_arr.at(k)->sigma ? 5 : 3;
        m    *=    (link_arr.at(k)->sigma ? 3 : 2;
        kin    +=    5 * (k + 1) * (k + 2) * r;
        pot    +=    4 * m;
    }
}

```

```

}

QTime t;
t.start();

ProjKinEnergy(idx, Uhat, Ahat);
idx.set_l0(0);
ProjPotEnergy(idx, tildeT);

idx.push(1).push(1).push(1);
proj_tab.del_row(idx);

proj_tab.output(std::cout);
bvec_list lst = proj_tab.get_bvec_list();
sparse_tab<double,fp_cmp> z = proj_tab.to_sparse_tab();
proj_tab.clear();

try
{
    sparse_tab<double,fp_cmp> y = z.rref();
    std::cout << z << std::endl;
    std::cout << y << std::endl;
    std::vector<unsigned> base_idx = parse_rref(y);
    sparse_tab<double,fp_cmp> z_base(z.row_num(), base_idx.size());
    for (unsigned i = 0; i < z_base.row_num(); i++)
    {
        for (unsigned j = 0; j < z_base.col_num(); j++)
        {
            z_base[i][j] = z[i][base_idx[j]];
        }
    }
    for (unsigned i = 0; i < base_idx.size(); i++)
        std::cout << base_idx[i] + 1 << ", ";
    std::cout << std::endl << z_base << std::endl;
}
catch (unsigned err) {std::cout << err.what() << std::endl;}
catch (const std::out_of_range& err) {std::cout << err.what() << std::endl;}
}

//-----
// method 'ProjKinEnergy'
//-----
void Robot::ProjKinEnergy (bvec_idx& idx, const vector<smatrix>& prevUhat,
                           const vector<smatrix>& prevAhat)
{
    unsigned n = link_arr.size();
    unsigned k = idx.size() + 1;
    const Link& link = *link_arr.at(k - 1);
    unsigned m = link.sigma ? 5 : 3;

    vector<smatrix> Uhat(prevUhat.size() + k, smatrix(4,4));
    vector<smatrix> Ahat(prevAhat.size() + 1, smatrix(4,4));

    for (unsigned l = 1; l <= m; l++)
    {
        idx.push(1);

        unsigned r = 0;

```

```

//Calculation of projection of  $U_{\{kj\}}^T U_{\{ki\}}$ ,  $i=1..k-1$ ,  $j=1..i$ , on base vector,
//defined by index list, by applying transform to  $U_{\{k-1,j\}}^T U_{\{k-1,i\}}$  (recursively)
for (unsigned i = 1; i < k; i++)
{
    for (unsigned j = 1; j <= i; j++)
    {
        Uhat[r] = tau(1, prevUhat.at(r), false, false, link.sigma, link.vec);
        r++;
    }
}

//Calculation of projection of  $U_{\{kj\}}^T U_{\{kk\}}$ ,  $j=1..k$ , on base vector,
//defined by index list, by applying transform to  $A_{\{k-1,j,k\}}$  (recursively)
for (unsigned j = 1; j < k; j++,r++)
{
    Uhat[r] = tau(1, prevAhat.at(j), false, true, link.sigma, link.vec);
}

Uhat[r] = tau(1, prevAhat.at(0), true, true, link.sigma, link.vec);

//Calculation of  $A_{\{k,j,k+1\}}$ ,  $j=0..k$ 
for (unsigned i = 0; i < k; i++)
{
    Ahat.at(i) = tau(1, prevAhat.at(i), false, false, link.sigma, link.vec);
}

Ahat.at(k) = tau(1, prevAhat.at(0), true, false, link.sigma, link.vec);

r = k * (k + 1) / 2;
idx.set_l0(1,1);

for (unsigned i = 0; i < r; i++)
{
    const smatrix& m = Uhat[i];

    tmp[0] = m(0,0);
    tmp[1] = m(1,1);
    tmp[2] = m(2,2);

    tmp[3] = m(0,1) + m(1,0);
    tmp[4] = m(0,2) + m(2,0);
    tmp[5] = m(1,2) + m(2,1);

