На правах рукописи

Батхин Александр Борисович

Семейства периодических и стационарных решений в гамильтоновой механике

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в *Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В. Келдыша)*.

Научный консультант:

Брюно Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, и.о. заведующего сектором № 2 отдела № 4 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Официальные оппоненты:

Красильников Павел Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Моделирование динамических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Тхай Валентин Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории № 16 «Динамики нелинейных процессов управления им. Е.С. Пятницкого» ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Абрамов Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник отдела систем математического обеспечения ФГУ «ФИЦ «Информатика и управление» РАН»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (СПбГУ)

Защита состоится «14» июня 2022 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 002.024.01, созданного на базе ФГУ «ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН», по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН http://keldysh.ru/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2022 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 002.024.01,
к.ф.-м.н. *Широбоков М. Г.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Системы Гамильтона являются важным классом динамических систем и находят многочисленные применения в аналитической механике, теоретической физике, небесной механике, гидродинамике и других областях. Будучи в определённом смысле вырожденными системами, они, тем не менее, позволяют эффективно описывать самые разнообразные процессы и явления, а решения гамильтоновых систем часто демонстрируют сложное поведение. Исследование фазового потока, порождённого системой Гамильтона, обычно затруднительно, а то и невозможно проводить с использованием общих методов изучения динамических систем. Поэтому разработка и апробация методов, специфичных для систем Гамильтона, является актуальной и востребованной задачей.

Цели и задачи диссертационной работы: Цель работы состоит в разработке методов исследования двух наиболее распространённых классов задач гамильтоновой динамики. Во-первых, это поиск и продолжение периодических решений сингулярно возмущённых систем Гамильтона. Во-вторых, это исследование множества устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона. В диссертации первый класс методов использован для поиска новых семейств периодических решений плоской круговой задачи Хилла и её обобщений, а второй класс методов — к изучению устойчивости некоторых механизмов.

Научная новизна. Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

- применена техника сингулярных возмущений интегрируемой задачи для вычисления порождающих семейств периодических решений плоской круговой задачи Хилла, что позволило найти и численно исследовать новые семейства симметричных периодических решений этой задачи,
- обобщена классическая задача Хилла, которая позволила объединить все из-

вестные семейства периодических решений в единую сеть,

- применены современные алгоритмы компьютерной алгебры и теории исключений для анализа структуры фазового потока системы Гамильтона, допускающей дискретную группу автоморфизмов,
- разработана теория дискриминантных множеств, необходимая для реализации символьно-аналитических методов исследования устойчивости положения равновесия в многопараметрических системах Гамильтона.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные в ней методы исследования могут быть использованы при численно-аналитическом исследовании следующих классов задач:

1) поиск порождающих решений семейств периодических орбит сингулярно возмущённых систем Гамильтона,
2) анализ бифуркаций семейств периодических решений систем Гамильтона с дискретной группой симметрий,
3) вычисление дискриминатного многообразия в пространстве параметров системы Гамильтона,
4) анализ устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона,
5) анализ нормальной формы системы Гамильтона в окрестности стационарной точки.

Разработанные методы могут быть применены для исследования устойчивости инвариантных многообразий больших размерностей, для поиска и продолжения семейств периодических решений систем Гамильтона с большим числом степеней свободы. Вычисленные в работе семейства периодических решений задачи Хилла могут быть продолжены до соответствующих семейств ограниченной или общей задач трёх тел. Периодические орбиты этих семейств могут быть использованы для проектирования космических миссий в окрестности малых тел Солнечной системы.

Результаты исследований могут применяться в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, в Московском физико-математическом институте и других научных центрах, занимающихся исследованиями гамильтоновых систем и их приложениями. Материалы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности теоретическая механика.

Методология и методы исследования. Исследование неинтегрируемой автономной системы Гамильтона с n степенями свободы предполагает поиск в фазовом пространстве иерархической структуры инвариантных многообразий различных размерностей («скелета») и изучение свойств фазового потока вблизи них. Простейшим инвариантным многообразием размерности 0 является стационарное решение (положение равновесия). В его окрестности при определённых условиях могут существовать семейства периодических решений, а также семейства n-мерных инвариантных торов. Изучая устойчивость вдоль семейства периодических решений можно в окрестности критических решений находить другие семейства, продолжать их и постепенно формировать «скелет» в некоторой части фазового пространства. Такой подход основан на использовании гамильтоновой нормальной формы, вычисленной в окрестности стационарного или периодического решений или инвариантного тора. Однако далеко не каждая гамильтонова система имеет стационарные решения, а если система не зависит от внешних параметров, то имеющиеся положения равновесия могут не содержать в своей окрестности инвариантные многообразия больших размерностей. В таком случае поиск семейств периодических решений можно проводить с использованием метода сингулярных возмущений, когда с помощью многогранника Ньютона исходного гамильтониана системы вычисляются соответствующие гамильтоновы укорочения, среди решений которых следует искать участки сингулярных порождающий решений или их семейств.

Указанная методология исследования системы Гамильтона подробно описана в [19] и частично реализована в диссертационной работе. В её первой части рассматриваются методы поиска семейств периодических решений системы Гамильтона без параметров. В качестве модельной задачи рассматривается задача Хилла, положения равновесия которой не могут дать информацию о структуре инвариантных многообразий. Её обобщение, так называемая задача анти-Хилла, вообще не имеет стационарных решений, но, тем не менее, для этих задач удаётся вычислить семейства периодических решений и объединить их в общую сеть. Вторая часть диссертации предлагает методы исследования устойчивости семейств стационарных решений в ситуации, когда число параметров велико. Здесь основная цель исследования — получить описание множества устойчивости положения равновесия в аналитически точной или приближённой формах. В качестве модельной задачи рассматривается система связанных гироскопов Лагранжа с шестью степенями свободы и пятью параметрами.

Основными методами исследования в диссертации являются: метод порождающих решений регулярно и сингулярно возмущённой интегрируемой системы Гамильтона, методы степенной геометрии (многогранник Ньютона, нормальные конусы, укороченные уравнения, степенные преобразования) для получения гамильтоновых укорочений и для вычисления асимптотических разложений алгебраических многообразий вблизи их особенностей, аналитические и символьные методы классической теории исключений (субрезультанты, наибольший общий делитель) и современной компьютерной алгебры (базисы Грёбнера, примарная декомпозиция, элиминационный идеал) для исследования дискриминатного множества многочленов, метод нормализации системы Гамильтона в окрестности положения равновесия и применение полученной нормальной формы к исследованию устойчивости по Ляпунову, численные методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на алгоритмах автоматического дифференциирования, численные методы продолжения семейств периодических решений автономных систем Гамильтона.

Положения, выносимые на защиту:

- Для плоской круговой задачи Хилла изучены два её предельных интегрируемых случая: задача Энона и задача Кеплера. Дано описание сингулярных порождающих решений в терминах дуг-решений задачи Энона. Доказаны свойства полученных порождающих решений, которые позволяют вычислить асимптотику начальных условий, тип симметрии, глобальную кратности орбит соответствующего семейства. Построен аналог символической динамики на счётном множестве дуг-решений интегрируемой задачи Энона. Реализован численный алгоритм, позволяющий по порождающему решению находить соответствующее семейство симметричных периодических орбит. С помощью этого алгоритма вычислены новые ранее неизвестные семейства, 16 из которых содержат орбиты перелёта в окрестность ближайшей коллинеарной точки либрации L_1 или L_2, а также орбиты перелёта между этими точками. Эти орбиты продолжаются до периодических орбит ограниченной задачи трёх тел и могут быть использованы в проектировании космических миссий в окрестность коллинеарных точек либрации.

- Для системы Гамильтона, допускающей две симметрии расширенного фазового пространства, изучена структура фазового потока в окрестности критических решений семейств двояко симметричных периодических орбит. Доказаны теоремы о ветвлении таких семейств в критических случаях, соответствующих значениям индекса устойчивости S критического решения, равного соответственно $+1$, -1 и $\cos(2\pi p/q)$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Полученные результаты применены к плоской круговой задаче Хилла для анализа взаимного расположения семейств периодических решений с общими орбитами.

- Предложено новое обобщение классической задачи Хилла, в котором центральное тело может иметь как ньютонианский потенциал притяжения, так и кулоновский потенциал отталкивания. Описаны порождающие решения этой обобщённой задачи в терминах дуг-решений. С их помощью найдены и продолжены новые семейства периодических решений, многие из которых продолжаются либо до периодических решений классической задачи Хилла, либо взаимодействуют с другими семействами. Это обобщение позволяет рассматривать все известные семейства периодических орбит как единую сеть, в которой такие семейства связаны друг с другом либо посредством порождающих решений, либо через общие орбиты с целой локальной кратностью.

