

Федеральное государственное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук»

*На правах рукописи*

Монахова Ульяна Владимировна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМОГО ОТНОСИТЕЛЬНОГО  
ДВИЖЕНИЯ ГРУППЫ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ  
НА НИЗКОЙ ОКОЛОЗЕМНОЙ ОРБИТЕ**

Специальность 1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доцент, к.ф.-м.н.  
Д.С. Иванов

Москва – 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>  | <b>4</b>  |
| <b>ГЛАВА 1. УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ГРУППЫ МАЛЫХ<br/>КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПОСЛЕ КЛАСТЕРНОГО<br/>ЗАПУСКА.....</b> | <b>16</b> |
| 1.1. МОДЕЛЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.....   | 17        |
| 1.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....  | 20        |
| 1.3. ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ.....  | 20        |
| 1.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ<br>УПРАВЛЕНИЯ<br>.....  | 23        |
| 1.5. ОЦЕНКА НЕОБХОДИМОЙ ЗОНЫ ВИДИМОСТИ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ<br>СВЯЗНОСТИ ГРУППЫ .....                               | 26        |
| 1.6. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ .....  | 30        |
| 1.7. ЗАКОН УПРАВЛЕНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИЙ ИЗМЕНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ<br>РАССТОЯНИЙ .....                                 | 40        |
| 1.8. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ .....  | 45        |
| 1.9. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1 .....   | 47        |
| <b>ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНОЙ СПУТНИКОВОЙ<br/>ФОРМАЦИИ.....</b>   | <b>48</b> |
| 2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....  | 49        |
| 2.2. МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ АППАРАТА С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЙ .....  | 50        |
| 2.3. ОПОРНЫЕ ОРБИТЫ.....   | 53        |
| 2.4. ФАЗИРОВАНИЕ АППАРАТОВ .....   | 55        |
| 2.5. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ .....  | 60        |
| 2.6. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2 .....   | 67        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>ГЛАВА 3. МАГНИТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИ ВЫТЯНУТОГО МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА.....</b> | <b>68</b> |
| 3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....   | 70        |
| 3.2. МОДЕЛЬ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ .....   | 70        |
| 3.3. ОПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ .....   | 74        |
| 3.4. ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ.....   | 76        |
| 3.5. РЕАЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАГНИТНЫХ КАТУШЕК .....  | 77        |
| 3.6. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ .....   | 81        |
| 3.7. ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ ФОРМАЦИИ.....   | 90        |
| 3.8. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3 .....  | 93        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>   | <b>94</b> |
| <b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>  | <b>95</b> |

# ВВЕДЕНИЕ

## **Актуальность темы исследования и современное состояние работ по теме исследования**

В настоящее время бурно развиваются распределённые космические системы, состоящие из большого числа космических аппаратов и решающие единую задачу. Самым распространённым типом таких систем является созвездие, или группировка, когда космические аппараты равномерно распределены на одной или нескольких орбитах. Управление орбитальным движением в таких системах, как правило, осуществляется индивидуально для каждого космического аппарата с помощью команд из центра управления полётом. Другой тип распределённых космических систем — это групповой полёт аппаратов на близком расстоянии друг относительно друга. Управление относительным движением такой системы осуществляется с помощью автономных алгоритмов управления, реализованных на бортовых компьютерах космических аппаратов, на основе измерений параметров относительного движения. Относительное движение может оцениваться с помощью специальных систем, например, на основе обработки видеоизображения [1–4] или измерений лазерных дальномеров [5], а может и вычисляться на основе переданной по межспутниковому каналу связи информации об орбитальном положении соседних аппаратов, полученной, например, с помощью автономной навигационной системы, как в работе [6]. Однако, каждая автономная система определения относительного движения имеет ограниченный радиус работы, равно как и уверенный приём по межспутниковому каналу связи осуществляется лишь в пределах заданного относительного расстояния, определяемого аппаратными особенностями. Таким образом, при построении алгоритмов управления относительным движением прежде всего требуется учитывать коммуникационные ограничения и обеспечивать связность группового полёта космических аппаратов.

Традиционный подход к управлению заключается в использовании бортовой двигательной установки для управления относительным движением в групповом полете. Реализация заданного направления вектора тяги обеспечивается при помощи трехосной системы управления ориентацией. Подобная система с полной управляемостью как орбитальным, так и угловым движением часто используется на больших спутниках, и к настоящему времени для нее разработано множество различных алгоритмов управления [7–10]. Однако, на борту малых космических аппаратов (МКА), вследствие ограничений по массе, стоимости и объему, одновременная установка реактивного двигателя и трехосной системы ориентации может быть затруднена. Поэтому в последнее время активно развиваются бестопливные подходы к управлению относительным орбитальным движением.

В случае, когда МКА оснащен двигательной установкой, но на борту отсутствует трехосная система стабилизации и ориентации, можно применить так называемое управление с одним входным каналом. Предполагается, что вектор тяги фиксирован в связанной с телом системе координат, а на аппарате установлена одна из пассивных систем ориентации, которая позволяет стабилизировать движение этой оси тяги. Например, если спутник оснащен пассивной магнитной системой управления ориентацией, которая позволяет стабилизировать продольную ось динамически вытянутого МКА с постоянным магнитом вдоль локального вектора геомагнитного поля, управление способно обеспечить ограниченность относительных траекторий двух спутников на орбите, близкой к круговой [11]. Также спутник можно стабилизировать с помощью собственного вращения вдоль оси с минимальным моментом инерции. В работе [12] показано, что можно получить замкнутые относительные траектории с учетом возмущения от второй зональной гармоники разложения геопотенциала Земли как в случае стабилизации с помощью собственного вращения, так и в случае пассивной магнитной стабилизации, однако форма замкнутых относительных траекторий зависит от параметров орбит и начальных условий.

В настоящее время предложен ряд новых подходов к управлению движением космических аппаратов в групповом полёте. Общая идея этих подходов заключается в построении управления с использованием естественных сил, что не требует расхода рабочего тела. Например, может использоваться сила аэродинамического сопротивления и сила давления солнечного излучения. В обоих случаях на аппарат накладываются некоторые требования. Во-первых, отношение площади поперечного сечения (по отношению к набегающему потоку или к направлению солнечного излучения соответственно) к массе такого МКА должно быть достаточно велико. Во-вторых, должна быть возможность существенного изменения этой площади в ходе полета, например, путем изменения ориентации аппарата. МКА класса кубсат форм-фактора 3U с габаритами 10x10x34 см подходят для применения этих подходов. Основная идея заключается в том, чтобы использовать разницу в силах окружающей среды, действующих на каждый спутник при групповом полёте. Эта разница обычно появляется, когда спутники изменяют ориентацию относительно набегающего потока, но в литературе также рассматривается изменение эффективного размера аппаратов во время полёта [13]. Модели ускорения за счет аэродинамического сопротивления и силы давления солнечного излучения схожи, но существует ряд отличий. Применять аэродинамическое управление можно только на низких околоземных орбитах, и его величина существенно меняется из-за изменения плотности атмосферы, вызванного сменой дня и ночи, сезонными эффектами, солнечной активностью, а также текущей высотой орбиты. Из-за ошибок существующих моделей плотности атмосферы не удастся с высокой точностью вычислить значение управляющей силы. Управление же на основе силы давления солнечного излучения может быть использовано на любых типах орбит, а его величина зависит в основном только от ориентации МКА относительно Солнца, однако при построении закона управления следует принимать во внимание наличие затененных участков орбиты.

Управление на основе силы аэродинамического сопротивления впервые было предложено для управления групповым полётом в 1986 г. в предположении дискретного изменения эффективного сечения спутников, летящих в группе [14]. В большом количестве работ применялись разнообразные алгоритмы управления с использованием дифференциального аэродинамического сопротивления: пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор [15], линейно-квадратичный регулятор [16], управление на основе прямого метода Ляпунова [17,18], управление в скользящем режиме [19], оптимальное управление [20] и т.д. В этих работах рассматривалось только дифференциальное аэродинамическое сопротивление, а оно позволяет управлять относительным движением лишь в орбитальной плоскости. В некоторых недавних работах также учитывается дифференциальная подъемная сила и рассматривается управление пространственным относительным движением. Применение дифференциальной подъемной силы вместе с аэродинамическим сопротивлением для задачи сближения малых спутников было впервые предложено в [21]. Стратегия управления, разработанная в [21], основана на релейном подходе, когда используются только максимальные значения подъемной силы и силы сопротивления. В работах [16,22] рассматривается проблема поддержания группового полёта за счет дифференциальной подъемной силы и сопротивления под действием возмущения от второй зональной гармоники разложения гравитационного потенциала Земли. Применение аэродинамического сопротивления для построения тетраэдральной формации с помощью кубсатов 3U рассмотрено в [23].

Идея использования силы давления солнечного излучения для управления полетом группы кубсатов вдохновлена успешными миссиями одиночных спутников, таких как LightSail-2, NanoSail-D2, IKAROS с солнечными парусами на борту. Эти аппараты оснащены активной системой ориентации, позволяющей ориентировать вектор нормали к парусу относительно направления на Солнце для создания необходимой силы

давления солнечного излучения. Ряд публикаций посвящен алгоритму управления с использованием паруса с постоянными параметрами модели отражения [24–29] и парусов с переменной отражательной способностью [30].

Также существует ряд работ, где управление реализуется с помощью электромагнитного взаимодействия между аппаратами. Концепция управления групповым полётом с помощью электростатических сил была рассмотрена в [31–34]. Эти работы основаны на результатах миссии SCATCNA, где впервые была испытана спутниковая система управления электростатическим зарядом. Миниатюрная электронная пушка с холодным катодом для зарядки использовалась в миссиях Aalto-1 и ESTCube-1. Бортовая электронная пушка использовалась для создания тока по развернутому тросу для применения силы Лоренца в геомагнитном поле для более быстрого увода аппарата с орбиты. Отметим, что эту силу можно использовать и для управления групповым полётом спутников.

Концепция полета связанных между собой МКА также может быть реализована с помощью аппаратов класса кубсат. Основная идея состоит в том, чтобы связать два или более спутников тросом и управлять относительным движением, изменяя его длину [35–38]. Реализация этой концепции затруднена из-за гибкого движения тросовой системы [39]. Для обеспечения натяжения троса требуется заданное относительное движение двух соединенных спутников.

Анализ литературы показывает, что в настоящее время многие известные научные группы занимаются решением задач, связанных с управлением относительным движением в групповом полете, а значит тематика настоящего диссертационного исследования является актуальной и востребованной.



## **Цели и задачи работы**

Целью настоящей работы является разработка методов построения управления относительным движением малых космических аппаратов в групповом полете с использованием аэродинамических сил на низкой околоземной орбите.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

- Разработка алгоритмов управления относительным движением космических аппаратов с использованием аэродинамических сил.
- Исследование управляемого движения группы малых космических аппаратов с учётом коммуникационных ограничений.
- Построение и реализация опорного углового движения для обеспечения действия требуемой аэродинамической силы.
- Оценка точности ориентации, которую обеспечивает магнитная система управления, в зависимости от внешних неучтенных возмущений и параметров МКА.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Предложены алгоритмы управления относительным движением космических аппаратов с использованием аэродинамических сил для задачи обеспечения ограниченности относительных траекторий движения спутников в группе. Получены конечные выражения для требуемого размера коммуникационной области в зависимости от ошибок выведения во время кластерного запуска. С помощью численного исследования показано, что в случае действия внешних возмущений управление с учётом параметра среднего сдвига способствует улучшению связности аппаратов в группе, что приводит к ограниченности относительных траекторий.

2. Разработана методика построения и бестопливного поддержания спутниковой формации в конфигурации правильного треугольника с изменяемым размером ребра при пролёте над экваториальной зоной. В

результате исследования показано, что качество получаемой треугольной формации зависит от солнечной активности и ошибок выведения.

3. Предложен алгоритм стабилизации гравитационных положений равновесия вытянутого МКА с помощью магнитной системы управления, что требуется для обеспечения действия требуемой аэродинамической силы. Исследование показало, что с использованием предложенного алгоритма удаётся достичь точности ориентации в среднем не хуже 5 градусов с учетом ошибок начальных условий и неточности знания тензора инерции.

### **Научная новизна работы**

В работе предложены новые алгоритмы управления относительным движением группы малых спутников с учётом коммуникационных ограничений. Получены новые результаты аналитического исследования управляемого движения с использованием теории графов, которые подтверждены численно методом Монте-Карло. Предложен новый подход к управлению движением группы, состоящей из трёх аппаратов, для достижения требуемого относительного положения в зоне интереса над экватором. Для реализации необходимого аэродинамического сопротивления, действующего на аппарат, был предложен новый алгоритм активного магнитного управления ориентацией с матрицей параметров управления, выбор которых осуществляется с использованием теории Флоке.

### **Научная и практическая значимость работы**

Предложенный подход к управлению движением группы трёх спутников планируется реализовать в миссии по исследованию гамма-вспышек в атмосфере совместно с НИИЯФ МГУ. Результаты исследования управляемого движения группы малых спутников с учетом коммуникационных ограничений могут быть использованы при проектировании реальной миссии, в которых участвуют аппараты с оптической системой относительной навигации. Предложенный алгоритм активного магнитного управления применим для малых спутников формата 3U кубсат или ТНС-0.

## **Апробация результатов работы**

Результаты работы были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства (г. Москва, 2019, 2022, 2023).
- International Astronautical Congress (2021, 2022, 2023).
- The 13th IAA Symposium on Small Satellites for Earth observation (г. Берлин, Германия, 2021).
- Конференция международных математических центров мирового уровня (г. Сочи, 2021).
- International Workshop on Satellite Constellations & Formation Flying (г. Глазго, Шотландия, 2019).
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Уфа, 2019).

Результаты работы также обсуждались на следующих научных семинарах:

- Семинар «Динамика космических систем» отдела №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под рук. М.Ю. Овчинникова).
- Московский городской научно-методический семинар по теоретической механике МГТУ им. Н.Э. Баумана (под рук. И.Г. Благовещенского).
- Семинар по механике, управлению и информатике ИКИ РАН (под рук. Р.Р. Назирова).
- Семинар «Механика космического полета», проводимый на кафедре «Космические системы и ракетостроение» МАИ (под рук. В.Г. Петухова).
- Научный семинар «Механика и управление движением космических аппаратов» Баллистического центра ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под рук. А.Г. Тучина).
- Семинар отдела №5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под рук. Ю.Ф. Голубева).

## **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 10 научных работ в изданиях, рекомендованных ВАК, в которых излагаются основные научные результаты диссертации. Из них 5 статей опубликованы в журналах, индексируемых в базах научного цитирования Scopus и/или Web of Science, 3 – конференционные статьи в сборниках трудов конференций, индексируемых в базах Scopus и/или Web of Science.

### **Основные публикации автора по теме работы:**

1. Ivanov D., Monakhova U., Ovchinnikov M., Nanosatellites swarm deployment using decentralized differential drag-based control with communicational constraints, *Acta Astronautica*, 2019, V. 159, P. 646-657. (doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.02.006). WoS, Scopus, Q1.
2. Ivanov D., Monakhova U., Ovchinnikov M., Roldugin D., Decentralized Control of Nanosatellites Swarm Spatial Distribution in LEO Using Magnetorquers, *Advances in Space Research*, 2020, V. 67, № 11, P. 3489-3503 (doi.org/10.1016/j.asr.2020.05.024). WoS, Scopus, Q1.
3. Monakhova U., Ivanov D., Mashtakov Ya., Shestakov S., Ovchinnikov M., Communication Area Estimation for Decentralized Control of Nanosatellites Swarm, *Acta Astronautica*, 2023, V. 211, P. 49-59, (doi.org/10.1016/j.actaastro.2023.06.003). WoS, Scopus, Q1.
4. Roldugin D., Okhitina A., Monakhova U., Ovchinnikov M., Comparison of Feedback Three-Axis Magnetic Attitude Control Strategies, *Aerospace*, 2023, V. 10(12), 975, 13 p. (doi.org/10.3390/aerospace10120975). WoS, Scopus, Q1.
5. Monakhova U., Shestakov S., Mashtakov Ya., Ivanov D., Decentralized Swarm Control of Small Satellites for Communication Connectivity Maintenance, *Cosmic Research*, 2024, V. 62(1), p. 106–116, (doi.org/10.1134/S0010952523700776) WoS, Scopus.
6. Монахова У.В., Орбитальная стабилизация динамически вытянутого малого космического аппарата с помощью магнитной системы

ориентации, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2024, № 5, 20 с. (doi.org/10.20948/prepr-2024-5) ВАК.

7. Маштаков Я.В., Монахова У.В., Иванов Д.С., Идентификация транзиентных эффектов в атмосфере Земли при помощи малых космических аппаратов, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2024, № 12, 19 с. (doi.org/10.20948/prepr-2024-12) ВАК.
8. Monakhova U., Ivanov D., Roldugin D., Magnetorquers attitude control for differential aerodynamic force application to nanosatellite formation flying construction and maintenance, Advances in the Astronautical Sciences, 1st IAA/AAS SciTech Forum on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials, 2020, p. 385-397. WoS, Scopus (*конф.*).
9. Monakhova U., Ivanov D., Mashtakov Ya., Shestakov S., Approaches to studying the performance of swarm decentralized control algorithms, Proceedings of 72<sup>nd</sup> International Astronautical Congress (IAC), 2021, 9 p. Scopus (*конф.*).
10. Monakhova U., Ivanov D., Mashtakov Ya., Magnetorquers attitude control for formation flying in LEO, Proceedings of 74<sup>th</sup> International Astronautical Congress (IAC), 2023, 5 p. Scopus (*конф.*).

#### **Личный вклад соискателя**

Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач были сформулированы научным руководителем Ивановым Д.С., результаты исследований обсуждались с соавторами.

Диссертационная работа **соответствует паспорту специальности (ПС)**

1.1.7 «Теоретическая механика, динамика машин» по ряду направлений. Рассматриваемые механические системы состоят из нескольких МКА. При анализе уравнений движения группы МКА используются методы аналитической механики (направление 1 ПС) и динамики космических аппаратов (направление 10 ПС). Построенные законы управления как для

движения МКА относительно друг друга, так и для движения МКА относительно центра масс опираются на методы теории устойчивости (направление 2 ПС). Для верификации моделей и алгоритмов управления проводилось математическое и компьютерное моделирование кинематики и динамики (направление 14 ПС) движения группы МКА, оснащенных магнитной системой ориентации. Работа имеет выраженный фундаментальный характер и поэтому относится к физико-математической отрасли наук.

**Объём** диссертационной работы составляет 103 страницы. Работа включает в себя 37 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 99 наименований. Диссертационная работа имеет следующую **структуру**. Она состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы.

Во **введении** проводится обзор существующих подходов к управлению движением группового полёта МКА, сформулированы цели и задачи работы, обоснована актуальность и практическая значимость.

**Первая глава** посвящена решению задачи обеспечения ограниченности относительного движения группы малых космических аппаратов после кластерного запуска. Разработаны два децентрализованных алгоритма управления, принимающих во внимание коммуникационные ограничения малых космических аппаратов с оптической системой относительной навигации. С использованием теории графов получена аналитическая оценка требуемого размера коммуникационной области для обеспечения связности спутников в группе. Аналитически полученные значения на конкретном примере верифицированы с помощью численного исследования с использованием метода Монте-Карло.

Во **второй главе** рассматривается планируемая совместно с НИИЯФ МГУ миссия группового полёта, состоящая из трёх МКА. Разработан алгоритм изменения площади поперечного сечения МКА для обеспечения требуемой силы аэродинамического сопротивления с целью достижения такого

относительного движения, когда аппараты находятся в вершинах правильного треугольника над экваториальной зоной. С помощью численного моделирования исследуются характеристики управляемого движения при различных ошибках выведения и различной величине солнечной активности.

В **третьей главе** предложен алгоритм активного магнитного управления, который позволяет достичь стабилизации гравитационных положений равновесия, соответствующих максимальной и минимальной величине аэродинамического сопротивления. Матричные коэффициенты закона управления, при которых МКА стабилизируется в положениях равновесия, определяются с помощью теории Флоке. Применение разработанного алгоритма продемонстрировано на примере задачи управления движением треугольной формации.

В **заключении** приводятся и анализируются основные результаты диссертационной работы.

# ГЛАВА 1. УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ГРУППЫ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПОСЛЕ КЛАСТЕРНОГО ЗАПУСКА

Групповой полёт большого числа космических аппаратов в литературе часто называется роем [40]. Применение роя малых аппаратов рассматривается в задачах изучения магнитосферы Земли [41], сборки орбитальных станций [42], построения распределённой системы сенсоров в ионосфере [43], исследования параметров модели гравитационного поля астероидов [44] и др. Основная особенность управления движением роя космических аппаратов заключается в невозможности учесть в алгоритме управления относительное движение всех аппаратов в группе, в частности, из-за коммуникационных ограничений. Поэтому управление строится каждым аппаратом децентрализованно, т.е. независимо от управления других аппаратов, и, как правило, на основе информации об относительных траекториях только ближайших соседей. Это может приводить к случайным хаотическим относительным траекториям, при этом основная задача управления сводится к обеспечению связности роя. В работе [45] был рассмотрен ряд алгоритмов управления с обратной связью с учётом коммуникационных ограничений. Для управления групповым полётом в условиях неопределённостей в работе [46] предлагается использование нейронных адаптивных сетей. Для группы аппаратов SPHERES, разработанных в Massachusetts Institute of Technology, был реализован эволюционный подход к децентрализованному управлению с использованием метода роя частиц [47]. В работе [42] рассматривается задача строительства орбитальной станции с помощью роя из разнородных аппаратов, которая решается с помощью алгоритма, состоящего из двух частей: распределенного аукциона, который использует барьерные функции для обеспечения правильного выбора агента для каждой цели, и части генерации траектории,



которая использует прогнозирующее управление и последовательное выпуклое программирование для достижения оптимальных траекторий без столкновений к желаемой целевой точке. К недостаткам описанных подходов можно отнести высокую вычислительную сложность, что может помешать их реализации на борту МКА. В работе [48] предложен другой менее вычислительно затратный подход к управлению роем малых спутников. Основной целью при этом является устранение относительного дрейфа, предотвращение столкновений между аппаратами и минимизация общего потраченного роем топлива. Подход основан на управлении с обратной связью, однако предполагается, что алгоритм централизованный и ему известна информация о движении всех элементов системы. При рассмотрении роя малых спутников одним из ключевых аспектов является децентрализованное автономное определение относительного движения. В работе [3] эта задача решается с помощью локальных коммуникационных графов и графов наблюдаемости соседних элементов системы, предложен децентрализованный консенсусный подход к совместной оценке относительного движения аппаратов в группе.

В настоящей главе диссертационной работы рассматривается задача управления движением многочисленной группой МКА сразу после кластерного запуска. Основной особенностью разработанных децентрализованных алгоритмов управления является учет коммуникационных ограничений, что непосредственно влияет на характеристики относительного движения МКА.

### **1.1. Модель относительного движения**

Для описания траекторий малых космических аппаратов (МКА) удобно пользоваться уравнениями движения, записанными в относительных координатах. Для описания относительного движения двух произвольных МКА из группы, находящихся на относительных расстояниях много меньше радиуса орбиты, в этой главе будет использоваться линеаризованная модель

движения относительно транспортирующей системы — уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира [49,50]. Модель описывает движение произвольно выбранного МКА из группы относительно орбитальной системы координат (ОрбСК) под действием центрального гравитационного поля Земли. Начало отсчета этой системы находится в точке  $O$ , движущейся по круговой орбите радиусом  $r_0$ , с орбитальной угловой скоростью  $\omega$ . Ось  $Oz$  направлена вдоль прямой, соединяющей центр масс Земли с точкой  $O$ , ось  $Oy$  направлена по нормали к плоскости орбиты, ось  $Ox$  дополняет тройку до правой (Рис. 1.1).

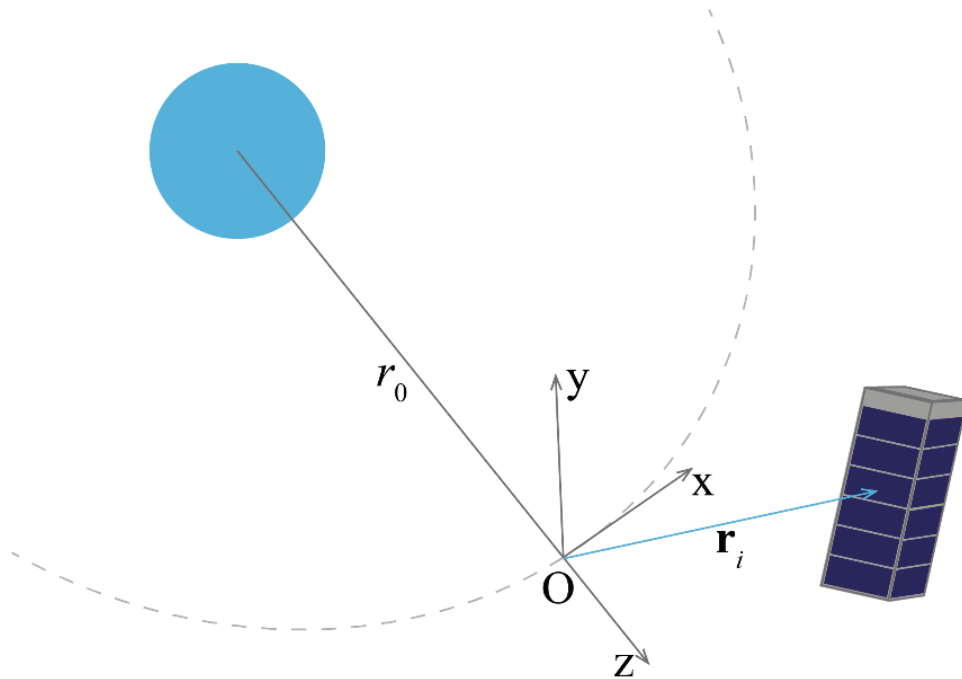


Рис. 1.1. Система координат

Пусть  $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$  — координаты  $i$ -го МКА в ОрбСК,  $i = 1, \dots, N$ , где  $N$  — количество МКА в группе. Тогда для координат вектора относительного положения МКА можно записать следующую систему уравнений движения [49,50]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + 2\omega\dot{z}_i &= 0, \\ \ddot{y}_i + \omega^2 y_i &= 0, \\ \ddot{z}_i - 2\omega\dot{x}_i - 3\omega^2 z_i &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Система линейных дифференциальных уравнений (1), описывающая движение  $i$ -го МКА, имеет следующее решение:

$$\begin{aligned}
x_i &= D_i(t) + 2A_i \cos(\omega t + \psi_i), \\
y_i &= B_i \cos(\omega t + \varphi_i), \\
z_i &= 2C_i + A_i \sin(\omega t + \psi_i),
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $A, B, C, D, \psi, \varphi$  — параметры движения, которые зависят от начальных условий  $\left[ x_i(0), y_i(0), z_i(0), \dot{x}_i(0), \dot{y}_i(0), \dot{z}_i(0) \right]^T$ :

$$\begin{aligned}
C_i &= \frac{\dot{x}_i(0)}{\omega} + 2z_i(0), \\
D_i(t) &= -3C_i\omega t + x_i(0) - \frac{2\dot{z}_i(0)}{\omega}, \\
B_i &= \sqrt{\frac{\dot{y}_i^2(0)}{\omega^2} + y_i^2(0)}, \\
A_i &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\dot{z}_i^2(0) + 4z_i^2(0)\omega^2 + 8z_i(0)\dot{x}_i(0)\omega + 4\dot{x}_i^2(0)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим управляемое движение группы МКА. Будем предполагать, что каждый аппарат оснащен системой управления относительным движением. Введем обозначение для ускорения  $\mathbf{u}_i = [u_i^x, u_i^y, u_i^z]^T$ , где  $\mathbf{u}_i$  — ускорение, реализованное  $i$ -м МКА относительно точки  $O$ . Тогда параметры движения с учетом управления  $\mathbf{u}_i$  будут изменяться согласно следующим уравнениям [51]:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i &= \frac{1}{\omega} (u_i^z \cos \psi_i - 2u_i^x \sin \psi_i), \\
\dot{B}_i &= -\frac{1}{\omega} u_i^y \sin \varphi_i, \\
\dot{C}_i &= \frac{1}{\omega} u_i^x, \\
\dot{D}_i &= -3\omega C_i - \frac{2}{\omega} u_i^z, \\
\dot{\psi}_i &= \omega - \frac{1}{\omega A_i} (u_i^z \sin \psi_i + 2u_i^x \cos \psi_i), \\
\dot{\varphi}_i &= \omega - \frac{1}{\omega B_i} u_i^y \sin \varphi_i,
\end{aligned} \tag{4}$$

## 1.2. Постановка задачи

Рассматривается группа МКА, запущенных на низкую околоземную орбиту (НОО). Предполагается, что каждый МКА оснащен системой определения относительного движения, способной оценивать положение и скорость любого соседнего МКА в пределах заданной максимальной дальности, которую в дальнейшем будем называть зоной видимости. Если расстояние до какого-то МКА больше, чем радиус зоны видимости, то информация о его движении отсутствует. В начальный момент времени группа МКА движется в соответствии с заданными условиями отделения, которые зависят от характеристик транспортно-пусковых контейнеров. Такая система запуска имеет определенные погрешности исполнения, которые становятся причиной различных скоростей у МКА после отделения. При отсутствии управления под действием гравитационного поля Земли различия в начальных скоростях приведут к постепенному увеличению относительных расстояний между МКА. Поэтому необходимо разработать алгоритм управления, который будет препятствовать увеличению относительных расстояний. Требуемое управление, полученное с помощью этого алгоритма, будет создаваться с помощью силы аэродинамического сопротивления. Изменение величины аэродинамического сопротивления, действующего на спутник, достигается с помощью изменения его ориентации, т.е. изменения площади поперечного сечения относительно скорости движения аппарата. Предполагается, что спутники оснащены трехосной системой ориентации для управления угловым движением.