    tmp[6] = m(0,3) + m(3,0);
    tmp[7] = m(1,3) + m(3,1);
    tmp[8] = m(2,3) + m(3,2);

    tmp[9] = m(3,3);

    for (unsigned j = 0; j < 10; j++)
        if (fp_cmp::neq(tmp[j],0))
        {
            cnt++;
            proj_tab[idx, 10 * (k - 1) + j] = tmp[j];
        }

    idx.inc_l0();
}

```

```

    }

    if (k != n)
    {
        ProjKinEnergy(idx, Uhat, Ahat);
    }

    idx.pop();
}

}

//-----
//                               method 'ProjPotEnergy'
//-----
void Robot::ProjPotEnergy (bvec_idx& idx, const smatrix& prevT)
{
    unsigned    n    = link_arr.size();
    unsigned    k    = idx.size() + 1;
    const Link& link  = *link_arr.at(k - 1);
    unsigned    m    = link.sigma ? 3 : 2;
    smatrix     t(4,4);
    smatrix     temp(1,4);

    for (unsigned l = 1; l <= m; l++)
    {
        idx.push(l);

        t    = prevT * link.tildeA.at(l - 1);

        temp    = g * t;

        tmp[6] = temp(0,0);
        tmp[7] = temp(0,1);
        tmp[8] = temp(0,2);

        tmp[9] = temp(0,3);

        for (unsigned i = 6; i < 10; i++)
            if (fp_cmp::neq(tmp[i],0))
            {
                cnt++;
                proj_tab(idx, 10 * (k - 1) + i) = tmp[i];
            }

        if (k != n)
        {
            ProjPotEnergy(idx, t);
        }

        idx.pop();
    }
}
}

```

## Файл «link.h»

```

#ifndef _LINK_H_
#define _LINK_H_

```

```

#include <vector>
#include "sparse_fp.h"

class Robot;

//-----
//          class 'Link'
//
// represents serial manipulator link
//-----
//-----
//          Description
//-----
class Link
{
    static smatrix Drot;
    static smatrix Dtr;

    static smatrix initD(bool);

    bool          sigma;
    vector<smatrix> tildeA;

    vector<smatrix> vec;

    friend class Robot;

public:
    Link (double, double, double, bool = true);
    Link (const Link& l);
};

#endif

```

### Файл «link.cpp»

```

#include "link.h"
#include <cmath>
#include <iostream>

//-----
//          Static data init
//-----
smatrix Link::Drot = Link::initD(true);
smatrix Link::Dtr  = Link::initD(false);

//-----
//          Static method 'initD'
//-----
smatrix Link::initD (bool is_rot)
{
    smatrix res(4,4);

    if (is_rot)
    {
        res(0,1) = -1;
    }
}

```

```

        res(1,0)    = 1;
    }

    else
        res(2,3)    = 1;

    return res;
}

//-----
//                               Main constructor
//-----
Link::Link(double alpha, double a, double d_q, bool s) :
    tildeA(s ? 3 : 2, smatrix(4,4)), vec(12, smatrix(4,4))
{
    sigma = s;

    if (sigma)
    {
        tildeA[0] = 0,0,0,0, 0,0,0,0, 0,sin(alpha),cos(alpha),d_q, 0,0,0,1;
        tildeA[1] = 1,0,0,a, 0,cos(alpha),-sin(alpha),0, 0,0,0,0, 0,0,0,0;
        tildeA[2] = 0,-cos(alpha),sin(alpha),0, 1,0,0,a, 0,0,0,0, 0,0,0,0;
    }

    else
    {
        tildeA[0] = cos(d_q),-sin(d_q) * cos(alpha),sin(d_q) * sin(alpha),a * cos(d_q),\
            sin(d_q),cos(d_q) * cos(alpha),-cos(d_q) * sin(alpha),a * sin(d_q),\
            0,sin(alpha),cos(alpha),0,\
            0,0,0,1;

        tildeA[1](2,3) = 1;
    }

    vector<smatrix>::const_iterator it = tildeA.begin();
    vector<smatrix>::const_iterator end = tildeA.end();

    const smatrix& D = sigma ? Link::Drot : Link::Dtr;

    for (unsigned l = 0; it != end; it++, l++)
    {
        vec[l]      = *it;          //A_k^l
        vec[l + 3]  = D * (*it);   //D*A_k^l

        vec[l + 6]  = it->transpose(); // (A_k^l)^T
        vec[l + 9]  = vec[l + 3].transpose(); // (D*A_k^l)^T
    }
}

