

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. Ломоносова  
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Самохин Александр Сергеевич

**Методика построения экстремалей Понтрягина в  
задачах сквозной траекторной оптимизации  
межпланетных перелётов с учётом  
планетоцентрических участков**

01.02.01 — Теоретическая механика

Диссертация  
на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
доцент Григорьев Илья Сергеевич

Москва, 2020

# Оглавление

<b>Основные обозначения и константы</b>	<b>5</b>
<b>Введение</b>	<b>7</b>
Актуальность . . . . .	7
Степень разработанности темы исследования . . . . .	10
Положения, выносимые на защиту . . . . .	16
Апробация . . . . .	21
Объём и структура работы . . . . .	25
Благодарности . . . . .	26
<b>1 Оптимизация траектории экспедиции КА к Фобосу с комбинированной кусочно-непрерывной ограниченной тягой, возвратом к Земле и учётом эфемерид</b>	<b>27</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	27
1.2 Формализация . . . . .	29
1.3 Краевая задача . . . . .	34
1.4 Вычислительная схема . . . . .	37
1.5 Результаты . . . . .	39
1.6 Выводы . . . . .	42
<b>2 Лестница задач. Комбинации задач Ламберта</b>	<b>43</b>
2.1 Лестница задач . . . . .	43
2.2 Оптимизация межпланетной экспедиции с использованием решения задач Ламберта без учёта притяжения Земли и планеты-цели . . . . .	44
2.2.1 Постановка . . . . .	44
2.2.2 Метод решения . . . . .	45
2.2.3 Результаты . . . . .	49
2.2.4 Различные исследования . . . . .	52
Окна старта . . . . .	53
Абсолютный минимум манёвра . . . . .	56

2.3	Оптимизация межпланетной экспедиции с учётом Земли и Марса и использованием решения задач Ламберта . . . . .	65
2.4	Схема с пертурбационным манёвром у Луны . . . . .	73
2.5	Выводы . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Лестница задач. Переход от импульсной постановки к постановке задачи с непрерывной тягой</b>	<b>76</b>
3.1	Оптимизация межпланетной экспедиции с учётом Земли и Марса в импульсной постановке . . . . .	76
3.1.1	Формализация задачи . . . . .	77
3.1.2	Необходимые условия оптимальности . . . . .	81
3.1.3	Исследование необходимых условий оптимальности . . . . .	86
3.1.4	Краевая задача принципа максимума . . . . .	87
3.1.5	Численное решение краевой задачи . . . . .	88
3.1.6	Анализ полученных результатов . . . . .	89
3.2	Управление импульсами и малой тягой . . . . .	91
3.2.1	Постановка задачи . . . . .	92
3.2.2	Формализация . . . . .	93
3.2.3	Краевая задача . . . . .	96
3.2.4	Вычислительная схема . . . . .	97
3.2.5	Результаты . . . . .	98
3.3	Выводы . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Оптимизация траектории экспедиции КА с трёхимпульсным подлётом к Фобосу</b>	<b>103</b>
4.1	Построение траекторий трёхимпульсного подлёта к Фобосу с выходом на сферу Хилла Марса на основе решения серии задач Ламберта. . . . .	104
4.1.1	Постановка задачи . . . . .	104
4.1.2	Численное решение и результаты . . . . .	106
4.2	Задача оптимизации межпланетного перелёта к Марсу с трёхимпульсным подлётом к Фобосу на основе принципа Лагранжа . . .	107
4.2.1	Постановка задачи . . . . .	108
4.2.2	Различная формализация. Лестница задач . . . . .	109

4.3	Малая тяга . . . . .	112
4.4	Фазировка КА с Фобосом . . . . .	113
4.5	Выводы . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Оптимизация траектории экспедиции КА с многовитковым безимпульсным подлётом к Фобосу</b>	<b>118</b>
5.1	Постановка задачи . . . . .	118
5.2	Формализация задачи . . . . .	119
5.3	Краевая задача принципа максимума . . . . .	127
5.4	Лестница вспомогательных задач . . . . .	130
5.5	Результаты . . . . .	135
5.6	Выводы . . . . .	138
	<b>Заключение</b>	<b>139</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>142</b>

# Основные обозначения и константы

БТ — большая тяга,

ДУ — двигательная установка,

ДУ БТ — двигательная установка большой тяги,

ДУ МТ — двигательная установка малой тяги,

ИМП — импульсная постановка (задачи),

ИС — искусственного спутника (орбита),

ИСЗ — искусственный спутник Земли,

ИСМ — искусственный спутник Марса,

КА — космический аппарат,

КОИСЗ — круговая орбита искусственного спутника Земли,

МТ — малая тяга,

ОИСЗ — орбита искусственного спутника Земли,

ОИСМ — орбита искусственного спутника Марса,

СК — система координат,

ЭРДУ — электроактивная двигательная установка.

**Константы.** Необходимые для решения задач константы берутся из [46].

$g_E = 9.81 \text{ м/с}^2$  — средняя величина гравитационного ускорения у поверхности Земли,

$R_E = 6378.16 \text{ км}$  — средний радиус Земли,

$R_M = 3402 \text{ км}$  — средний радиус Марса,

$\rho_{2(E)} = 2.501276397954 \text{ млн км}$  — радиус сферы влияния Земли,

$\rho_{2(M)} = 1.801158363120 \text{ млн км}$  — радиус сферы влияния Марса,

$v_{E(S)} = 29.78 \text{ км/с}$  — средняя круговая скорость Земли,

$v_{M(S)} = 24.13 \text{ км/с}$  — средняя круговая скорость Марса,

$\text{а.е.} \equiv \text{AU} = 1.49597870691 \cdot 10^8 \text{ км}$  — астрономическая единица, среднее расстояние от Земли до Солнца,

$\text{a.e.}/100 \equiv \text{AU}/100 = 1495978.70691 \text{ км}$  — одна сотая а.е., используется в расчётах,

$\text{E.D.} = 86400 \text{ с}$  — эфемеридный день (ephemeris day), используется в расчётах.