## 1.3. Построение управления

Можно заметить из уравнений движения (2), что движение по оси  $Oy$  является ограниченным, поэтому в работе будет рассмотрено движение спутников в плоскости  $Oxz$ . По оси  $Ox$  относительное расстояние линейно увеличивается со временем пропорционально параметру  $C_i$  (Рис. 1.2). Далее этот параметр будем называть дрейфом МКА относительно точки  $O$ . Таким

образом, чтобы относительные расстояния между МКА в группе не увеличивались со временем необходимо, чтобы выполнялось  $C_i - C_j = C_{ij} = 0$  для любых двух аппаратов  $i$  и  $j$ . Это также приведет к достижению замкнутых траекторий для всех аппаратов относительно друг друга. Поэтому основной задачей управления относительным движением будет являться устранение относительного дрейфа  $C_{ij}$  между всеми МКА в группе.

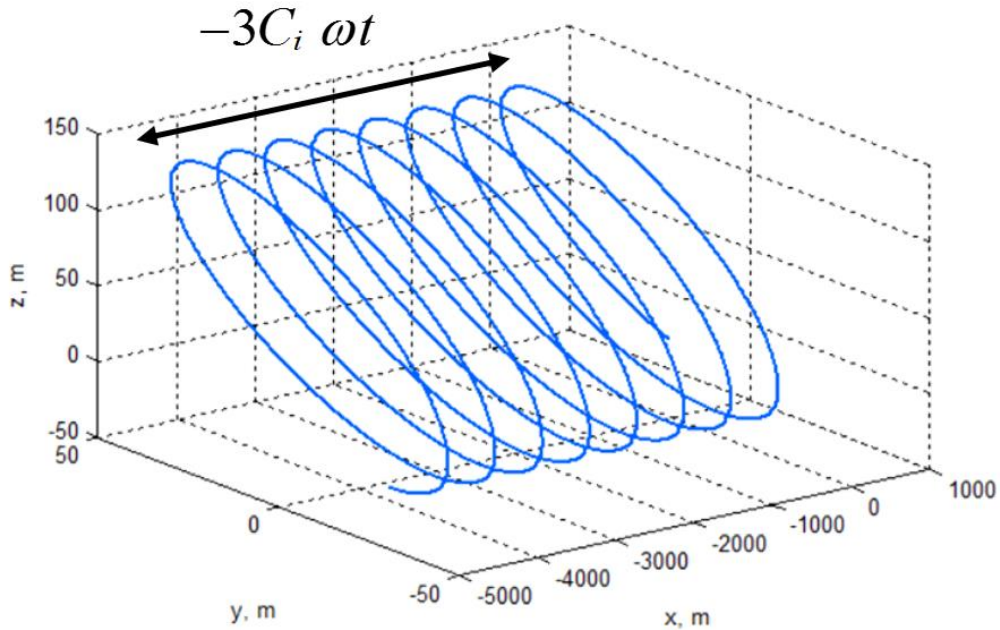


Рис. 1.2. Влияние ненулевого параметра дрейфа  $C_i$  на траекторию спутника

Так как на величину  $C_i$  влияет только проекция управления  $\mathbf{u}_i$  на ось  $Ox$  (4), то будет рассматриваться управление вида  $\mathbf{u}_i = [u_i^x, 0, 0]^T$ . В дальнейшем такой подход позволит использовать силу аэродинамического сопротивления в качестве управляющего воздействия.

Основной целью управления является устранение именно относительного дрейфа  $C_{ij}$ , поэтому рассмотрим управление, построенное на основе средних значений дрейфов аппаратов внутри группы. Для  $i$ -го МКА известно относительное движение не всех аппаратов в группе, а только тех, которые попадают в его зону видимости. Пусть зона видимости представляет

собой сферу радиуса  $R_{comm}$  с центром в центре масс  $i$ -го МКА. Количество аппаратов, попавших в такую зону, обозначается  $N_{comm}^i$  (Рис. 1.3). Тогда величину среднего дрейфа  $\bar{C}_i$  МКА относительно  $i$ -го МКА можно записать следующим образом:

$$\bar{C}_i = \sum_j C_{ij} / N_{comm}^i, \quad (5)$$

где суммирование ведется по тем индексам  $j$ , которым соответствуют аппараты в зоне видимости.

Рассмотрим следующий закон управления  $i$ -го МКА с учетом среднего дрейфа:

$$u_i^x = -k \bar{C}_i, \quad (6)$$

где  $k > 0$  — коэффициент управления.

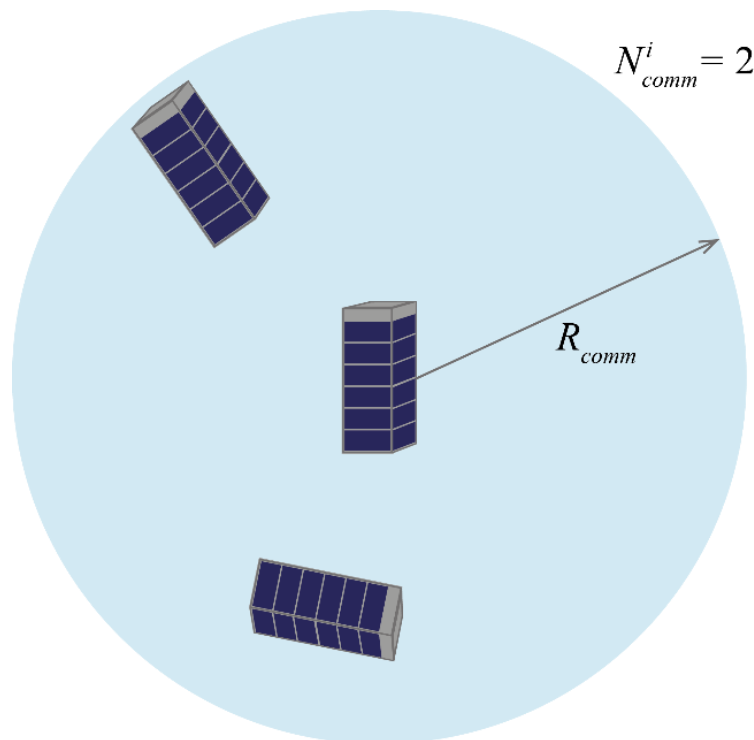


Рис. 1.3. Пример зоны видимости  $i$ -го МКА, внутрь которой попадает два аппарата

#### 1.4. Исследование движения системы под действием управления

Для исследования управляемого движения рассмотрим задачу в терминах теории графов. Каждый отдельный МКА будет являться вершиной графа. Ребро между  $i$ -й и  $j$ -й вершинами будет существовать, только если  $i$ -й и  $j$ -й аппараты находятся внутри зоны видимости друг друга (т.е. расстояние между ними меньше, чем  $R_{comm}$ ). Если расстояния между всеми МКА в группе меньше чем  $R_{comm}$ , другими словами между любыми  $i$ -й и  $j$ -й вершинами существует соединяющее их ребро, то такой граф будет являться полным. Если же между любыми двумя вершинами существует путь, то такой граф является связным (Рис. 1.4). Путем между вершинами  $i$  и  $j$  в графе называется последовательность ребер, соединяющая эти вершины.

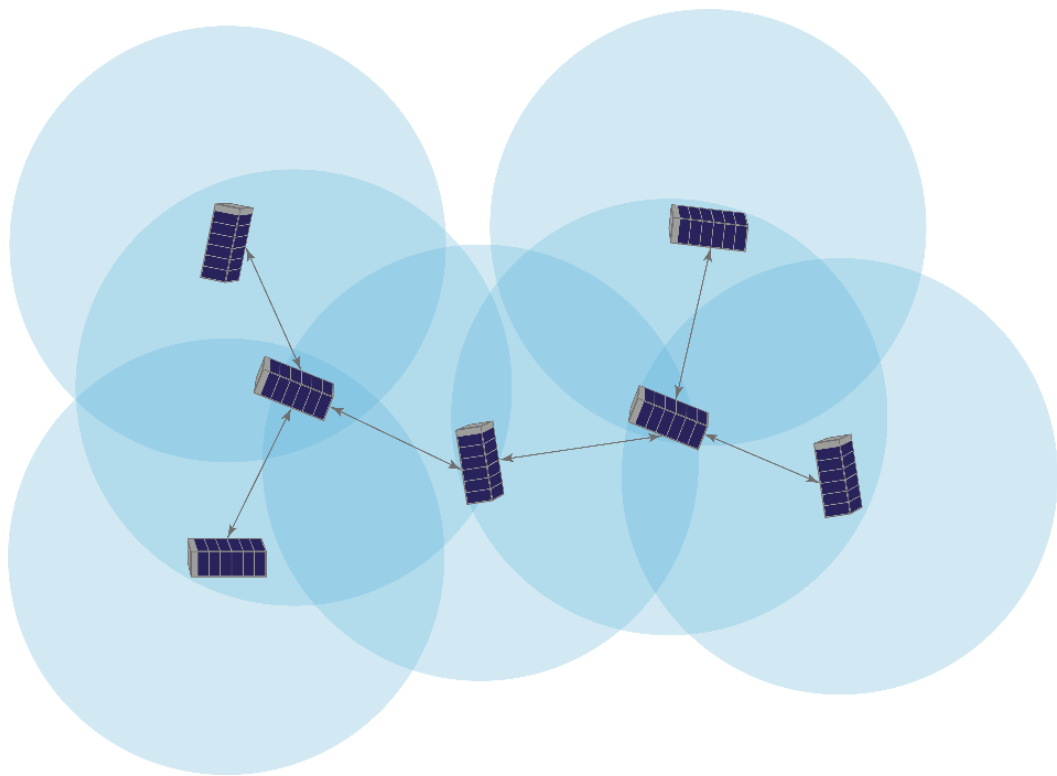


Рис. 1.4. Пример связного графа

В такой формулировке задачи величина среднего дрейфа  $\bar{C}_i$  зависит от количества ребер  $N_{comm}^i$ , исходящих из  $i$ -й вершины в графе. При этом  $N - N_{comm}^i - 1$  аппарат не вносят никакого вклада в управление  $i$ -м МКА, т.к.

вершины, соответствующие данным аппаратам, не соединены с  $i$ -й вершиной. Таким образом, выражение для среднего дрейфа (5) может быть переписано следующим образом:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{S}\mathbf{C}$$

где  $\bar{\mathbf{C}} = [\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_N]^T$  — это вектор, состоящий из средних дрейфов, где нижний индекс указывает на номер спутника, относительно которого был посчитан средний дрейф,  $\mathbf{C} = [C_1, C_2, \dots, C_N]^T$  — вектор дрейфов аппаратов относительно точки  $O$  в ОрбСК,  $\mathbf{S}$  — матрица размера  $N \times N$  с элементами:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ и } i\text{-й спутник не видит } j\text{-й}, \\ -1/N_{comm}^i, & \text{если } i \neq j \text{ и } i\text{-й спутник видит } j\text{-й}. \end{cases} \quad (7)$$

Введем некоторые понятия из теории графов для дальнейшего исследования закона управления. Матрица смежности  $\mathbf{A}$  для графа с числом вершин  $N$  — это квадратная матрица  $N \times N$  такая, что элемент этой матрицы  $a_{ij}$  равен числу ребер исходящих из  $i$ -й вершины в  $j$ -ю. Матрица степеней графа  $\mathbf{D}_g$  — матрица, на главной диагонали которой расположены степени вершин графа, а остальные элементы равны нулю. Матрица Кирхгофа  $\mathbf{L}$  и нормированная матрица Кирхгофа  $\mathcal{L}$  получаются следующим образом [21,22]:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}_g - \mathbf{A}, \quad \mathcal{L} = \mathbf{D}_g^{-1/2} \mathbf{L} \mathbf{D}_g^{-1/2}.$$

Можно заметить, что матрица  $\mathbf{S}$  связана с нормированной матрицей Кирхгофа  $\mathcal{L}$  следующим образом:

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}_g^{-1/2} \mathcal{L} \mathbf{D}_g^{1/2}. \quad (8)$$

Это означает, что собственные числа матрицы  $\mathbf{S}$  совпадают с собственными числами матрицы  $\mathcal{L}$ . Для рассматриваемого алгоритма управления следующие свойства спектра  $\mathcal{L}$  представляют особый интерес [52]. Ноль всегда является собственным числом матрицы  $\mathcal{L}$ . Кратность нулевого собственного числа матрицы  $\mathcal{L}$  равна количеству компонент



связности графа. Компонента связности графа — некоторое множество вершин графа такое, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества. В нашей постановке задачи компонента связности будет равна количеству подгрупп, на которые разделилась группа МКА. Второе важное свойство нормированной матрицы Кирхгофа — все ненулевые собственные числа строго положительные. Единственное нулевое собственное число в таком случае будет соответствовать величине дрейфа всей группы относительно точки  $O$ .

Уравнения изменения вектора дрейфов  $\mathbf{C}$  с учетом рассматриваемого управления являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\dot{\mathbf{C}} = -\frac{k}{\omega} \mathbf{S} \mathbf{C}, \quad (9)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{h}_1 + \alpha_2 \mathbf{h}_2 e^{-\frac{k}{\omega} \lambda_2 t} + \dots + \alpha_N \mathbf{h}_N e^{-\frac{k}{\omega} \lambda_N t},$$

где  $\alpha_i$  — параметр, зависящий от начальных условий,  $\mathbf{h}_i$  — собственные векторы,  $\lambda_i > 0$  — собственные числа матрицы  $\mathbf{S}$ , причем  $\mathbf{h}_1$  — вектор, состоящий из единиц и соответствующий нулевому собственному числу. Таким образом, при увеличении времени дрейфы спутников экспоненциально уменьшаются до общей величины дрейфа  $\mathbf{C} \rightarrow \alpha_1 \mathbf{h}_1$ , соответствующей нулевому собственному значению матрицы  $\mathbf{S}$ , а относительный дрейф  $C_{ij}$  между всеми аппаратами в таком случае экспоненциально уменьшается к нулю. Скорость сходимости можно оценить наименьшим положительным собственным числом  $\lambda_{\min}$  матрицы  $\mathbf{S}$ , то есть наибольшей степенью экспоненты в решении. В общем случае посчитать скорость сходимости для связного графа — это сложная для аналитического исследования задача, но существуют некоторые оценки для  $\lambda_{\min}$ . Для полного графа с  $N$  вершинами

было получено, что  $\lambda_{\min} = \frac{N}{N-1}$  [52]. Также в работах [53,54] была получена нижняя оценка на величину собственных значений матрицы  $\mathcal{L}$  для графа общего вида с  $N$  вершинами  $\lambda_{\min} \geq \frac{4}{Nd_{\max}\Delta}$ , где  $d_{\max}$  — максимальная степень вершины графа,  $\Delta$  — диаметр графа (расстояние между наиболее удаленными друг от друга вершинами графа).

### 1.5. Оценка необходимой зоны видимости для обеспечения связности группы

Так как выбранное управление сводит все относительные дрейфы  $C_{ij}$  к нулю, когда МКА образуют связный граф, необходимо оценить радиус зоны видимости  $R_{\text{comm}}$ , требуемый для сохранения связности графа. Для этого оценим сначала расстояния, на которые МКА удаляются друг от друга во время кластерного запуска. Предполагается, что во время кластерного запуска аппаратам придается скорость вдоль оси  $Ox$  ОрбСК с одинаковыми интервалами времени  $\Delta t$  между запусками. Скорость отделения  $\mathbf{V}_0$  одинакова для всех МКА, но из-за неточности системы запуска возможны ошибки, и скорости отделения аппаратов немного различаются. Таким образом, вектор скорости  $\mathbf{V}_0$  в проекциях на оси ОрбСК будет рассмотрен как многомерная нормально распределенная случайная величина с известным математическим ожиданием  $E[\mathbf{V}_0] = [\mu_v, 0, 0]^T$  и ковариационной матрицей  $\text{Var}[\mathbf{V}_0] = \text{diag}(\sigma_v^2, \sigma_v^2, \sigma_v^2)$ . Также предполагается, что во время запуска управление относительным движением не происходит, и аппараты движутся в соответствии с уравнениями (2).

Как уже было отмечено ранее, в настоящей работе мы будем рассматривать движение группы в плоскости  $Oxz$ . Из уравнений движения в этой плоскости можно заметить, что основной вклад в увеличение расстояний между спутниками вносит параметр  $D_i$ . Предполагается, что начальные

условия отделения аппаратов таковы, что параметры относительных траекторий  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  малы по сравнению с размерами зоны видимости. Это соответствует малой разнице в наклонениях орбит аппаратов и малым значениям эксцентриситетов околокруговых траекторий. Таким образом, чтобы найти необходимый  $R_{comm}$  для сохранения связности, оценим, как изменяется параметр  $D_i$  за время запуска. Этот параметр также будет являться нормальной случайной величиной из-за ошибок в скорости отделения. Зная величину этих ошибок, можно рассчитать математическое ожидание  $E[D_{ij}]$  и дисперсию  $Var[D_{ij}]$  параметра  $D_{ij} = D_i - D_j$  между  $i$ -м и  $j$ -м аппаратами соответственно на момент окончания запуска  $T$ . Моментом окончания запуска считается момент  $T = N\Delta t$ . С помощью уравнений (3) найдем сначала значения параметра  $D_i$  для первых двух запущенных аппаратов:

$$D_1(T) = -3C_1(0)\omega N\Delta t + x_1(0) - \frac{2\dot{z}_1(0)}{\omega},$$

$$D_2(T) = -3C_2(\Delta t)\omega(N-1)\Delta t + x_2(\Delta t) - \frac{2\dot{z}_2(\Delta t)}{\omega}.$$

Первые два отделившиеся аппарата были выбраны для оценки параметра движения  $D_{ij}$ , так как они наибольшее время находятся без управления и будут иметь наибольшую дисперсию к моменту времени  $T$ . Зная, что начальные значения параметров и скоростей — это независимые нормально распределённые случайные величины,  $Var[D_{21}]$  и  $E[D_{21}]$  могут быть найдены следующим образом:

$$Var[D_{21}(T)] = Var[D_2(T) - D_1(T)] = 9\omega^2\Delta t^2(N-1)^2 Var[C_2(\Delta t)] +$$

$$+ Var[x_2(\Delta t)] + Var\left[\frac{2\dot{z}_2(\Delta t)}{\omega}\right] + 9\omega^2\Delta t^2 N^2 Var[C_1(0)] + Var[x_1(0)] + Var\left[\frac{2\dot{z}_1(0)}{\omega}\right],$$

$$E[D_{21}(T)] = E[D_2(T) - D_1(T)] = -3\omega(N-1)\Delta t E[C_2(\Delta t)] + 3\omega N\Delta t E[C_1(0)]$$

$$+ E[x_2(\Delta t)] - E\left[\frac{2\dot{z}_2(\Delta t)}{\omega}\right] - E[x_1(0)] + E\left[\frac{2\dot{z}_1(0)}{\omega}\right].$$

Используя уравнения (3) для нахождения параметров  $C_1(0)$ ,  $C_2(\Delta t)$  и подставляя математическое ожидание и дисперсию скорости отделения:

$$\begin{aligned} \text{Var}[D_{21}(T)] &= 9\omega^2\Delta t^2 N^2 \text{Var}\left[\frac{\dot{x}_1(0)}{\omega}\right] + 9\omega^2\Delta t^2(N-1)^2 \text{Var}\left[\frac{\dot{x}_2(\Delta t)}{\omega}\right] + \\ &+ \text{Var}\left[\frac{2\dot{z}_1(0)}{\omega}\right] + \text{Var}\left[\frac{2\dot{z}_2(\Delta t)}{\omega}\right] = 9\omega^2\Delta t^2 \left( N^2 \frac{\sigma_v^2}{\omega^2} + (N-1)^2 \frac{\sigma_v^2}{\omega^2} \right) + \frac{8\sigma_v^2}{\omega^2} = \\ &= \sigma_v^2 \left( 9\Delta t^2(2N^2 - 2N + 1) + \frac{8}{\omega^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E}[D_{21}(T)] &= -3\omega(N-1)\Delta t \text{E}\left[\frac{\dot{x}_2(\Delta t)}{\omega}\right] + 3\omega N\Delta t \text{E}\left[\frac{\dot{x}_1(0)}{\omega}\right] \\ &+ \text{E}\left[\frac{2\dot{z}_2(\Delta t)}{\omega}\right] - \text{E}\left[\frac{2\dot{z}_1(0)}{\omega}\right] = 3\Delta t\mu_v. \end{aligned}$$

Таким образом, была получена оценка на параметр  $D_{ij}$ , который показывает, на какое расстояние могут разлететься МКА за время запуска при отсутствии управления.

Теперь следует оценить изменение данного параметра в ходе управляемого движения. Будем также полагать, что на всем движении группа МКА сохраняет связность. Используя уравнения (4), найдем значения параметров  $D_1, D_2$  на момент  $T_{end}$  достижения околонулевого значения параметра относительного дрейфа:

$$D_2(T_{end}) - D_1(T_{end}) = D_2(T) - D_1(T) - 3\omega \int_T^{T_{end}} C_2(t)dt + 3\omega \int_T^{T_{end}} C_1(t)dt. \quad (10)$$

Параметры  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$  являются решением дифференциальных уравнений (9) и их величина может быть оценена сверху экспонентой с наименьшей скоростью сходимости  $\lambda_{\min}$ :

$$\begin{aligned} C_1(t) &= C_{drift} + b_1 e^{-\frac{k}{\omega}\lambda_{\min}(t-T)}, \\ C_2(t) &= C_{drift} + b_2 e^{-\frac{k}{\omega}\lambda_{\min}(t-T)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $b_1, b_2$  — параметры, определяемые начальными условиями, параметр  $C_{drift}$  определяет общую величину дрейфа аппаратов,  $t \in [T, T_{end}]$ . Подставляя дрейфы (11) в уравнение (10), можно получить:

$$\begin{aligned} D_{21}(T_{end}) &= D_2(T) - D_1(T) + (b_1 - b_2)3\omega \int_T^{T_{end}} e^{-\frac{k}{\omega}\lambda_{\min}(t-T)} dt = \\ &= D_2(T) - D_1(T) + (b_1 - b_2)3\frac{\omega^2}{k} \frac{1}{\lambda_{\min}}. \end{aligned}$$

Так как предполагается, что управление заканчивается, когда все относительные дрейфы сошлись к окрестности нуля, то  $e^{-\frac{k}{\omega}\lambda_{\min}(T_{end}-T)}$  оценивается нулем. Теперь  $\text{Var}[D_{21}(T_{end})]$  и  $\text{E}[D_{21}(T_{end})]$  могут быть найдены следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Var}[D_{21}(T_{end})] &= \text{Var}[D_2(T) - D_1(T)] + \text{Var}\left[(b_1 - b_2)3\frac{\omega^2}{k} \frac{1}{\lambda_{\min}}\right] = \\ &= \sigma_V^2 \left( 9\Delta t^2 (2N^2 - 2N + 1) + \frac{8}{\omega^2} + \frac{18\omega^2}{k^2 \lambda_{\min}^2} \right), \\ \text{E}[D_{21}(T_{end})] &= \text{E}[D_2(T) - D_1(T)] + \text{E}\left[(b_1 - b_2)3\frac{\omega^2}{k} \frac{1}{\lambda_{\min}}\right] = 3\Delta t \mu_V. \end{aligned}$$

Наконец, вводя новые обозначения  $\mu_D = \text{E}[D_{21}(T_{end})]$  и  $\sigma_D = \sqrt{\text{Var}[D_{21}(T_{end})]}$ , можно получить оценку радиуса зоны видимости  $R_{comm}$ , необходимого для поддержания связности роя:

$$R_{comm} = \mu_D + 3\sigma_D = 3\Delta t \mu_V + 3\sigma_V \sqrt{9\Delta t^2 (2N^2 - 2N + 1) + \frac{8}{\omega^2} + \frac{18\omega^2}{k^2 \lambda_{\min}^2}}. \quad (12)$$

Полученное выражение позволяет приближенно вычислить требуемый размер зоны видимости при заданных значениях ошибок по скорости отделения или наоборот — вычислить допустимые ошибки запуска при заданном значении  $R_{comm}$ . Наименьшее собственное значение  $\lambda_{\min}$  в этом выражении не является фиксированным во время движения группы.

Поскольку расстояния между МКА изменяются, меняется и вид графа, который они образуют, а значит изменяется и матрица  $\mathbf{S}$ . Тем не менее, можно оценить примерные значения  $R_{cont}$  или  $\sigma_V$  по наихудшему связному графу, или наоборот рассмотреть более оптимистичный вариант в случае полного графа.

### 1.6. Численное исследование

Проведём математическое моделирование управляемого движения группы МКА под действием предложенного управления. При моделировании движения спутников учитывалось влияние центрального поля Земли, уравнения движения в инерциальной системе координат имеют следующий вид [55]:

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = -\mu \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} + \mathbf{u}_i,$$

где  $\mathbf{R}_i$  — радиус-вектор  $i$ -ого МКА в инерциальной системе координат (ИСК),  $R_i = |\mathbf{R}_i|$ ,  $\mu$  — гравитационный параметр Земли,  $\mathbf{u}_i$  — требуемое управляющее ускорение, рассчитанное в ИСК. Требуемое управление  $u_i^x$  направлено вдоль трансверсали, оно может быть реализовано с помощью разницы действующих на аппараты аэродинамических сил, однако величина управления ограничена допустимыми значениями ускорения за счет аэродинамического сопротивления  $u_i^x \in [-u_{\max}, -u_{\min}]$ , где величины  $u_{\max}$  и  $u_{\min}$  вычисляются согласно следующей модели:

$$u_{\max}^x = \frac{c_x}{2m} S_{\max} \rho |\mathbf{V}|^2, u_{\min}^x = \frac{c_x}{2m} S_{\min} \rho |\mathbf{V}|^2,$$

где  $m$  — масса МКА,  $c_x$  — баллистический коэффициент,  $S_{\max}$  и  $S_{\min}$  — максимальная и минимальная площадь поперечного сечения МКА относительно набегающего потока соответственно,  $\mathbf{V}$  — скорость аппарата относительно атмосферы,  $\rho$  — плотность атмосферы. Так как основной целью численного моделирования является верификация результатов

аналитического исследования, в работе предполагается, что требуемое управление реализуется точно, но особенности этой реализации (неточность знания плотности атмосферы, ошибки ориентации аппаратов для обеспечения требуемой площади поперечного сечения относительно набегающего потока) в этом численном исследовании не рассматриваются.

Все параметры, используемые для моделирования управляемого движения группы МКА, представлены в Таблице 1. Минимальное собственное значение  $\lambda_{\min}$  матрицы  $\mathbf{S}$  было рассчитано для полного графа с 20-ю вершинами. Интервал между пересчётом управления означает, что каждые 300 секунд данные о положениях МКА обновляются. По этим данным рассчитываются средние относительные дрейфы и сдвиги, и получаются новые величины требуемого управления для каждого МКА. Так как движение вдоль оси  $Oy$  ОрбСК является ограниченным согласно (2), траектории движения МКА представлены в проекции на плоскость  $Oxz$ .