• Для исследования устойчивости семейства стационарных решений многопараметрической системы Гамильтона дано полное описание дискриминантного множества в пространстве коэффициентов многочлена, на котором этот многочлен имеет кратные корни. Приведено описание его иерархической структуры, доказана его линейчатая структура и разработан метод вычисления его полиномиальной параметризации.

• Для случая трёхмерного пространства параметров гамильтоновой системы разработан и реализован алгоритм асимптотического разложения нулей дискриминанта характеристического уравнения в окрестности особых точек в виде рядов трёх типов по степеням его параметров. Алгоритм используется для асимптотического представления множества устойчивости решений вблизи его особенностей.

• Методами компьютерной алгебры, степенной геометрии и с использованием гамильтоновой нормальной формы аналитически вычислено множество устойчивости по Ляпунову статически неуравновешенной системы связанных гироскопов Лагранжа с шестью степенями свободы и пятью параметрами.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались автором на международных и всероссийских конференциях, съездах, симпозиумах, ведущих научных семинарах. Список наиболее значимых из них приведен ниже.

IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence, Moscow, 2006, Академические чтения по космонавтике: XXX (2006 г.), XXXII

(2008 г.), XXXIII (2009 г.), XXXIV (2010 г.), XXXV (2011 г.), XXXVI (2012 г.), XXXVIII (2014 г.), XL (2016 г.), XLII (2018 г.), Москва, Международная конференция им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления»: XI (2010 г.), XII (2012 г.), XIII (2016 г.) и XIV (2018 г.), Москва, ИПУ РАН, Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: X (2011 г., Нижний Новгород), XI (2015 г., Казань), XII (2019 г., Уфа), Международная конференции Polynomial Computer Algebra (PCA, 2010, 2011, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021 гг.), Санкт-Петербург, Институт Эйлера, Международная конференция «Компьютерная алгебра в научных исследованиях (CASC)», (2012 г., Марибор, 2019 г., Москва), Международная конференция по небесной механике CELMECH V (2013 г.), Витербо, Италия, Международная конференция "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors (2013 г., 2016 г.) Нижний Новгород; Международная конференция «Компьютерная алгебра» (Москва, ФИЦ ИУ РАН, ВЦ им. А.А. Дородницына, РУДН 2016 г., 2019 г., 2021 г., РЭУ им. Г.В. Плеханова 2017 г.); Международная конференция “Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2018”, Долгопрудный, МФТИ; Международная конференция Dynamics Days Europe September 3–7, 2018, Loughborough University; Международная конференция Equadiff-2019, Лейден, Нидерланды.

На заседаниях научных семинаров им. В.А. Егорова по механике космического полёта (Москва, МГУ им. Ломоносова, 2010, 2011 г.г.); отдела небесной механики и динамической астрономии ГАО РАН (Пулково, 2012 г.); баллистического центра ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, 2014 г.); по компьютерной алгебре (Москва, МГУ им. Ломоносова, 2012, 2014, 2019 и 2020 г.г.); в Институте космических исследований (Технион, Израиль, 2014); им. В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости (Москва, МГУ им. Ломоносова, 2013, 2014, 2017, 2018 г.г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 46 печатных работах, из них 19 статей [1–19] в рецензируемых журналах и изданиях рекомендованных ВАК РФ, среди которых 16 публикаций в изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и Web of Science, 18 препринтов, 9 докладов и тезисов докладов. Опубликована монография [20].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В совместных работах по исследованию устойчивости многопараметрической системы Гамильтона, в разработку алгоритма асимптотического разложения решений алгебраического уравнения вклад автора в получение и в интерпретацию полученных результатов был равен вкладу других соавторов, а само решение задач и соответствующие вычисления были выполнены диссертантом лично в процессе научной деятельности. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 266 страниц, из них 249 страница текста, включая 50 рисунков. Библиография включает 161 наименование на 17 страницах.

Содержание работы

Общая структура диссертации

Работа состоит из двух частей, каждая из которых содержит описание методов и их приложения к задачам соответствующих классов. Эти части предваряет **Введение**, где рассмотрена актуальность темы исследования диссертационной работы, кратко описаны применяемые методы, изложена основная цель и обоснована научная новизна исследований, а также теоретическая и практическая значимость основных результатов, представлены положения, выносимые на защиту.

Первая часть посвящена поиску и исследованию семейств периодических решений системы Гамильтона, имеющей не более одного параметра. В качестве модельного примера такой системы выбрана задача Хилла и её обобщение.

В первой главе даётся описание плоской круговой задачи Хилла, имеющей многочисленные применения в небесной механике, космодинамике и теоретической физике [21; 22]. Задача Хилла описывается автономной системой Гамильтона с двумя степенями свободы без параметров и с функцией Гамильтона

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{r}. \qquad (1)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — вектор координат, а $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ — вектор канонически сопряженных импульсов. Уравнения движения инвариантны относительно двух линейных симметрий

$$\Sigma_1 : (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \to (-t, x_1, -x_2, -y_1, y_2)\,,$$
$$\Sigma_2 : (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \to (-t, -x_1, x_2, y_1, -y_2)\,.$$

Ещё одна нетривиальная симметрия — это центральная симметрия $\Sigma_{12} \equiv \Sigma_1 \circ \Sigma_2$. Все решения задачи Хилла относятся к одному из следующих классов.

1) Несимметричные решения, меняющиеся под действием любого из преобразований Σ_1, Σ_2 и Σ_{12}.
2) Однократно симметричные решения, инвариантные относительно только одного из преобразований Σ_1, Σ_2 или Σ_{12}.
3) Двояко симметричные решения, инвариантные относительно любого из преобразований Σ_1, Σ_2 или Σ_{12}.

Уравнения движения имеют единственный первый интеграл — обобщённый интеграл энергии H или интеграл Якоби–Пенлеве C, где $C = -2H$.

Уравнения задачи Хилла имеют только два положения равновесия — точки либрации L_1, L_2 с координатами $\left(\pm 3^{-1/3}, 0, 0, \mp 3^{-1/3}\right)$. Из каждой из точек L_1, L_2 выходит по одному ляпуновскому семейству периодических орбит a, c, которые в силу неустойчивости не позволяют получить новые семейства периодических решений. Поскольку уравнения движения задачи Хилла неинтегрируемы [23] и не содержат малый параметр, то рассматривается способ получения предельных вариантов задачи Хилла с помощью алгоритмов степенной геометрии (многогранник Ньютона, гамильтоновы укорочения, конус задачи [24]). Найдено два предельных варианта: 1) задача Кеплера и 2) задача Энона [25], функция Гамильтона которой есть квадратичная часть функции (1). Первая описывает динамику вблизи начала координат, вторая — на бесконечности. Обе они интегрируемы и позволяют представить задачу Хилла как возмущение соответствующей предельной задачи, а малый параметр появляется естественным образом в результате степенного масштабирования канонических переменных и времени.

Рассмотрена задача Хилла как сингулярное возмущение интегрируемой задачи Энона [25]. Описан класс порождающих решений, представляющих собой последовательности дуг-решений двух типов. Каждая из дуг является траекторией, начинающейся и заканчивающейся в начале координат. Дуги первого типа — это Σ_1-симметричные участки эпициклоид, состоящие из целого числа витков и обозначаемые $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$. Дуги второго типа — это эллипсы с отношением полуосей $1 : 2$, большая полуось которых расположена на положительной и отрицательной полуоси Ox_2. Они обозначаются символами i и e соответственно. В начале координат дуги «сшиваются» участками гиперболических орбит задачи Кеплера, для которых указаны соответствующие параметры: эксцентриситет e и аргумент перицентра ϖ.

Сформулированы две гипотезы, обобщающие накопленные численные данные.

Гипотеза 1 (Энон [26; 27])**.** Последовательность, составленная из дуг $\pm j$, i, e, в которой нет двух идущих подряд дуг i (e), является порождающим решением семейства периодических орбит задачи Хилла.

Определение 1. Такую *последовательность* назовём *порождающей*.

Гипотеза 2 (Батхин [7])**.** Любое семейство периодических решений задачи Хилла, которое при продолжении по $C \to -\infty$ стремится к решению второго вида, в пределе описывается порождающей последовательностью дуг $\pm j$, i, e, удовлетворяющей гипотезе 1.