Согласно 2-му закону Ньютона и закону всемирного тяготения, на КА действуют силы притяжения со стороны учитываемых притягивающих центров, равные  $\mu_{\text{body}} \frac{M}{r_{\text{body}}^2}$ , где  $\text{body}$  — космическое тело, обычно в работе это Солнце, Земля или Марс,  $r_{\text{body}}$  — расстояние от этого космического тела до КА;  $\mu_{\text{body}}$  — гравитационный параметр соответствующего тела, равный  $\gamma \cdot M_{\text{body}}$ , где  $\gamma = 6.669 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \text{кг}^{-2}$  — гравитационная постоянная, а  $M_{\text{body}}$  — масса тела;  $M$  — масса КА. Для удобства расчётов (чтобы избежать слишком больших чисел, в особенности большого значения гравитационного параметра Солнца и больших значений сопряжённых переменных, в результате которых, из-за специфики численного решения рассматриваемых задач — при удалении от нуля числовая сетка становится реже, происходит потеря точности) в работе в качестве основной единицы длины бралась величина  $\text{a.e.}/100$ , время измерялось в днях — E.D. выше. В этих единицах измерения гравитационный параметр Земли:  $\mu_{\text{E}} = 3.986013 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2 = 8.887552 \cdot 10^{-4} (\text{a.e.}/100)^3/\text{день}^2$ ; Марса:  $\mu_{\text{M}} = 4.297780 \cdot 10^4 \text{ км}^3/\text{с}^2 = 9.582649 \cdot 10^{-5} (\text{a.e.}/100)^3/\text{день}^2$ ; Солнца:  $\mu_{\text{S}} = 1.32712440018 \cdot 10^{11} \text{ км}^3/\text{с}^2 = 2.95912208286 \cdot 10^2 (\text{a.e.}/100)^3/\text{день}^2$ .

# Введение

**Актуальность.** В работе рассматриваются математические проблемы решения задач оптимального управления межпланетными перелётами космических аппаратов.

Управление КА посредством только реактивных двигателей большой тяги (одной или нескольких ступеней) в настоящее время не позволяет доставить к Марсу, Венере, поясу астероидов удовлетворительную массу полезного груза. Использование же только двигателя малой тяги [56] позволяет доставить массу полезного груза, значительную по сравнению с аппаратом, управляемым посредством двигателей большой тяги, однако время ухода КА от Земли и торможения КА около целевой орбиты становится велико и может составить большую часть времени перелёта и быть критическим для отказоустойчивости всей системы. Использование на КА комбинации двигателей большой и малой тяги сочетает в себе достоинства как манёвров с большой тягой (малое время перелёта), так и манёвров с малой тягой (большая масса полезной нагрузки) и позволяет избежать вышеуказанных недостатков и реализовать доставку необходимой полезной массы за приемлемое время. В связи с экономической целесообразностью использования ЭРДУ и продолжающимся активным исследованием космического пространства актуальным является математическое исследование траекторий КА, оснащённых данным двигателем. Задачи оптимизации перелётов КА с ЭРДУ решаются в первой, третьей, четвёртой, пятой главах диссертации.

В работе рассматривается оптимизация миссий КА к Марсу. Основные положения государственной политики Российской Федерации в области космической деятельности на период до 2030 года и дальнейшую перспективу утверждены Президентом Российской Федерации (Пр-906 от 19 апреля 2013 г.) и выносят на повестку вопросы освоения Марса и околомарсианского про-

странства.

Ещё одна связанная с тематикой исследования научная задача — проблема происхождения Земли и Солнечной Системы. Кроме фундаментального вопроса — выяснения механизмов образования планет и планетарных систем, она имеет важное прикладное значение в геологии, геофизике, геохимии. Применяя различные методы исследований, учёные черпают некоторые сведения о внутреннем строении Земли и её физических характеристиках. Земная кора исследована прямыми методами с применением бурильных установок до глубины  $\approx 15$  км. На глубине 35 километров начинаются верхние слои мантии, и такое проникновение под поверхность Земли уже встретит непреодолимые для техники препятствия. Ещё один способ получения и анализа внутреннего вещества Земли заключается в изучении извергаемой вулканами магмы. Однако, по современным представлениям, наибольшая глубина для формирования извергаемой магмы составляет порядка  $150 \text{ км} \approx 2.35\%$  радиуса Земли. Остаётся ещё один способ изучения химического состава Земли — исследование реликтового вещества, находившегося около орбиты Земли в период её формирования. В настоящее время такого материала нет. Луна, вероятно, формировалась одновременно с Землёй в окрестности её орбиты, но, являясь достаточно массивным телом, утратила первичный поверхностный состав, так как на ней происходили эндогенные тектонические процессы с дифференциацией и метаморфизмом вещества.