Таблица 1. Параметры моделирования

|  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| Количество спутников, $N$                            | 20                                   |
| Масса спутника, $m$                                  | 5 кг                                 |
| Максимальная площадь поперечного сечения, $S_{\max}$ | 0.03 м <sup>2</sup>                  |
| Минимальная площадь поперечного сечения, $S_{\min}$  | 0.01 м <sup>2</sup>                  |
| Баллистический коэффициент, $c_x$                    | 1                                    |
| Плотность атмосферы, $\rho$                          | $7 \cdot 10^{-12}$ кг/м <sup>3</sup> |
| Математическое ожидание скорости отделения, $\mu_v$  | 0.05 м/с                             |
| Дисперсия скорости отделения, $\sigma_v$             | 0.01 м/с                             |
| Минимальное собственное значение, $\lambda_{\min}$   | 1.053                                |
| Интервал времени между запусками, $\Delta t$         | 3 с                                  |
| Высота орбиты, $h$                                   | 350 км                               |

|  |                      |
|--|----------------------|
| Наклонение орбиты, $i$                       | 51.7°                |
| Интервал времени между пересчётом управления | 300 с                |
| Коэффициент управления, $k$                  | $1.59 \cdot 10^{-7}$ |

Далее рассмотрим пример успешной работы алгоритма управления. Для начальных условий, представленных в Таблице 1, необходимый  $R_{comm}$  составляет 874 м согласно (12). На рис. 1.5 представлены траектории движения всех спутников относительно первого запущенного аппарата, которые, как видно, постепенно становятся замкнутыми, и, таким образом, аппараты образуют связную группу. Изменение величин относительных параметров дрейфа  $C_{1j}, j = 2, \dots, N$ , вычисленных так же относительно первого запущенного аппарата, представлены на рис. 1.6. Для рассматриваемого примера относительные параметры дрейфов спутников сходятся к нулю, что ещё раз подтверждает, что относительные траектории спутников в группе становятся ограниченными. Также можно заметить, что устранение относительного параметра дрейфа происходит за первые 20 часов после запуска. После этого величины параметров дрейфов по модулю не выходят за границы 0.04 м.



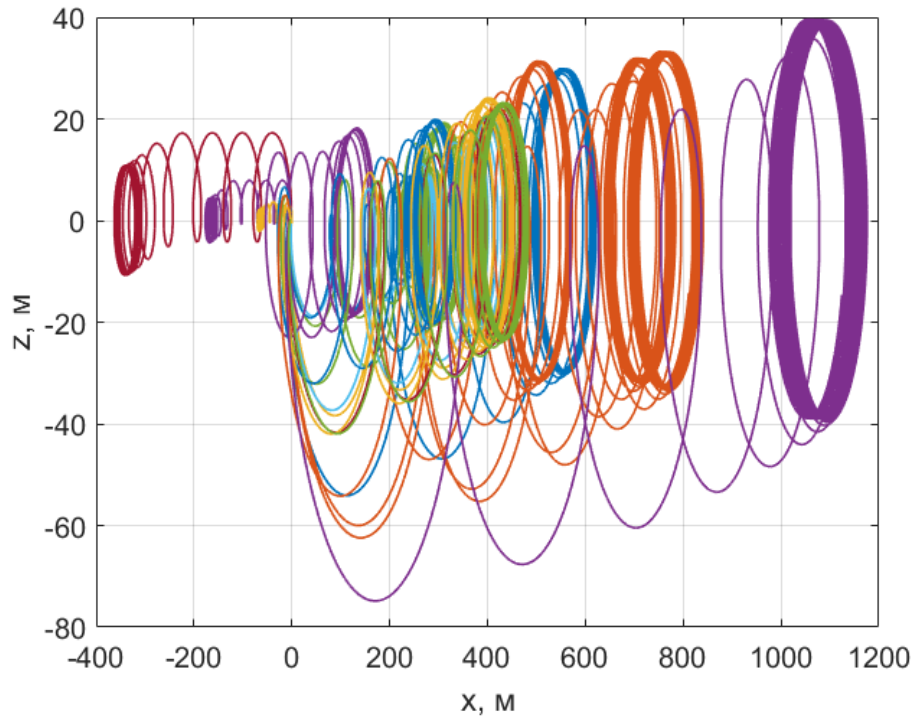


Рис. 1.5. Относительные траектории движения МКА при реализации управления

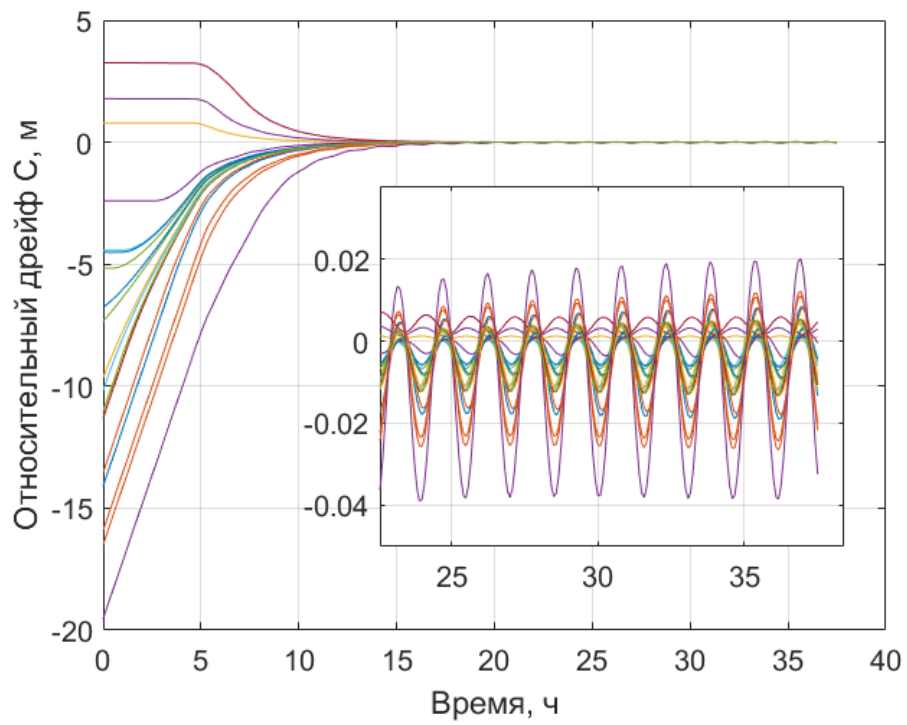


Рис. 1.6. Величины параметров относительных дрейфов

На рис. 1.7 представлен график приложенного ко всем спутникам в рое управления в зависимости от времени. Предполагается, что на все аппараты действуют силы аэродинамического сопротивления, поэтому величина управления вдоль оси  $Ox$  ОрбСК отрицательна. Коэффициент управления  $k$  подобран таким образом, чтобы величина управления не превышала ускорение, которое возможно получить с помощью силы аэродинамического сопротивления путём поворота 3U кубсата (параллелепипед с размерами 10x10x30 см) относительно набегающего потока при средней плотности воздуха на данной высоте орбиты согласно модели плотности ГОСТ [56] и с учётом возможных средних значений параметров траекторий  $C$  и  $D$  при заданных условиях отделения. Если для некоторых аппаратов в начальный момент времени требуемое управляющее ускорение превышало максимально допустимое значение, в численном моделировании реализовывалось это максимальное значение управляющего ускорения. Отметим также, что по мере уменьшения относительных параметров дрейфа, разница приложенного управления уменьшается. Резкие изменения величины приложенного управления соответствуют моментам времени, когда количество аппаратов в зоне видимости изменяется. Изменение  $D_{1j}, j = 2, \dots, N$ , во время моделирования представлено на рис. 1.8. Значения параметров  $D_{1j}$  сходятся к значениям близким к константным, так как относительные параметры дрейфа сходятся к нулю, что соответствует уравнениям (4).

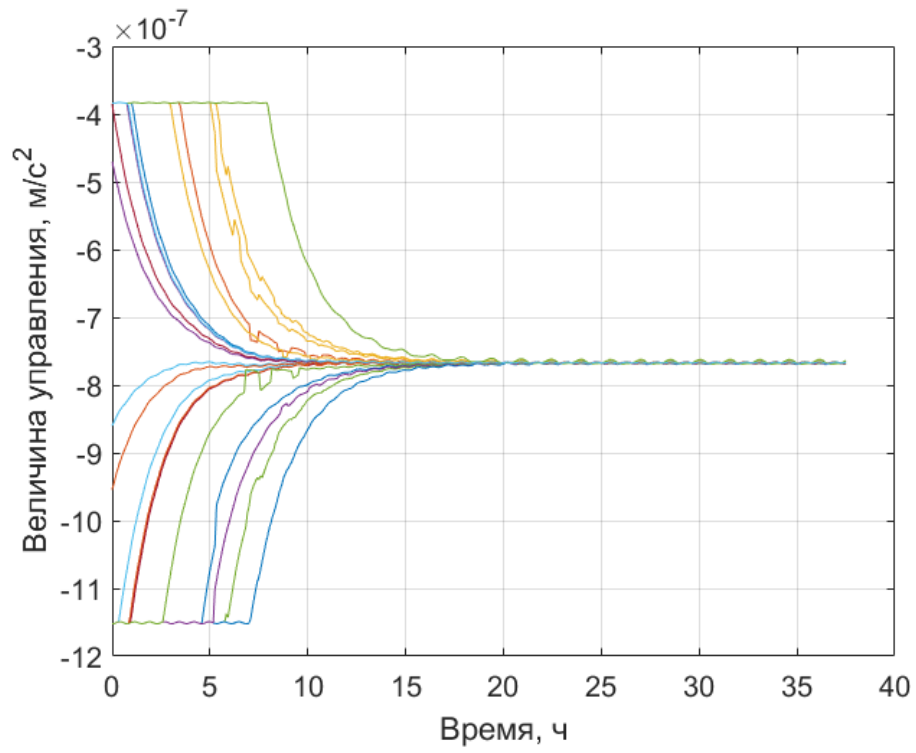


Рис. 1.7. Реализованная величина управления

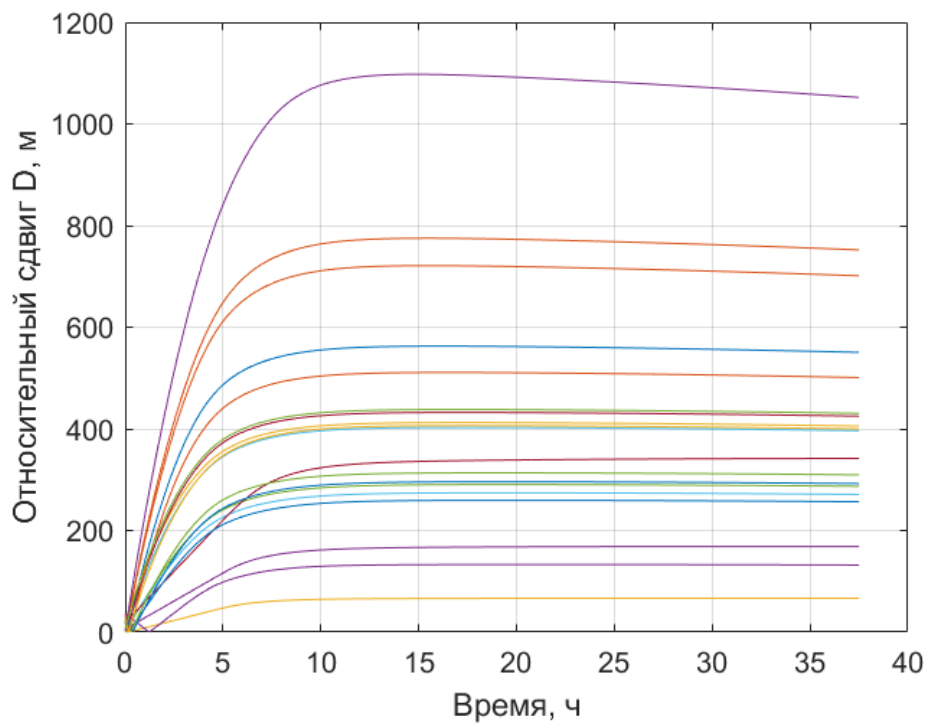


Рис. 1.8. Величины относительных сдвигов

На рис. 1.9 представлено изменение степеней вершин графа, который образуют МКА в течение времени моделирования. В течение первых 3.5 часов степень всех вершин в графе равна 19, а значит МКА образуют полный граф. Далее степень вершин варьируется от 12 до 19, что означает, что некоторые аппараты всё ещё могут отслеживать движение всех спутников в группе, а некоторые только какой-то подгруппы спутников. Несмотря на это МКА образуют связный граф на протяжении всего моделирования. Так как вид графа меняется во время моделирования, то меняется и скорость сходимости.

На рис. 1.10 показана величина  $-\frac{k}{\omega} \lambda_{\min}$ , которая является наибольшим собственным значением (за исключением нуля) для матрицы системы (9), а значит характеризует скорость сходимости относительного дрейфа к нулю.

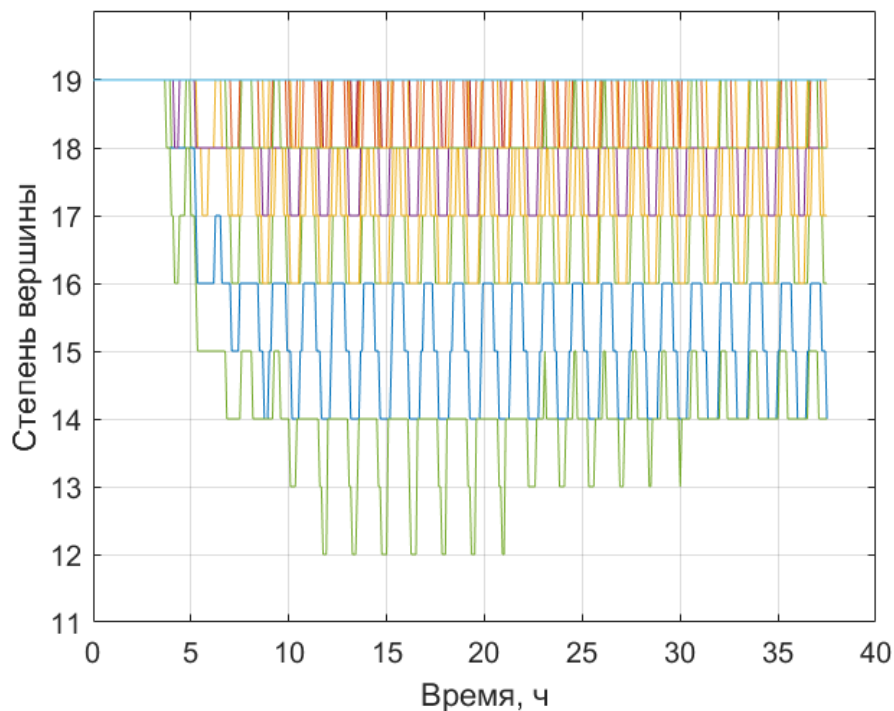


Рис. 1.9. Степени вершин в графе

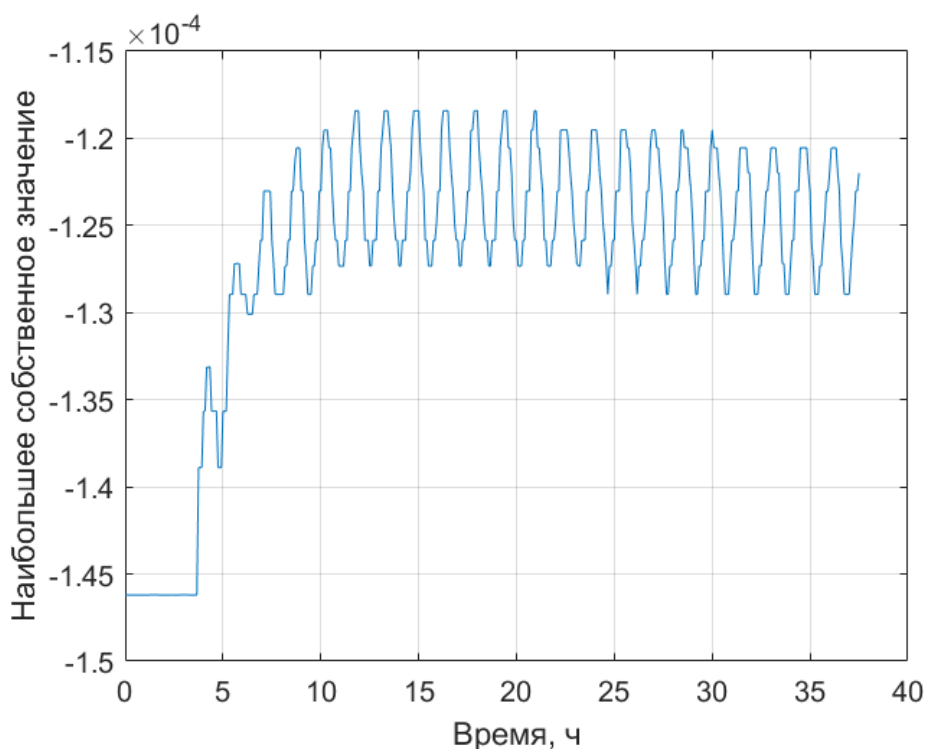


Рис. 1.10. Величина  $-(k / \omega)\lambda_{\min}$

Для исследования влияния возмущений на движение под действием предложенного алгоритма управления было проведено численное исследование с использованием метода Монте-Карло с учётом второй зональной гармоники разложения геопотенциала. При фиксированном радиусе зоны видимости проведём ряд одинаковых численных экспериментов с различающимися скоростями отделения. После каждого эксперимента выполняется проверка, сошлись ли все относительные параметры дрейфов к нулю. В случае разделения группы вычисляется количество МКА в каждой подгруппе с одинаковыми относительными параметрами дрейфов. Обозначим число спутников в самой многочисленной группе как  $N_{group}$ . Будем измерять эффект разделения на подгруппы с использованием отношения числа самой многочисленной группы к общему числу спутников  $N_{group} / N$ . Если  $N_{group} / N = 1$ , то это означает, что ни один МКА из группы не отделился. Если же отношение  $N_{group} / N$  близко к единице, то это соответствует случаю, когда

небольшая часть аппаратов покинула группу, но подавляющее большинство осталось в ней.

Для каждого значения параметра  $\alpha$ , где  $R_{cont} = \mu_D + \alpha \cdot \sigma_D$ , было проведено 300 численных экспериментов с различными скоростями отделения. Значение  $N_{group} / N$  и количество подгрупп вычислялись по результатам каждого численного моделирования. Результаты исследования представлены на рис. 1.11 и 1.12 в виде диаграммы размаха, где 50% результатов находятся внутри прямоугольника, горизонтальная черта в прямоугольнике соответствует медиане, на отрезки сверху и снизу прямоугольника приходится по 25 % результатов, крестики соответствуют выбросам. Результаты, выделенные красным цветом, получены в результате моделирования с учётом влияния второй зональной гармоники геопотенциала, черным цветом — без учёта влияния второй зональной гармоники геопотенциала. Из графиков видно, что при использовании аналитической оценки в  $3\sigma_D$  почти во всех примерах моделирования все аппараты образовывали единую группу. Однако, влияние неучтенного возмущения от  $J_2$  в некоторых случаях приводило к отделению нескольких аппаратов от основной группы.

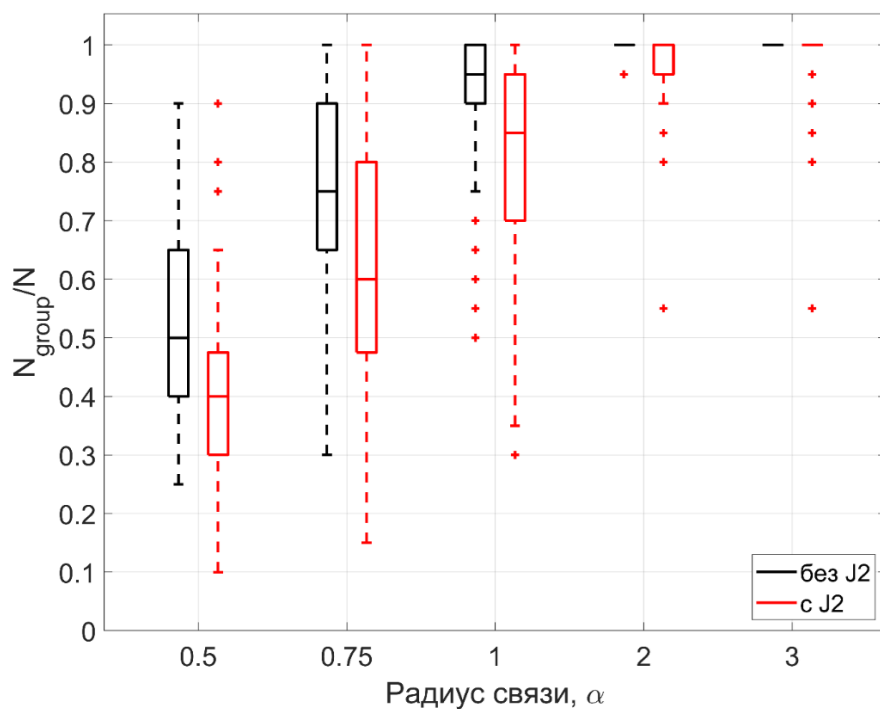


Рис. 1.11. Отношение числа аппаратов  $N_{group}$  в наибольшей группе к числу аппаратов  $N$  в зависимости от размера коммуникационной области

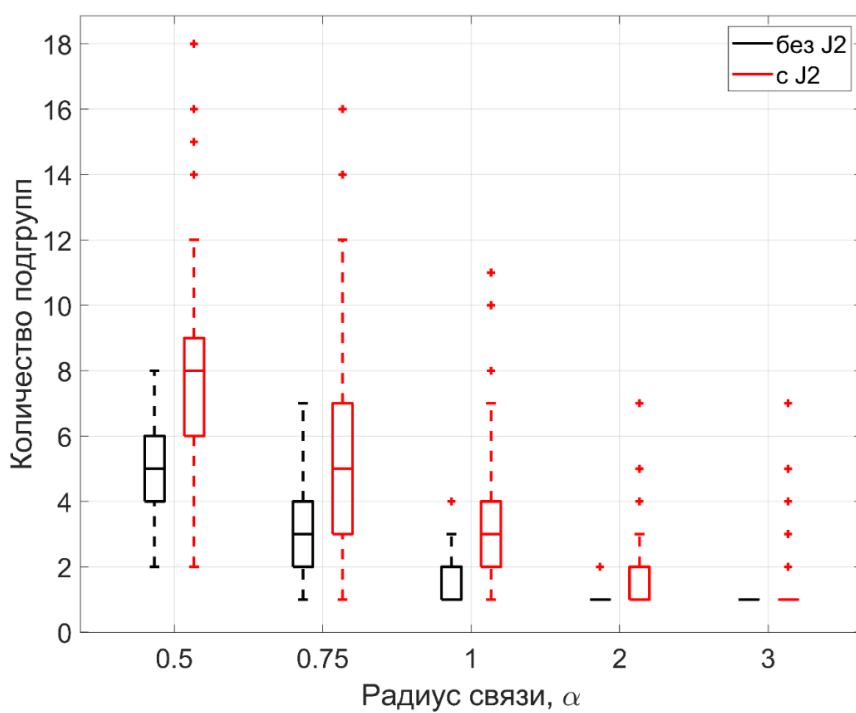


Рис. 1.12. Количество подгрупп в зависимости от размера коммуникационной области

## 1.7. Закон управления, учитывающий изменение относительных расстояний

Ранее было рассмотрено управление, которое устраняет относительный дрейф МКА в группе. Было показано, что дрейф аппаратов сходится к одной величине дрейфа относительно ОрбСК под действием закона управления только в случае сохранения связности группы. Для поддержания связности группы была получена оценка на необходимую зону видимости для МКА. Как уже было отмечено, основной вклад в увеличение расстояний между спутниками вносит параметр  $D_i$ , далее для удобства этот параметр будем называть сдвигом  $i$ -го МКА относительно ОрбСК.

Рассмотрим управление, которое будет учитывать сдвиги аппаратов и за счет этого не будет давать увеличиваться расстояниям между МКА:

$$u_i^x = -k \bar{C}_i + 3\omega^2 \bar{D}_i, \quad k > 0, \quad (13)$$

где величина среднего сдвига  $\bar{D}_i$  относительно  $i$ -го МКА вводится следующим образом:

$$\bar{D}_i = \sum_{j=1}^{N_{comm}^i} D_{ij} / N_{comm}^i$$

Подставляя управление (13) в уравнения (4), описывающие изменения параметров  $D_i$  и  $C_i$ , получим следующие линейные дифференциальные уравнения, записанные в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{C}} \\ \dot{\mathbf{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{\omega} \mathbf{S} & 3\omega \mathbf{S} \\ -3\omega \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где  $\mathbf{S}$  — матрица (7),  $\mathbf{C} = [C_1, C_2, \dots, C_N]^T$ ,  $\mathbf{D} = [D_1, D_2, \dots, D_N]^T$  — векторы дрейфов и сдвигов МКА относительно точки  $O$  соответственно,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица размером  $N \times N$ .

Для дальнейшего исследования необходимо рассмотреть следующую матрицу:



$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a\mathbf{S} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $a = -\frac{k}{3\omega^2}$ . Собственные и присоединённые векторы и собственные значения матрицы полностью определяют решение уравнений (14). Поскольку  $\mathbf{T}$  — блочная матрица, будем искать её собственные вектора в блочном виде. Пусть  $(\mathbf{v}^T \quad \mathbf{w}^T)^T$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{T}$  (здесь  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  —  $N$ -мерные вектора), а  $\eta$  является соответствующим собственным значением, тогда

$$\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \eta \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Блочная форма матрицы  $\mathbf{T}$  (15), позволяет привести это к системе:

$$\begin{aligned} a\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{S}\mathbf{w} &= \eta\mathbf{v}, \\ -\mathbf{v} &= \eta\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (16)$$

Второе уравнение также означает, что каждый из векторов  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  ненулевой. Подставив второе уравнение в первое, получим квадратное уравнение на  $\eta$ :

$$(1 - \eta a)\mathbf{S}\mathbf{w} = -\eta^2\mathbf{w}. \quad (17)$$

Здесь при значении  $\eta = 1/a$  нет ненулевых решений, а если  $(1 - \eta a) \neq 0$ , то  $\mathbf{w}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{S}$ , а значит для соответствующего ему собственного значения  $\lambda$  выполняется:

$$\mathbf{S}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}. \quad (18)$$

Полученное соотношение подставим в (17), тогда

$$(1 - \eta a)\lambda\mathbf{w} = -\eta^2\mathbf{w}.$$

Отсюда можно получить связь между собственными значениями матрицы  $\mathbf{T}$  и матрицы  $\mathbf{S}$ :

$$\eta_{\pm} = \frac{a\lambda \pm \sqrt{a^2\lambda^2 - 4\lambda}}{2}. \quad (19)$$

Если  $\lambda \neq 0$  или  $\frac{4}{a^2}$ , то каждому собственному значению  $\mathbf{S}$  соответствует два различных собственных значения  $\mathbf{T}$ . Также из (8) можно заметить, что собственные векторы матрицы  $\mathbf{S}$  образуют полный набор. Это следует из того, что для неориентированных графов матрица  $\mathcal{L}$  является симметричной, а значит собственные векторы  $\mathcal{L}$  образуют полный набор векторов в пространстве. Рассмотрим все возможные варианты значений собственных чисел.

Случай  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda \neq \frac{4}{a^2}$ :

Пусть  $\mathbf{S}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ , причём  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda \neq \frac{4}{a^2}$ , в этом случае

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} -\eta_{\pm} \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \eta_{\pm} \begin{pmatrix} -\eta_{\pm} \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каждый такой собственный вектор порождает пару собственных векторов матрицы  $\mathbf{T}$  с собственными значениями  $\eta_{\pm}$ .

Случай  $\lambda = 0$ :

Собственное значение  $\lambda = 0$  матрицы  $\mathbf{S}$  в этом случае порождает собственное значение  $\eta = 0$  кратности два у матрицы  $\mathbf{T}$ . Пусть  $\mathbf{w}_0$  – это собственный вектор матрицы  $\mathbf{S}$ , соответствующий  $\lambda = 0$ . Из уравнений (18) и (16) при подстановке  $\eta = 0$  и  $\lambda = 0$  получим, что  $(\mathbf{0} \ \mathbf{w}_0)^T$  является собственным вектором  $\mathbf{T}$ . Других линейно независимых собственных векторов нет, так что будем искать присоединённый вектор  $(\mathbf{p}_0 \ \mathbf{q}_0)^T$  в виде:

$$\begin{pmatrix} a\mathbf{S} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a\mathbf{S}\mathbf{p}_0 + \mathbf{S}\mathbf{q}_0 &= \mathbf{0}, \\ -\mathbf{p}_0 &= \mathbf{w}_0. \end{aligned}$$

Подставим второе уравнение в первое и, учитывая, что  $\mathbf{w}_0$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{S}$  для  $\lambda = 0$ , получим уравнение для  $\mathbf{q}_0$ :

$$-a\mathbf{S}\mathbf{w}_0 + \mathbf{S}\mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{S}\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}.$$

Замечая, что  $\mathbf{q}_0$  является собственным вектором  $\mathbf{S}$  для  $\lambda = 0$ , находим присоединённый вектор  $(-\mathbf{w}_0 \quad \alpha\mathbf{w}_0)^T$  при произвольном  $\alpha$ . Таким образом, для связного графа корневое подпространство матрицы  $\mathbf{T}$ , отвечающее собственному значению 0, двумерно.