//-----
//                               Coping constructor
//-----
Link::Link (const Link& l) :    tildeA(l.tildeA), vec(l.vec)
{
    sigma = l.sigma;
}

```

## Файл «index.h»

```
#ifndef _BASE_VEC_INDEX_H_
#define _BASE_VEC_INDEX_H_

#include <vector>
#include <string>
#include <ostream>

//-----
//                               Class 'bvec_idx'
//-----
//                               Description
//-----
class bvec_idx
{
    typedef unsigned char  uchar;
    typedef unsigned short ushort;

    std::vector<uchar>  idx_arr;
    ushort              l0;
    uchar               pos;
    uchar               max_pos;
    ushort              max_l0;

public:
    bvec_idx      (uchar);
    bvec_idx      (const bvec_idx&);

    bvec_idx&     inc_l0  ();
    bvec_idx&     set_l0  (ushort);
    bvec_idx&     set_l0  (uchar, uchar);
    bvec_idx&     push   (uchar);
    bvec_idx&     pop    ();

    inline uchar  size   () const {return pos;};

    bool  operator<  (const bvec_idx&) const;
};

#endif
```

## Файл «index.cpp»

```
#include "index.h"
#include <cmath>

//-----
//                               Main constructor
//-----
bvec_idx::bvec_idx (uchar n) : idx_arr(n, 1)
{
    l0      = 0;
    pos     = 0;
    max_pos = n;
    max_l0  = static_cast<ushort>(n) * (n + 1) / 2;
}
```

```

}

//-----
//                               Coping constructor
//-----
bvec_idx::bvec_idx (const bvec_idx& i) :   idx_arr(i.idx_arr)
{
    l0      =   i.l0;
    pos     =   i.pos;
    max_pos =   i.max_pos;
    max_l0  =   i.max_l0;
}

//-----
//                               operator <
//-----
bool   bvec_idx::operator< (const bvec_idx& idx)   const
{
    uchar   i   =   max_pos;

    while   (--i)
    {
        uchar   a   =   idx_arr[i] - 1;
        uchar   b   =   idx.idx_arr[i] - 1;

        if   (!a && b)
            return true;

        else if (a && !b)
            return false;

        else if (a && b)
            break;
    }

    if   (l0 && !idx.l0)
        return true;

    else if (l0 && idx.l0)
    {
        if   (l0 < idx.l0)
            return true;

        else if (l0 > idx.l0)
            return false;

        for (uchar j = 0; j <= i; j++)
        {
            uchar   a   =   idx_arr[j];
            uchar   b   =   idx.idx_arr[j];

            if   (a < b)
                return true;

            else if (a > b)
                return false;
        }
    }
}

```

```

else if (!l0 && !idx.l0)
{
    for (uchar j = 0; j <= i; j++)
    {
        uchar a = idx_arr[j];
        uchar b = idx.idx_arr[j];

        if (a < b)
            return true;

        else if (a > b)
            return false;
    }
}

return false;
}

//-----
//                               method 'push'
//-----
bvec_idx& bvec_idx::push (uchar idx)
{
    if (pos < max_pos && idx)
        idx_arr[pos++] = idx;

    return *this;
}

//-----
//                               method 'pop'
//-----
bvec_idx& bvec_idx::pop ()
{
    if (pos) idx_arr[--pos] = 1;
    return *this;
}

//-----
//                               method 'inc_l0'
//-----
bvec_idx& bvec_idx::inc_l0 ()
{
    if (l0 < max_l0) l0++;
    else l0 = 1;

    return *this;
}

//-----
//                               method 'set_l0'
//-----
bvec_idx& bvec_idx::set_l0 (ushort val) {l0 = val; return *this;};

//-----
//                               method 'set_l0'
//-----

```

```

bvec_idx& bvec_idx::set_l0 (uchar i, uchar j)
{
    if (j <= i) l0 = i * j ? i * (i - 1) / 2 + j : 0;

    return *this;
}

```

## Файл «tab\_idxd.hpp»