В работе же исследуется одна из наиболее актуальных проблем изучения дальнего космоса — задача забора проб грунта, предполагаемого реликтового вещества, со спутника Марса Фобоса (см. рис. 1) [6, 49, 53, 68, 98, 101]. Российская Федерация и Япония независимо планируют осуществить миссию к Фобосу в ближайшем будущем [125], старты экспедиций запланированы на середину 2020-х гг., однако на текущий момент полного математического исследования траекторной части миссии с решением задачи сквозной оптимизации не опубликовано.

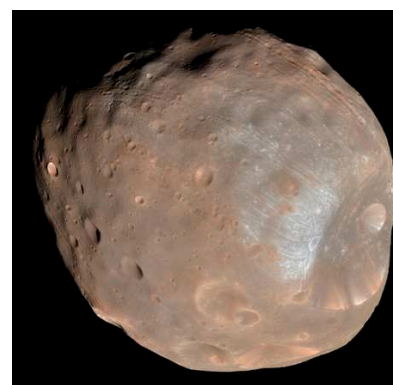


Рис. 1: Фобос, фото Mars Reconnaissance Orbiter, NASA.

В диссертации рассматривается траекторная часть миссии. Эта пробле-



ма в работе формализуется с различной степенью детальности, проводится аналитическое исследование полученных математических задач и при необходимости их численное решение. Такое рассмотрение, с одной стороны, даёт возможность получения системной оценки различных проектных вариантов, возникающих в процессе разработки реальной технической системы управления КА. С другой стороны, рассмотрение сложных задач траекторной оптимизации позволяет развивать методы решения громоздких задач космодинамики, повышать точность рассматриваемых математических моделей и расширять область исследования космических перелётов.

Проблеме доставки проб грунта с Фобоса в целом, различным аспектам этой проблемы и примыкающим к ним задачам марсианских экспедиций посвящено значительное число работ (см. [7], монографию [98] и библиографию в ней).

Проект ФОБОС–ГРУНТ был представлен в [3]. В первой версии проекта предполагалось использование КА с комбинированной двигательной установкой: уход от Земли осуществлялся с использованием разгонного блока, затем аппарат перестраивался, и в течение полёта к Марсу управление КА осуществлялось с помощью ЭРДУ МТ. Манёвры у Марса и этап возвращения реализовывались с использованием двигателей большой тяги. В последующем, при реализации проекта от перспективной схемы комбинирования двигателей большой и малой тяги отказались [5, 14, 61, 88], однако проблема оптимизации комбинированных схем межорбитальных перелётов и в том числе проблема построения траекторий таких экспедиций остаются актуальными. Примеры траекторий перелёта к Фобосу представлены во всех пяти главах диссертации. В [3] также отмечается, что успех подобного проекта даёт возможность для осуществления нескольких миссий к главному поясу астероидов, кометам, спутникам Юпитера.

В 2020 году на XLIV Королёвских академических чтениях по космонавтике международная группа ученых предложила ещё один проект, связанный с Фобосом: создание на спутнике обитаемой базы [45, 47, 58]. На текущий момент Красная планета недружелюбна, построение на Марсе обитаемой базы предполагает значительные затраты на создание условий для выживания космонавтов во враждебной среде. При этом значительная часть массы межпла-

нетного космического аппарата будет затрачена на посадку на поверхность планеты. Выгодной идеей представляется колонизация при помощи роботов. Однако заранее на Земле спланировать подробный алгоритм для эффективной автономной работы робота на другой планете крайне тяжело, а ручное управление затрудняется тем, что радиосигнал до Марса и обратно может идти более 40 минут в зависимости от положения планет, что делает такой вариант освоения планеты неприемлемо медленным. Создание же обитаемой базы на Фобосе позволит решить обе проблемы и начать колонизацию Марса при помощи роботов. Такой подход позволит пополнять ресурсы базы, находящейся вблизи Марса, не тратя огромные запасы топлива при посадке на планету, и доставлять людей к Марсу с меньшим риском. Управление же роботами с Фобоса будет намного комфортнее чем с Земли, сигнал с такой базы будет достигать поверхности Фобоса за доли секунды. Наконец, сегодня возврат человека с поверхности Марса на Землю практически невозможен ввиду огромной стоимости, полёт лишь в один конец оценивается в 10 миллиардов долларов, а возврат может обойтись в десятки раз дороже. Возврат же космонавтов с Фобоса значительно проще реализовать, и человечество подбирается к достижению технических возможностей для осуществимости такой миссии.

**Степень разработанности темы исследования.** Проблематика оптимизации траекторий перелётов КА с комбинированным управлением двигателями большой и малой тяги известна давно [54, 104]. Эффективность использования ЭРДУ при межпланетных экспедициях неоднократно отмечалась [3, 25, 97, 103]. Так, в [3] отмечается, что при выбранных параметрах перелёта в проекте ФОБОС–ГРУНТ использование двигателя малой тяги в дополнение к двигателю большой тяги позволяет увеличить полезную массу на 150–200 кг по сравнению с перелётом только с двигателем большой тяги.

Отметим некоторые работы, в каком-то смысле близкие рассматриваемым в диссертации проблемам.

В [11] рассматривается задача расчёта перелёта КА, оснащённого двигателями установками большой и малой тяги. При решении предполагается, что первый участок движения начинается на низкой околоземной спутниковой орбите, проходит внутри сферы действия Земли выше этой орбиты, так что сопротивлением атмосферы и другими возмущениями можно пренебречь.