Случай  $\lambda = \frac{4}{a^2}$ :

Рассмотрим теперь случай, когда  $\lambda = \frac{4}{a^2}$ , что означает, что  $\mathbf{S}\mathbf{w}_1 = \frac{4}{a^2}\mathbf{w}_1$ .

Из (16) при подстановке согласно (19)  $\eta = \frac{2}{a}$  получаем, что  $\left(-\frac{2}{a}\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_1\right)^T$

является собственным вектором для матрицы  $\mathbf{T}$ . Для присоединённого вектора  $(\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{q}_1)^T$  должно выполняться:

$$\left[ \begin{pmatrix} a\mathbf{S} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \frac{2}{a} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a}\mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуя, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a\mathbf{S}\mathbf{p}_1 + \mathbf{S}\mathbf{q}_1 - \frac{2}{a}\mathbf{p}_1 &= -\frac{2}{a}\mathbf{w}_1, \\ -\mathbf{p}_1 - \frac{2}{a}\mathbf{q}_1 &= \mathbf{w}_1. \end{aligned} \tag{21}$$

Выражая  $\mathbf{q}_1$  из второго уравнения и подставляя в первое, получаем следующее:

$$\mathbf{S}\mathbf{p}_1 = \frac{4}{a^2}\mathbf{p}_1.$$

Заметим, что  $\mathbf{p}_1$  является собственным вектором, соответствующим  $\lambda = \frac{4}{a^2}$ .

Подставив  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{w}_1$  в (21) и выразив  $\mathbf{q}_1$ , получим присоединённый вектор

$(\mathbf{w}_1 \ -a\mathbf{w}_1)^T$ . Таким образом, каждый линейно независимый собственный вектор матрицы  $\mathbf{S}$  с собственным значением  $\lambda = \frac{4}{a^2}$  порождает двумерное корневое подпространство у матрицы  $\mathbf{T}$ .

Суммируя все рассмотренные случаи, можно сделать вывод, что  $N-1$  положительному значению  $\lambda$ , будет соответствовать  $2N-2$  значения  $\eta$  (с учётом кратности) с отрицательной действительной частью. Значение  $\eta=0$  будет иметь кратность равную двум и будет порождать двумерное корневое подпространство у матрицы  $\mathbf{T}$ . Зная собственные значения матрицы  $\mathbf{T}$  и соответствующие им собственные и присоединённые векторы, можно выписать общее решение для (14):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = b_0 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix} + b_1 \left( 3\omega t \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{w}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) + \sum_{i=1}^{2N-1} p_i(t) e^{3\omega\eta t} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i \end{pmatrix}.$$

Здесь  $p_i$  — это многочлен, кратность которого зависит от кратности соответствующего собственного числа и количества собственных векторов у него,  $b_0$  и  $b_1$  — константы, зависящие от начальных условий. Поскольку все ненулевые  $\eta$  имеют отрицательную вещественную часть, все слагаемые в сумме экспоненциально затухают. Собственный вектор  $\mathbf{w}_0$ , который удовлетворяет  $\mathbf{S}\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ , для связного графа пропорционален  $(1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$ . Следовательно, на больших промежутках времени движение происходит по закону

$$\begin{aligned} C_i &= -b_1, \\ D_i &= b_0 + 3b_1\omega t. \end{aligned}$$

Это означает, что на больших промежутках времени построенное управление (13) обеспечивает движение группы как целого с общим для каждого из спутников дрейфом, так что относительные сдвиги стремятся к нулю. Таким образом, предложенный закон управления обеспечивает сходимость к нулю всех относительных дрейфов и сдвигов в случае, когда

группа образует связный граф. В случае нарушения связности графа система (14) имеет больше одного нулевого собственного числа, что соответствует разделению группы на независимые подгруппы.

### 1.8. Синтез законов управления и численное исследование

Для достижения связности группы МКА ограничим с помощью управления средний сдвиг  $|\bar{D}_i|$  каждого аппарата некоторой величиной, меньше радиуса видимости  $R_{comm}$ . Для этого закон управления приложенного вдоль оси  $Ox$  ОрбСК предлагается сделать зависимым от среднего сдвига траектории  $i$ -ого МКА в его зоне видимости:

$$u_i^x = \begin{cases} -k \bar{C}_i, & |\bar{D}_i| < 0.85R_{comm}, \\ -k \bar{C}_i + 3\omega^2 \bar{D}_i, & 0.85R_{comm} \leq |\bar{D}_i| \leq R_{comm}. \end{cases} \quad (22)$$

В этом случае, как только  $|\bar{D}_i|$  подходит близко к границе зоны видимости, происходит переключение управления на то, которое уменьшает относительные сдвиги траекторий аппаратов  $|D_{ij}|$ , что в свою очередь будет уменьшать и относительные расстояния между аппаратами. Таким образом, будет сохраняться связность всей группы МКА. В случае же, когда  $|\bar{D}_i| < 0.85R_{comm}$ , управление стремится только к устранению среднего относительного параметра дрейфа. Закон управления (22) позволяет задать некоторые границы для относительного движения, тогда как закон вида (13) устремляет все относительные сдвиги  $D_{ij}$  к нулю, что будет соответствовать набору относительных замкнутых эллиптических траекторий с единым центром, что, в свою очередь, может повышать вероятность столкновения МКА.

Большой интерес представляет исследование эффекта разделения аппаратов на подгруппы в зависимости от величины  $R_{comm}$ . Так как ошибка в скорости отделения спутников является случайной, то и результат работы алгоритмов по формированию связной группы тоже будет случайной

величиной. Исследуем работу предложенных алгоритмов управления (6) и (22) с помощью метода Монте-Карло, варьируя число  $\sigma_D$ , которое учитывается при подсчёте  $R_{comm}$  согласно (12). Результаты, выделенные красным цветом, соответствуют управлению (22), черным цветом соответствуют управлению без учета сдвигов (6). Из рисунка видно, что для величины  $R_{comm} = \mu_D + 3 \cdot \sigma_D$  эффект разделения роя практически не наблюдается, что означает, что предложенные алгоритмы успешно справляются с задачей удержания коммуникационной связности роя МКА. Также можно отметить, что алгоритм, учитывающий величины сдвигов МКА, для значений зоны видимости меньших чем  $R_{comm} = \mu_D + 3 \cdot \sigma_D$ , справляется лучше с удержанием связности группы по сравнению с алгоритмом, учитывающим только дрейфы.

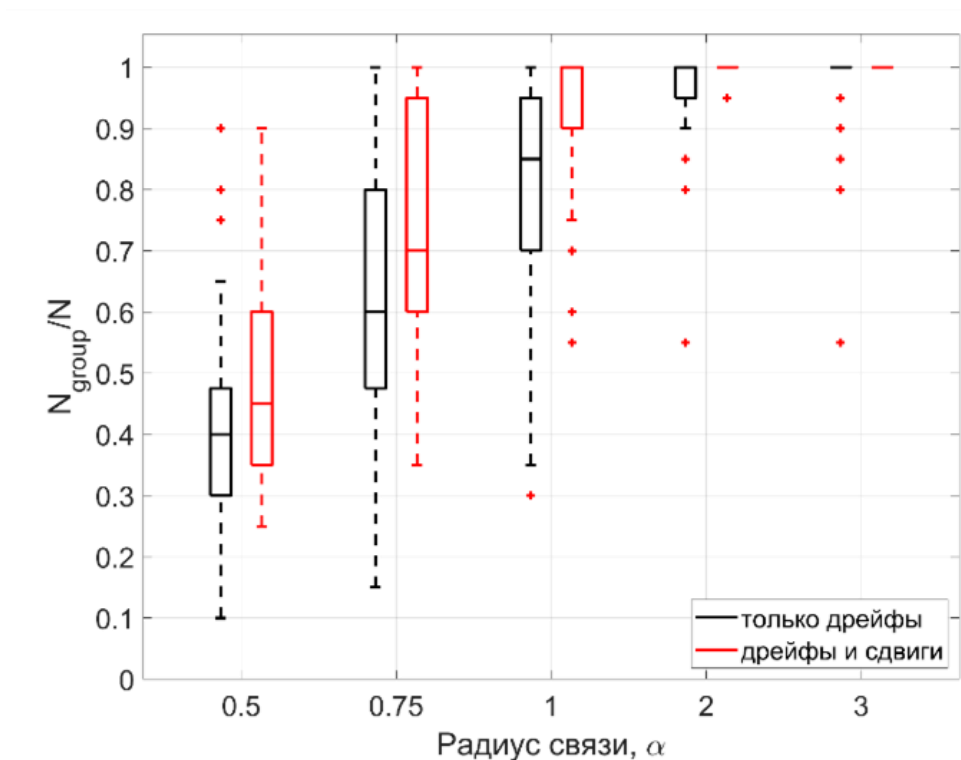


Рис. 1.13. Отношение числа аппаратов  $N_{group}$  в наибольшей группе к числу аппаратов  $N$  в зависимости от размера коммуникационной области

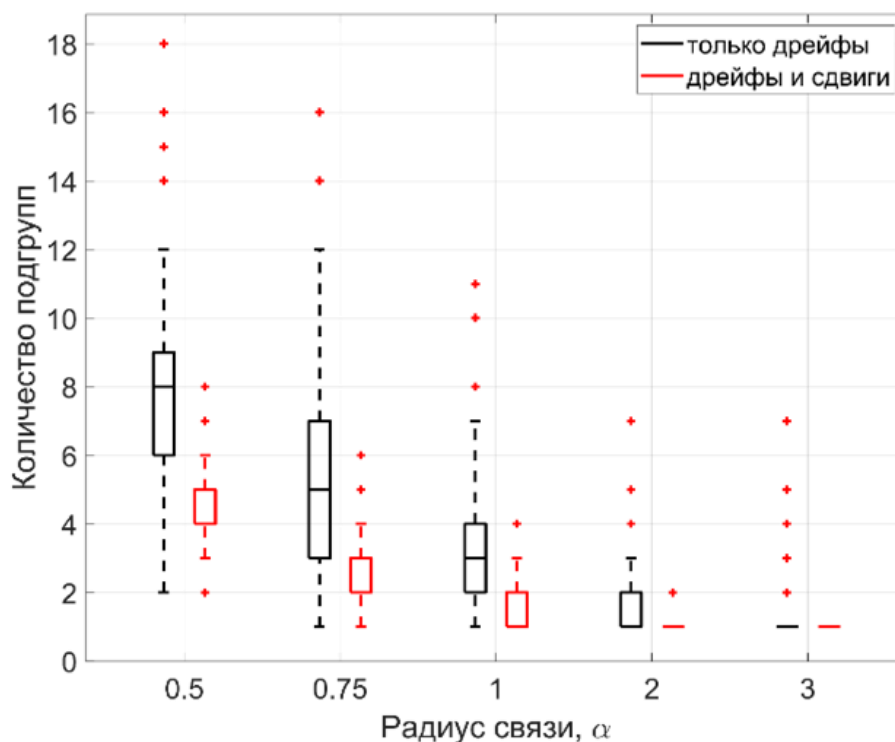


Рис. 1.14. Количество подгрупп в зависимости от размера коммуникационной области

Таким образом, параметрическое численное исследование управляемого движения позволило оценить необходимый размер коммуникационной области, при котором задача удержания связности группы МКА успешно решается с помощью предложенных алгоритмов управления.

### 1.9. Выводы по Главе 1

В настоящей главе разработаны алгоритмы управления движением группы МКА после кластерного запуска с учетом коммуникационных ограничений. Получена аналитическая оценка размера зоны видимости для обеспечения ограниченности относительного движения группы МКА. Проведено численное исследование управляемого движения, которое показало, что в случае действия внешних возмущений управление с учётом параметра среднего сдвига способствует улучшению связности аппаратов в группе, что приводит к ограниченности относительных траекторий.

## ГЛАВА 2. Построение треугольной спутниковой формации

Земные гамма вспышки и транзитное ультрафиолетовое излучение атмосферы Земли являются короткими и малоизученными явлениями в верхних слоях атмосферы. Земные гамма вспышки были впервые обнаружены в ходе эксперимента BATSE [57]. Изначальной задачей этого эксперимента было исследование гамма-излучения из далёкого космоса, но детекторы обнаружили вспышки земного происхождения. После этого гамма вспышки наблюдались многими околоземными аппаратами: Reuven Ramaty High Energy Solar Spectroscopic Imager (RHESSI) [58], Fermi Gamma-Ray Space Telescope [59], Astrorivelatore Gamma a Immagini Leggero (AGILE) [60]. Ряд отечественных экспериментов были также посвящены изучению гамма-вспышек земного происхождения [61,62]. Эти исследования выявили ряд свойств этих явлений, хотя до сих пор нет четкой интерпретации и математической модели земных гамма вспышек и транзитных явлений. Продолжение изучения атмосферных транзитных эффектов важно для понимания физических процессов, запускающих механизм ускорения частиц в грозных электрических полях.

В вышеупомянутых космических миссиях измерения параметров атмосферных явлений проводились с помощью одного космического аппарата, что не позволяет определить место возникновения земных гамма вспышек. Групповой полёт спутников позволяет наблюдать одно и то же событие с разных ракурсов и в разное время, что является важным свойством для ряда задач дистанционного зондирования Земли [63], для изучения гравитационного поля Земли [64] и особенно для рассматриваемой в этой главе миссии, в которой с помощью трёх космических аппаратов, расположенных в вершинах правильного треугольника при пролёте над



экваториальной зоной, измеряются параметры земных гамма вспышек и определяется положение источника этих вспышек с помощью триангуляции.

Основной сложностью при реализации миссий групповых полетов является активное управление относительным движением. Поскольку наноспутники имеют ограничения по размеру, массе и энергии, традиционные двигательные установки вряд ли могут быть установлены на борту аппаратов, поэтому наиболее интересными являются бестопливные подходы к управлению относительным движением. В течение последних десятилетий предлагались различные варианты использования естественных сил для управления движением. Например, космический аппарат IKAROS использовал радиационное давление, действующее на солнечный парус, для реализации управляющего воздействия [65]. Это первая миссия, успешно продемонстрировавшая технологию применения солнечного паруса для получения ускорения движением центра масс при управлении угловым движением. Для спутников на низкой околоземной орбите аэродинамическое сопротивление также можно использовать для управления относительным движением. Компания Planet Labs успешно использовала разницу действующих на аппараты сил сопротивления восьмидесяти спутников 3U кубсат, выведенных на одну орбиту, для фазирования и удержания относительного положения на солнечно-синхронной орбите высотой 510 км [66]. В настоящей работе высота орбиты спутников предполагается около 400–500 км, поэтому аэродинамическое сопротивление атмосферы может быть использовано для управления относительным движением малых космических аппаратов в группе.

## **2.1. Постановка задачи**

В настоящей главе рассматривается миссия по исследованию магнитосферы Земли при помощи малых космических аппаратов, в которой планируется изучить гамма-вспышки земного происхождения. Основной гипотезой является то, что они вызваны молниевыми эффектами в атмосфере

Земли. Для подтверждения этой гипотезы предлагается запустить миссию, состоящую из трех космических аппаратов, каждый из которых оборудован оптическими датчиками, а также детекторами гамма-излучения. При помощи такой системы удастся одновременно локализовать как источник гамма-вспышки, так и зафиксировать происходящие молниевые эффекты, что позволит подтвердить или опровергнуть рассматриваемую гипотезу.

Для осуществления измерений необходимо, чтобы аппараты образовывали правильный треугольник в проекции на поверхность Земли. Учитывая, что большая часть молниевых эффектов наблюдается в приэкваториальной зоне, будем рассматривать построение правильного треугольника только в ней, игнорируя характеристики движения в других зонах. Кроме того, треугольник должен изменять свой характерный размер: на текущий момент есть лишь оценки размера зоны детектирования гамма-вспышки, которые составляют от 100 до 1000 км. Следовательно, за время миссии сторона треугольника также должна меняться в этих пределах. Отметим, что, так как рассматривается миссия трёх МКА, управление относительным орбитальным движением предполагается осуществлять только бестопливными методами, а именно с использованием сил аэродинамического сопротивления и естественной динамики движения в гравитационном поле Земли. Задача вывода аппаратов на выбранные орбиты не ставится, т.е. считается, что с некоторой точностью возможно обеспечить заданные начальные условия для каждого из аппаратов.

## **2.2. Модель движения аппарата с учетом возмущений**

В предыдущей главе использовались линеаризованные уравнения относительного движения. Отметим, что они были получены в рамках предположений о малости относительных расстояний между аппаратами по сравнению с размерами орбиты. В то же время, в настоящей главе расстояния между аппаратами составляют уже сотни километров, а значит влиянием нелинейных слагаемых на относительное движение уже нельзя пренебрегать.

Далее будем рассматривать движение каждого отдельного аппарата с учетом возмущающих сил с помощью оскулирующих элементов орбиты [55]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{du} &= \frac{R^3}{\mu p} F_3 \frac{\sin u}{\sin i}, \\
\frac{di}{du} &= \frac{R^3}{\mu p} F_3 \cos u, \\
\frac{dp}{du} &= 2F_2 \frac{R^3}{\mu}, \\
\frac{d\omega}{du} &= \frac{R^2}{\mu e} \left[ -F_1 \cos \mathcal{G} + F_2 \left( 1 + \frac{R}{p} \right) \sin \mathcal{G} - F_3 \frac{R}{p} e \operatorname{ctg} i \sin u \right], \\
\frac{de}{du} &= \frac{R^2}{\mu} \left[ F_1 \sin \mathcal{G} + F_2 \left( \left( 1 + \frac{R}{p} \right) \cos \mathcal{G} + e \frac{R}{p} \right) \right], \\
\frac{du}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{R^2} - F_3 \frac{R}{\sqrt{\mu p}} \sin u \operatorname{ctg} i,
\end{aligned} \tag{23}$$

где  $F_1, F_2, F_3$  — радиальная, трансверсальная и нормальная компоненты возмущающей силы,  $R$  — расстояние от центра Земли до центра масс МКА,  $p$  — параметр орбиты,  $e$  — эксцентриситет,  $i$  — наклонение,  $\Omega$  — долгота восходящего узла,  $\omega$  — аргумент перицентра,  $u$  — аргумент широты,  $\mathcal{G}$  — истинная аномалия,  $\mu$  — гравитационный параметр Земли. В качестве возмущающих сил рассмотрим влияние второй зональной гармоники и атмосферы, тогда проекции сил будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{\delta}{R^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1) - \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \mathcal{G} \frac{\rho}{2m} S c_x V, \\
F_2 &= -\frac{\delta}{R^4} \sin 2u \sin^2 i - \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{p}{R} \frac{\rho}{2m} S c_x V, \\
F_3 &= -\frac{\delta}{R^4} \sin u \sin 2i,
\end{aligned}$$

где  $\delta = 3J_2 \mu R_E^2 / 2$ ,  $J_2 = 1082.6 \cdot 10^{-6}$ ,  $R_E = 6.378 \cdot 10^6$  м — средний радиус Земли,  $m$  — масса аппарата,  $\rho$  — плотность атмосферы,  $S$  — площадь характерного поперечного сечения аппарата,  $c_x$  — баллистический

коэффициент сопротивления,  $V$  — модуль скорости аппарата. Подставим получившиеся проекции возмущающих сил в уравнения движения (23) и рассмотрим околокруговую орбиту  $p \sim R \sim a$ ,  $e \sim 0$ ,  $V \sim \sqrt{\mu/p}$ , тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{du} &= -\frac{2\delta}{\mu p^2} \sin^2 u \cos i, \\ \frac{di}{du} &= -\frac{\delta}{2\mu p^2} \sin 2u \sin 2i, \\ \frac{dp}{du} &= -\frac{2\delta}{\mu p} \sin 2u \sin^2 i - \frac{\rho}{m} S_{c_x} p^2, \\ \frac{du}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} + 2\frac{\delta}{p^4} \sin^2 u \cos^2 i \sqrt{\frac{p}{\mu}}.\end{aligned}\tag{24}$$

Получим теперь скорость изменения элементов орбиты за один оборот КА. Начнем с долготы восходящего узла (ДВУ):

$$\frac{d\Omega}{dN} = \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{du} du = -\frac{2\delta}{\mu p^2} \cos i \int_0^{2\pi} \sin^2 u du = -\frac{2\pi\delta}{\mu p^2} \cos i \left( \frac{pad}{об} \right).\tag{25}$$

Для наклона можно получить, что за один оборот вековые эффекты отсутствуют

$$\frac{di}{dN} = \int_0^{2\pi} \frac{di}{du} du = -\frac{\delta}{2\mu p^2} \sin 2i \int_0^{2\pi} \sin 2u du = 0.$$

На фокальный параметр вековое изменение оказывает атмосфера, а от второй зональной гармоники влияние отсутствует

$$\frac{dp}{dN} = \int_0^{2\pi} \frac{dp}{du} du = -\frac{2\delta}{\mu p} \sin^2 i \int_0^{2\pi} \sin 2u du - \frac{\rho}{m} S_{c_x} p^2 \int_0^{2\pi} du = -\frac{2\pi\rho}{m} S_{c_x} p^2 \left( \frac{M}{об} \right).$$

Из получившихся уравнений можно заметить, что под действием второй зональной гармоники будет изменяться ДВУ, и, следовательно, орбита МКА будет поворачиваться. Также под действием атмосферного сопротивления будет изменяться фокальный параметр орбиты МКА, что в свою очередь повлияет на аргумент широты в силу (24). Полученные следствия далее будут важны для выбора опорных орбит аппаратов.

### 2.3. Опорные орбиты

Как было сказано в постановке задачи, аппараты должны образовывать правильный треугольник в приэкваториальной зоне. Чтобы сформировать правильный треугольник в проекции на поверхность Земли, можно рассмотреть два разных варианта. Первый вариант заключается в том, что все МКА находятся на индивидуальных орбитах с разными ДВУ (Рис. 2.1). Вторым вариантом состоит в том, что два аппарата находятся на одной орбите, но с разными аргументами широты, а третий находится на другой орбите (Рис. 2.2). В обоих случаях изменение размера треугольника может быть получено путем изменения разности ДВУ между орбитами и разности аргументов широты. В работе будет рассмотрен второй вариант по выбору орбит, поскольку он проще в реализации. МКА предполагается выводить на орбиты с помощью грузового корабля «Прогресс» по аналогии со схемой запуска микроспутника «Чибис-М» [67].

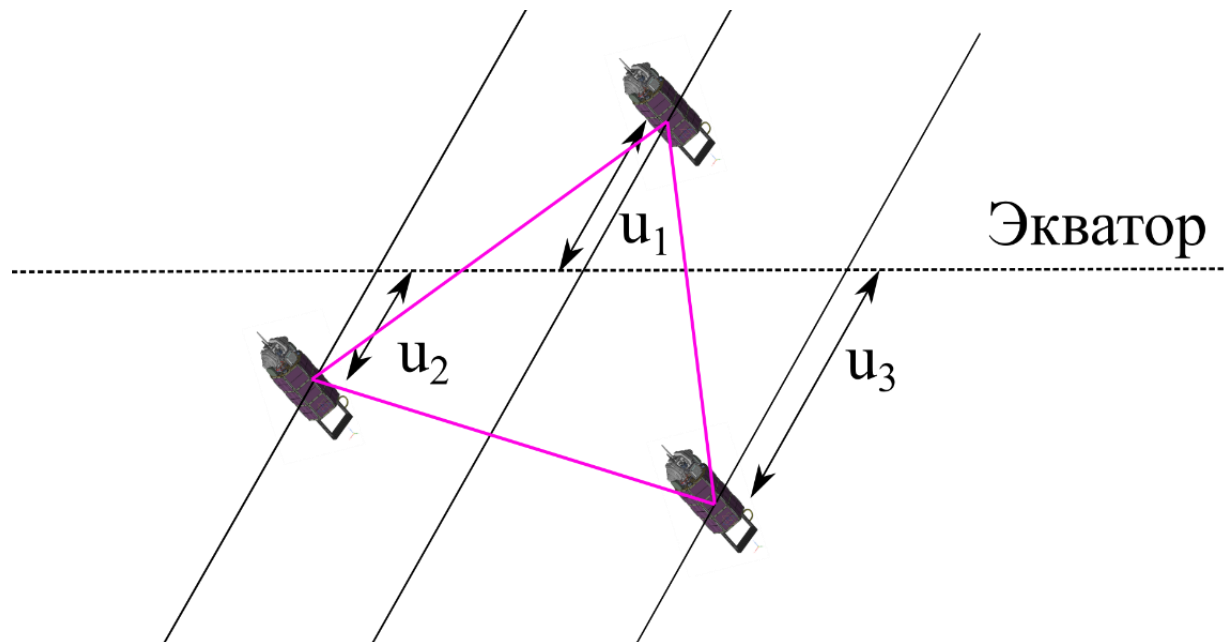


Рис. 2.1 Первый вариант выбора орбит

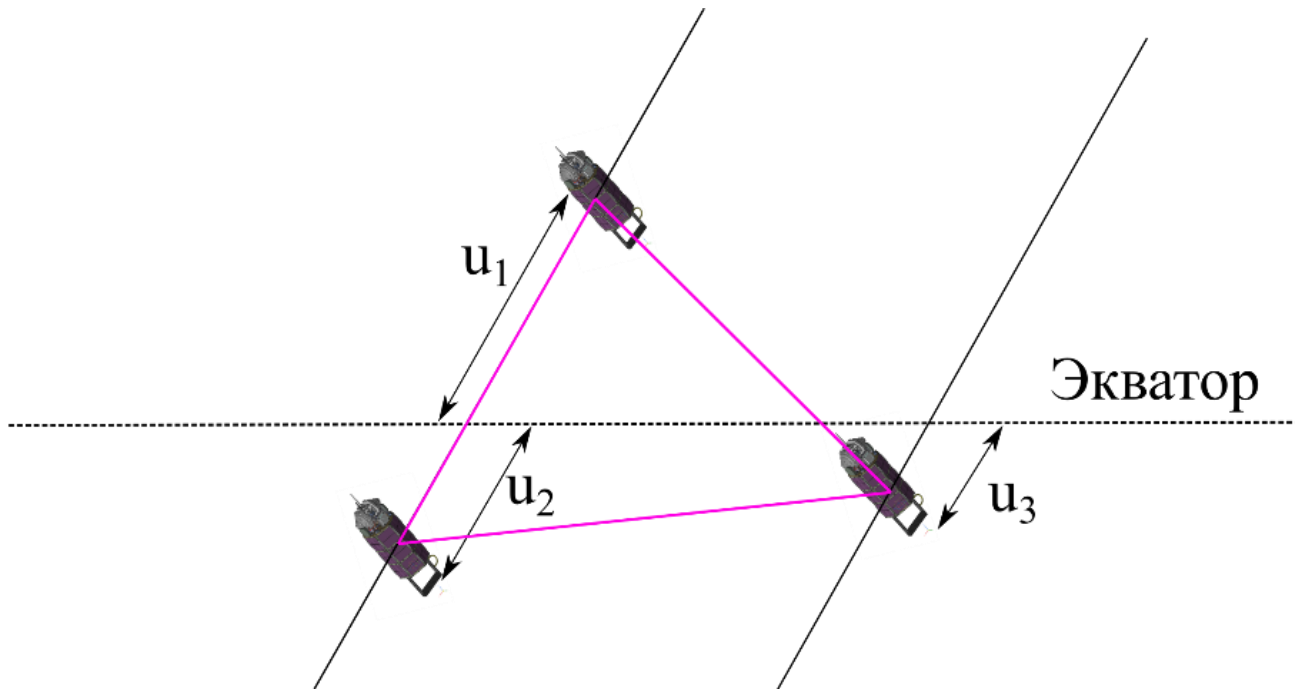


Рис. 2.2 Второй вариант выбора орбит

Рассмотрим изменение ДВУ (25) и учтем, что  $\frac{d}{dN} \approx \frac{n}{2\pi} \frac{d}{dt}$

$$\dot{\Omega} = -\frac{n\delta}{\mu p^2} \cos(i).$$

Здесь  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  — среднее движение,  $a$  — большая полуось. Можно заметить, что изменение ДВУ зависит от среднего движения, наклонения и параметра орбиты. Рассмотрим почти круговые орбиты, поэтому  $e = 0, p = a$ . Несмотря на увеличение характерного размера треугольника до 1000 км за год, разница аргументов широты аппаратов меняется довольно медленно. Это означает, что у всех трех орбит периоды, а значит и средние движения, должны практически совпадать. Следовательно, для обеспечения требуемого изменения ДВУ у орбит должны быть разные наклонения. При заданном наклонении  $i_1$  и радиусе первой орбиты  $R$  наклонение второй орбиты можно найти с помощью следующей формулы:

$$\cos(i_2) = \cos(i_1) - \Delta\dot{\Omega}_{req} \frac{n\delta}{\mu R^2}.$$

Требуемая разность ДВУ  $\Delta\dot{\Omega}_{req}$  двух орбит описывается следующим выражением (Рис. 2.3):

$$\Delta\dot{\Omega}_{req} = \frac{L \sin 60^\circ}{\Delta T R \sin(i_1)},$$

где  $L$  — это требуемая длина стороны правильного треугольника через время  $\Delta T$ . Например, для орбиты с высотой 450 км и наклонением  $51.6^\circ$  (орбита Международной космической станции) разницы около  $0.23^\circ$  было бы достаточно для выполнения требований миссии и обеспечения того, чтобы через год расстояние между аппаратами было равно 1000 км.