```

#ifndef _TAB_INDEXED_BVEC_H_
#define _TAB_INDEXED_BVEC_H_

#include <map>
#include <vector>
#include <ostream>
#include "index.h"
#include "sparse_tab.hpp"

typedef std::vector<bvec_idx> bvec_list;

//-----
//          class 'tab_bvec_idxd'
//
// represents table, which rows are indexed by special case index 'bvec_idx'
//-----
//-----
//          Description
//-----
template<class T,class cmp = Cmp<T> > class tab_bvec_idxd
{
    typedef std::map<unsigned,T> row_type;

    static T zero;

    std::map<bvec_idx, row_type*> idx_tab;

public:
    tab_bvec_idxd () : idx_tab() {};
    ~tab_bvec_idxd();

    T& operator() (const bvec_idx&, unsigned);
    const T& operator() (const bvec_idx&, unsigned) const;

    std::ostream& output (std::ostream&) const;
    inline unsigned bvec_num () const {return idx_tab.size();}
    void del_row (const bvec_idx& idx);
    void add_row (const bvec_idx& idx);
    void clear ();

    std::vector<bvec_idx> get_bvec_list () const;
    sparse_tab<T,cmp> to_sparse_tab () const;
};

//-----
//          Static data init
//-----
template<class T,class cmp> T tab_bvec_idxd<T,cmp>::zero = T(0);

```

```

//-----
//                               Destructor
//-----
template<class T,class cmp> tab_bvec_idxd<T,cmp>::~~tab_bvec_idxd    ()
{
    clear();
}

//-----
//                               operator()
//-----
template<class T,class cmp>
const T&    tab_bvec_idxd<T,cmp>::operator ()    (const bvec_idx& idx, unsigned j)    const
{
    typename    map<bvec_idx, row_type*>::const_iterator    it =    idx_tab.find(idx);

    if (it == idx_tab.end())
    {
        return    zero;
    }

    else
    {
        typename    row_type::const_iterator    jt =    it->second->find(j);

        if (jt == it->second->end())
        {
            return    zero;
        }

        else
        {
            return    *jt;
        }
    }
}

//-----
//                               operator()
//-----
template<class T,class cmp> T&    tab_bvec_idxd<T,cmp>::operator()
                                (const bvec_idx& idx, unsigned j)
{
    typename    map<bvec_idx, row_type*>::iterator    it =    idx_tab.find(idx);

    if (it == idx_tab.end())
    {
        it =    idx_tab.insert(pair<bvec_idx, row_type*>(idx, new row_type)).first;
    }

    return    it->second->operator[] (j);
}

//-----
//                               method 'to_sparse_tab'
//-----
template<class T,class cmp> sparse_tab<T,cmp>    tab_bvec_idxd<T,cmp>::to_sparse_tab()    const

```

```

{
    typename    map<bvec_idx,row_type*>::const_iterator it =  idx_tab.begin();
    typename    row_type::const_iterator    jt;
    unsigned    k;

    for (k = 0; it != idx_tab.end(); it++)
    {
        jt =  it->second->end();
        --jt;

        if (k < jt->first)
            k =  jt->first;
    }

    sparse_tab<T,cmp>  res(idx_tab.size(), k+1);

    k =  0;

    for (it = idx_tab.begin(); it != idx_tab.end(); it++)
    {
        for (jt = it->second->begin(); jt != it->second->end(); jt++)
        {
            res[k][jt->first] =  jt->second;
        }
        k++;
    }

    return res;
}

//-----
//                               method 'clear'
//
// clears table
//-----
template<class T,class cmp> void    tab_bvec_idxd<T,cmp>::clear ()
{
    typename    map<bvec_idx, row_type*>::iterator it =  idx_tab.begin();

    for (; it != idx_tab.end(); it++)
        delete it->second;

    idx_tab.clear();
}

//-----
//                               method 'del_row'
//
// deletes row corresponds to specified bvec_idx
//-----
template<class T,class cmp> void    tab_bvec_idxd<T,cmp>::del_row  (const bvec_idx& idx)
{
    typename    std::map<bvec_idx, row_type*>::iterator it =  idx_tab.find(idx);

    if (it != idx_tab.end())
    {
        delete it->second;
        idx_tab.erase(it);
    }
}

```