На первом участке работает только ДУ БТ, разгоняющая КА до заданного значения полной геоцентрической энергии  $\frac{1}{2}v_\infty^2$ . Учитывается зависимость  $v_{xap}(v_\infty)$  характеристической скорости манёвра от скорости ухода, которую нужно набрать на первом участке. После выключения ДУ БТ отработавшая ступень без импульса отделяется от КА и начинается второй участок — участок работы ДУ МТ. На втором участке возмущения от Земли, Луны и планет не учитываются. Задана суммарная начальная масса КА, включающая полезную нагрузку, массы топлива и рабочего вещества ДУ БТ и МТ, массы необходимых систем и конструкций. Заданы параметры ДУ БТ — масса двигателя, коэффициента пропорциональности массы баков к массе топлива, удельная тяга. Заданы параметры ДУ МТ — масса ДУ МТ, величина мощности реактивной струи, коэффициент пропорциональности массы баков к массе рабочего вещества. Итоговой целью в работе является максимизация полезной массы, доставляемой к цели (астероиду или комете) комбинацией ДУ БТ и МТ.

Расчёт производится последовательно, сначала для первого, затем для второго участка. По заданной величине  $v_\infty$  и заданной зависимости  $v_{xap}(v_\infty)$  находится величина  $v_{xap}$ . В работе отмечается, что величина  $v_{xap}(v_\infty)$  также зависит от тяговооружённости — чем больше тяговооружённость, тем меньше гравитационные потери, а при импульсном переходе гравитационные потери отсутствуют. Отметим, что зависимость массы двигателя от тяговооружённости в работе не учитывалась (масса двигателя считается известной). Масса КА после манёвра определяется по формуле Циолковского, масса топлива представляет собой разность начальной и конечной масс, масса топливного бака пропорциональна массе топлива. Начальная масса второго участка определяется после сброса баков и ДУ БТ:

$$M_0^{II} = M_0^I \exp(-v_{xap}/C^I) - \alpha^I (M_0^I - M_0^I \exp(-v_{xap}/C^I)) - M_D^I.$$

Далее производится массовый расчёт для двигателя малой тяги на основе траектории перехода для выбранной начальной скорости  $v_\infty$  к выбранной цели. В конце работы высказывается надежда, что переход от идеально регулируемой ДУ МТ к кусочно-постоянной МТ не приведет к существенным потерям в полезной массе.

В статье [25] рассматривается проблема оптимизации межпланетных пе-

релётов КА с комбинированным управлением двигателями большой и малой тяги. Решалась задача оптимизации плоского перелёта между низкими круговыми орбитами искусственных спутников Земли и Марса. Предполагалось, что Земля и Марс движутся по компланарным круговым орбитам. Притяжение Солнца, Земли и Марса учитывалось на всей протяжённости траектории. Работа двигателя большой тяги аппроксимировалась импульсными воздействиями. Кроме моментов импульсных воздействий управление осуществлялось электрореактивным двигателем малой тяги с постоянной скоростью истечения реактивной струи. При учёте эффективности работы ЭРДУ считалось, что ускорение малой тяги обратно пропорционально  $r^2$  ( $r$  — расстояние от КА до Солнца). Для преодоления эффекта потери точности в работе использовалось три системы координат: связанная с Землёй на первом участке траектории, связанная с Марсом — на последнем — и гелиоцентрическая система координат на среднем. Задача оптимального управления решалась на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина. Полученные экстремали Понтрягина анализировались по тяговооружённости ЭРДУ.

В работе [97] рассматривается задача оптимизации траекторий перелёта от Земли к Марсу. Работа двигателя большой тяги на этапе ухода от Земли аппроксимировалась импульсным воздействием. На гелиоцентрическом участке управление осуществлялось электрореактивным двигателем малой тяги с постоянной скоростью истечения реактивной струи. При учёте эффективности работы ЭРДУ считалось, что ускорение малой тяги обратно пропорционально  $r^{1.7}$ . Притяжение Марса не учитывалось — рассматривалась задача встречи. В качестве орбит Земли и Марса брались средние эллиптические орбиты этих планет. Задача оптимального управления решалась на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина.

В статье [103] рассматриваются задачи наискорейшего перелёта КА между круговыми компланарными орбитами Земли и Марса. Величина тяги реактивного двигателя считается ограниченной, скорость истечения — постоянной. Перелёт начинается с орбиты Земли, при отлете КА может иметь некоторый гиперболический избыток скорости ( $\Delta V_{\infty}^E$ ), при подлёте к Марсу скорости выравниваются ( $\Delta V_{\infty}^M$ ). На основе принципа максимума Понтрягина решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой

задачи. При решении задачи в работе функционал преобразуется — к нему добавляются штрафные функции нарушения конечных условий. Модифицированный функционал минимизируется градиентным методом.

В [12, 13] рассматривалась схема экспедиции к Фобосу, соответствующая первому варианту проекта ФОБОС–ГРУНТ: разгон КА с орбиты ИСЗ до гиперболической скорости  $V_\infty$  разгонным блоком (двигатель большой тяги), полёт с МТ до сферы действия Марса с выравниванием скоростей КА и Марса. Затем — манёвры в сфере действия Марса и посадка на Фобос с использованием ДУ БТ, доставка образца вещества к Земле с помощью возвратного модуля, оснащённого двигателем большой тяги и торможением в атмосфере Земли. Транспортный модуль, осуществляющий полёт от Земли к Марсу с МТ и включающий ДУ МТ и солнечные батареи, предполагается сбрасывать после достижения сферы действия Марса. В расчётах траекторий полётов КА, как правило, использовалась модель ДУ “идеально регулируемой” МТ — без ограничений на величину и направление вектора реактивной тяги и на величину скорости истечения реактивной струи. Для модели ЭРДУ МТ с постоянной скоростью истечения реактивной струи задача исследовалась для некоторого фиксированного набора значений  $V_\infty$ . К сожалению, в этих интересных работах нет чёткой постановки задачи, поэтому многие моменты проведенного исследования остаются неясными.