Основной результат главы 1. Для порождающих последовательностей доказаны свойства, позволяющие определять следующие характеристики орбит соответствующего семейства симметричных периодических решений на начальном участке характеристики: тип симметрии, глобальная кратность орбит, расположение точек ортогонального пересечения орбиты с осями, асимптотики начальных условий и индекса устойчивости периодических решений при $C \to -\infty$. Для конструктивного вычисления некоторых из указанных выше характеристик семейства сформулированы соответствующие правила. Предложен некий аналог символической динамики на множестве дуг-решений, удовлетворяющих условию гипотезы 1. На основе этих правил разработан и реализован ***Алгоритм I*** *вычисления семейства симметричных периодических орбит по порождающей её последовательности.*

Результаты главы 1 опубликованы в [7; 8].

В главе 2 обсуждается ветвление семейств двояко симметричных решений в критических решениях. В автономной системе Гамильтона без параметров все семейства периодических решений однопараметрические, а в качестве параметра выбирается значение интеграла Якоби—Пенлеве.

Определение 2. Периодическое решение называется *критическим*, если у его матрицы монодромии $\mathbf{M}$ или её q-й степени $\mathbf{M}^q$, $q \in \mathbb{N}$, появляются дополнительные элементарные делители, соответствующие мультипликатору 1.

Для анализа матрицы монодромии $\mathbf{M}$ использована методика, применявшаяся ранее Крейсманом [28] для анализа критических решений семейств периодических орбит ОЗТТ, но расширенная на случай более богатой группы симметрий.

Рассмотрено три случая, соответствующих значениям индекса устойчивости периодического решения $S = 1$, $S = -1$ и $S = \cos(2\pi p/q)$, $p, q \in \mathbb{N}$. Доказаны ещё три теоремы.

Теорема 1. *Матрица монодромии* $\mathbf{M}$ *двояко симметричного периодического решения является полным квадратом и, как следствие, её индекс устойчивости не может быть меньше* -1.

Теорема 2. *Матрица монодромии* $\mathbf{M}$ *двояко симметричного периодического решения при* $S = -1$ *в случае общего положения имеет три элементарных делителя:* $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda + 1)$ *и* $(\lambda + 1)$. *Двум последним соответствуют однократно симметричные решения с разными типами симметрии и периодом* $T' = 2T$. *На каждом из семейств однократно симметричных решений первый интеграл* $H(\mathbf{z})$ *достигает экстремума в критическом решении.*

Теорема 3. *Пусть двояко симметричное периодическое решение с периодом* T *имеет значение индекса устойчивости* S, *равное* $\cos(2\pi p/q)$, *где* $p, q \in \mathbb{N}$ *и взаимно просты. Тогда в случае общего положения*

- *Если оба* p, q *нечётные, то в окрестности исходного решения имеется одно семейство двояко симметричных решений с периодом* $T' = qT$.
- *Если одно из* p *или* q *чётно, то в окрестности исходного решения имеется две пары семейств однократно симметричных решений с различными типами симметрий для каждой пары и с периодами* $T' = qT$.

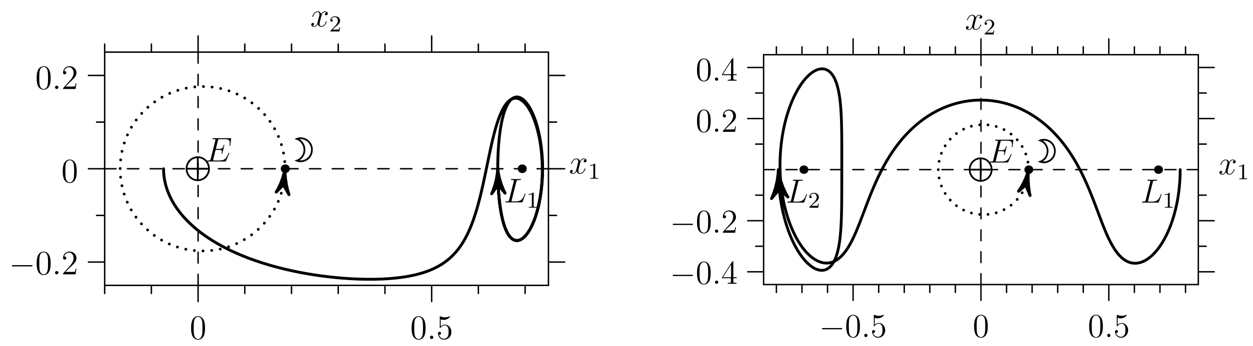
Далее в главе 2 дан обзор семейств периодических решений, вычисленных методами главы 1. Также рассматриваются некоторые приложения полученных результатов к проблеме проектирования космических миссий в окрестность коллинеарных точек либрации.

Вначале рассматривается семейство двояко симметричных периодических орбит и проводится анализ его критических решений. Найдены и продолжены новые семейства, которые появляются в результате бифуркаций потери симметрии и удвоения периода.

Затем рассматриваются новые семейства периодических решений, найденные с помощью Алгоритма I.

Это более 20-ти новых семейств симметричных периодических решений задачи Хилла. Для упрощения записи n-кратное повторение одной дуги или группы дуг в порождающей последовательности обозначено степенью, например, $\{(+1)^3\} \equiv \{+1, +1, +1\}$.

Из дуг-решений ± 1, ± 2, i, e были составлены симметричные порождающие решения длины не более шести дуг, по ним найдены периодические решения и продолжены соответствующие семейства. Наибольшее внимание было уделено семействам с последовательностями вида $\{(-1)^n, (+1)^m\}$, $\{(\pm 1)^n, (\pm 2)^m\}$, $\{(\mp 1)^n, (\pm 2)^m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Такие семейства суть обобщение семейств f_3 [29], Hb, Hd, Hf [27] и могут быть использованы для проектирования перелётов в окрестность ближайших к Земле коллинеарных точек либрации L_1 или L_2, а также между ними. Примеры некоторых таких орбит показан на рис. 1.



а) Орбита семейства с последовательностью $\{(+1)^4, +2\}$.

б) Орбита семейства с последовательностью $\{+1, (-1)^3\}$.

Рис. 1. Примеры орбит для половины периода для космических миссий. Показаны точки либрации и орбита Луны.

Основные результаты главы 2 представляют собой теоремы 1, 2 и 3. Также найдено и исследовано несколько семейств, порождающие решения которых составлены из дуг ± 1 и ± 2 числом не более шести. Найдено 16 семейств, продолжаемых по C до положительных значений, которые содержат орбиты полезные при проектировании космических с миссий. Для таких орбит действует правило: каждой дуге $+1$ (-1) соответствует один виток вокруг L_1 (L_2), а каждой дуге $+2$ (-2) — участок низкоперигейной орбиты с выходом в окрестность L_1 (L_2). Они опубликованы в [8; 17] и аннонсированы в [20].

В главе 3 обсуждается *обобщённая задача Хилла*, которая позволяет рассматривать её классический вариант как часть более общей проблемы с различными типами потенциалов центрального тела. Отметим, что предложенное обобщение уже само является объектом исследования [30].

Предложена следующая функция Гамильтона обобщённой плоской круговой задачи Хилла:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon) = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) + x_2 y_1 - x_1 y_2 + \left(-x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right) + \frac{\sigma}{|\mathbf{x}|},$$

где $\mathbf{x}$ – вектор координат, $\mathbf{y}$ – вектор импульсов и параметр $\sigma \in \{-1, 0, +1\}$. Показано, что для трёх различных значениях параметра σ, записанная в масштабированных регулярных координатах $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ функция Гамильтона обобщённой задачи, отличается только константой.

Для трёх различных значений параметра σ имеем:

- при $\sigma = -1$ — гамильтониан классической задачи Хилла,
- при $\sigma = 0$ — функцию Гамильтона интегрируемой задачи Энона,
- при $\sigma = +1$ — гамильтониан задачи, называемой в дальнейшем задачей анти-Хилла, поскольку теперь потенциал притяжения центрального тела заменен потенциалом отталкивания.

Семейства периодических решений задачи анти-Хилла демонстрируют следующее поведение.

1) Отсутствуют орбиты столкновения и глобальная кратность орбит вдоль семейства периодических решений является инвариантом.

2) Периодические решения вокруг начала координат возможны лишь при значениях константы Якоби-Пенлеве $C < 0$.

3) На каждом семействе периодических орбит при продолжении величина C достигает своего наибольшего значения $C^* < 0$, а затем это семейство либо заканчивается на семействе периодических орбит первого рода по Пуанкаре, либо продолжается по C до значения $-\infty$, стремясь в пределе к порождающему решению.

Для выяснения структуры порождающих решений задачи анти-Хилла был выполнен вычислительный эксперимент, который показал, что ограничений гипотезы 1 на отсутствие в порождающей последовательности двух дуг ii или ee в этом случае нет.