```

    }
}

//-----
//                               method 'add_row'
//
// adds row corresponds to specified bvec_idx
//-----
template<class T,class cmp> void    tab_bvec_idxd<T,cmp>::add_row    (const bvec_idx& idx)
{
    typename    std::map<bvec_idx, row_type*>::iterator it =    idx_tab.find(idx);

    if (it == idx_tab.end())
    {
        std::pair<bvec_idx, row_type*>    val(idx, new row_type);
        idx_tab.insert(val);
    }
}

//-----
//                               method 'get_bvec_list'
//
// returns ordered list of base vector indices
//-----
template<class T,class cmp> std::vector<bvec_idx>
    tab_bvec_idxd<T,cmp>::get_bvec_list () const
{
    std::vector<bvec_idx>    res;

    typename    map<bvec_idx,row_type*>::const_iterator it =    idx_tab.begin();

    for (; it != idx_tab.end(); it++)
    {
        res.push_back(it->first);
    }

    return res;
}

//-----
//                               method 'output'
//
// output to stream
//-----
template<class T,class cmp> std::ostream&
    tab_bvec_idxd<T,cmp>::output (std::ostream& out) const
{
    typename    map<bvec_idx,row_type*>::const_iterator it =    idx_tab.begin();
    typename    map<unsigned,T>::const_iterator jt;

    for (; it != idx_tab.end(); it++)
    {
        out << it->first << " cnt = " << it->second->size() << " : ";

        for (jt = it->second->begin(); jt != it->second->end(); jt++)
        {
            out << jt->second << ", ";
        }
    }
}

```

```

    }

    out << std::endl;
}

return out;
}

//-----
//                               operator<<
//
// output to stream as non-member function
//-----
template<class T,class cmp> inline
std::ostream& operator<< (std::ostream& out, const tab_bvec_idxd<T,cmp>& t)
{
    return t.output(out);
}

#endif

```

## Приложение Б

# Исходные тексты сценариев среды Matlab

### Файл «calc\_pbase.m»

```
%This script calculates base inertial parameters estimation
%Call function which run experiment simulation and return measurements
[t,q,qp,qqp,tau] = exp_model();
%Calculate Whbase values
whbase = calc_whbase(q,qp);
r = size(whbase,2);
pbase = zeros(r,1);
%Check its rank
if(rank(whbase) == r)
    %Calculate regressor matrix using energy identification model
    int_prev= 0;
    table = zeros(len-1,r);
    integr = zeros(len-1,1);
    len = length(t);
    for i = 2:len
        h = t(1,i) - t(1,i-1);

        temp1 = h * (qp(:,i)' * tau(:,i) + qp(:,i-1)' * tau(:,i-1)) / 2;

        int_cur = int_prev + temp1;
        int_prev = int_cur;

        integr(i-1,1) = int_cur;
        table(i-1,:) = whbase(i,:) - whbase(1,:);
    end
    %Calculate Pbase with regressor matrix pseudoinverse
    pbase = table \ integr;
end
```

### Файл «exp\_model.m»

```
%This function simulates identification experiment
function [t,q,qp,qqp,tau] = exp_model()
%Prepare required data
T = pi/2;
t = 0:0.005:T;
n = 6;
m = size(t,2);
q = zeros(n, m);
qp = zeros(n, m);
qqp = zeros(n, m);
tau = zeros(n, m);
k = [4; -4; -4; 0; 0; 0];
w = [1.1; 1; 0.9; 1; 1; 1] * pi / T;
q0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0];
%Specify velocity profiles
for i=1:n
    q(i,:) = q0(i) + k(i) * t ./ 2 - k(i) * sin(2 * w(i) * t) ./ (4 * w(i));
```