В работе [87] рассматриваются многоцелевые экспедиции к астероидам главного пояса. Одной из частей такой экспедиции является перелёт с низкой КОИСЗ на орбиту ожидания у Марса. Задача рассматривается в упрощённой импульсной постановке. Минимизируются суммарные затраты массы характеристической скорости выполнения манёвров. В статье проводятся оценочные расчёты, при этом предполагается, что:

- Земля и Марс движутся по круговым компланарным орбитам,
- их фазы движения не учитываются,
- используется методика точечной сферы действия,
- переход в центральном ньютоновском гравитационном поле Солнца осуществляется по гомановской траектории,
- импульс ухода КА с низкой круговой орбиты ИСЗ приводит к уходу от Земли по касательной к её орбите,

— у Марса КА осуществляет торможение в перицентре на заданном расстоянии от поверхности и переходит на эллиптическую орбиту с заданным радиусом апоцентра.

Работа заканчивается упоминанием, о сравнении построенных оценок с расчётными траекториями на основе соотношений Эйлера–Ламберта, делается вывод о соответствии полученных результатов.

В работе [109] рассматривается задача оптимизации плоского перелёта между низкой и высокой круговыми орбитами. Учитывается наличие радиационного пояса и необходимость его скорейшего преодоления. Рассматривается управление только малой тягой (L), сначала большой тягой, потом малой тягой (H-L), малой тягой, затем большой тягой, и снова малой тягой (L-H-L) и только большой тягой (H). Переключение между участками осуществляется в зависимости от радиуса.

В цикле работ Миеле с соавторами [110]–[114], несмотря на привлекательные названия, речь о комбинации двигателей не идет. Химическому и электрореактивному двигателям соответствуют различные наборы параметров тяговооружённости и удельной тяги. В работах этого цикла рассматриваются перелёты с одной круговой орбиты на другую круговую орбиту в центральном ньютоновском поле, решаются задачи быстрогодействия, минимизации затрат массы и при компромиссном функционале. К сожалению, в этом цикле не упоминаются работы [40, 41, 43], где подобные задачи были решены. Отметим также, что наличие набора семейств экстремалей в рассматриваемых в цикле задачах даже не отмечено (наиболее наглядным в этом смысле является [110, рис. 1]) и оптимальность построенной траектории в задаче минимизации затрат массы при не ограниченном заранее времени перелёта не верна, а при ограниченном времени перелёта — требует дополнительного исследования. Отметим, что двух и трёхвитковые экстремали строились численно в задачах оптимизации траекторий перелётов КА между круговыми орбитами искусственных спутников Земли и Луны [37, 38], а подробное исследование многовитковых траекторий было проведено в [39, 69, 70].

В диссертации [65] и работах [117, 124] рассматривается упрощённая модель КА с комбинированной двигательной установкой. В [65] принималось,

что двигатель малой тяги идеально регулируемый, для которого величина тяги не ограничена (реально уровень потребления тяги зависит от граничных условий и продолжительности перелёта). Комбинированная двигательная установка работает в последовательном режиме [44, 54], когда в каждый момент времени может работать только один из двигателей. В работе [44] обосновывается, что в рассматриваемых задачах межорбитальных переходов “на начальном участке движения космического аппарата с комбинированной двигательной установкой должен работать двигатель большой тяги, который отделяется после выполнения манёвра, и остальную часть траектории КА движется за счет работы двигателя малой тяги”. На первом участке работы учитывается возможность выключения двигателя. Рассматривается многокритериальная задача оптимизации:

- 1) полезная масса — максимизируется;
- 2) продолжительность полёта — минимизируется;
- 3) время пребывания в тени Земли — минимизируется;
- 4) время пребывания в радиационных поясах — минимизируется.

При решении задачи критерии оптимизации переводились в ограничения, величины ограничений рассматривались как параметры, и, с использованием метода продолжения по параметру, решалась задача максимизации полезной нагрузки.

В диссертации [48] и работах [105, 106] рассматривается оптимизация полёта к Марсу с пертурбационным манёвром у Луны и малой тягой с постоянной скоростью истечения реактивной струи. В работе сделаны следующие предположения. В конечный момент времени КА попадает в Марс. Старт с ИСЗ осуществляется за счёт импульсного воздействия. Перелёт осуществляется в 2013 году по эфемеридам DE405. Земля считается геоидом. Наклоны опорной и промежуточной орбиты равны. Траектория делится на 4 части:

- 1) импульсная аппроксимация перехода на промежуточную орбиту;
- 2) задача быстрого действия подлёта к Луне;
- 3) в окрестности Луны считается, что тяга направлена по скорости;
- 4) на гелиоцентрическом участке осуществляется минимизация затрат массы на основе принципа максимума.

Тем самым сквозная оптимизация всей миссии не осуществляется. Отметим, что при применении принципа максимума опускаются условия стационарности. Начальное приближение для значений сопряжённых переменных ищется методом случайного поиска. Считается, что энерговооруженность ЭРДУ КА не зависит от расстояния до Солнца.