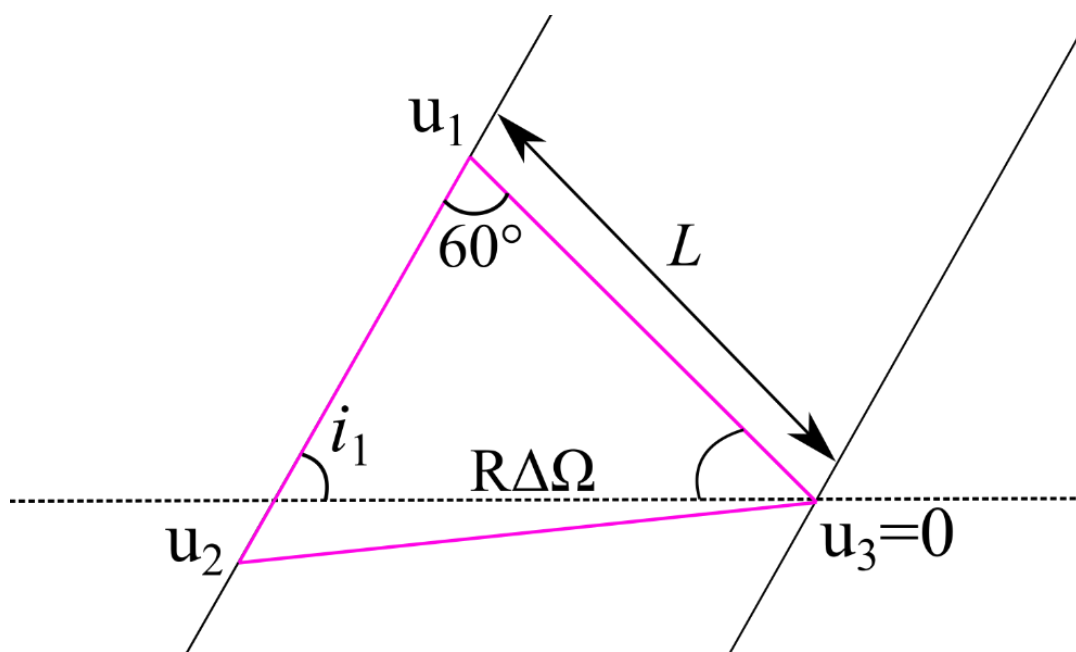


Рис. 2.3 Конфигурация спутников вблизи экватора.

## 2.4. Фазирование аппаратов

Рассмотрим задачу фазирования аппаратов. В упрощенной модели движения, которая не учитывает вращение атмосферы вместе с Землей, аэродинамическое сопротивление оказывает влияние только на изменение большой полуоси и эксцентриситета орбиты. Так как в настоящей диссертационной работе рассматриваются низкие околоземные околокруговые орбиты, наиболее важным является влияние на большую

полуось, что, в свою очередь, приводит к изменению величины среднего движения  $n$ . Изменяя ориентацию МКА относительно набегающего потока, можно влиять на величину площади поперечного сечения. Таким образом, будет меняться среднее движение, и, в свою очередь, скорость изменения аргумента широты.

Для построения закона управления рассмотрим модель (24), где в качестве возмущающего воздействия учитывается только сила аэродинамического сопротивления:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= n, \\ \frac{dn}{dt} &= -3\left(\frac{n^2}{\mu}\right)^{1/3} T.\end{aligned}\tag{26}$$

Здесь  $T = -\frac{\rho}{2m} S c_x V^2$  — величина ускорения от атмосферного сопротивления.

Уравнения (26) описывают изменение аргумента широты каждого из аппаратов. Ставится задача управлением относительной фазой между спутниками, т.е.  $\Delta u_{12} = u_1 - u_2$  и  $\Delta u_{13} = u_1 - u_3$ . Ее изменение описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta n_{1k}}{dt} &= \frac{dn_1}{dt} - \frac{dn_k}{dt} = -\frac{3}{\mu^{1/3}}(n_1^{2/3}T_1 - n_k^{2/3}T_k), \\ \frac{d\Delta u_{1k}}{dt} &= \Delta n_{1k}.\end{aligned}\tag{27}$$

Здесь  $T_k$  — аэродинамическое ускорение, действующее на  $k$ -ый МКА. Высоты орбит всех аппаратов достаточно похожи, а значит  $\Delta n_{1k}$  достаточно мало. Разложим уравнение (27) в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta n_{1k}}{dt} &= -\frac{3}{\mu^{1/3}}\left(n_1^{2/3}T_1 - (n_1 + \Delta n_{1k})^{2/3}T_k\right) \\ &= -\frac{3}{\mu^{1/3}}n_1^{2/3}(T_1 - T_k) + 2\frac{1}{\mu^{1/3}}\frac{\Delta n_{1k}}{n_1^{1/3}}T_k + \dots\end{aligned}$$



Заметим, что второе слагаемое имеет второй порядок малости. На малых отрезках времени можно пренебречь изменением среднего движения первого аппарата, и полагать, что  $n_1 \approx const = n = 0.0011 \text{ с}^{-1}$  (разница между средним движением орбиты высотой 500 км и 300 км не превосходит 5%). Итоговые уравнения движения, описывающие изменение фазы между аппаратами, принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta n_{1k}}{dt} &= -\frac{3n^{2/3}}{\mu_E^{1/3}}(T_1 - T_k), \\ \frac{d\Delta u_{1k}}{dt} &= \Delta n_{1k}. \end{aligned} \quad (28)$$

Рассматриваемые в работе МКА имеют вытянутую форму, поэтому, меняя ориентацию аппарата относительно набегающего потока, можно менять и площадь поперечного сечения в пределах  $S_k \in [S_{min}, S_{max}]$  (Рис. 2.4).

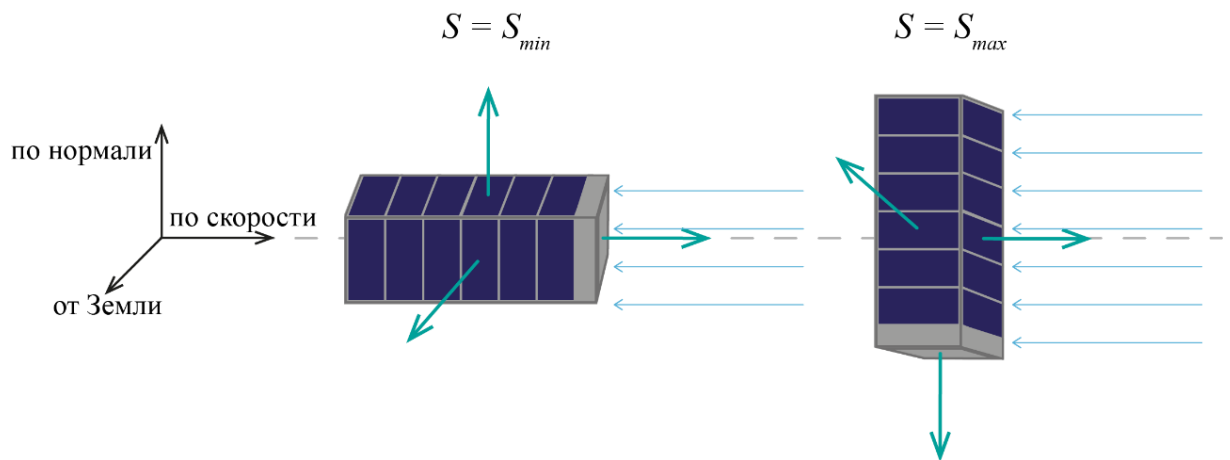


Рис. 2.4. Угловое положение МКА в ОрбСК, соответствующее минимальной и максимальной площади поперечного сечения

Следовательно, и ускорения от силы аэродинамического сопротивления меняются в пределах  $T_k \in [-T_{max}, -T_{min}]$ , где максимальное и минимальное ускорение определены как

$$T_{max} = \frac{\rho}{2m} S_{max} c_x V^2, \quad T_{min} = \frac{\rho}{2m} S_{min} c_x V^2.$$

Например, если  $T_1 = -\frac{1}{2}(T_{max} + T_{min})$ , тогда  $\tau_k = T_1 - T_k$  принимает значения на интервале  $\left[-\frac{1}{2}(T_{max} + T_{min}), \frac{1}{2}(T_{max} + T_{min})\right]$ , и относительные фазы аппаратов могут быть управляемы независимо. Рассмотрим закон управления в следующем виде:

$$\tau_k = k_1 \Delta n_{1k} + k_2 (\Delta u_{1k} - \Delta u_k^{req}). \quad (29)$$

Здесь  $\Delta u_k^{req}$  — необходимая разница фаз между аппаратами, которая может быть посчитана при помощи текущей разницы между долготами восходящего узла  $\Delta \Omega$  (Рис. 2.3):

$$\Delta u_2^{req} = \Delta \Omega \frac{\sin i_1}{\sin(\pi/3)}, \quad \Delta u_3^{req} = \frac{\Delta \Omega}{2} \frac{\sin i_1}{\sin(\pi/3)}.$$

Подставим (29) в уравнения движения (28):

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta n_{1k}}{dt} &= -\frac{3n^{2/3}}{\mu^{1/3}} \left( k_1 \Delta n_{1k} + k_2 (\Delta u_{1k} - \Delta u_k^{req}) \right), \quad \frac{d\Delta u_{1k}}{dt} = \Delta n_{1k}, \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \Delta u_{1k} + \alpha k_1 \frac{d}{dt} \Delta u_{1k} + \alpha k_2 (\Delta u_{1k} - \Delta u_k^{req}) &= 0, \\ \alpha &= \frac{3n^{2/3}}{\mu^{1/3}}. \end{aligned}$$

Это линейная неоднородная система дифференциальных уравнений. Ее частное решение  $\Delta u_{1k} \equiv \Delta u_k^{ref}$  (здесь учтено, что размер орбиты меняется медленно, поэтому  $d(\Delta u_k^{ref})/dt$  близко к нулю), а собственные значения определяются как:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha k_1 \pm \sqrt{(\alpha k_1)^2 - 4\alpha k_2}}{2}.$$

Если коэффициенты  $k_1, k_2$  положительны, то оба собственных значения имеют отрицательные действительные части, и в этом случае  $\Delta u_{1k} \rightarrow \Delta u_k^{ref}, \Delta n_{1k} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Необходимая площадь поперечного сечения  $S_k^*$  тогда может быть посчитана следующим образом:

$$S_k^* = \frac{2m}{c_x \rho V^2} \left( k_1 \Delta n_{1k} + k_2 (\Delta u_{1k} - \Delta u_k^{req}) \right) + \frac{1}{2} (S_{max} + S_{min}).$$

Здесь и далее предполагается, что для 1-го аппарата всегда площадь поперечного сечения равна среднему значению  $S_1 = \frac{1}{2} (S_{max} + S_{min})$ . Отметим также, что в полученном уравнении для определения площади поперечного сечения необходимо знать плотность атмосферы. Как правило, она известна с некоторой ошибкой, и есть лишь её оценка, поэтому целесообразным является изменение закона управления следующим образом:

$$S_k^* = K_1 \Delta n_{1k} + K_2 (\Delta u_{1k} - \Delta u_k^{req}) + \frac{1}{2} (S_{max} + S_{min}),$$

где  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$  — новые коэффициенты управления. Учитывая, что аэродинамическое сопротивление достаточно слабо влияет на относительное движение (может потребоваться несколько витков для заметного изменения относительной фазы на рассматриваемых орбитах), а также для решения проблемы выхода рассчитанной площади поперечного сечения за пределы допустимого интервала  $[S_{min}, S_{max}]$ , предлагается дополнительно упростить закон управления:

$$S_k = \begin{cases} S_{max}, & \text{если } |S_k^* - S_{max}| < |S_k^* - \bar{S}|, \\ S_{min}, & \text{если } |S_k^* - S_{min}| < |S_k^* - \bar{S}|, \\ \bar{S}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (30)$$

Здесь  $\bar{S} = (S_{max} + S_{min}) / 2$ . При этом обновления требуемой площади поперечного сечения аппаратов будем проводить не в каждый момент времени, а лишь раз в виток. Максимальная и минимальная площади поперечного сечения соответствуют параллелепипеду  $10 \times 10 \times 30$  см и принимают значения  $S_{min} = 0.01 \text{ м}^2$ ,  $S_{max} = 0.03 \text{ м}^2$ .

Еще одной проблемой при построении закона управления является неточность знания разницы средних движений между МКА. Из-за наличия возмущающих факторов, определить их по мгновенным значениям скорости и

положения аппаратов не представляется возможным, поэтому предлагается определять текущее  $\Delta n_{1k}$  следующим образом:

$$\Delta n_{1k}(t_i) = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} (\Delta u_{1k}(t_i) - \Delta u_{1k}(t_{i-1})),$$

где  $t_i$  — это текущий момент времени, который соответствует прохождению первым аппаратом восходящего узла,  $t_{i-1}$  — предыдущий момент времени, когда первый аппарат проходил восходящий узел,  $\Delta u_{1k}(t_i), \Delta u_{1k}(t_{i-1})$  — соответствующие этим моментам времени значения разниц аргументов широты аппаратов.

## 2.5. Численное исследование

Отметим, что сходимость упрощенного закона управления, особенно при наличии внешних возмущений, не доказана, и для проверки предложенной методики управления относительным орбитальным движением проводится численное исследование. В численном моделировании будет учитываться отличие гравитационного поля Земли от центрального. Несферичность поля тяготения Земли можно описать с помощью силовой функции:

$$U = \frac{\mu}{r} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n \cdot [c_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda] \cdot P_{nm}(\sin \varphi) \right\},$$

где  $r$  — расстояние от центра планеты,  $\lambda$  — долгота,  $\varphi$  — широта,  $R_{\oplus}$  — экваториальный радиус,  $c_{nm}, d_{nm}$  — коэффициенты гравитационного поля,  $P_{nm}(\sin \varphi)$  — присоединенные функции Лежандра,  $P_{n0}(\sin \varphi) = P_n(\sin \varphi)$  — многочлены Лежандра. В моделях гравитационного поля Земли бесконечный ряд заменяется на ограниченный, включающий  $N \times M$  коэффициентов, где  $N$  — максимальное значение индекса  $n$  (число зональных гармоник) и  $M$  — максимальное значение индекса  $m$  (для тессеральных и секториальных гармоник). В моделировании учитывается разложение  $10 \times 10$  и используется набор коэффициентов для модели «EGM2008» [68]. Также моделирование будет включать вариации плотности атмосферы в зависимости от текущего

времени года, положения аппарата и солнечной активности (модель ГОСТ Р 25645.166-2004) [56]. При подсчете влияния атмосферного сопротивления будем считать, что атмосфера вращается вместе с Землей, т.е. ее скорость в точке нахождения аппарата  $\mathbf{R}$  определяется как  $\mathbf{V}_{atmo} = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{R}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_E$  — угловая скорость вращения Земли.

Для оценки эффективности работы алгоритма управления вводится скалярный параметр, характеризующий «качество» треугольника [69]:

$$Q = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{S_{tr}}{\sum_{k=1}^3 l_k^2}. \quad (31)$$

Здесь  $S_{tr}$  — площадь треугольника,  $l_k$  — длины сторон треугольника. Эта величина равняется единице для правильного треугольника, и нулю для вырожденного.

Номинальные положения и скорости для каждого МКА выбраны таким образом, чтобы в начальный момент времени все они находились на круговых орбитах с высотой 450 км, и формировали правильный треугольник с длиной стороны 1 км. Наклонение первых двух аппаратов составляет  $i_{1,2} = 51.7^\circ$ , у третьего аппарата  $i_3 \approx 51.94^\circ$ . Коэффициенты управления были выбраны следующими:  $K_1 = 1.5 \cdot 10^6 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$ ,  $K_2 = 30 \text{ м}^2$ . На рис. 2.5 представлены ошибки в среднем движении МКА при пролете над экваториальной зоной. В идеальном случае разница в среднем движении аппаратов  $\Delta n_{1k}$  должна быть нулевой, иначе большая разница будет свидетельствовать о различиях в высотах орбит. Большая разница в высотах будет приводить к различию в периодах обращения и деградации треугольной формации. За время моделирования  $\Delta n_{1k}$  не превышает  $10^{-6}$  град/с. На рис. 2.6 показана ошибка в аргументах широты аппаратов  $du_{1k} = \Delta u_{1k} - \Delta u_k^{req}$  при пролете над экватором. В первые 25 суток полета алгоритм сходится, и мы можем наблюдать переходные процессы, в которых ошибка в аргументах широты может

достигать 0.18 градусов. Далее ошибка уменьшается и большую часть времени моделирования не превышает значений 0.02 градуса. Влияние атмосферного сопротивления приводит к постепенному уменьшению высот аппаратов (Рис. 2.7). Качество правильного треугольника, образованного МКА при пролете над экваториальной зоной, представлено на рис. 2.8. Качество близкое к единичному значению достигается менее чем за две недели после запуска и далее поддерживается.

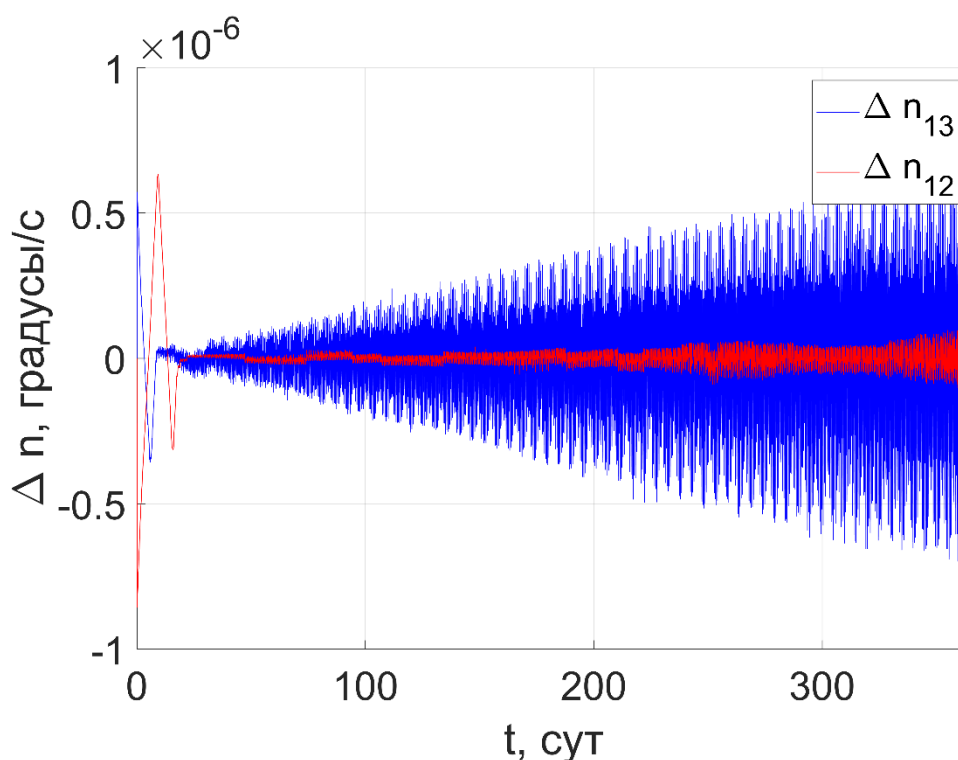


Рис. 2.5. Ошибка в среднем движении

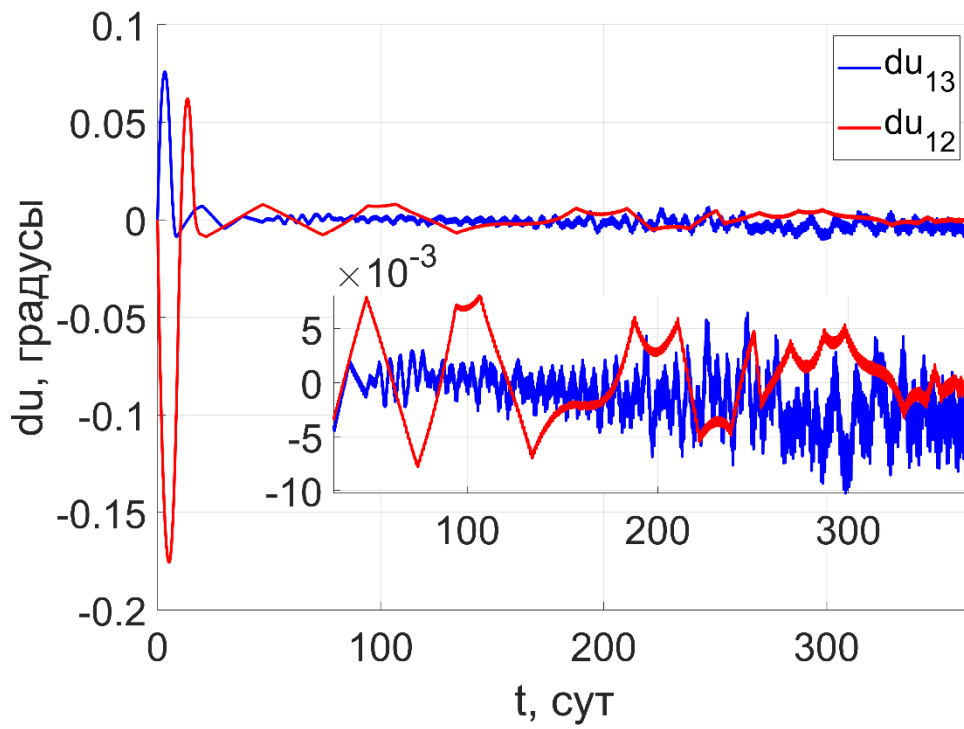


Рис. 2.6. Ошибки в реализации аргумента широты

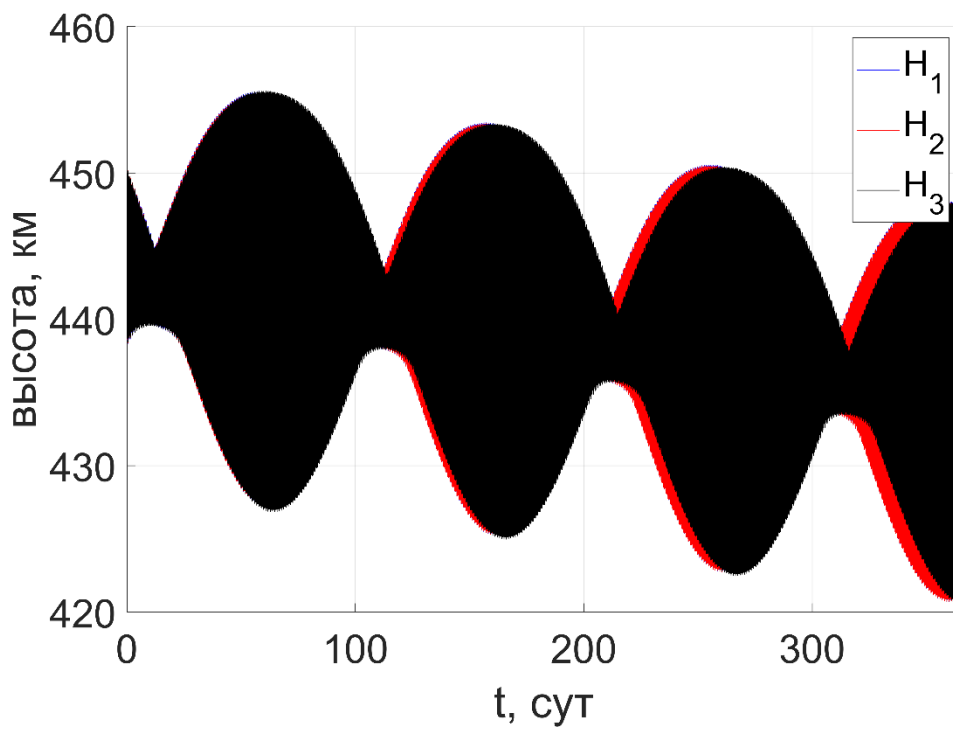


Рис. 2.7. Изменение высоты трёх аппаратов

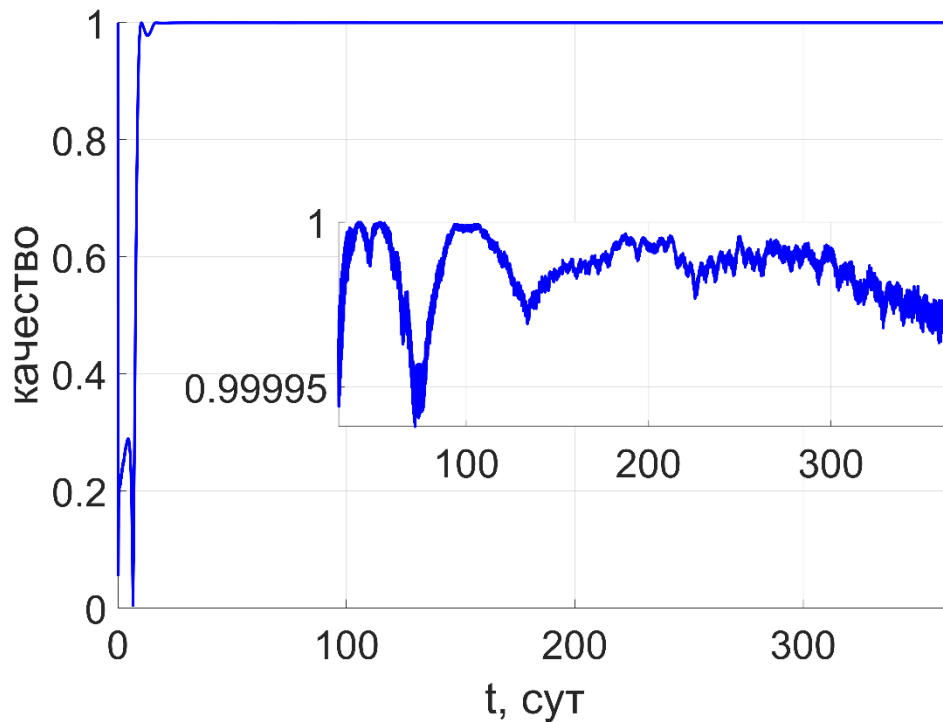


Рис. 2.8. Качество треугольника

Начальные условия, а точнее их отличие от номинальных значений, могут существенно влиять на эффективность работы алгоритма. Например, если в начальный момент разница средних движений между аппаратами слишком большая, аппараты будут быстро разлетаться вдоль орбиты. Кроме того, в зависимости от текущей солнечной активности величина плотности атмосферы может отличаться на порядки. По этой причине проведем численные исследования с помощью метода Монте-Карло с учетом ошибок по начальным положениям аппаратов для двух сценариев: высокая и низкая солнечные активности, которые соответствуют запуску миссии в 2013 и 2019 годах. В ходе моделирования использовались реальные значения солнечной активности, опубликованные баллистическим центром ИПМ им. М.В. Келдыша [70].

Во время каждого моделирования начальные условия вычислялись следующим образом:



$$\mathbf{R}_k^0 = \mathbf{R}_k^{nominal} + \Delta\mathbf{R}_k,$$

$$\mathbf{V}_k^0 = \mathbf{V}_k^{nominal} + \Delta\mathbf{V}_k,$$

где  $\Delta\mathbf{R}_k \in N(\mathbf{0}, \mathbf{E}\sigma_R^2)$ ,  $\Delta\mathbf{V}_k \in N(\mathbf{0}, \mathbf{E}\sigma_V^2)$  — нормально распределенные случайные векторы с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами  $\mathbf{E}\sigma_R^2$  и  $\mathbf{E}\sigma_V^2$  соответственно,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица размера  $3 \times 3$ . Рассматривается три различных набора  $\sigma_R, \sigma_V$ : 10 м и 0.01 м/с, 50 м и 0.05 м/с, 100 м и 0.1 м/с. Для каждого набора  $\sigma_R, \sigma_V$  проводится по 200 запусков моделирования. В каждом из них считается среднее значение качества на трех временных интервалах: первые два месяца (голубые точки), последние семь месяцев (синие точки), и полное время миссии (желтые точки). Как видно из рис. 2.9 и 2.10, при самых малых ошибках начальных условий предложенный закон управления обеспечивает высокое качество треугольной формации как для высокой, так и для низкой солнечной активности. Для низкой солнечной активности удается поддерживать правильную треугольную конфигурацию только на средних ошибках начальных условий, так как уже большие ошибки начальных условий приводят к сильной деградации качества. В то же время, во время высокой солнечной активности удается поддерживать треугольную формацию в том числе и для больших ошибок в начальных условиях.