В задаче анти-Хилла для пары дуг любых типов можно построить в первом приближении согласующие гиперболы так, как это было сделано для задачи Хилла в [7]. Принципиальное отличие задачи анти-Хилла состоит в том, что для пары дуг ii (или ee, соответственно) можно построить две разных согласующих траектории. Поскольку пара дуг ii (или ee) может быть согласована двумя разными дугами, то порождающая последовательность, содержащая такую пару, задаёт два семейства периодических орбит задачи анти-Хилла. Обозначим пару дуг ii, соединяющихся в точке с ординатой $x_2 > 0$, через i^+i (или e^+e для пары дуг ee), а пару дуг ii, соединяющихся в точке с ординатой $x_2 < 0$, через i^-i (или e^-e соответственно). Для задачи анти-Хилла гипотеза 1 может быть переформулирована в следующем виде.

Гипотеза 3 (Батхин [9])**.** Последовательность, составленная из дуг $\pm j$, i, e следующих в произвольном порядке за исключением последовательностей $\{i\}$ и $\{e\}$, является порождающим решением для семейства периодических орбит задачи анти-Хилла.

Из гипотезы 3 следует, что множество порождающих последовательностей задачи Хилла есть собственное подмножество множества порождающих последовательностей задачи анти-Хилла, т. е. любое семейство периодических орбит второго вида задачи Хилла может быть продолжено до семейства периодических орбит задачи анти-Хилла, но не наоборот. Порождающая последовательность задачи Хилла задаёт два семейства: одно для задачи Хилла, другое для задачи анти-Хилла.

Сформулированы для порождающих последовательностей ω задачи анти-Хилла утверждения, позволяющие по структуре ω определять тип симметрии, глобальную кратность M и асимптотику начальных условий орбит соответствующего семейства. Они аналогичны соответствующим утверждениям главы 1.

Определение 3. Назовём два семейства периодических орбит — одно семейство задачи Хилла, другое семейство задачи анти-Хилла — *связанными*, если они имеют одну и ту же порождающую последовательность.

Связанные семейства в рамках регуляризованной задачи представляют собой участки (ветви) одного семейства периодических орбит. Для обозначения семейств задачи анти-Хилла, связанных с соответствующими семействами задачи Хилла, используются имена последних со значком $\tilde{}$.

Численно было исследовано около 20-ти семейств симметричных периодических орбит задачи Хилла [8; 20; 25; 27; 29], которые удалось продолжить до семейств задачи анти-Хилла. Оказалось, что семейства двояко симметричных орбит образуют в определённом смысле «скелет» сети периодических решений, поскольку многие другие семейства пересекаются с этими семействами, разделяя общие орбиты с различными целыми локальными кратностями.

Схематически часть результатов исследования представлена на рис. 2. Центральный столбец содержит порождающие последовательности, точки O, L_1 и L_2 обозначают начало координат и точки либрации соответственно.

Проведённый численный анализ подавляющего большинства известных на сегодняшний день семейств обобщённой задачи Хилла позволяет сформулировать следующую гипотезу.

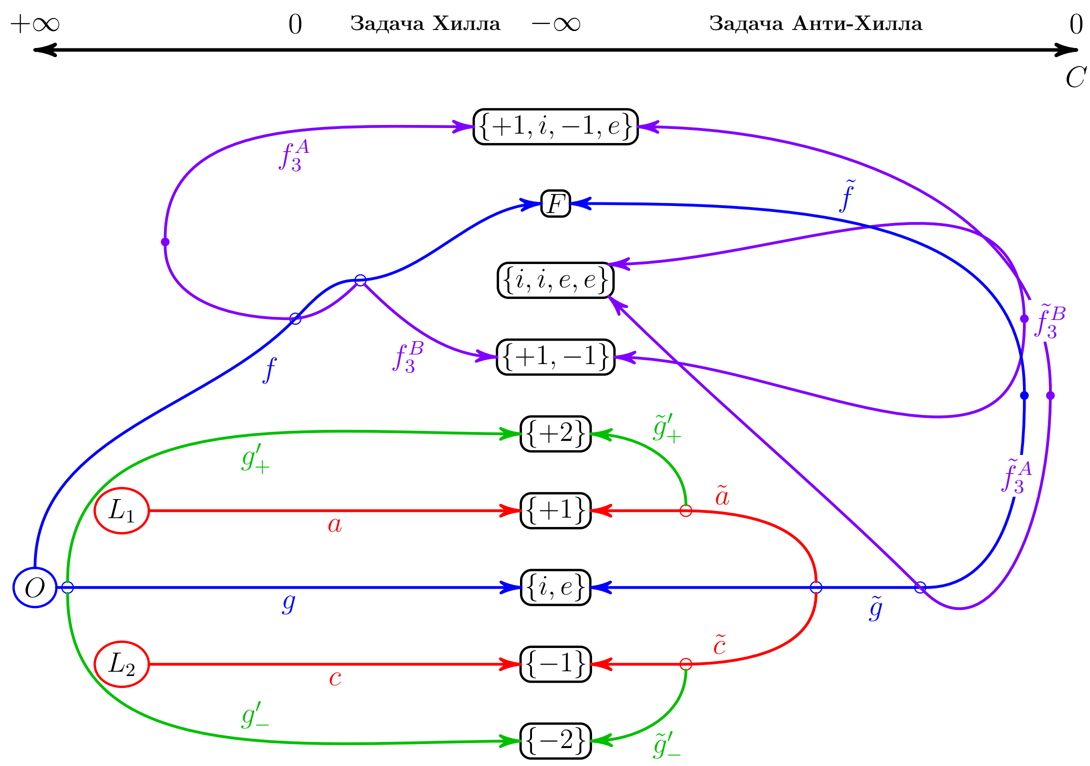


Рис. 2. Диаграмма связей между «классическими» семействами задачи Хилла и их антихилловскими продолжениями. Общие орбиты для двух различных семейств показаны кружком.

Гипотеза 4 (Батхин [9])**.** Все семейства периодических орбит обобщённой задачи Хилла связаны друг с другом, формируя общую сеть семейств. Эта связь реализуется либо через общие порождающие последовательности, соединяющие семейства задач Хилла и анти-Хилла, либо через общие орбиты с целой локальной кратностью.

Следовательно, начиная с произвольной орбиты некоторого семейства можно путём продолжения вдоль него перейти к любой другой периодической орбите. Более того, некоторые свойства обобщённой задачи позволяют предсказать характеристики периодических орбит связанных друг с другом семейств.

Основной результат главы 3 состоит в том, что все семейства периодических решений обобщённой задачи оказываются связаны в общую сеть, взаимодействуют друг с другом через предельные решения или через общие орбиты. Он опубликован в [9; 19].

Вторая часть работы посвящена анализу устойчивости по Ляпунову положения равновесия (ПР) многопараметрической системы Гамильтона, которая полиномиально зависит от некоторого набора параметров. Предлагается схема исследования, которая использует методы вычисления: а) дискриминатного множества многочлена, б) множества устойчивости линейной многопараметрической системы Гамильтона и в) метод гамильтоновой нормальной формы (НФ) ПР.

В главе 4 дано описание структуры и параметрического представления дискриминантного множества $\mathscr{D}(f_n)$ некоторого приведённого многочлена

$$f_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{2}$$

степени n в пространстве $\mathbf{K}$ его коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$.

Определение 4. *Дискриминантным множеством* $\mathscr{D}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ назовём множество всех точек пространства коэффициентов $\mathbf{K}$, в которых $f_n(x)$ имеет кратные корни.

Структура кратных корней многочлена (2) описывается в терминах его k-х субдискриминантов $D^{(k)}(f_n)$.

Определение 5. Пусть t_i, $i = 1, \ldots, n$, корни многочлена $f_n(x)$. Тогда его субдискриминант $D^{(k)}(f_n)$ порядка $k = 0, \ldots, n-2$ есть

$$D^{(k)}(f_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \#(I) = n-k}} \prod_{\substack{(j,l) \in I \\ l > j}} (t_j - t_l)^2 ,$$

где $\#(I)$ — число элементов множества I. Для $k = n-1$ положим $D^{(n-1)}(f_n) = n$, а для $k = n$ положим $D^{(n)}(f_n) = 1$.