**Цели.** Основные цели диссертационной работы:

- Разработка методики для построения экстремалей Понтрягина в задачах оптимизации межпланетных траекторий КА с учётом притяжения планет и без использования грависфер нулевой протяжённости;
- Построение экстремалей в задачах с единым критерием оптимизации всей экспедиции, без разбивания её на куски с разными критериями;
- Реализация разработанных методик на ЭВМ и численное решение поставленных задач, в том числе с ограниченной кусочно-непрерывной тягой КА. Анализ полученных результатов.

**Задачи.** Основные задачи, рассматриваемые в работе:

- Оптимизация экспедиции с безвитковым подлётом к Фобосу КА, оснащённого ЭРДУ, с учётом эфемерид, в том числе без аппроксимации работы двигателей БТ импульсными воздействиями;
- Оптимизация экспедиции КА с учётом эфемерид с более выгодной по сравнению с прямым попаданием в спутник трёхимпульсной схемой подлёта к Фобосу;
- Оптимизация экспедиции с многовитковым безимпульсным подлётом к Фобосу в трёхмерной круговой постановке, позволяющая отказаться от использования ДУ БТ вблизи Марса.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Постановка трёхмерной космодинамической задачи сквозной оптимизации траектории межпланетного перелёта космического аппарата с единым функционалом, подробным рассмотрением планетоцентрических участков без использования грависфер нулевой протяжённости, с комбинированной тягой и фазировкой.



2. Предложена методика решения многоэкстремальных задач оптимизации траекторий межпланетных перелётов с возвратом к Земле, с учётом эфемерид, с жёсткой фазировкой, ограниченной комбинированной большой и малой кусочно-непрерывной тягой, включающая решение серии вспомогательных задач в упрощённой постановке и продолжение решения по параметру.
3. Разработаны численные методы решения краевых задач принципа максимума, возникающих при управлении совокупностью динамических систем, с учётом эффекта потери точности и перестройки структуры траектории при изменении количества активных участков во время продолжения решения по параметру.
4. Для построения начального приближения значений параметров при стрельке метода стрельбы, необходимого для поиска области нахождения глобально оптимального решения, и значений сопряжённых переменных, требующихся для сходимости модифицированного метода Ньютона, разработана методика — „лестница задач“, основанная на поэтапном переходе от задач, решение которых не представляет вычислительных трудностей, таких как оптимизация комбинаций задач Ламберта прямыми методами, к задаче оптимального управления совокупностью динамических систем с кусочно-непрерывным управлением.
5. Опираясь на предложенные методики и численные методы, автором реализован программный комплекс на языке С, учитывающий эфемериды, численно решены 9-точечные краевые задачи 70-го порядка. Построены конкретные экстремали в трёх различных вариантах экспедиции космического аппарата к Марсу и его спутнику Фобосу.
6. На основе анализа построенных экстремалей Понтрягина оценен выигрыш от использования малой тяги при доставке образцов грунта с Фобоса, позволяющий судить о целесообразности оснащения космического аппарата таким двигателем, произведено сравнение различных схем экспедиции.

**Научная новизна.** При традиционном подходе обычно планетоцентри-

ческие участки не рассматриваются вовсе или рассматриваются на основе методики точечных сфер действия, или с упрощённым функционалом, или просчитываются с аналитически заданным неоптимальным управлением, что, в частности, приводит к отсутствию оптимизации всей миссии с единым критерием (см. с. 10–16). Трудной задачей траекторной оптимизации является задача сквозной оптимизации всей миссии КА с учётом планетоцентрических участков и единым функционалом. В диссертации предложена методика решения задач подобного рода. При этом возникают отдельные проблемы построения хорошего начального приближения, нахождения вычислительной схемы метода стрельбы, позволяющей решить краевую задачу принципа максимума, разработки методов преодоления перестройки структуры траектории, которые также рассмотрены в диссертации.

Результаты работы являются новыми. Разработана теоретическая схема построения экстремалей Понтрягина в задачах траекторной оптимизации с возвращением к Земле, жёсткой фазировкой, единым функционалом и сквозной оптимизацией по нему, учётом эффекта потери точности, эфемерид, рассмотрением планетоцентрических участков, комбинированной ограниченной кусочно-непрерывной тягой. Предложена методика построения начального приближения, основанная на решении задач в упрощённой постановке и методе продолжения решения по параметру. Разработаны и реализованы на ЭВМ вычислительные методы построения экстремалей Понтрягина на основе предлагаемой методики, построены конкретные траектории КА в различных вариантах экспедиции к Фобосу.

По результатам работы получены свидетельства о регистрации программ на ЭВМ [75, 79, 83, 86].

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается строгой математической постановкой задач, использованием хорошо обоснованных фундаментальных подходов и методов их решения, таких как принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина и метод продолжения по параметру. В теоретической модели учитываются эфемериды [123] и притяжение крупных тел на всей траектории. Учитываются вычислительные особенности, такие, как эффект потери точности. Многие результаты, полученные в диссертации, сравнивались с результатами, опубликованными другими авторами, в

том числе [3, 17, 98].