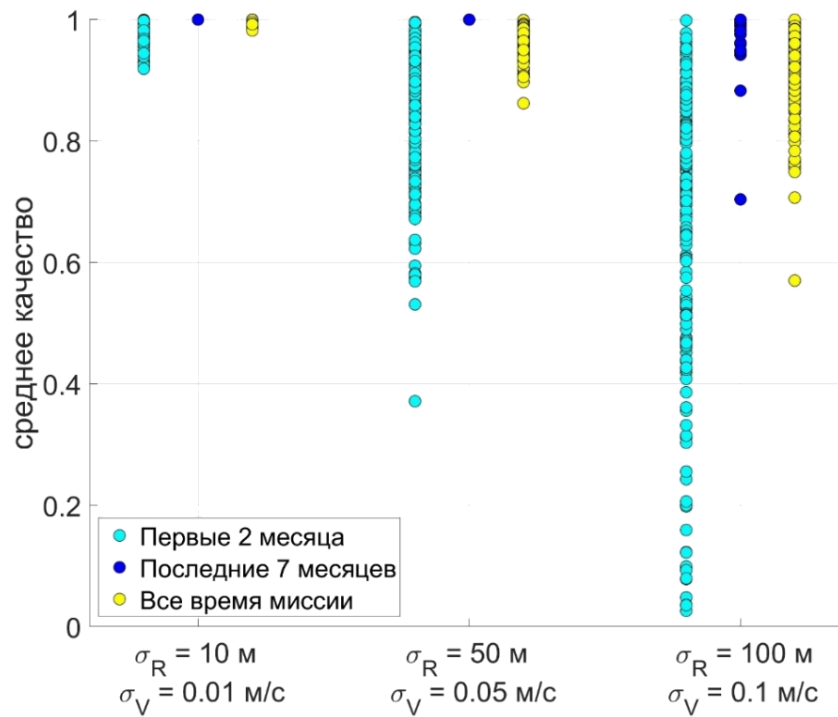


Рис. 2.9. Качество треугольника при моделировании для высокой солнечной активности

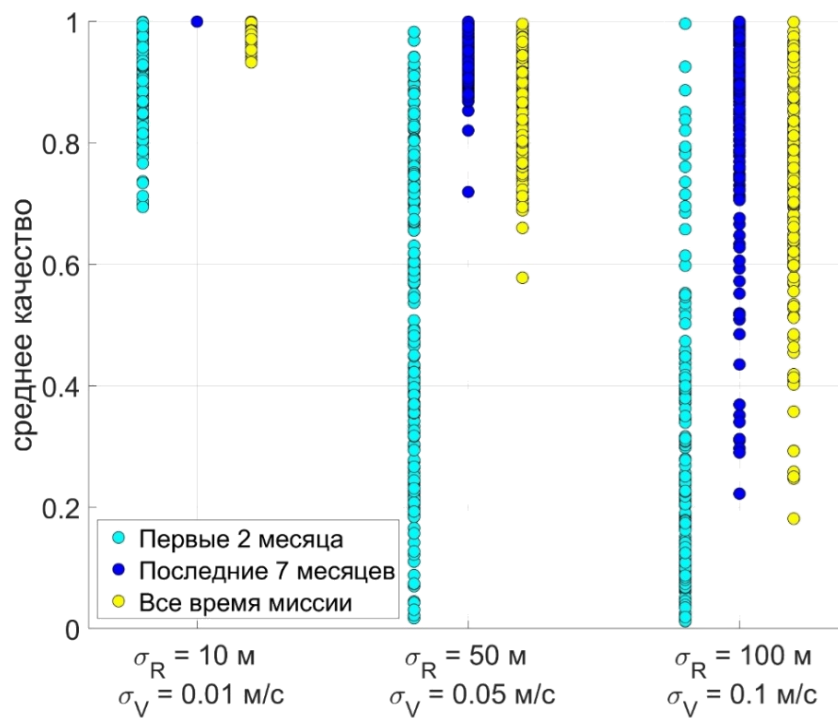


Рис. 2.10. Качество треугольника при моделировании для низкой солнечной активности

## **2.6. Выводы по Главе 2**

Во второй главе предложен подход к построению орбит аппаратов для формирования конфигурации в виде правильного треугольника при пролете над экватором. Разработан алгоритм активного фазирования КА с помощью аэродинамических сил. Проведено численное исследование, которое показало, что качество получаемой треугольной формации зависит от солнечной активности и ошибок выведения; для высокой солнечной активности допустимы среднеквадратические ошибки выведения до 100 м по положению и 0.1 м/с по скорости.

### **ГЛАВА 3. Магнитное управление угловым движением динамически вытянутого малого космического аппарата**

Для задания требуемой площади спутника относительно набегающего потока требуется управление движением аппарата относительно центра масс. В настоящей главе для решения этой задачи рассматривается применение активной магнитной системы ориентации на основе магнитных катушек.

Магнитные системы ориентации имеют значительно меньшие требования по энергетике, занимают меньший объем и имеют меньшую стоимость по сравнению с маховичной системой, поэтому такие системы часто устанавливаются на аппараты класса кубсат. Однако, хотя трехосная стабилизация с помощью магнитной системы ориентации характеризуется невысокой конечной точностью как в орбитальной, так и в инерциальной системе отсчета, системы магнитного управления превосходно справляются с некоторыми конкретными задачами. Например, демпфирование угловой скорости с помощью магнитных катушек эффективно осуществляется после отделения спутника от ракеты-носителя [71,72]. Также магнитная система ориентации используется для разгрузки кинетического момента маховиков. Магнитное демпфирование может использоваться для достижения полупассивной стабилизации вдоль локальной вертикали совместно с использованием гравитационного момента [73]; стабилизации по вектору скорости спутника совместно с использованием аэродинамического момента [74,75]; и вдоль вектора геомагнитной индукции [76]. Также с помощью магнитной системы ориентации можно обеспечить стабилизацию одной из осей с помощью собственного вращения [77–79], включая стабилизацию по направлению на Солнце [80–82] для зарядки аккумуляторов.

С помощью трехосного магнитного управления можно достичь стабилизации в любом конечном положении, в работах [75,83,84]

теоретически доказано, что эта система управляема. Однако, на практике достижение произвольного — далекого от гравитационного равновесия — положения в орбитальной системе отсчета является сложной задачей, а общая точность стабилизации невысока. В литературе рассматриваются различные подходы к управлению для достижения трехосной стабилизации спутника в орбитальной системе отсчета [85–88]. Несмотря на различия, все стратегии управления по существу реализуют закон обратной связи.

Один из алгоритмов управления представляет собой закон обратной связи, основанный на прямом методе Ляпунова. Первоначально этот тип управления был разработан как для стабилизации в инерциальной [89,90], так и в орбитальной [91,92] системах отсчета. Известно, что ляпуновское управление обеспечивает асимптотическую устойчивость требуемого положения. Отметим, что магнитные катушки создают механический момент только в плоскости, ортогональной вектору напряженности геомагнитного поля, то есть реализуется лишь часть требуемого управляющего момента. Это значит, что мы не можем гарантировать асимптотическую сходимость к требуемому движению. Однако, с помощью выбора коэффициентов управления удается обеспечить асимптотически устойчивое положение равновесия [93]. В работе [94] предлагаемые значения коэффициентов управления и результирующий управляющий момент относительно невелики. Получающаяся трёхосная стабилизация чрезвычайно чувствительна к неопределенностям в знании тензора инерции, как показано в [95]. Если ограничить неопределенности в знании моментов инерции, то можно улучшить точность стабилизации [96]. Значительные проблемы при стабилизации возникают у спутников с вытянутыми эллипсоидами инерции. Среди них — кубсаты формата 3U. В настоящей главе эта проблема решается с помощью рассмотрения матрицы коэффициентов усиления управления, что отличает ее от вышеупомянутых работ, где рассматриваются скалярные коэффициенты управления с обратной связью.

### 3.1. Постановка задачи

В предыдущих главах рассматривалось управление группой МКА на НОО с помощью сил аэродинамического сопротивления. Для реализации такого управления необходимо изменять ориентацию аппарата относительно набегающего потока. Для обеспечения требуемого углового движения МКА должен быть оснащен трехосной системой управления ориентацией. В качестве исполнительных органов могут быть использованы двигатели-маховики или магнитные катушки. Несмотря на высокую точность ориентации и стабилизации, которую могут обеспечить маховики, они обладают рядом недостатков: энергопотребление, занимаемый объем и высокая стоимость. Это существенно затрудняет установку маховиков на аппарат, поэтому часто для управления ориентацией используются только магнитные катушки. Также в предыдущих главах рассматривались МКА класса 3U кубсат и TNS-0, особенностью которых является динамическая вытянутость. Динамически вытянутым будем называть МКА с тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$  и  $A > C$ .

### 3.2. Модель углового движения

Режим обеспечения трехосной ориентации представляет большой практический интерес. В этом случае ориентация и угловая скорость должны меняться по заранее заданному закону, в дальнейшем называемым опорным движением. Введем системы координат, которые будут использоваться в дальнейшем для описания углового движения МКА:

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$  — инерциальная система координат (ИСК): начало  $O_a$  расположено в центре масс Земли,  $O_a Y_1$  направлена в точку весеннего равноденствия эпохи J2000,  $O_a Y_3$  направлена перпендикулярно плоскости экватора;

$O_c X_1 X_2 X_3$  — связанная с КА система координат (ССК): начало  $O_c$  расположено в центре масс спутника, оси являются главными центральными осями инерции аппарата.

Для перехода между системами координат будем использовать матрицу направляющих косинусов  $\mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ССК}$ , которая задает переход из ИСК в ССК. Для описания углового движения МКА будем использовать динамические уравнения Эйлера и кинематические соотношения Пуассона для матриц направляющих косинусов или кватернионов:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{M} + \mathbf{M}_{ctrl}, \\ \dot{\boldsymbol{\Lambda}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}, \\ \dot{\mathbf{S}}_{ИСК \rightarrow ССК} &= -[\boldsymbol{\Omega}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ССК}, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\mathbf{J}$  — тензор инерции аппарата,  $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]^T$  — абсолютная угловая скорость МКА в проекциях на оси ССК,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}_{ctrl}$  — момент внешних сил и управляющий момент соответственно,  $\boldsymbol{\Lambda} = (\lambda_0 \ \boldsymbol{\lambda})^T$  — кватернион, описывающий поворот из ИСК в ССК, кватернионное произведение при этом введено следующим образом:

$$\boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 q_0 - (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}) \\ \lambda_0 \mathbf{q} + q_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Также здесь было введено обозначение для матрицы векторного произведения:

$$[\boldsymbol{\Omega}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве внешних моментов рассматриваются гравитационный момент и момент аэродинамических сил. Момент гравитационных сил можно записать следующим образом:

$$\mathbf{M}_{grav} = 3 \frac{\mu}{R^5} \mathbf{R} \times \mathbf{J}\mathbf{R}, \quad (34)$$

где  $\mathbf{R}$  это радиус-вектор, соединяющий центр Земли с центром масс МКА и  $R = |\mathbf{R}|$ ,  $\mu$  — гравитационный параметр Земли. Чтобы записать аэродинамический момент, будем считать, что МКА имеет форму параллелепипеда. Момент аэродинамических сил будет состоять из моментов, действующих на стороны МКА. Пусть  $\mathbf{n}_j$  — это вектор из центра масс МКА в геометрический центр  $j$ -й стороны, а  $\mathbf{F}_{aero}^j$  — это аэродинамическая сила, действующая на  $j$ -ю сторону, тогда аэродинамический момент:

$$\mathbf{M}_{aero} = \sum_{j=1}^6 \mathbf{n}_j \times \mathbf{F}_{aero}^j. \quad (35)$$

Модель силы атмосферного сопротивления выглядит следующим образом:

$$\mathbf{F}_{aero} = -\frac{c_x}{2} S \rho \mathbf{V} |\mathbf{V}|, \quad (36)$$

где  $c_x$  — коэффициент сопротивления,  $S$  — площадь поперечного сечения относительно набегающего потока,  $\rho$  — плотность атмосферы,  $\mathbf{V}$  — скорость МКА относительно атмосферы.

В работе рассматривается система управления ориентацией МКА, состоящая из трех ортогональных магнитных катушек. Управление угловым движением происходит путем взаимодействия дипольного момента, создаваемого катушками, с магнитным полем Земли. Система уравнений, описывающая угловое движение МКА, оснащенного магнитными катушками, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{M} + \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \\ \dot{\mathbf{S}}_{ИСК \rightarrow ССК} &= -[\boldsymbol{\Omega}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ССК}, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\mathbf{m}$  — дипольный момент, создаваемый катушками,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции Земли. Сравнивая уравнения движения с (32), получаем, что управляющий момент выражается следующим образом:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Из векторного произведения можно заметить, что управляющий момент нельзя создать вдоль вектора геомагнитной индукции. Данное ограничение



будет влиять на управляемость МКА только на приэкваториальных орбитах, так как в таком случае направление магнитной индукции практически не меняется во времени для аппарата. Для всех остальных орбит направление, вдоль которого невозможно создать управляющий момент, будет изменяться при движении МКА. Управляемость такой системы была показана в [75].

Существует несколько моделей для описания магнитного поля Земли. Наиболее часто используемая модель — это модель, в которой геомагнитное поле заменяется полем диполя. Вектор магнитной индукции в данном случае записывается следующим образом [97]:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_e}{r^5} (\mathbf{k}r^2 - 3(\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r}), \quad (38)$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор в направлении диполя,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки, в которой вычисляется индукция и  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\mu_e = 7.812 \cdot 10^6 \text{ км}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$  — постоянная земного магнетизма. При этом рассматриваются обычно две модели: наклонный диполь (его ось отклонена от оси вращения Земли на угол, примерно равный 9.5 градусам), и прямой диполь (его ось совпадает с осью вращения Земли). Первая модель является более точной, так как позволяет учитывать суточные вариации магнитного поля, однако вторая модель является более удобной для аналитического исследования управляемого движения. Наиболее же точной моделью является международная модель IGRF (International geomagnetic reference field) [98]. В данной модели вектор магнитной индукции выражается через градиент потенциала, который записывается в виде разложения в ряд по сферическим гармоникам. Величины коэффициентов разложения определяются по наземным и космическим измерениям, и публикуются Международной ассоциацией геомагнетизма и аэронавтики. Обновление коэффициентов происходит каждые пять лет, последняя публикация была сделана в 2020 году. Для низких орбит дипольная модель позволяет учесть основные изменения магнитного поля, действующего на аппарат. Модель IGRF позволяет также учесть и нерегулярные изменения, связанные с магнитными аномалиями.

### 3.3. Опорное движение

Для обеспечения требуемого ускорения аэродинамических сил сопротивления необходимо по-разному ориентировать аппарат относительно набегающего потока. В силу того, что магнитные катушки не способны обеспечить управляющий момент вдоль вектора магнитного поля, естественным является выбор такой опорной ориентации, которая в пассивном движении была бы положением равновесия. Учитывая, что в работе рассматриваются низкие околоземные орбиты (т.е. близкие к круговым), в качестве кандидатов на опорные движения могут рассматриваться гравитационные положения равновесия в орбитальной системе координат (Рис. 3.1).

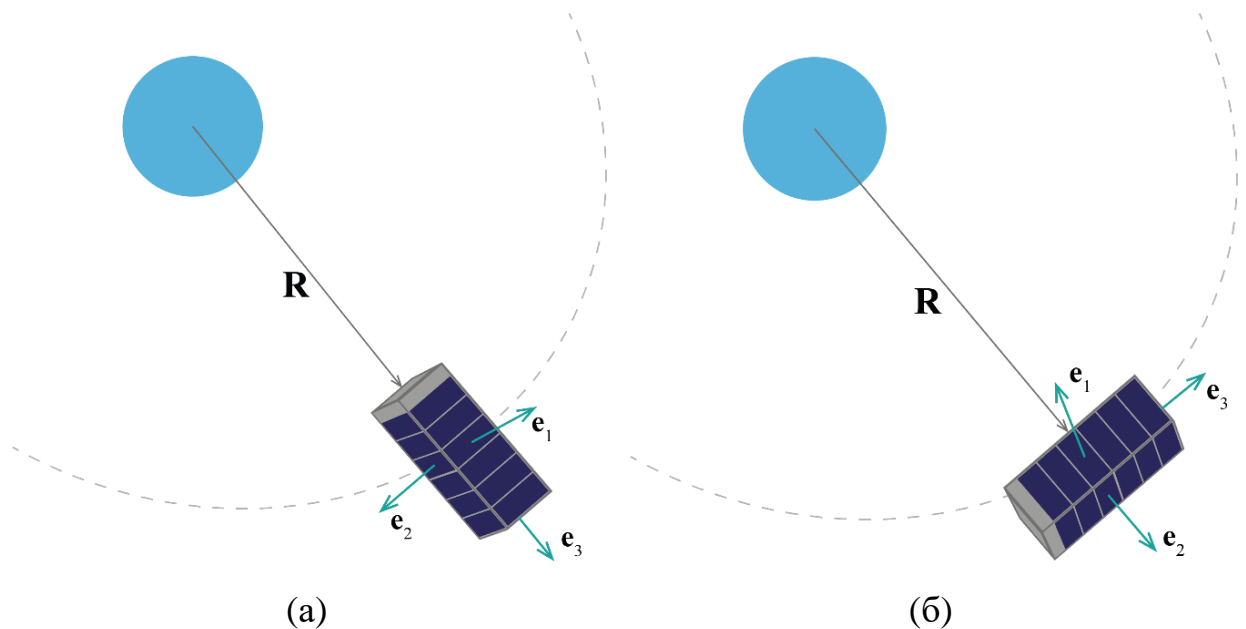


Рис. 3.1. Используемые в работе гравитационные положения равновесия

Отметим, что выбранные положения отличаются поворотом вокруг нормали к плоскости орбиты на  $90^\circ$ . Введем опорную систему координат (ОСК):

$O_c e_1 e_2 e_3$  — начало системы координат совпадает с центром масс МКА, положение ее осей описывается с помощью опорной угловой скорости  $\omega_{ref}$  и

матрицы перехода из ИСК в ОСК  $\mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК}$ . Также будем полагать, что для опорной ориентации и угловой скорости выполнены соотношения Пуассона:

$$\dot{\mathbf{S}}_{ИСК \rightarrow ОСК} = -[\boldsymbol{\omega}_{ref}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК}, \quad (39)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{ref}$  записана в проекциях на оси ОСК.

Конкретные выражения для опорной угловой скорости и базисных векторов зависят от того, какое положение равновесия в настоящий момент выбрано опорным. Для положения равновесия (а) (Рис. 3.1) они принимают вид:

$$\boldsymbol{\omega}_{ref}^{ССК} = \left( \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}, 0, 0 \right), \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{V}}{|\mathbf{R} \times \mathbf{V}|}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1. \quad (40)$$

Соответственно, для положения равновесия (б):

$$\boldsymbol{\omega}_{ref}^{ССК} = \left( \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}, 0, 0 \right), \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{V}}{|\mathbf{R} \times \mathbf{V}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \quad (41)$$

где  $\mathbf{R}, \mathbf{V}$  — радиус-вектор и скорость МКА в ИСК. Здесь рассматривается случай движения по круговой орбите радиуса  $R$ , а значит, опорная угловая скорость остается константой на всем движении. Отметим также, что выражения для опорных угловых скоростей совпадают для обоих случаев, так как первая ось ОСК всегда направлена по нормали к плоскости орбиты.

Для того, чтобы в дальнейшем получить закон управления, который будет приводить МКА в нужную ориентацию, необходимо записать уравнения углового движения относительно ОСК. Рассмотрим угловое движение МКА (32) под действием гравитационного момента (34) в проекциях на оси ССК:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{ССК} + \boldsymbol{\Omega}^{ССК} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}^{ССК} = 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{R}^{ССК} \times \mathbf{J}\mathbf{R}^{ССК} + \mathbf{M}_{ctrl}, \quad (42)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{ИСК \rightarrow ССК} = -[\boldsymbol{\Omega}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ССК},$$

где  $\mathbf{R}^{ССК} = \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ССК} \mathbf{R}^{ИСК}$ . Абсолютную угловую можно разложить на сумму опорной угловой скорости и угловой скорости относительно ОСК:

$$\boldsymbol{\Omega}^{ССК} = \mathbf{S}_{ОСК \rightarrow ССК} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{ОСК} + \boldsymbol{\omega}_{rel}^{ССК}, \quad (43)$$

где  $\mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK}$  — матрица перехода из ОСК в ССК,  $\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK}$  — относительная угловая скорость, записанная в проекциях на оси ССК. Продифференцируем полученное выражение по времени:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{CCK} = \dot{\mathbf{S}}_{OCK \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}^{OCK} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK}.$$

Зная, что опорная угловая скорость совпадает с орбитальной угловой скоростью на круговой орбите, получим  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}^{OCK} = 0$ . Также, зная, что для  $\mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK}$  выполняются соотношения Пуассона  $\dot{\mathbf{S}}_{OCK \rightarrow CCK} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK}$ , получим итоговое выражение для производной абсолютной угловой скорости:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{CCK} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK}. \quad (44)$$

Подставляя выражения для абсолютной угловой скорости (44) и (43) в уравнения, описывающие угловое движение (42), получим уравнения относительного углового движения:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK} = & -\left(\mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK}\right) \times \mathbf{J} \left(\mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK}\right) + \\ & + \mathbf{J} [\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{S}_{OCK \rightarrow CCK} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + 3 \frac{\mu}{R^5} \mathbf{R}^{CCK} \times \mathbf{J} \mathbf{R}^{CCK} + \mathbf{M}_{ctrl}. \end{aligned} \quad (45)$$

### 3.4. Построение управления

Для синтеза закона управления будем использовать прямой метод Ляпунова. Будем искать кандидат-функцию Ляпунова в виде:

$$V = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{P} \boldsymbol{\omega}_{rel}) + 2(1 - q_0),$$

где  $\mathbf{P}$  — положительно определенная диагональная матрица,  $q_0$  — это скалярная часть кватерниона  $\mathbf{Q} = (q_0 \quad \mathbf{q})^T$ , описывающего поворот из ОСК в ССК. Для  $\mathbf{Q}$  также справедливы соотношения Пуассона:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega}_{rel} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}_{rel}) \\ q_0 \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}_{rel} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Производная кандидат-функции Ляпунова в силу уравнений движения (45) и с учетом (46):

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{P}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) - 2\dot{q}_0 = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{P}\mathbf{J}^{-1}(\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{M}_{ctrl}) + \mathbf{q}),$$

где для удобства введено обозначение:

$$\hat{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref} + 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{R} \times \mathbf{J}\mathbf{R}.$$

Так как матрицы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{J}$  являются диагональными и в следствие этого перестановочными, то можно переписать производную кандидат-функции Ляпунова в виде:

$$\dot{V} = (\mathbf{P}\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}_{rel}, \hat{\mathbf{M}} + \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{q}).$$

Пусть управляющий момент удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{K}_q \mathbf{q} - \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}, \quad (47)$$

где  $\mathbf{K}_\omega$  — положительно определенная диагональная матрица и введена матрица  $\mathbf{K}_q = \mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ , которая также является положительно определенной и диагональной. Подставляя выражение для управляющего момента, получим

$$\dot{V} = -(\mathbf{K}_q^{-1}\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}) \leq 0.$$

Так как матрица  $\mathbf{K}_q^{-1}\mathbf{K}_\omega$  является положительно определенной, то производная функции Ляпунова будет являться неположительной. Получаем, что для предложенного управляющего момента будут выполняться условия теоремы Барбашина-Красовского. Это означает, что предложенный управляющий момент (47) будет обеспечивать асимптотическую сходимость к опорному движению.

### 3.5. Реализация управления с помощью магнитных катушек

В настоящей главе управляющий момент, полученный в предыдущем разделе, предполагается реализовать с помощью магнитной системы управления ориентацией. Как было отмечено ранее, управляющий момент нельзя реализовать вдоль вектора магнитной индукции Земли, т.е. от желаемого управления (47) останется часть перпендикулярная  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{M}_{ctrl}^\perp = \mathbf{M}_{ctrl} - \mathbf{e}_B (\mathbf{e}_B, \mathbf{M}_{ctrl}) = -[\mathbf{e}_B]_{\times} [\mathbf{e}_B]_{\times} \mathbf{M}_{ctrl}, \quad (48)$$

где  $\mathbf{e}_B = \mathbf{B} / |\mathbf{B}|$  — единичный вектор, направленный вдоль вектора магнитной индукции. Так как нельзя реализовать полную величину управления, которое обеспечивает асимптотическую сходимость к опорному движению, рассмотрим уравнения углового движения в линейном приближении. В дальнейшем выберем матричные коэффициенты управления  $\mathbf{K}_\omega$  и  $\mathbf{K}_q$  таким образом, чтобы управление обеспечивало сходимость к опорному движению в линейном приближении.

Для дальнейшего исследования линеаризуем уравнения движения (45) вблизи опорного движения. Зададим матрицу  $\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow ССК}$  следующей последовательностью поворотов: вокруг второй оси на  $\alpha_2$ , вокруг первой на  $\alpha_1$  и вокруг третьей на  $\alpha_3$ . В таком случае столбцы матрицы  $\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow ССК}$  имеют вид:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ -\sin \alpha_3 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 \\ -\sin \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_3 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Линеаризуя матрицу  $\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow ССК}$  в окрестности опорного движения  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , получим:

$$\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow ССК} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства перепишем следующим образом  $\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow ССК} = \mathbf{E} - [\mathbf{a}]_x$ , где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$ . Подставим полученное выражение в (45), оставляя только члены первого порядка малости и учитывая, что  $\boldsymbol{\omega}_{rel}$  в окрестности опорного движения — это малая величина:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK} = & -\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} + \\
& + [\mathbf{a}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}[\mathbf{a}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \\
& + 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} - \\
& - 3\frac{\mu}{R^5} [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} - \\
& - 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J}[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} + \mathbf{M}_{ctrl}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Когда ССК совпадает с ОСК,  $\boldsymbol{\omega}_{rel} = 0$  и  $\mathbf{S}_{ОСК \rightarrow ССК} = \mathbf{E}$ , тогда

$$\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} = 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК}.$$

В таком случае (49) упрощается

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK} = & -\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} + \\
& + [\mathbf{a}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}[\mathbf{a}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \\
& - 3\frac{\mu}{R^5} [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} - \\
& - 3\frac{\mu}{R^5} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} \times \mathbf{J}[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{S}_{ИСК \rightarrow ОСК} \mathbf{R}^{ИСК} + \mathbf{M}_{ctrl}.
\end{aligned}$$

Зная, что опорная угловая скорость совпадает с орбитальной угловой скоростью на круговой орбите, введем  $|\boldsymbol{\omega}_{ref}| = \omega = \sqrt{\mu / R^3}$ , тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{CCK} = & -\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}^{CCK} + \\
& + [\mathbf{a}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} \times \mathbf{J}[\mathbf{a}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{OCK} - \\
& - 3\omega^2 \left( [\mathbf{a}]_{\times} \frac{\mathbf{R}^{OCK}}{R} \times \mathbf{J} \frac{\mathbf{R}^{OCK}}{R} + \frac{\mathbf{R}^{OCK}}{R} \times \mathbf{J}[\mathbf{a}]_{\times} \frac{\mathbf{R}^{OCK}}{R} \right) + \mathbf{M}_{ctrl}.
\end{aligned} \tag{50}$$

Ранее было введено два опорных движения (40) и (41), которые совпадают с гравитационными положениями равновесия. Для каждого из положений равновесия, используя (50), можем получить линейные уравнения относительного движения в ССК:

$$\text{Для положения (а):} \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \mathbf{Y}_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{Y}_{\alpha} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}_{ctrl}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}_{rel}, \end{cases}$$

Для положения (б):

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \mathbf{Y}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{Y}_\beta \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}_{ctrl}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}_{rel}, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{Y}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B+C-A}{B} \omega \\ 0 & \frac{A-C-B}{B} \omega & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_\alpha = \begin{pmatrix} 3\omega^2 \frac{C-B}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 4\omega^2 \frac{C-A}{B} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \frac{B-A}{C} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_\beta = \begin{pmatrix} 3\omega^2 \frac{B-C}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \frac{C-A}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 4\omega^2 \frac{B-A}{C} \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученный в предыдущем разделе закон управления (47) и учитывая (48), итоговые уравнения для рассматриваемых положений равновесия можно записать следующим образом соответственно:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \mathbf{Y}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{Y}_\alpha \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{e}_B]_\times [\mathbf{e}_B]_\times (\mathbf{J} \mathbf{Y}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{J} \mathbf{Y}_\alpha \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{K}_q \mathbf{q} + \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}), \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}_{rel}, \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \mathbf{Y}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{Y}_\beta \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{e}_B]_\times [\mathbf{e}_B]_\times (\mathbf{J} \mathbf{Y}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{J} \mathbf{Y}_\beta \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{K}_q \mathbf{q} + \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}), \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}_{rel}. \end{cases} \quad (52)$$

Если в качестве модели магнитного поля Земли взять модель прямого диполя, то вследствие движения МКА по круговой орбите, уравнения (51) и (52) будут являться периодическими с периодом  $T = 2\pi / \omega$ . В таком случае для изучения движения можно применить теорию Флоке [99]. Рассмотрим



фундаментальную матрицу  $\Phi$  для системы (51), полученную для начальных условий  $\Phi(0) = \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица  $6 \times 6$ . Пусть  $\rho_k$  являются корнями характеристического уравнения

$$\det(\Phi(T) - \rho \mathbf{E}) = 0,$$

тогда, если для любого  $k$  выполняется  $\operatorname{Re}(\ln \rho_k) < 0$ , то положение равновесия  $\alpha = 0, \omega_{rel} = 0$  линейной системы (51) будет асимптотически устойчивым. Более того, чем меньше  $\max \operatorname{Re}(\ln \rho_k)$ , тем быстрее сходится система к положению равновесия. Таким образом, оптимальные матричные коэффициенты управления  $\mathbf{K}_\omega$  и  $\mathbf{K}_q$  получаются из решения задачи минимизации

$$\max_k \operatorname{Re}(\ln \rho_k) \rightarrow \min.$$

Аналогичным образом коэффициенты управления можно подобрать и для системы (52). Следует иметь в виду, что полученные  $\mathbf{K}_\omega$  и  $\mathbf{K}_q$  будут оптимальными только для линейной системы уравнений. С другой стороны, поскольку основное возмущение, вызванное гравитационным моментом, учитывается в уравнениях, а различие между упрощенной моделью магнитного поля и реальной довольно мало, можно рассчитывать, что закон управления обеспечит сходимость траектории углового движения МКА в нужное положение с некоторой точностью.