Дискриминантное множество $\mathscr{D}(f_n)$ есть объединение алгебраических многообразий $\mathscr{V}_k$ размерностей $k = 1, \ldots, n-1$. На каждом многообразии $\mathscr{V}_k$ многочлен $f_n(x)$ имеет k различных корней, структура которых описывается разбиением $[1^{n_1} 2^{n_2} \cdots i^{n_i} \cdots]$ натурального числа n, где число i есть кратность корня, а число n_i показывает количество различных корней кратности i. Тогда $k = \sum_i n_i$ и $\sum_i i n_i = n$.

Теорема 4. *Пусть в пространстве коэффициентов* $\mathbf{K}$ *многочлена* $f_n(x)$ *имеется алгебраическое многообразие* $\mathscr{V}_k$ *размерности* $k < n$*, на котором* $f_n(x)$ *имеет* k *различных корней, из которых* t *— вещественный корень кратности* m*,* $m \leqslant n-k+1$*, т. е.* $f_n(x) = (x-t)^m u(x)$*, где* $u(x)$ *— частное от деления многочлена* $f_n(x)$ *на бином* $(x-t)^m$*, а* u_i*,* $i = 1, \ldots, k-1$*, его различные корни с кратностью, отличной от* m*. Пусть* $\mathbf{r}_k(t, u_1, \ldots, u_{k-1})$ *— параметрическое представление многообразия* $\mathscr{V}_k$*. Тогда выражение*

$$\mathbf{r}_{k+1}\left(t, v, u_1, \ldots, u_{k-1}\right) = \mathbf{r}_k(t, u_1, \ldots, u_{k-1}) + \frac{v}{m}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}_k(t, u_1, \ldots, u_{k-1})$$

задаёт параметризацию части алгебраического многообразия $\mathscr{V}_{k+1}$*, на которой многочлен* $f_n(x)$ *имеет корень* t *кратности* $m-1$*, простой корень* $t+v$*, а кратности и значения остальных* $k-1$ *корней остаются неизменными.*

Эта теорема позволяет конструктивно получать параметрическое представление тех компонент $\mathscr{V}_k$ дискриминантного множества $\mathscr{D}(f_n)$, на которых многочлен имеет только один кратный корень кратности $n-k+1$, а остальные $k-1$ корни простые.

Компоненты $\mathscr{V}_k$ дискриминантного множества образуют иерархическую структуру. Одномерное многообразие $\mathscr{V}_1$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет единственный корень кратности n, является гладкой кривой в $\mathbb{R}^n$. Рассматривая её как направляющую для касательных, получим линейчатую развёртывающуюся поверхность — многообразие $\mathscr{V}_2$, на котором один корень многочлена $f_n(x)$ простой, а второй — кратный с кратностью $n-1$. Каждое следующее многообразие $\mathscr{V}_k$ с аналогичной структурой корней на нём устроено как линейчатое k-мерное многообразие, где роль направляющей выполняет многообразие $\mathscr{V}_{k-1}$.

Предложен набор конструктивных процедур, применяя которые к многообразию $\mathscr{V}_1$, можно получить полиномиальное параметрическое представление всех компонент дискриминантного множества $\mathscr{D}(f_n)$, в том числе и компоненту $\mathscr{V}_{n-1}$, разделяющую пространство параметров $\mathbf{K}$ многочлена $f_n(x)$ на $[n/2]+1$ область с различным числом вещественных корней.

Теорема 5. *Дискриминантное множество $\mathscr{D}(f_n)$ вещественного многочлена $f_n(x)$ допускает полиномиальную параметризацию для каждого из составляющих его многообразий $\mathscr{V}_k$.*

Также в этом параграфе дано описание структуры всех компонент дискриминантного множества $\mathscr{D}(f_n)$ и их параметризация для $n = 3, 4$. Вычисленные параметризации используются в дальнейшем. Указано приложение метода к вычислению глобальной параметризации некоторого алгебраического многообразия [12; 14].

Получено такое обобщение теоремы 4, которое позволяет вычислять параметризацию всех подмногообразий $\mathscr{V}_j$, пересекающих $\mathscr{V}_k$ с уже известной параметризацией. Всё это даёт возможность конструктивно описывать структуру компонент дискриминатного множества $\mathscr{D}(f_n)$, а также в ряде случаев и явно находить значения кратных корней многочлена (2).

В конце главы 4 обсуждается метод исследования особенностей алгебраических многообразий в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{C}^3$), основанный на алгоритмах степенной геометрии [24]. Этот метод позволяет вычислять асимптотическое разложение дискриминантного множества $\mathscr{D}(f)$ вблизи его особенностей в тех случаях, когда коэффициенты a_i многочлена (2) полиномиально зависят от некоторого вектора параметров $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ исходной задачи и последние не могут быть явно выражены через a_i. Метод позволяет представить асимптотическое разложение в виде степенных рядов либо с постоянными коэффициентами, либо с коэффициентами, рационально зависящими от некоторой координаты u и $\sqrt{\psi(u)}$, где $\psi(u)$ — многочлен. Метод был апробирован для исследования особенностей некоторых многообразий в $\mathbb{R}^3$. Вариант метода для кривых в $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}^2$) описан в работе [18].

Основные результаты главы 4 состоят в следующем.

- Компонента $\mathscr{V}_{n-1}$ дискриминантного множества $\mathscr{D}(f_n)$, имеющая наибольшую размерность, обладает линейчатой структурой и допускает полиномиальную параметризацию в пространстве $\mathbf{K}$ коэффициентов многочлена f_n. Они опубликованы в [11; 13; 15; 16].
- Описан и реализован **Алгоритм II** асимптотического решения алгебраического уравнения в $\mathbb{R}^3$ [1; 4; 5].

В **Главе 5** рассматривается задача об устойчивости положения равновесия (ПР) системы с гамильтоновой функцией $H(\mathbf{z})$, которая полиномиальным образом зависит от вектора параметров $\mathbf{P} \in \Pi$. В случае общего положения аналитическая автономная функция Гамильтона $H(\mathbf{z})$ в окрестности ПР, совпадающего с началом координат, раскладывается в сходящийся ряд из однородных форм H_k степени k:

$$H(\mathbf{z}; \mathbf{P}) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\mathbf{z}; \mathbf{P}). \tag{3}$$

Разложение (3) начинается с квадратичного гамильтониана $H_2(\mathbf{z}; \mathbf{P})$, определяющего локальную динамику вблизи ПР. Поведение фазового потока в первом приближении описывается линейной системой Гамильтона

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{J}\mathbf{A}(\mathbf{P})\mathbf{z}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_2(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}}, \tag{4}$$

где $\mathbf{J}$ — симплектическая единица, $\mathbf{A}$ — постоянная симметричная матрица, зависящая от вектора параметров $\mathbf{P} \in \Pi \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Основным объектом исследования является множество устойчивости $\mathscr{S}$ линейной системы (4) в пространстве Π параметров системы.

Определение 6. *Множество устойчивости* $\mathscr{S}$ линейной системы Гамильтона — это множество значений параметров $\mathbf{P} \in \Pi$, для которых стационарное решение $\mathbf{z} = 0$ системы устойчиво по Ляпунову.

Приводятся основные теоремы об устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений как в общем случае, так и в гамильтоновом случае. В последнем случае вводится понятие полухарактеристического многочлена $f(\mu)$, и условие устойчивости формулируется в терминах его корней.

Теорема 6. *Положение равновесия* $\mathbf{z} = 0$ *линейной системы Гамильтона* (4) *устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда все корни полухарактеристического многочлена* $f(\mu)$ *вещественны и неположительны, а все элементарные делители матрицы* $\mathbf{JA}$ *просты.*

Границей $\partial\mathscr{S}$ множества устойчивости $\mathscr{S}$ служат части двух алгебраических многообразий: $\mathscr{F}_0$, на котором многочлен $f(\mu)$ имеет нулевые корни, и $\mathscr{F}_2$, на котором многочлен $f(\mu)$ имеет кратные корни определённой структуры.

В работе условие вещественности корней полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ сформулировано в терминах его субдискриминантов $D^{(k)}(f)$.

Для случая кратных корней μ_{mul} описан эффективный способ проверки простоты соответствующих элементарных делителей. Он основан на вычислении ранга матрицы $\mathbf{JA} - \mu_{mul}\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Далее приводится описание алгоритмической схемы исследования множества устойчивости линейных систем Гамильтона.