Численные результаты подвергались неоднократной проверке. Использовались апробированные численные методы для решения систем дифференциальных уравнений, систем нелинейных алгебраических уравнений, задач минимизации прямыми методами. Метод решения задач оптимального управления тестировался на большом числе задач, имеющих аналитическое решение [24]. Работоспособность основного метода интегрирования задачи Коши проверена многократными тестами. Верная работа метода стрельбы в том числе подтверждается принятием результатов расчётов, проведённых на основе разработанного программного комплекса, тысяч космических траекторий на независимых соревнованиях по глобальной оптимизации траекторий ГТОС X, проведённых NASA в 2019 году.

Были проведены тесты по переходу между рассматриваемыми СК в разное время. Разработанная методика предполагает решение одних и тех же промежуточных задач на основе различных принципов, совпадение таких решений также подтверждает отсутствие ошибок в реализации методов на ЭВМ.

**Теоретическая значимость.** Рассмотрение сложных задач траекторной оптимизации, требующих для своего решения синтеза методов локальной и многоэкстремальной оптимизации, оптимального управления, космодинамики, механики космического полёта, небесной механики и численных методов, даёт значительный вклад в теорию решения таких задач.

В диссертации рассмотрены вопросы построения начального приближения, необходимого для решения задач с ограниченной непрерывной тягой и предложена методика преодоления перестройки структуры траектории при продолжении решения по параметру, а также методика решения задач с жёсткой фазировкой.

**Практическая значимость:**

- Разработан и реализован программный комплекс для расчёта и оптимизации межпланетных траекторий космических аппаратов, оснащённых двигательными установками комбинированной тяги. На его основе могут быть решены задачи оптимизации траекторий перелёта к различным телам Солнечной системы.

- Получены конкретные экстремали в задаче межпланетного перелёта Земля — Марс. Решены задачи в различной постановке, в том числе с трёхимпульсным, многовитковым подлётом к Марсу, пертурбационным маневром у Луны.
- Проведена оценка выигрыша от использования двигательной установки малой тяги, трёхимпульсного подлёта к Фобосу, пертурбационного маневра у Луны.

**Объектом исследования** являются схемы экспедиций полёта КА к Фобосу, в том числе с возвращением к Земле, с учётом эфемерид и в случае конечной тяги двигателей.

**Предметом исследования** является разработка алгоритмов и методик поиска экстремалей для рассматриваемых схем перелёта, в том числе численных методов, и построение начального приближения.

**Методы и методики:**

- В работе разработана методика перехода от решения задач, имеющих аналитическое решение или задач, решение которых не представляет вычислительной трудности к задачам в более сложных постановках. Перелёты рассматриваются плоские, круговые, трёхмерные, с учётом эфемерид, с различным учётом притяжения планет и Солнца на разных частях траектории. Задачи оптимизации решаются прямыми методами на основе оптимизации одной или совокупности задач Ламберта. А также непрямыми методами в импульсной постановке на основе принципа Лагранжа, с комбинированным управлением импульсами и кусочно-непрерывной малой тягой, и с полностью кусочно-непрерывной ограниченной комбинированной тягой. Разработана методика решения задач с жёсткой фазировкой.
- Разработаны численные методы для борьбы с перестройкой структуры траектории, введением штрафа на схлопывание возникающего активного участка и продолжения по тяге на этом участке. Задача решается в том числе в неинерциальных планетоцентрических системах координат в связи с вычислительной проблемой потери точности. Траектории продолжаются по большому числу различных параметров.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** Одна из главных научных целей специальности „Теоретическая механика“ — разработка и исследование теоретико-механических моделей материальных систем. Основные этапы исследования включают в себя постановку задачи, выбор корректной теоретико-механической модели, разработку и применение методов общей механики для исследования поставленной задачи, изучение полученных решений. Все этапы находят отражение в каждой из пяти глав диссертации.

**Апробация.** Работа докладывалась 22 раза на научных семинарах, а также на 32 конференциях:

1. Ломоносовские чтения 2020. Секция механики, Москва, Россия, 19-31 октября 2020.
2. Управление в аэрокосмических системах (УАКС-2020) имени академика Е.А. Микрина, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург, Россия, 6-8 октября 2020.
3. 55-е Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, Россия, 15-17 сентября 2020.
4. XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, Россия, 25 мая – 5 июня 2020.
5. XXII конференция молодых учёных «Навигация и управление движением», Санкт-Петербург, Россия, 17-20 марта 2020. (*Доклад признан лучшим на секции*).
6. Двадцать седьмая международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», Дубна, Московская обл., Россия, 27 января – 1 февраля 2020.
7. 54-е Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, Россия, 17-19 сентября 2019.
8. 2nd IAA SciTech2019 Forum, РУДН, Москва, Россия, 25-27 июня 2019.

9. «Ломоносовские чтения – 2019». Секция «Механика», МГУ, Москва, Россия, 15-25 апреля 2019.
10. XLIII академические чтения по космонавтике, посвящённые памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных учёных – пионеров освоения космического пространства, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, 29 января – 1 февраля 2019.
11. International Conference "Optimal Control and Differential Games" dedicated to the 110th anniversary of L.S. Pontryagin, Москва, Россия, 12-14 декабря 2018.
12. IAA SciTech Forum 2018, РУДН, Москва, Россия, 13-15 ноября 2018.
13. Ломоносовские чтения – 2018, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 16-25 апреля 2018.
14. 52-е Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Администрация Калужской области, Калуга, Россия, 19-22 сентября 2017.
15. «Орбита молодёжи» и перспективы развития российской космонавтики. III-я Всероссийская молодёжная научно-практическая конференция, Томск, Россия, 18-23 сентября 2017. *(Работа вышла в финал конкурса)*.
16. 3rd IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems (DYCOSS 2017), RUDN University, Москва, Россия, 30 мая – 1 июня 2017.
17. XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных „Ломоносов – 2017“, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 20 апреля 2017.
18. Ломоносовские чтения – 2017, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 17-26 апреля 2017.
19. XLIII Международная молодёжная научная конференция „Гагаринские чтения“, 2017, МАИ (НИУ), Москва, Россия, 5-20 апреля 2017.
20. XLI Академические чтения по космонавтике, посвящённые памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных учёных –

пионеров освоения космического пространства, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, 24-27 января 2017.