### 3.6. Численное исследование

Для демонстрации работы предложенного алгоритма управления ориентацией при помощи магнитных катушек проводилось численное моделирование, учитывающее различные факторы. В моделировании рассматривается низкая околоземная орбита высотой 400 км и наклоном  $97^\circ$ , в силу чего на МКА действует не только гравитационный момент, но и аэродинамический (35). В моделировании считаем плотность  $\rho$  постоянной и равной  $4.2 \cdot 10^{-12}$  кг / м<sup>3</sup>. Скорость аппарата относительно атмосферы будет

определяться исходя из того, что атмосфера вращается вместе с Землей, т.е. ее скорость в точке нахождения аппарата  $\mathbf{R}$  определяется как  $\mathbf{V}_{atmo} = \mathbf{\Omega}_E \times \mathbf{R}$ , где  $\mathbf{\Omega}_E$  — угловая скорость вращения Земли. Для моделирования магнитного поля Земли используется модель IGRF. Также будем считать, что МКА для определения величины магнитного поля использует магнитометр. Вследствие этого при подсчете управляющего момента (48) будет учитываться нормально распределенная ошибка со среднеквадратическим отклонением 300 нТл, что соответствует неточности определения магнитного поля с помощью магнитометра.

В результате решения задачи минимизации, описанной в предыдущем разделе, были получены следующие наборы коэффициентов управления, обеспечивающих положения равновесия:

$$\begin{aligned} \text{для положения (а):} \quad & \mathbf{K}_q = \text{diag}(1.12 \cdot 10^{-6}, 1.61 \cdot 10^{-6}, 5.78 \cdot 10^{-7}) \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ & \mathbf{K}_\omega = \text{diag}(3.1 \cdot 10^{-4}, 3.68 \cdot 10^{-4}, 4.41 \cdot 10^{-4}) \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; \\ \text{для положения (б):} \quad & \mathbf{K}_q = \text{diag}(1.05 \cdot 10^{-5}, -1.40 \cdot 10^{-7}, 5.22 \cdot 10^{-7}) \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ & \mathbf{K}_\omega = \text{diag}(5.36 \cdot 10^{-3}, 0.1 \cdot 10^{-3}, 0.59 \cdot 10^{-3}) \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Далее проведем исследование характеристик движения под действием алгоритма управления для стабилизации МКА в положении равновесия (б).

В первую очередь рассмотрим, как неточность начального положения влияет на сходимость управляемого движения. Будем считать, что в начальный момент времени МКА находится в окрестности выбранного опорного движения:

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_{ref} \circ \Delta \mathbf{Q}, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_{ref} + \Delta \boldsymbol{\omega},$$

где  $\Delta \mathbf{Q}, \Delta \boldsymbol{\omega}$  соответствуют начальным ошибкам стабилизации относительно положения равновесия (б),  $\mathbf{Q}_{ref}, \boldsymbol{\omega}_{ref}$  — кватернион и угловая скорость, соответствующие опорному движению. При этом  $\Delta \mathbf{Q} = \left( \cos \frac{\varphi}{2}, \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2} \right)$ ,

$\varphi \in N(0, \sigma_q^2)$ , где  $\mathbf{e}$  — равномерно распределенный по сфере единичный вектор,  $\Delta\boldsymbol{\omega} \in N(\mathbf{0}, \mathbf{E}\sigma_\omega^2)$ . В моделировании учитывались следующие величины отклонений:  $\sigma_q = 5^\circ$ ,  $\sigma_\omega = 0.0029$  град/с. Рассматриваемая платформа МКА представляет собой параллелепипед с размерами  $10 \times 10 \times 30$  см и массой 5 кг. Также учитывалась неточность знания тензора инерции аппарата, которая заключалась в ошибке знания главных моментов инерции 5% и неточности знания направления главных осей инерции  $1^\circ$ . При расчете аэродинамики считаем, что центр масс находится в геометрическом центре параллелепипеда. Результаты 200 испытаний представлены на рис. 3.2- 3.5. Для каждого испытания на рис. 3.2-3.4 представлены разница главных моментов инерции по осям  $Ox$  и  $Oy$  ССК, разница начальной угловой скорости с опорной  $\Delta\boldsymbol{\omega}$  и отклонение начальной ориентации МКА от опорной соответственно. На рис. 3.5 представлены результаты средней ошибки ориентации за последний виток и за последние полвитка моделирования. При этом общее время моделирования было порядка 5 часов. Как видно из результатов моделирования, предложенный алгоритм управления справляется с задачей стабилизации МКА в положении равновесия (б), при этом точность ориентации составляет порядка  $4-6^\circ$ .

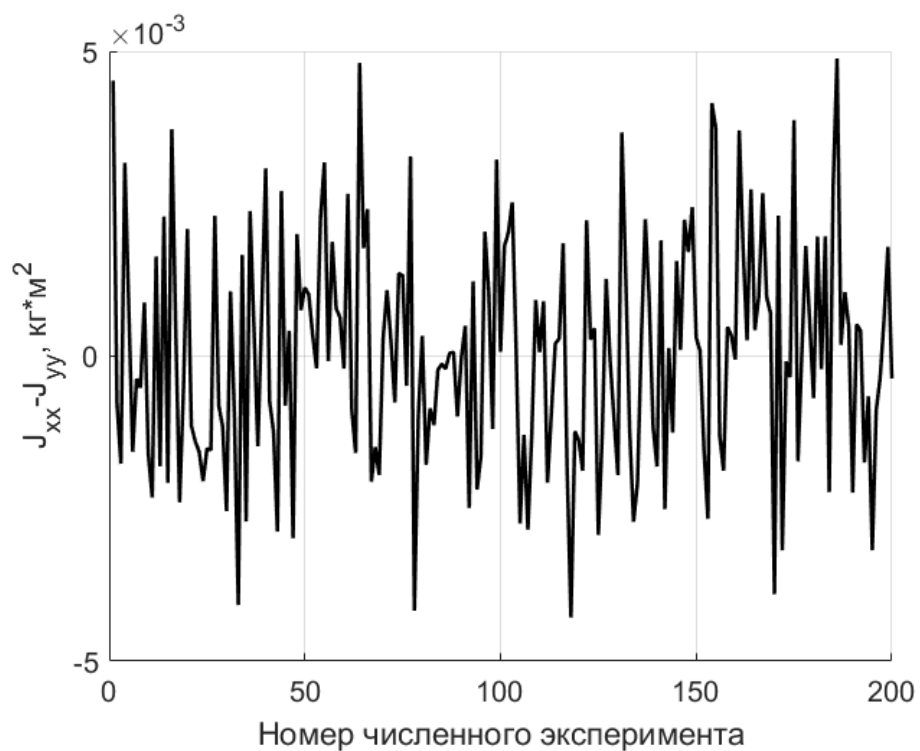


Рис. 3.2 Ошибка по моментам инерции аппарата

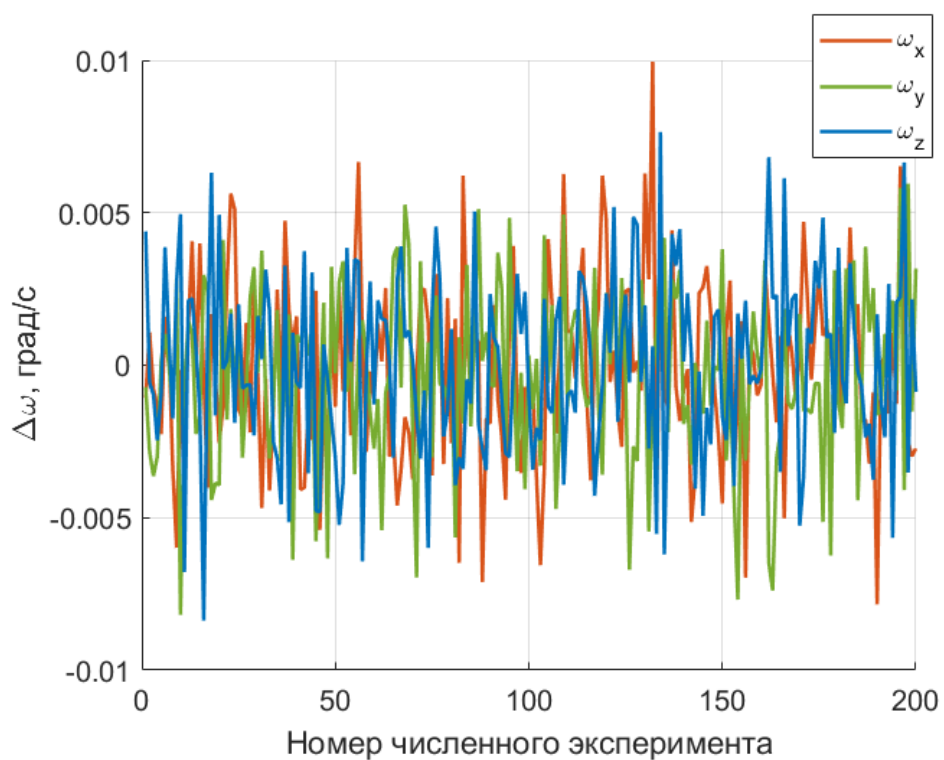


Рис. 3.3. Ошибка по начальной угловой скорости

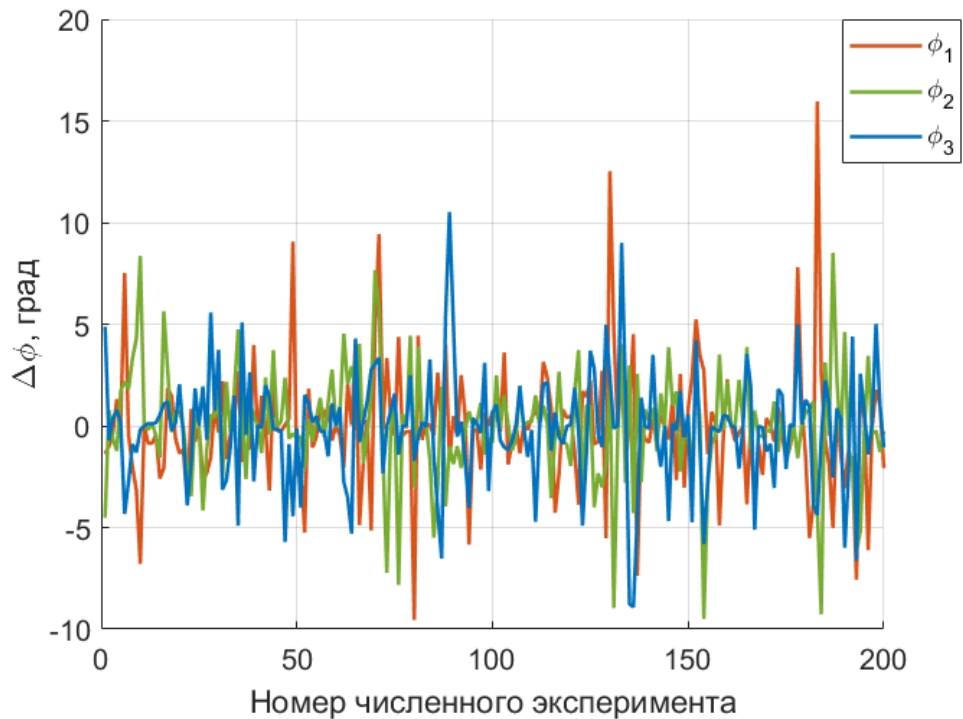


Рис. 3.4. Ошибка ориентации МКА относительно опорного движения

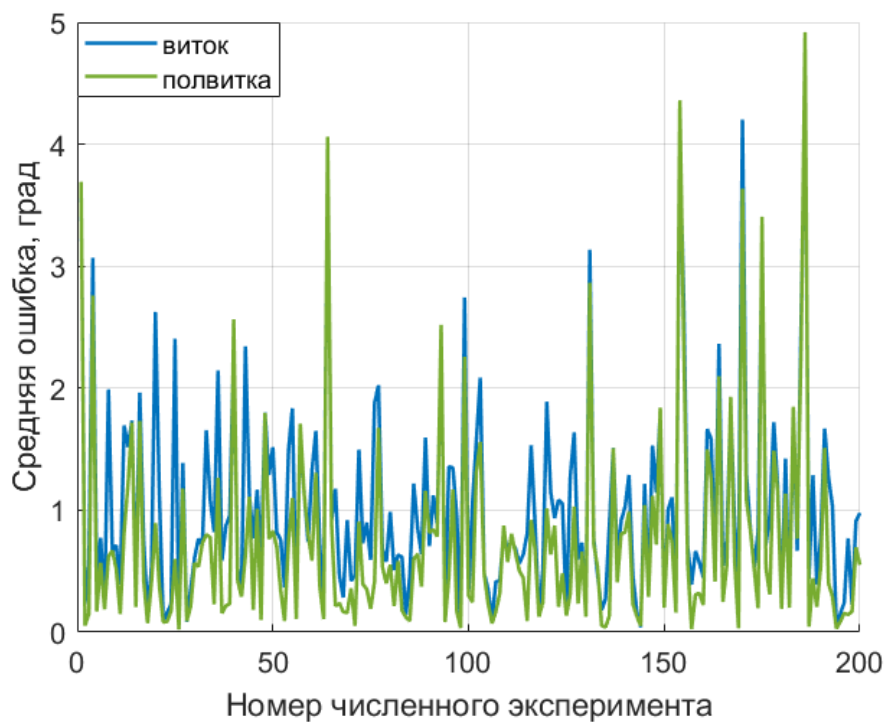


Рис. 3.5. Ошибка ориентации МКА относительно опорного движения

Интерес также представляет влияние аэродинамического момента на сходимость управляемого движения. Будем считать, что центр масс МКА сдвинут вдоль одной из осей ССК, и для каждого значения такого сдвига

посмотрим, какая будет получаться средняя ошибка ориентации за последний виток и за последние полвитка моделирования. Результаты моделирования представлены на рис. 3.6.

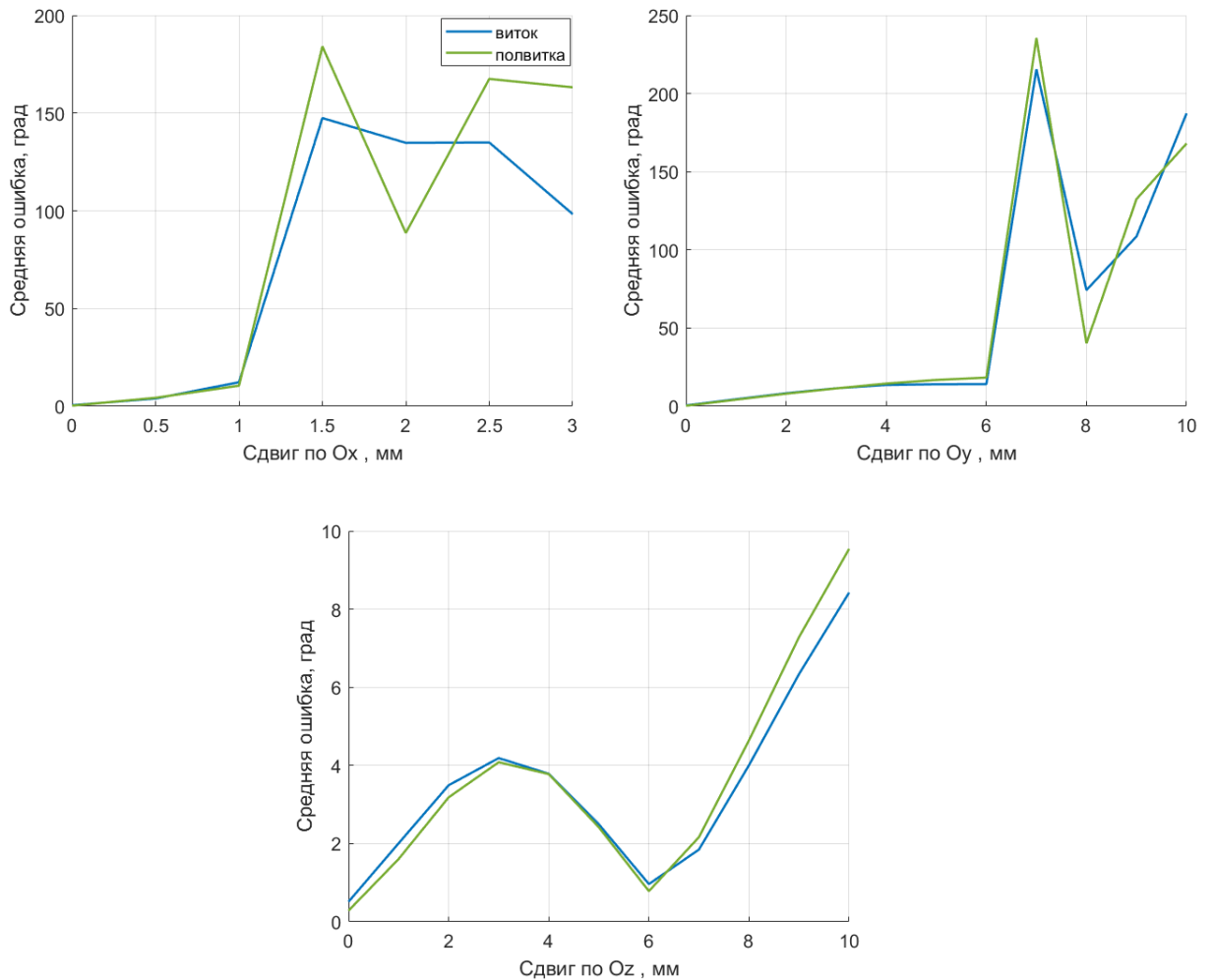


Рис. 3.6. Точность ориентации МКА относительно опорного движения в зависимости от сдвига центра масс

Как видно из результатов моделирования, наиболее чувствительным закон управления оказывается к сдвигу центра масс вдоль оси  $Ox$  ССК. Это может быть объяснено тем, что аэродинамический момент, возникающий в такой ситуации, будет стараться повернуть МКА из плоскости орбиты. В то же время, сдвиги вдоль других осей приводят к появлению возмущающего момента по нормали к плоскости орбиты, вдоль которой в нашем случае (приполярная орбита) практически всегда можно создать управляющее

воздействие. Отметим также улучшение точности при увеличении сдвига вдоль оси  $Oz$  до некоторых пределов: это связано с тем, что в положении равновесия (б) при таком сдвиге возникает восстанавливающий аэродинамический момент, который способствует стабилизации оси симметрии МКА по потоку.

Для задач группового полета представляет интерес переориентация аппаратов из одного положения равновесия в другое для создания требуемой величины атмосферного сопротивления, поэтому далее рассмотрим, как алгоритм справляется с задачей переориентации. В моделировании будет учитываться неточность начального положения, неточность знания тензора инерции МКА и ошибка измерений магнитометра. На рис. 3.7 представлен пример работы алгоритма при переориентации аппарата из положения равновесия (а) в положение (б). В начальный момент времени МКА находится в окрестности положения (а) и первые 2.2 часа алгоритм стабилизирует аппарат в этом положении. Далее происходит переключение на стабилизацию в положении равновесия (б), что соответствует пикам на графике в компонентах относительного кватерниона. За следующие несколько часов аппарат так же стабилизируется в новом положении. Создаваемый во время моделирования дипольный момент на катушках можно увидеть на рис. 3.8.

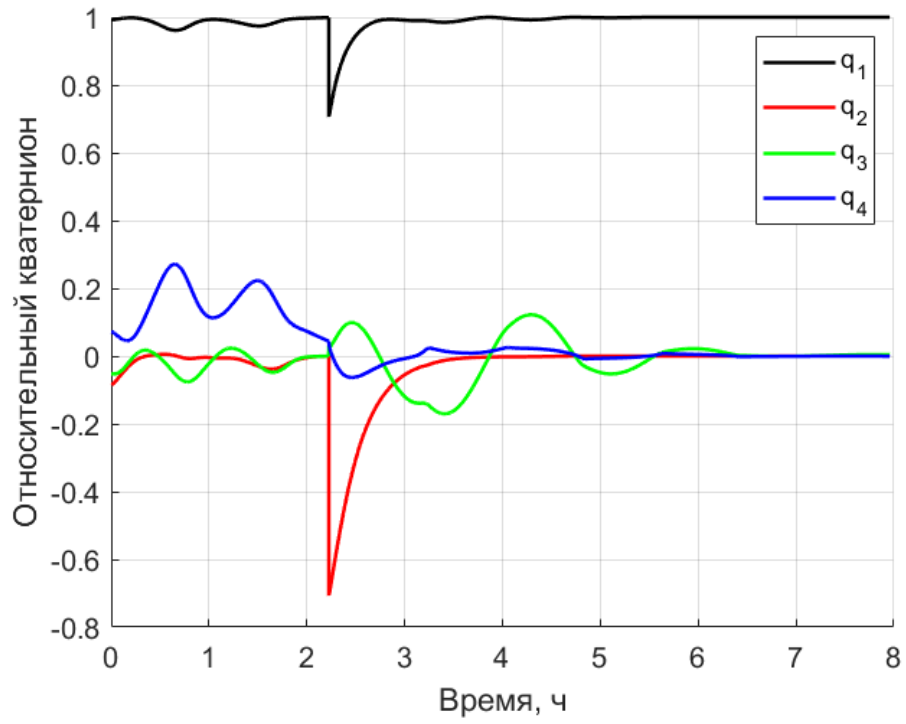


Рис. 3.7. Изменение относительного кватерниона при переориентациях

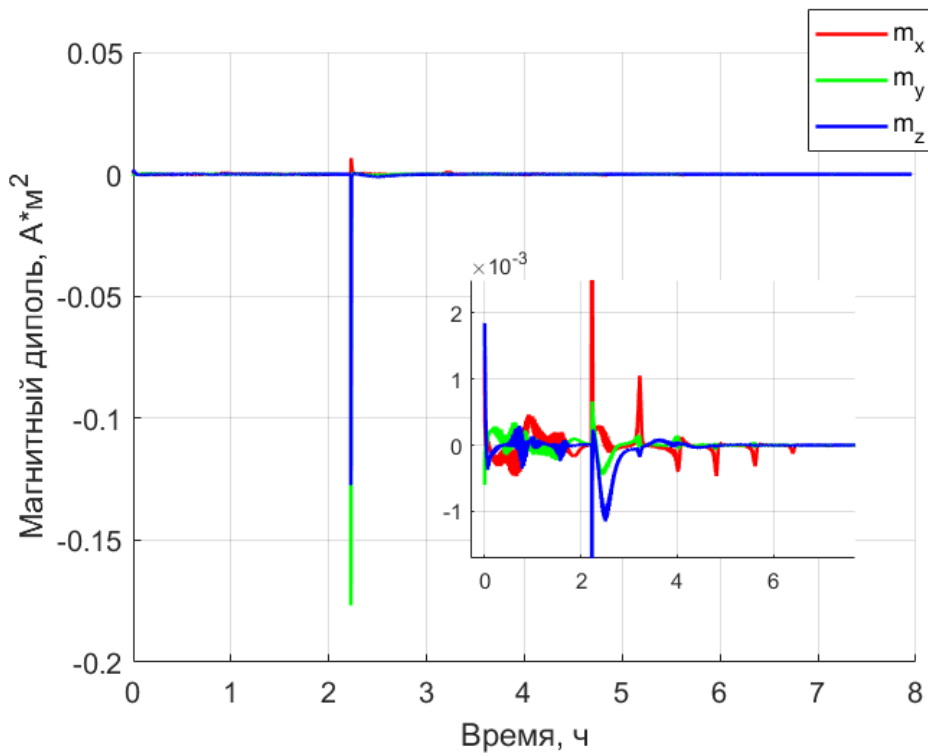


Рис. 3.8. Дипольный момент при переориентации



Далее будет интересно рассмотреть, какая точность стабилизации достижима при переходе из одного положения в другое и обратно. Проводилось 200 испытаний, включающих себя различные неточности, которые ранее были описаны. Каждое испытание проводилось на протяжении десяти витков. Результаты этих испытаний представлены на рис. 3.9-3.10. Черным цветом показана средняя величина ошибки ориентации за последний виток моделирования, красным цветом — максимальная ошибка ориентации на последнем витке.

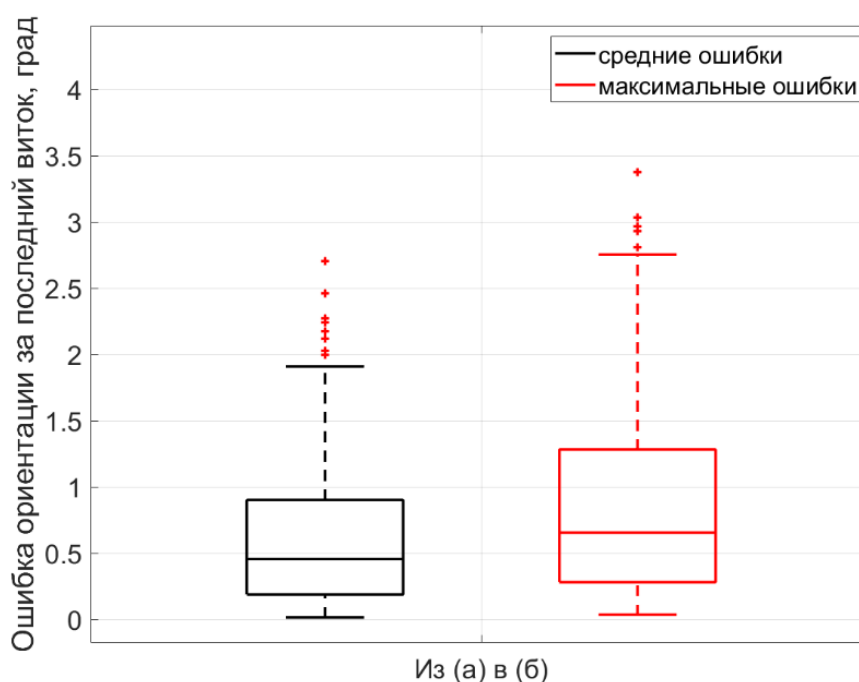


Рис. 3.9. Ошибки стабилизации при переходе из положения (а) в положение (б)

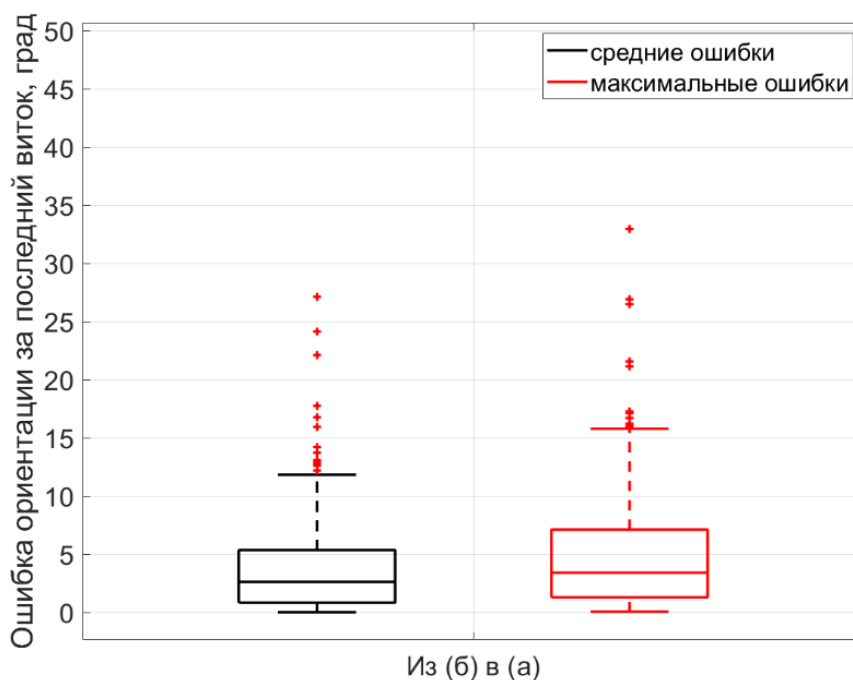


Рис. 3.10. Ошибки стабилизации при переходе из положения (б) в положение (а)

### 3.7. Применение к задаче построения треугольной формации

В предыдущем разделе было исследовано, как предложенный алгоритм управления угловым движением позволяет стабилизировать и переориентировать один аппарат. Теперь проверим, насколько предложенный подход применим для реализации в групповом полете. Для этого рассмотрим задачу построения правильной треугольной формации при пролете над экваториальной зоной, которая рассматривалась в Главе 2. В этой главе предполагалось, что один из аппаратов удерживает среднее значения площади поперечного сечения, а для оставшихся требуемая площадь поперечного сечения выбиралась из двух значений  $S_{min}$ ,  $S_{max}$  по закону (30). Применительно к нашему алгоритму  $S_{max}$ , т.е. максимальная площадь поперечного сечения стоит по потоку, соответствует положению (а),  $S_{min}$  — положение (б). Среднее положение по площади для одного из МКА предлагается реализовать следующим образом: этот аппарат будет стабилизировать равные промежутки

времени то одно положение, то другое, что в среднем будет оказывать влияние на его движение такое, как будто бы реализуется среднее положение по площади поперечного сечения. Во время моделирования учитывалось отклонение начальных положений и скоростей от номинальных с отклонениями  $\sigma_R = 10$  м,  $\sigma_V = 0.01$  м/с. В начальный момент времени ориентация аппаратов находится в окрестности положения равновесия (а). Также моделирование будет включать вариации плотности атмосферы по ГОСТу Р 25645.166-2004 [56], модель магнитного поля IGRF, модель гравитационного поля в разложении по гармоникам  $10 \times 10$ . Влияние атмосферы приводит к постепенному уменьшению высот аппаратов, что можно заметить на рис. 3.11. Качество треугольной формации (31) при пролете экватора представлено на рис. 3.12. Примерно за месяц качество достигает значений близких к единице и поддерживается оставшееся время миссии. На рис. 3.13 показано, как изменяется ошибка ориентации одного из аппаратов за несколько дней миссии. Большие скачки на графиках соответствуют переключениям требуемого углового движения с одного положения на другое. Времени между переключениями хватает для того, чтобы алгоритм успел стабилизировать МКА в требуемом положении. Точность стабилизации при этом получается не хуже 5 градусов.