Рассматривается гироскопическая система с 4-мя степенями свободы $\mathbf{M}\mathbf{x}'' + \mathbf{G}\mathbf{x}' + \mathbf{R}\mathbf{x} = 0$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{M}$ — симметрическая положительно определенная матрица масс, $\mathbf{G}$ — кососимметрическая матрица гироскопических сил, $\mathbf{R}$ — симметрическая матрица потенциальных сил. Для её гамильтоновой формы уравнений с функцией $H(\mathbf{z})$

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}' = \mathbf{JA}\mathbf{z}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{G}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}/4 & \mathbf{G}\mathbf{M}^{-1}/2 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}/2 & \mathbf{M}^{-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

доказывается

Теорема 7. *Если в* (5) *матрицы* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{R}$ *симметрические* 2×2*-блочно-скалярные и при этом матрица* $\mathbf{M}$ *невырожденная, то определитель матрицы* $\mathbf{A}$ *есть полный квадрат, т. е. принимает только неотрицательные значения.*

Затем рассматривается задача об устойчивости в линейном приближении положения равновесия некоторой модельной механической системы.

Задача о движении статически неуравновешенной системы шарнирно связанных гироскопов Лагранжа является, с одной стороны, актуальной в силу её приложений, а, с другой стороны, довольно сложной, прежде всего, за счёт увеличения размерности фазового пространства задачи при увеличении числа вращающихся тел.

Задача 1 ([31, п. 7.8.2]). В поле силы тяжести находится механическая система, состоящая из осесимметричных тел, связанных универсальными шарнирами Кардано–Гука O_1 и O_2 (рис. 3). Центры каждого из шарниров находятся на осях симметрии соответствующих тел. Нижнее тело — стержень длины $l_1 = 2l$, посредством шарнира O_1 прикреплён к оси ротора вертикально поставленного мотора и с помощью шарнира O_2 к верхнему стержню длины $l_2 = l$, который, в свою очередь жёстко прикреплён к центру плоского диска массы m и диаметра $d = 4l$, перпендикулярно его плоскости. Ротор мотора вращается с постоянной угловой скоростью Ω. Надо вычислить в линейном приближении множество устойчивости для вертикального положения равновесия этой системы.

Вводится вектор обобщённых координат как набор углов Крылова: $\widetilde{\mathbf{x}} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, а функция Лагранжа с точностью до членов второго порядка по $\widetilde{\mathbf{x}}$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
L = {} & \frac{A}{2}\left[(\dot\alpha_2 - \Omega\beta_2)^2 + (\dot\beta_2 + \Omega\alpha_2)^2\right] + \frac{B}{2}\left(\Omega^2\left(1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2\right) + \Omega\left(\dot\alpha_2\beta_2 - \alpha_2\dot\beta_2\right)\right) \\
& - \frac{M}{2}\left[\left(l_1\left(\dot\alpha_1 - \Omega\beta_1\right) + l_2\left(\dot\alpha_2 - \Omega\beta_2\right)\right)^2 + \left(l_1\left(\dot\beta_1 + \Omega\alpha_1\right) + l_2\left(\dot\beta_2 + \Omega\alpha_2\right)\right)^2\right] \\
& + \frac{mG}{2}\left[l_1\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{2} - \frac{\beta_1^2}{2}\right) + l_2\left(1 - \frac{\alpha_2^2}{2} - \frac{\beta_2^2}{2}\right)\right] - \frac{C_1}{2}\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right) \\
& - \frac{C_2}{2}\left((\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2\right) + \frac{B}{2}\dot\gamma_2^2 - \frac{C_1'}{2}\gamma_1^2 - \frac{C_2'}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)^2,
\end{aligned}
$$

где A, B — главные центральные моменты инерции диска, $C_{1,2}$ и $C'_{1,2}$ — коэффициенты жёсткости на изгиб и кручение в шарнирах O_1 и O_2 соответственно.

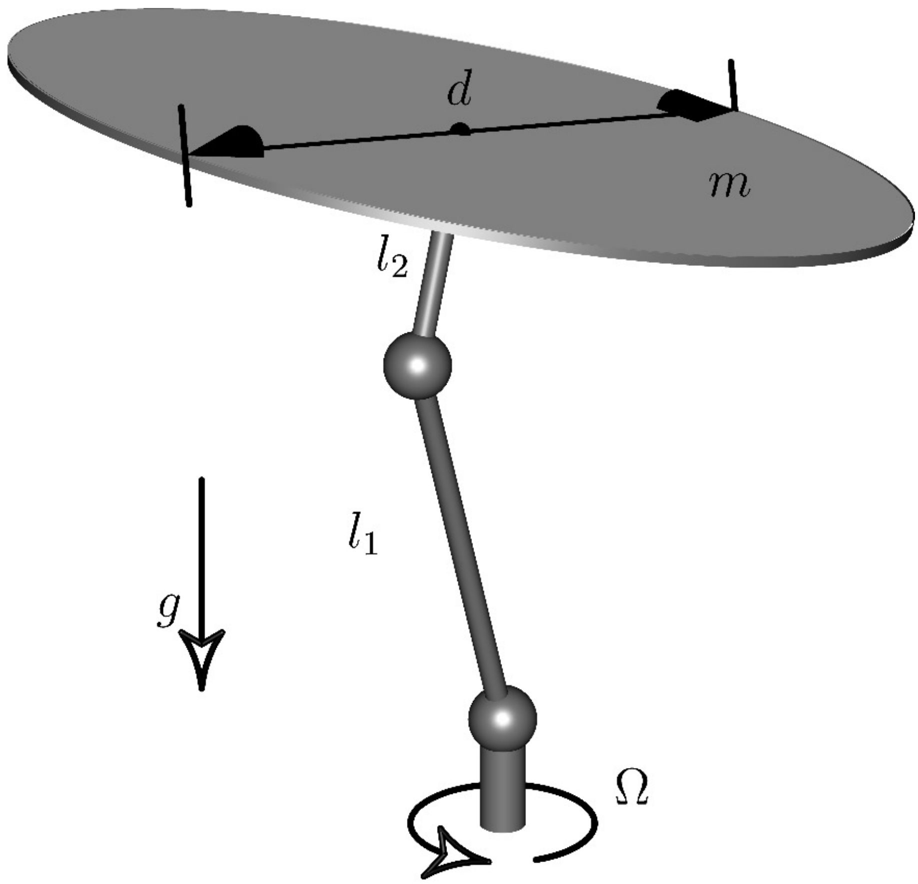


Рис. 3. Массивный диск, прикрепленный к ротору двигателя посредством упругих шарниров Кардано–Гука.

Углы собственного вращения γ_i, $i = 1, 2$, выделяются в независимую линейную подсистему, устойчивость стационарного решения которой исследуется тривиально. Для основной подсистемы после введения безразмерного времени $\tau = \Omega t$ её функция Лагранжа в матричной форме примет вид

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\right) + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{R}\mathbf{x}, \mathbf{x}\right),$$

где $\mathbf{x} = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{R}$ – симметрические положительно определённые матрицы масс и потенциальных сил соответственно, $\mathbf{G}$ – кососимметрическая матрица гироскопических сил. Соответствующая ей линейная система Гамильтона имеет вид (5) с постоянной симметрической матрицей $\mathbf{A}(\mathbf{P})$, зависящей от вектора параметров $\mathbf{P}$. Вектор параметров $\mathbf{P} = (p, q, r)$ связан с физическими параметрами системы соотношениями

$$p = \frac{C_1}{Mgl\widetilde{\Omega}^2}, \quad q = \frac{C_2}{Mgl\widetilde{\Omega}^2}, \quad r = \frac{2}{\widetilde{\Omega}^2}, \quad \widetilde{\Omega} = \Omega\sqrt{l/g}.$$

Доказывается, что границей множества устойчивости $\mathscr{S}$ служит часть дискриминантного множества $\mathscr{D}(f) = 0$, где f — полухарактеристический многочлен матрицы $\mathbf{JA}(\mathbf{P})$. Её уравнение факторизуется: $D(f) = l(\mathbf{P})^4 g(\mathbf{P})/256$, где многочлены $l(\mathbf{P})$ и $g(\mathbf{P})$ имеют первую и шестую степень соответственно. В итоге задача сводится к исследованию многообразия $\mathscr{G} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathbf{P} : g(\mathbf{P}) = 0\}$.