```

    qp(i,:) = k(i) * (sin(w(i) * t) .^2);
    qpp(i,:)= k(i) * w(i) * sin(2 * w(i) * t);
end

q = q(1:3,:);
qp = qp(1:3,:);
qpp = qpp(1:3,:);
%Load motion law in model environment
assignin('base','t',t);
assignin('base','q',q);
assignin('base','qp',qp);
assignin('base','qpp',qpp);
%Load model and run simulation
sim('puma3dof',[0, T]);
%Calculate resulting torques
t1 = tau1.time';
q0 = [-pi; 0; pi/2];

for i=1:3
    tau(i,:)= ppval(spline(t1, tau1.signals(i).values'),t);
    q(i,:) = q0(i)+q(i,:);
end

tau = tau(1:3,:);
%Plot trajectory, velocity and torques
figure();
h=plot(t,q(1,:),'-k',t,q(2,:),'--k',t,q(3,:),':k');
set(h,'LineWidth',2);
h=legend('$q_{1}$','$q_{2}$','$q_{3}$');
set(h,'Interpreter','latex','FontSize',12);
grid on;
xlabel('$0 \leq t \leq \pi/2, \text{sec}$','Interpreter','latex','FontSize',14);
ylabel('$q_i, \text{rad}$','Interpreter','latex','FontSize',14);

figure();
h=plot(t,qp(1,:),'-k',t,qp(2,:),'--k',t,qp(3,:),':k');
set(h,'LineWidth',2);
h=legend('$\dot{q}_{1}$','$\dot{q}_{2}$','$\dot{q}_{3}$');
set(h,'Interpreter','latex','FontSize',12);
grid on;
xlabel('$0 \leq t \leq \pi/2, \text{sec}$','Interpreter','latex','FontSize',14);
ylabel('$\dot{q}_i, \text{rad/sec}$','Interpreter','latex','FontSize',14);

figure();
h=plot(t,tau(1,:),'-k',t,tau(2,:),'--k',t,tau(3,:),':k');
set(h,'LineWidth',2);
h=legend('$Q_{1}$','$Q_{2}$','$Q_{3}$','Location','SouthEast');
set(h,'Interpreter','latex','FontSize',12);
grid on;
xlabel('$0 \leq t \leq \pi/2, \text{sec}$','Interpreter','latex','FontSize',14);
ylabel('$Q_i, \text{Nm}$','Interpreter','latex','FontSize',14);

```

### Файл «calc\_whbase.m»

```

%This function calculates Whbase row vector values in specified
%points of state space
function whbase = calc_whbase(q,qp)

```

```

%Specify coordinate matrix of linear independent elements of
%Wh in Fl space natural basis (zero rows are excluded).
Zbase = [1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,867.2e-3,0;
0,1,1,0,0,0,863.6e-3,0,1,1,0,0,0,867.2e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,867.2e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,867.2e-3,0;
0,1,-1,0,0,0,863.6e-3,0,-1,1,0,0,0,-867.2e-3,0;
0,0,0,-2,0,0,0,-863.6e-3,0,0,2,0,0,0,867.2e-3;
0,0,0,0,0,1,0,150e-3,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,1,0,150e-3,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,9.81,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,9.81,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,-1,1,0,0,0,-867.2e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,867.2e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,863.6e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-863.6e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,2,-2,0,0,0,1734.4e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-4,0,0,0,-1734.4e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-863.6e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-863.6e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-4,0,0,0,-1734.4e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,-2,2,0,0,0,-1734.4e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,150e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,150e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,150e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,-150e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,863.6e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-863.6e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,150e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,150e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,150e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,-150e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,431.8e-3,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-431.8e-3;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,9.81;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,9.81,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,9.81,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-9.81];
%Calculate values of required base vectors of Yi spaces
b0020 = cos(q(2,:))';
b0030 = sin(q(2,:))';
b0040 = b0020.^2;
b0050 = b0020 .* b0030;

b0002 = cos(q(3,:))';
b0003 = sin(q(3,:))';
b0004 = b0002.^2;
b0005 = b0002 .* b0003;

b1000 = (qp(1,:).^2 / 2)';
b2000 = (qp(1,:) .* qp(2,:))';
b3000 = (qp(2,:).^2 / 2)';
b4000 = (qp(1,:) .* qp(3,:))';
b5000 = (qp(2,:) .* qp(3,:))';
b6000 = (qp(3,:).^2 / 2)';
%Init row vector of Fl space base vectors values
base = zeros(size(q,2),size(Zbase,1));
%Calculate values of Fl space base vectors with respect

```