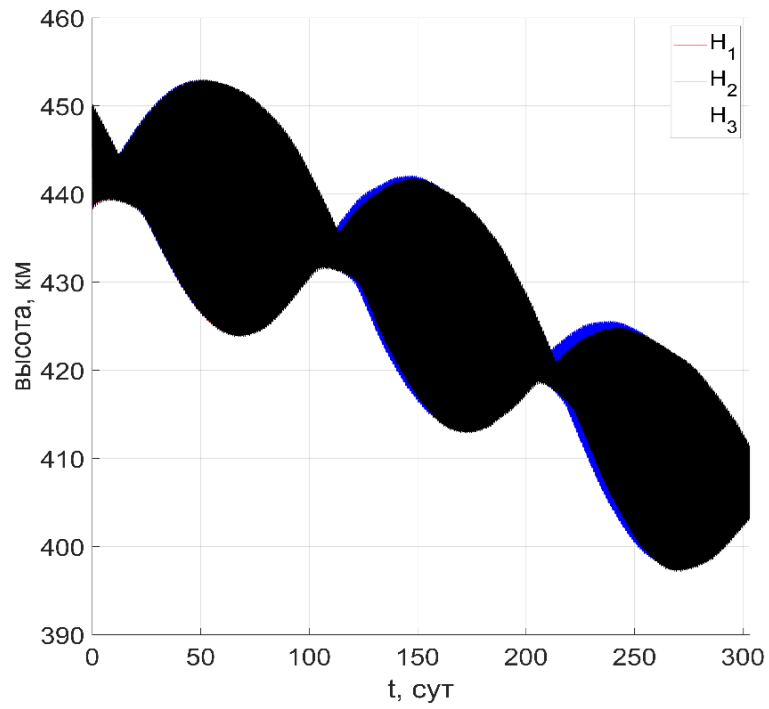


Рис. 3.11. Изменение высоты трёх аппаратов во время всей миссии

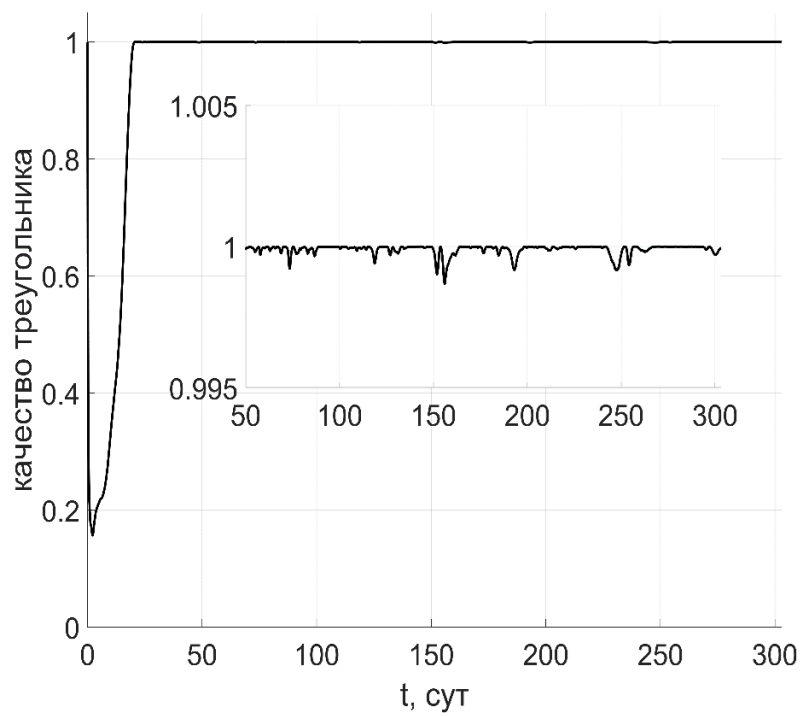


Рис. 3.12. Качество треугольника при пролёте над экватором

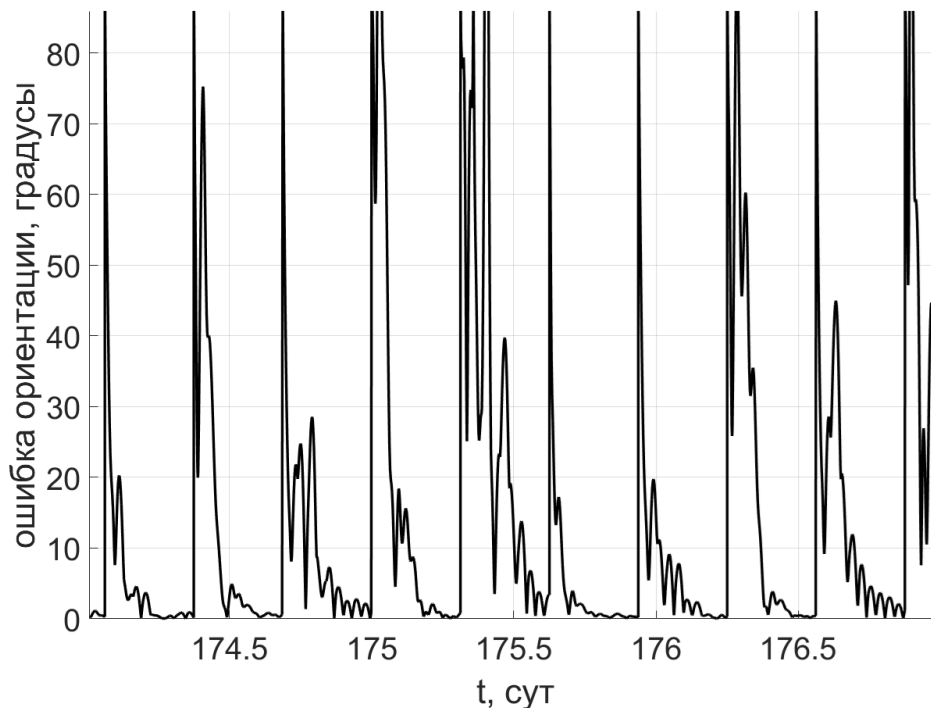


Рис. 3.13. Ошибка стабилизации при переориентации

### 3.8. Выводы по Главе 3

В третьей главе предложен алгоритм стабилизации гравитационных положений равновесия вытянутого МКА с помощью магнитной системы управления, что требуется для обеспечения действия требуемой аэродинамической силы. Проведено исследование управляемого движения, которое показало работоспособность алгоритма с учетом ошибок начальных условий и неточности знания тензора инерции, точность ориентации в среднем не хуже 5 градусов. Продемонстрировано применение алгоритма управления для задачи обеспечения заданного относительного движения трёх МКА для задачи из второй главы, аппараты достигают требуемого качества треугольника при высокой солнечной активности за 20 дней управляемого движения и удерживают требуемое положение с точностью не хуже 2 км.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе был предложен ряд подходов к управлению движением малых космических аппаратов в групповом полёте и проведены аналитические и численные исследования управляемого движения, результаты которых могут быть использованы при разработке реальных миссий группового полёта. Была предложена методика построения и бестопливного поддержания спутниковой формации в конфигурации правильного треугольника с изменяемым размером ребра для исследования молниевых эффектов. Исследование управляемого движения с учетом возмущений и ошибок начального положения и скорости показало работоспособность предложенного подхода к построению управления. Разработанная методика аналитического исследования управляемого движения группы малых спутников с учётом коммуникационных ограничений позволила получить конечные выражения для требуемого размера коммуникационной области в зависимости от ошибок выведения во время кластерного запуска. Предложенные алгоритмы управления относительным движением космических аппаратов с использованием аэродинамических сил решает задачу обеспечения ограниченности относительных траекторий движения спутников в группе. Разработанный алгоритм управления угловым движением с помощью активной магнитной системы ориентации позволяет стабилизировать гравитационные положения равновесия.

## Список литературы

1. Ivanov D., Ovchinnikov M., Sakovich M. Relative Pose and Inertia Determination of Unknown Satellite Using Monocular Vision // *Int. J. Aerosp. Eng.* 2018. Article ID 9731512. 9 p.
2. D'Amico S. et al. Noncooperative Rendezvous Using Angles-Only Optical Navigation: System Design and Flight Results // *J. Guid. Control. Dyn.* 2013. Vol. 36, № 6. P. 1576–1595.
3. Matsuka K. et al. Decentralized formation pose estimation for spacecraft swarms // *Adv. Sp. Res.* 2021. Vol. 67, № 11. P. 3527–3545.
4. Kruger J., D'Amico S. Autonomous angles-only multitarget tracking for spacecraft swarms // *Acta Astronaut.* 2021. Vol. 189. P. 514–529.
5. Jasiobedzki P. et al. Autonomous satellite rendezvous and docking using lidar and model based vision // *Spaceborne Sensors.* 2005. Vol. 5798. P. 54–65.
6. Kahr E. et al. GPS relative navigation for the CanX-4 and CanX-5 formation-flying nanosatellites // *J. Spacecr. Rockets.* 2018. Vol. 55, № 6. P. 1545–1558.
7. Alfriend K. et al. *Spacecraft formation flying: dynamics, control and navigation.* Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2010. 382 p.
8. Scharf D.P., Hadaegh F.Y., Ploen S.R. A survey of spacecraft formation flying guidance and control (part 1): guidance // *Proceedings of the 2003 American Control Conference, Denver, Colorado, 4-6 June 2003.* Vol. 2. P. 1733–1739.
9. Di Mauro G., Lawn M., Bevilacqua R. Survey on Guidance Navigation and Control Requirements for Spacecraft Formation-Flying Missions // *J. Guid. Control. Dyn.* 2018. Vol. 41, № 3. P. 581–602.
10. Obukhov V.A. et al. Control of a service satellite during its mission on space debris removal from orbits with high inclination by implementation of an ion beam method // *Acta Astronaut.* 2022. Vol. 194. P. 390–400.
11. Ovchinnikov M.Y. et al. Development and Laboratory Verification of Control Algorithms for Formation Flying Configuration with a Single-input Control // *Acta Astronaut.* 2010. Vol. 67. P. 1158–1163.

12. Guerman A.D. et al. Close Relative Trajectories for Formation Flying with Single-Input Control // Math. Probl. Eng. Artic. ID 967248. 2012. 20 p.
13. Sabatini M., Palmerini G. Aerodynamic coordinated control of attitude and relative position of a formation of microsattellites Marco Sabatini // Proc. 74th Int. Astronaut. Congr. Baku, Azerbaijan, 2-6 October, 2023, IAC-23-C1.4.10. 12 p.
14. Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // Master Thesis, Massachusetts Inst. Technol. 1986. 202 p.
15. Kumar B.S., Ng A. Bang-Bang Control Approach to Maneuver Spacecraft in a Formation With Differential Drag // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, AIAA Paper No.2008-6469, Honolulu, Hawaii, August 2008. 15 p.
16. Ivanov D., Kushniruk M., Ovchinnikov M. Study of satellite formation flying control using differential lift and drag // Acta Astronaut. 2018. Vol. 145. P. 88–100.
17. Pérez D., Bevilacqua R. Lyapunov-Based Adaptive Feedback for Spacecraft Planar Relative Maneuvering via Differential Drag // J. Guid. Control. Dyn. 2014. Vol. 37, № 5. P. 1678–1684.
18. Pérez D., Bevilacqua R. Differential drag spacecraft rendezvous using an adaptive Lyapunov control strategy // Acta Astronaut. 2013. Vol. 83. P. 196–207.
19. Kumar K.D. et al. Maintenance of Satellite Formations Using Environmental Forces // Acta Astronaut. 2014. Vol. 102. P. 341–354.
20. Dellelce L., Kerschen G. Optimal propellantless rendez-vous using differential drag // Acta Astronaut. 2015. Vol. 109. P. 112–123.
21. Horsley M., Nikolaev S., Pertica A. Small Satellite Rendezvous Using Differential Lift and Drag // J. Guid. Control. Dyn. 2013. Vol. 36, № 2. P. 445–453.
22. Shao X. et al. Satellite formation keeping using differential lift and drag under J2 perturbation // Aircr. Eng. Aerosp. Technol. 2017. Vol. 89, № 1. P. 11–19.



23. Ivanov D. et al. Deployment and Maintenance of Nanosatellite Tetrahedral Formation Using Aerodynamic Forces // Proceedings of 69th International Astronautical Congress (IAC), Bremen, Germany, 1-5 October 2018, Paper IAC-18-B4.7.6. 11 p.
24. Gong S., Yunfeng G., Li J. Solar sail formation flying on an inclined Earth orbit // *Acta Astronaut.* 2011. Vol. 68, № 1–2. P. 226–239.
25. Shahid K., Kumar K.D. Multiple spacecraft formation reconfiguration using solar radiation pressure // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 103. P. 269–281.
26. Shahid K., Kumar K.D. Formation Control at the Sun-Earth L(2) Libration Point Using Solar Radiation Pressure // *J. Spacecr. Rockets.* 2010. Vol. 47, № 4. P. 614–626.
27. Gong S., Baoyin H., Li J. Solar Sail Formation Flying Around Displaced Solar Orbits // *J. Guid. Control. Dyn.* 2007. Vol. 30, № 4. P. 1148–1152.
28. Williams T., Wang Z.-S. Solar Radiation Pressure and Formation-Keeping in Highly Elliptical Orbits // *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Monterey, California, 5-8 August 2002. 14 p.
29. Parsay K., Schaub H. Drift-free solar sail formations in elliptical Sun-synchronous orbits // *Acta Astronaut.* 2017. Vol. 139. P. 201–212.
30. Mashtakov Y.V. et al. Attitude and relative motion control of satellites in formation flying via solar sail with variable reflectivity properties // Proceedings of the 69th International Astronautical Congress, Bremen, Germany, 1-5 October 2018, IAC-18-C1.5.7. 8 p.
31. King L.B., Parker G.G. Spacecraft Formation Flying Using Inter-vehicle Coulomb Forces // *NASA tech. rep. NASA/NIAC*, 2002. 103 p.
32. Jones D.R., Schaub H. Collinear Three-Craft Coulomb Formation Stability Analysis and Control // *J. Guid. Control. Dyn.* 2014. Vol. 37, № 1. P. 224–232.
33. Wang S., Schaub H. Electrostatic Spacecraft Collision Avoidance Using Piecewise-Constant Charges // *J. Guid. Control. Dyn.* 2010. Vol. 33, № 2. P. 510–520.

34. Saaj C.M. et al. Hybrid propulsion system for formation flying using electrostatic forces // *Aerosp. Sci. Technol.* 2010. Vol. 14, № 5. P. 348–355.
35. Chung S.-J., Miller D.W. Propellant-Free Control of Tethered Formation Flight, Part 1: Linear Control and Experimentation // *J. Guid. Control. Dyn.* 2008. Vol. 31, № 3. P. 571–584.
36. Zhang J., Yang K., Qi R. Dynamics and offset control of tethered space-tug system // *Acta Astronaut.* 2018. Vol. 142. P. 232–252.
37. Chen Y. et al. History of the Tether Concept and Tether Missions: A Review // *ISRN Astron. Astrophys.* 2013. Vol. 2013. P. 1–7.
38. Guerman A.D. et al. Stationary Configurations of a Tetrahedral Tethered Satellite Formation // *J. Guid. Control. Dyn.* 2008. Vol. 31, № 2. P. 424–428.
39. Gates S.S., Koss S.M., Zedd M.F. Advanced Tether Experiment Deployment Failure // *J. Spacecr. Rockets.* 2001. Vol. 38, № 1. P. 60–68.
40. Ivanov D., Ovchinnikov M. Constellations and formation flying // *Cubesat Handbook*. Academic Press, 2021. P. 135–146.
41. Rajan R.T. et al. Applications and Potentials of Intelligent Swarms for magnetospheric studies // *Acta Astronaut.* 2022. Vol. 193. P. 554–571.
42. Foust R.C. et al. Autonomous in-orbit satellite assembly from a modular heterogeneous swarm // *Acta Astronaut.* 2020. Vol. 169. P. 191–205.
43. Colombo C., McInnes C. Orbit design for future SpaceChip swarm missions in a planetary atmosphere // *Acta Astronaut.* 2012. Vol. 75. P. 25–41.
44. Voronina M.Y., Shirobokov M.G. The Method of Determination of the Gravitational Field Model of an Asteroid Using a Group of Small Spacecrafts // *Cosm. Res.* 2022. Vol. 60, № 3. P. 185–193.
45. Sabatini M., Palmerini G.B., Gasbarri P. Control laws for defective swarming systems // *Adv. Astronaut. Sci.* 2015. Vol. 153. P. 749–768.
46. Shirobokov M.G., Trofimov S.P. Adaptive Neural Formation-Keeping Control for Satellites in a Low-Earth Orbit // *Cosm. Res.* 2021. Vol. 59, № 6. P. 501–516.
47. Izzo D., Simoes L.F., Croon G.C.H.E. An evolutionary robotics approach for

- the distributed control of satellite formations // *Evol. Intell.* 2014. Vol. 7, № 2. P. 107–118.
48. Morgan D. et al. Swarm-Keeping Strategies for Spacecraft Under J2 and Atmospheric Drag Perturbations // *J. Guid. Control. Dyn.* 2012. Vol. 35, № 5. P. 1492–1506.
  49. Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // *Am. J. Math.* 1878. Vol. 1, № 1. P. 5–26.
  50. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // *J. Astronaut. Sci.* 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–678.
  51. Mashtakov Y. et al. Two-satellite formation flying control by cell-structured solar sail // *Acta Astronaut.* 2020. Vol. 170. P. 592–600.
  52. Chung F.R.K. Lectures on Spectral Graph Theory // *Lecture Notes*. University of Pennsylvania, 2001. 23 p.
  53. Mohar B. Eigenvalues, diameter, and mean distance in graphs // *Graphs Comb.* 1991. Vol. 7. P. 53–64.
  54. Butler S. Eigenvalues and structures of graphs // *Ph.D. Diss.* 2008. P. 89.
  55. Vallado D.A. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. 2nd ed. El Segundo: Microcosm, 2001. 958 p.
  56. Гост Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли. ИПК Изд-во стандартов, 2004. 24 с.
  57. Fishman G.J. et al. Discovery of intense gamma-ray flashes of atmospheric origin // *Science* (80-. ). 1994. Vol. 264, № 5163. P. 1313–1316.
  58. Smith D.M. et al. Terrestrial gamma-ray flashes observed up to 20 MeV // *Science* (80-. ). 2005. Vol. 307, № 5712. P. 1085–1088.
  59. Briggs M.S. et al. First results on terrestrial gamma ray flashes from the Fermi Gamma-ray Burst Monitor // *J. Geophys. Res. Sp. Phys.* 2010. Vol. 115, № 7. 14 p.
  60. Marisaldi M. et al. Detection of terrestrial gamma ray flashes up to 40 MeV by the AGILE satellite // *J. Geophys. Res. Sp. Phys.* 2010. Vol. 115, № 3. 12 p.

61. Klimov P.A. et al. UV transient atmospheric events observed far from thunderstorms by the Vernov satellite // *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.* 2018. Vol. 15, № 8. P. 1139–1143.
62. Sadovnichii V.A. et al. “Lomonosov” Satellite—Space Observatory to Study Extreme Phenomena in Space // *Space Sci. Rev.* 2017. Vol. 212, № 3–4. P. 1705–1738.
63. Markham B.L. et al. Landsat sensor performance: History and current status // *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 2004. Vol. 42, № 12. P. 2691–2694.
64. Chen J. et al. Applications and Challenges of GRACE and GRACE Follow-On Satellite Gravimetry // *Surv. Geophys.* 2021 431. 2022. Vol. 43, № 1. P. 305–345.
65. Tsuda Y. et al. Achievement of IKAROS — Japanese deep space solar sail demonstration mission // *Acta Astronaut.* 2013. Vol. 82, № 2. P. 183–188.
66. Foster C. et al. Differential Drag Control Scheme for Large Constellation of Planet Satellites and On-Orbit Results // *Proceedings of International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying*, CO, Boulder, June 19-21, 2017. 18 p.
67. Zelenyi L.M. et al. The academic Chibis-M microsatellite // *Cosm. Res.* 2014. Vol. 52, № 2. P. 87–98.
68. Pavlis N.K. et al. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008 // *General Assembly of the European Geosciences Union.* 2008. Vol. 84, № 1. P. 2–4.
69. Knupp P.M. Algebraic Mesh Quality Metrics // *SIAM J. Sci. Comput.* 2001. Vol. 23, № 1. P. 193–218.
70. Сайт Баллистического центра ИПИМ им. М.В. Келдыша [Электронный ресурс]. URL: <http://www.kiam1.rssi.ru/~den/solar.html> (дата доступа: 09.02.2024).
71. Stickler A.C., Alfriend K. An elementary magnetic attitude control system // *J. Spacecr. Rockets.* 1974. Vol. 13, № 5. P. 282–287.
72. Desouky M.A.A., Abdelkhalik O. A new variant of the B-dot control for

- spacecraft magnetic detumbling // *Acta Astronaut.* 2020. Vol. 171. P. 14–22.
73. Ignatov A.I., Sazonov V. V. Stabilization of the Gravitational Orientation Mode of an Artificial Earth Satellite (AES) by the Electromagnetic Control System // *Cosm. Res.* 2020 581. 2020. Vol. 58, № 1. P. 33–41.
74. Belokonov I. V., Timbai I.A., Nikolaev P.N. Analysis and Synthesis of Motion of Aerodynamically Stabilized Nanosatellites of the CubeSat Design // *Gyroscope Navig.* 2018. Vol. 9, № 4. P. 287–300.
75. Kalenova V.I., Morozov V.M. Stabilization of Satellite Relative Equilibrium Using Magnetic and Lorentzian Moments // *Cosm. Res.* 2021. Vol. 59, № 5. P. 343–356.
76. Ignatov A.I., Sazonov V. V. Investigation of Steady-State Motion of an Artificial Earth Satellite in the Uniaxial Magnetic Orientation Mode // *Cosm. Res.* 2021. Vol. 59, № 2. P. 112–125.
77. Avanzini G., de Angelis E.L., Giulietti F. Spin-axis pointing of a magnetically actuated spacecraft // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 94, № 1. P. 493–501.
78. Slavinskis A. et al. High spin rate magnetic controller for nanosatellites // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 95, № 1. P. 218–226.
79. De Ruiter A., Lee J., Ng A. A Fault-Tolerant Magnetic Spin Stabilizing Controller For The JC2Sat-FF Mission // *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Honolulu, Hawaii, 18– 21 August 2008*, Paper ID AIAA-2008-7486. 10 p.
80. Roldugin D.S. Stability of a Magnetically Actuated Satellite towards the Sun on a Sun-Synchronous Orbit // *Cosm. Res.* 2023. Vol. 61, № 2. P. 146–153.
81. Colagrossi A., Lavagna M. A Spacecraft Attitude Determination and Control Algorithm for Solar Arrays Pointing Leveraging Sun Angle and Angular Rates Measurements // *Algorithms.* 2022. Vol. 15, № 2, paper ID 29. 18 p.
82. Roldugin D., Tkachev S., Ovchinnikov M. Asymptotic Motion of a Satellite under the Action of Sdot Magnetic Attitude Control // *Aerospace.* 2022. Vol. 9, № 11, paper ID 639. 17 p.
83. Bhat S.P. Controllability of nonlinear time-varying systems: applications to

- spacecraft attitude control using magnetic actuation // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2005. Vol. 50, № 11. P. 1725–1735.
84. Liu S. et al. Controllability and observability of discretized satellite magnetic attitude control system // *AIMS Math.* 2023 47899. 2023. Vol. 8, № 4. P. 7899–7916.
  85. Wiśniewski R. Sliding Mode Attitude Control for Magnetic Actuated Satellite // *IFAC Proc.* Vol. 1998. Vol. 31, № 21. P. 179–184.
  86. Sofyalı A., Jafarov E.M., Wisniewski R. Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode // *Aerosp. Sci. Technol.* 2018. Vol. 76. P. 91–104.
  87. Ovchinnikov M.Y. et al. Fully magnetic sliding mode control for acquiring three-axis attitude // *Acta Astronaut.* 2016. Vol. 121. P. 59–62.
  88. Okhitina A., Roldugin D., Tkachev S. Application of the PSO for the construction of a 3-axis stable magnetically actuated satellite angular motion // *Acta Astronaut.* 2022. Vol. 195. P. 86–97.
  89. Lovera M., Astolfi A. Spacecraft attitude control using magnetic actuators // *Automatica.* 2004. Vol. 40, № 8. P. 1405–1414.
  90. Lovera M., Astolfi A. Global Magnetic Attitude Control of Inertially Pointing Spacecraft // *J. Guid. Control. Dyn.* 2005. Vol. 28, № 5. P. 1065–1072.
  91. Wiśniewski R., Blanke M. Fully magnetic attitude control for spacecraft subject to gravity gradient // *Automatica.* 1999. Vol. 35, № 7. P. 1201–1214.
  92. Damaren C.J. Comments on “Fully magnetic attitude control for spacecraft subject to gravity gradient” // *Automatica.* 2002. Vol. 38, № 12. P. 2189.
  93. Celani F. Gain selection for attitude stabilization of earth-pointing spacecraft using magnetorquers // *Adv. Astronaut. Sci.* 2018. Vol. 163, № 1. P. 307–318.
  94. Rossa F.D., Bergamasco M., Lovera M. Bifurcation analysis of the attitude dynamics for a magnetically controlled spacecraft // *51st IEEE Conference on Decision and Control.* Maui, HI, USA, 2012. P. 1154–1159.
  95. Ivanov D.S. et al. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties // *Acta Astronaut.* 2017.

Vol. 132. P. 103–110.

96. Celani F. Robust three-axis attitude stabilization for inertial pointing spacecraft using magnetorquers // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 107. P. 87–96.
97. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.
98. Thébault E. et al. International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation // *Earth, Planets Sp.* 2015. Vol. 67, paper ID 79. 19 p.
99. Teschl G. Ordinary differential equations and dynamical systems. American Mathematical Society, 2000. 353 p.