Далее определяется структура особых точек множества $\mathscr{G}$, с их помощью строится линейное преобразование в пространстве параметров Π и доказывается, что множество $\mathscr{G}$ состоит из двумерной линейчатой поверхности $\widetilde{\mathscr{G}}$ и пары одномерных парабол $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ с параметризациями

$$\widetilde{\mathscr{G}} : \{U = u\sin\varphi, \quad V = (u+1)\cos\varphi, \quad W = 4u + 2\cos^2\varphi + 1\}, \tag{6}$$

$$\mathscr{P}_1 : \{V = 0, \quad W = -2U^2 - 1\}, \tag{7}$$

$$\mathscr{P}_2 : \{U = 0, \quad W = 2V^2 + 1\}. \tag{8}$$

Многообразия $\widetilde{\mathscr{G}}$ и $\mathscr{P}_{1,2}$ суть компоненты $\mathscr{V}_3(f)$ и $\mathscr{V}_2(f)$ соответственно дискриминантного многообразия $\mathscr{D}(f)$ главы 4. При этом поверхность $\widetilde{\mathscr{G}}$ самопересекается по параболическим сегментам $\mathscr{P}_1^0 : (-1 \leqslant U \leqslant 1)$ в (7) и $\mathscr{P}_2^0 : (-1 \leqslant V \leqslant 1)$ в (8).

Линейчатая поверхность $\widetilde{\mathscr{G}}$ делит пространство параметров $\mathbf{Q}$ на четыре открытые области $\mathscr{S}_j$, $j = 0, 1, 2, 3$, в каждой из которых полухарактеристический многочлен $f(\mu)$ имеет набор корней определённой структуры.

Теорема 8. *Множество устойчивости $\mathscr{S}$ задачи есть $\mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 \cup \mathscr{P}_1^0$, при этом множество $\mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3$ задаётся системой неравенств*

$$g(\mathbf{Q}) > 0, \quad D^{(1)}(f) > 0, \quad D^{(2)}(f) > 0.$$

Её граница $\partial\mathscr{S}$ задаётся параметризацией (6) *при* $u \leqslant 0$. *При этом* $\mathscr{S}_2$ — *ограниченная область в* Π *в виде криволинейного тетраэдра, а* $\mathscr{S}_3$ — *неограниченная область, содержащая ветви параболы* $\mathscr{P}_1$.

С помощью алгоритма II вычисления асимптотического решения алгебраического уравнения выполнен локальный анализ множества $\mathscr{G}$ вблизи особой точки второго порядка.

Основные результаты главы 5 состоят в том, что

- для линейных гироскопических систем с 4-мя степенями свободы множество нулей её характеристического многочлена не может служить границей области устойчивости $\mathscr{S}$ [10];
- полностью аналитически описана область устойчивости $\mathscr{S}$ линейной трёхпараметрической системы гамильтона, определяемой задачей 1. Эти результаты опубликованы в [1; 3].

В главе 6 продолжено исследование устойчивости по Ляпунову гироскопической системы задачи 1. Однако здесь рассматривается уже более общая

Задача 2. В условиях задачи 1 предполагается, что диаметр массивного диска $d = 4kl_2$, а длина нижнего стержня $l_1 = Kl_2$, $k, K > 0$ (см. рис. 3). Надо вычислить множество устойчивости по Ляпунову этой системы.

Таким образом, задача 2 имеет вектор параметров $\mathbf{P} = (p, q, r, k, K)$. Дискриминант $D(f)$ полухарактеристического многочлена f матрицы $\mathbf{JA}(\mathbf{P})$ имеет вид $D(f) = l(\mathbf{P})^4 g(\mathbf{P})/\left(4k^{14}K^9\right)$, где $l(\mathbf{P}) = p + (K+1)q - Kr$, а $g(\mathbf{P})$ — многочлен степени 6 по переменным p, q, r и степени 10 по переменным k, K. Методами главы 4 были вычислены координаты особых точек порядков 1 и 2, как функции параметров k, K, а затем в пространстве параметров Π было найдено такое линейное преобразование $\mathbf{P} \to \mathbf{Q} = (U, V, W, k, K)$, что все коэффициенты полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ зависят только от параметров

U, V, W, а множитель $g(Q)$ принимает вид

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{Q}) = & 64\,U^6 + 192\,U^4V^2 - 4\,U^4W^2 + 192\,U^2V^4 - 8\,U^2V^2W^2 + 64\,V^6 - \\
& - 4\,V^4W^2 + 72\,U^4W - 4\,U^2W^3 - 72\,V^4W + 4\,V^2W^3 + 60\,U^4 - \\
& - 312\,U^2V^2 + 20\,U^2W^2 + 60\,V^4 + 20\,V^2W^2 - W^4 + 36\,U^2W - \\
& - 36\,V^2W + 12\,U^2 + 12\,V^2 + 2\,W^2 - 1.
\end{aligned}
$$

Это позволяет использовать полное описание множества устойчивости $\mathscr{S}$ линейной системы главы 5 и свести 5-ти параметрическую задачу к 3-х параметрической.

Затем рассматривается нелинейная устойчивость по Ляпунову задачи 2.

Когда для системы (4) вычислено множество устойчивости $\mathscr{S}$, то гамильтониан $H_2(\mathbf{z})$ приводится к нормальной форме с набором инвариантов $\sigma_i(\mathbf{P})$, $i = 1, \ldots, n$,

$$
g_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i(\mathbf{P})\left(x_i^2 + y_i^2\right), \; \tilde{\lambda}_i(\mathbf{P}) = \sigma_i(\mathbf{P})\omega_i(\mathbf{P}), \; \sigma_i(\mathbf{P}) = \pm 1. \tag{9}
$$

Инварианты $\sigma_i(\mathbf{P})$, $i = 1, \ldots, n$, определяют сигнатуру $\mathfrak{s}$ квадратичной формы g_2, изменение которой может произойти при пересечении гиперповерхности $\mathscr{F}_0$. Гиперповерхность $\mathscr{F}_0$ делит множество устойчивости $\mathscr{S}$ на области $\mathscr{W}_j$ с равным значением сигнатуры $\mathfrak{s}$, тогда следует выделить те области $\mathscr{W}_j$, для которых $\mathfrak{s} = \pm 2n$, т. е. для них устойчивость по Ляпунову обеспечивается теоремой Лагранжа-Дирихле.

Для задачи 2 поверхность $\mathscr{F}_0$ задаётся в переменных U, V, W уравнением

$$
f_{00} \stackrel{\text{def}}{=} (U-1)^2 + V^2 - \frac{1}{16}(W+3)^2 = 0,
$$

которая представляет собой прямой круговой конус с вершиной в т. $(1, 0, -3)$ и осью, параллельной оси OW. Поверхность $\mathscr{F}_0$ делит пространство параметров на 3 области: $\mathscr{W}_1$ — внутренность верхнего конуса, $\mathscr{W}_2$ — внутренность нижнего конуса и $\mathscr{W}_3$ — внешняя область. Вычисления сигнатуры по теореме Якоби [32, гл. X, § 3] приводит к результатам $\mathfrak{s} = 0$ в области $\mathscr{W}_1$, $\mathfrak{s} = 8$ в области $\mathscr{W}_2$ и $\mathfrak{s} = 4$ в области $\mathscr{W}_3$. Область $\mathscr{W}_2$ с максимальной сигнатурой целиком находится в подобласти устойчивости $\mathscr{S}_3$, касаясь поверхности $\widetilde{\mathscr{G}}$ вдоль прямой, на которой многочлен $f(\mu)$ имеет пару нулевых корней.

На рис. 4 показано взаимное расположение множества устойчивости $\mathscr{S}$ и области ляпуновской устойчивости $\mathscr{W}_2$. На рисунке 4 показано сечение этих областей плоскостью $V = 0$, отмечены особые точки 2-го порядка P_0, P_1, множество особых точек 1-го порядка $\mathscr{P}_1$ и области $\mathscr{W}_j$ с разной сигнатурой $\mathfrak{s}$ формы (9).