```

%to non-zero rows in Zbase matrix
base(:,1) = b1000;
base(:,2) = b3000;
base(:,3) = b5000;
base(:,4) = b6000;
base(:,5) = b0040;
base(:,6) = b0050;
base(:,7) = b0020 .* b2000;
base(:,8) = b0030 .* b2000;
base(:,9) = b0020;
base(:,10) = b0030;
base(:,11) = b0004 .* b1000;
base(:,12) = b0005 .* b1000;
base(:,13) = b0040 .* b0002 .* b1000;
base(:,14) = b0040 .* b0003 .* b1000;
base(:,15) = b0040 .* b0004 .* b1000;
base(:,16) = b0040 .* b0005 .* b1000;
base(:,17) = b0050 .* b0002 .* b1000;
base(:,18) = b0050 .* b0003 .* b1000;
base(:,19) = b0050 .* b0004 .* b1000;
base(:,20) = b0050 .* b0005 .* b1000;
base(:,21) = b0020 .* b0002 .* b2000;
base(:,22) = b0020 .* b0003 .* b2000;
base(:,23) = b0030 .* b0002 .* b2000;
base(:,24) = b0030 .* b0003 .* b2000;
base(:,25) = b0002 .* b3000;
base(:,26) = b0003 .* b3000;
base(:,27) = b0020 .* b0002 .* b4000;
base(:,28) = b0020 .* b0003 .* b4000;
base(:,29) = b0030 .* b0002 .* b4000;
base(:,30) = b0030 .* b0003 .* b4000;
base(:,31) = b0002 .* b5000;
base(:,32) = b0003 .* b5000;
base(:,33) = b0020 .* b0002;
base(:,34) = b0020 .* b0003;
base(:,35) = b0030 .* b0002;
base(:,36) = b0030 .* b0003;
%Calculate Whbase values
whbase = base * Zbase;

```

## Файл «calc\_etalon.m»

```

%This script calculates reference base inertial parameters
%Load robot geometric and inertial parameters with respect to CoM frame from file
addpath(genpath('.'));
run(armstrong.m);
n = length(links);
p = zeros(10*n,1);
Ti2I = inv([0,1,1; 1,0,1; 1,1,0]);
%Convert inertial parameters to D-H frame
for i=1:n
    Iuu = Ti2I * links(i).iuu;
    MoI = [Iuu(1), links(i).Ixy, links(i).Ixz;
           links(i).Ixy, Iuu(2), links(i).Iyz;
           links(i).Ixz, links(i).Iyz, Iuu(3)];
    Hc = [MoI, zeros(3,1); zeros(1,3), links(i).m];
    H = links(i).T * links(i).Tc * Hc * links(i).Tc' * links(i).T';

```



```

links(2).Ixz = 0;
links(2).Iyz = 0;
links(2).gear = 107.36;
links(2).Im = 4.71;
a2 = 431.8e-3;
l2 = 93.45e-3;
links(2).T = [eye(3), [-a2; 0; l2]; zeros(1,3), 1];

%link 3
%we must correct principal moments, because triangular inequality
%ixx+iyy-izz>0 fails
%according to original Armstrong's work iuu values have distortion:
%[+4%; +5%; +4%] respectively
%we change mean values so that Izz=(ixx+iyy-izz)/2 is maximum
links(3).m = 6.04;
links(3).rc = [0; -0.143; 0.014];
links(3).iuu = [0.19968; 0.01617; 0.20352];
links(3).Ixy = 0;
links(3).Ixz = 0;
links(3).Iyz = 0;
links(3).gear = 53.69;
links(3).Im = 0.83;
l31 = 20.3e-3;
l32 = 433.1e-3;
a3 = sqrt(l31^2 + l32^2);
phi = atan(l31/l32);
links(3).T = [[-sin(phi), -cos(phi), 0; cos(phi), -sin(phi), 0; 0, 0, 1], [-a3; 0; 0]; ...
              zeros(1,3), 1];

for i=1:length(links)
    links(i).Tc = [eye(3), links(i).rc; zeros(1,3), 1];
    links(i).im = links(i).Im / (links(i).gear^2);
end

```