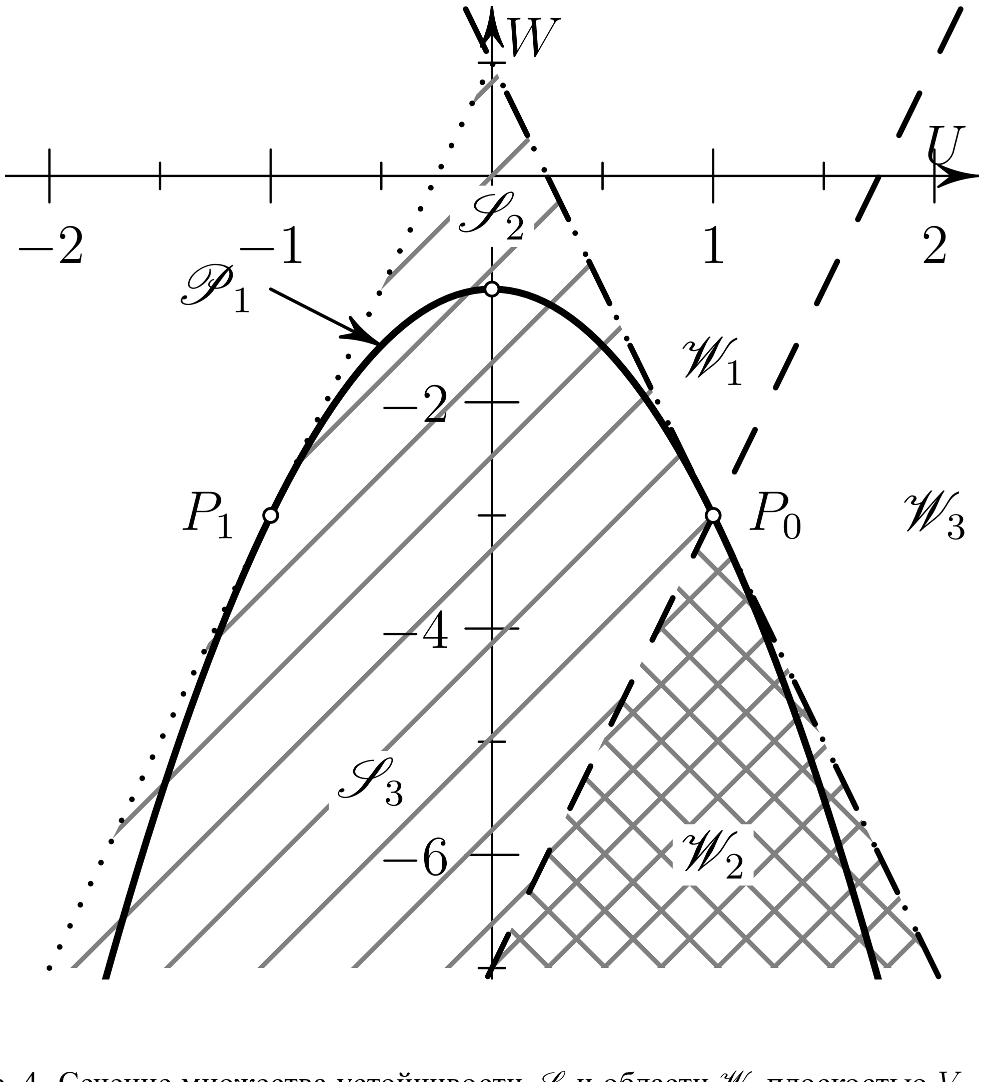


Рис. 4. Сечение множества устойчивости $\mathscr{S}$ и области $\mathscr{W}_2$ плоскостью $V = 0$.

Приводится интерпретация полученных результатов для физических значений параметров.

Основной результат главы 6 состоит в вычислении множества устойчивости по Ляпунову для семейства гироскопических задач с произвольными размерами стержней и массивного диска. Результаты главы опубликованы в [6; 10].

В **Заключении** отмечается, что методы, использованные в диссертационной работе, могут быть применены для исследования устойчивости инвариантных многообразий больших размерностей, для поиска и продолжения семейств периодических решений систем Гамильтона с большим числом степеней свободы. Вычисленные в работе семейства периодических решений задачи Хилла могут быть продолжены до соответствующих семейств ограниченной или общей задач трёх тел. Периодические орбиты этих семейств могут быть использованы для проектирования космических миссий в окрестности малых тел Солнечной системы. Полученное полиномиальное описание дискриминантного множества многочлена, а также его обобщения может быть использовано при решении задач об устойчивости положений равновесия, а также при вычислении и исследовании нормальной формы системы Гамильтона в её окрестности.

Основные публикации по теме диссертации

1. *Брюно А. Д.*, *Батхин А. Б.* Асимптотическое решение алгебраического уравнения // Докл. Акад. Наук. 2011. т. 440, № 3. с. 295—300.

2. *Батхин А. Б.*, *Брюно А. Д.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых задач // Вестник ННГУ им. Н. И. Лобачевского. 2011. 4, часть 2. с. 57—58.

3. *Батхин А. Б.*, *Брюно А. Д.*, *Варин В. П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. 2012. т. 76, № 1. с. 80—133.

4. *Брюно А. Д.*, *Батхин А. Б.* Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование. 2012. 2. с. 12—30.

5. *Batkhin A. B.* Application of the method of asymptotic solution to one multi-pa¨ rameter problem: 14th International Workshop, CASC 2012, Maribor, Slovenia, September 3-6, 2012. Proceedings //. Vol. 7442 / ed. by V. P. Gerdt [et al.]. Berlin Heidelberg: Springer, 2012. P. 22–33. (Lecture Notes in Compuer Science). DOI: 10.1007/978-3-642-32973-9_3.

6. *Батхин А. Б.* Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона // Автоматика и телемеханика. 2013. т. 8. с. 47—64.

7. *Батхин А. Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // Космические исследования. 2013. т. 51, № 4. с. 308—322.

8. *Батхин А. Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // Космические исследования. 2013. т. 51, № 6. с. 497—510.

9. *Батхин А. Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // ДАН. 2014. т. 458, № 2. с. 131—137.

10. *Батхин А. Б.* Граница множества устойчивости одной многопараметрической системы Гамильтона // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. 2014. 5 (24). с. 6—23. DOI: 10.15688/jvolsu1.2014.5.1.

11. *Батхин А. Б.* Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). 2015. т. 16, № 2. с. 23—34.

12. *Батхин А. Б.*, *Брюно А. Д.* Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // Программирование. 2015. 2. с. 7—17.

13. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. т. 42, № 2. с. 8—21.

14. *Батхин А. Б.* Одно вещественное многообразие с краем и его глобальная параметризация // Программирование. 2017. 2. с. 17—27.

15. *Батхин А. Б.* Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена // Программирование. 2018. 2. с. 5—17.

16. *Батхин А. Б.* Вычисление резонансного множества многочлена при ограничениях на коэффициенты // Программирование. 2019. 2. с. 6—15. DOI: 10.1134/S0132347419020043.

17. *Батхин А. Б.* Бифуркации периодических решений системы Гамильтона с дискретной группой симметрий // Программирование. 2020. т. 46, № 2. с. 14—29. DOI: 10.31857/S0132347420020041.

18. *Брюно А. Д.*, *Батхин А.* Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. 2021. 5. с. 22—43. DOI: 10.31857/S0132347421050046.

19. *Bruno A. D.*, *Batkhin A. B.* Survey of Eight Modern Methods of Hamilto¨nian Mechanics // Axioms. 2021. Vol. 10, no. 4. DOI: 10.3390/axioms10040293. URL: https://www.mdpi.com/2075-1680/10/4/293.

Цитированная литература

20. *Батхин А. Б.*, *Батхина Н. В.* Задача Хилла. Волгоград: Волгоградское научное издательство, 2009. 200 с.

21. *Simó C.*, *Stuchi T. J.* Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem // Physica D. 2000. Vol. 140. P. 1–32.

22. *Wilson C.* The Hill–Brown Theory of the Moon's Motion: Its Coming-to-be and Short-lived Ascendancy (1877-1984). New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences).

23. *Morales-Ruiz J.*, *Simó C.*, *Simon S.* Algebraic proof of the non–integrability of Hill's Problem // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2005. Vol. 25, no. 4. P. 1237–1256.

24. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

25. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: periodic prbits and their stability // Astron. & Astrophys. 1969. Vol. 1. P. 223–238.

26. *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. Berlin, Heidelber, New York: Springer, 1997. 278 p. (Lecture Note in Physics. Mono¨ graphs ; 52).

27. *Hénon M.* New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2003. Vol. 85. P. 223–246. DOI: `10.1023/A:1022518422926`.

28. *Крейсман Б. Б.* Семейства периодических решений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Несимметричные периодические решения

плоской ограниченной задачи трех тел // Космические исследования. 2005. т. 43, № 2. с. 1—23.

29. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. VI. Hill's case: non-periodic orbits // Astron. & Astr. 1970. No. 9. P. 24–36.

30. *Combot T.*, *Maciejewski A. J.*, *Przybylska M.* Integrability of the generalised Hill problem // Nonlinear Dynamics. 2021. DOI: 10.1007/s11071-021-07040-8. URL: https://doi.org/10.1007/s11071-021-07040-8.

31. *Майлыбаев А. А.*, *Сейранян А. П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.

32. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. 5-е. М.: Физматлит, 2004. 560 с.

Научное издание

Батхин Александр Борисович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук на тему:

Семейства периодических и стационарных решений в гамильтоновой механике

Подписано в печать 03.03.2022. Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 2,09. Тираж 75 экз. Заказ А-1.

ИПМ им. М.В. Келдыша. 125047, Москва, Миусская пл., 4, http://www.keldysh.ru