21. Ломоносовские чтения – 2016, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 18-27 апреля 2016.
22. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, Россия, 20-24 августа 2015.
23. Актуальные проблемы космонавтики: XXXIX академические чтения по космонавтике, посвящённые памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных учёных-пионеров освоения космического пространства, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, 27-30 января 2015.
24. Ломоносовские чтения – 2014. Секция механики, МГУ, Москва, Россия, 14-23 апреля 2014.
25. XXI Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия, 3-8 февраля 2014.
26. XXXVIII Академические чтения по космонавтике, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, 27-30 января 2014.
27. Ломоносовские чтения – 2013. Секция механики, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 15-19 апреля 2013.
28. Международная молодежная научная конференция XXXIX Гагаринские чтения Москва, МАТИ-РГТУ, Москва, Россия, 9-13 апреля 2013. (*Доклад признан лучшим на секции*).
29. Международный молодежный научный форум «Ломоносов – 2013», Москва, Россия, 8-13 апреля 2013.
30. Ломоносовские чтения – 2012. Секция механики, МГУ, Москва, Россия, 2012.
31. Ломоносовские чтения – 2011. Секция математики, МГУ, Москва, Россия, 7-15 апреля 2011.

32. XLV Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, Россия, 14-16 сентября 2010.
33. Спецсеминар «Прикладные задачи оптимального управления и численные методы их решения» под руководством доц. И.С. Григорьева, доц. М.П. Заплетина, мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова (2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020).
34. Семинар им. В.А. Егорова по механике космического полёта под руководством проф. В.В. Сазонова, доц. М.П. Заплетина, мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова (2010, 2013, 2017).
35. Семинар имени В.В. Белецкого по динамике относительного движения под руководством проф. Ю.Ф. Голубева, проф. В.Е. Павловского, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В. Мелкумовой, мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова (2013).
36. Научный семинар «Аналитическая механика и теория устойчивости имени В.В. Румянцева» под руководством проф. А.В. Карапетяна, доц. А.А. Зобовой, мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова (2013).
37. Научный семинар кафедры вычислительной математики под руководством проф. Г.М. Кобелькова, мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова (2011, 2017).
38. Научный семинар «Управление по неполным данным» под руководством чл.-корр. РАН, проф. А.А. Галяева, 38-я лаборатория ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН (июнь, ноябрь 2020, 2021).
39. Научный семинар «Механика и управление движением» под руководством проф. Ю.Ф. Голубева, проф. М.Ю. Овчинникова, 5 и 7 отделы ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (2020).

На основании предложенных методик разработан учебный курс:

- Методы расчёта межпланетных перелётов космических аппаратов, читается в Институте космических технологий Инженерной Академии РУДН с 1 сентября 2018 (лекции, семинары, практические занятия).



**Личный вклад.** Все результаты, приведённые в диссертации, получены лично автором и были доложены на 7 научных семинарах, также по ним сделано 42 доклада на конференциях. Основные результаты опубликованы в 38 научных работах [22], [23], [27]–[34], [50]–[52], [59, 60, 64], [71]–[86], [118]–[123]. Две работы [51, 74] опубликованы в изданиях из списка ВАК, также работа [74] и 5 работ [119]–[123] индексируются в Scopus и Web of Science, 6 из них выполнены в соавторстве. Из работ, выполненных с соавторами, в диссертацию включены только результаты, полученные автором.

**Объём и структура работы.** Работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованных источников. Текст диссертации содержит 157 страниц, включая 15 таблиц и 48 рисунков. Список литературы состоит из 125 наименований.

В **первой** главе рассматривается экспедиция с безвитковым подлётом к Фобосу с учётом эфемерид, с управлением КА кусочно-непрерывной ограниченной большой и малой тягой, с возвратом к Земле.

Во **второй** главе рассматривается построение начального приближения на основе решения комбинации задач Ламберта с учётом одного притягивающего центра на каждом участке траектории. Также рассматривается схема перелёта к Марсу с пертурбационным манёвром у Луны и исследуется вопрос глобального минимума маневра КА от Земли к Марсу. Проверяются условия второго порядка для задачи в упрощённой постановке. Осуществляется переход от задач Ламберта к принципу Лагранжа.

В **третьей** главе рассматриваются задачи многих тел на основе принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина. Исследуется задача с управлением КА импульсами, аппроксимирующими работу двигателей БТ и кусочно-непрерывной МТ. Оценивается выигрыш от использования малой тяги.

В **четвёртой** главе рассматривается экспедиция с трёхимпульсным подлётом к Фобосу, оценивается выигрыш от использования такой схемы перелёта. Исследуется проблема фазировки КА с Фобосом.

В **пятой** главе рассматривается вопрос выигрыша многовиткового подлёта КА к Фобосу за счёт уменьшения времени работы ДУ БТ вблизи Марса в экспедиции в круговой трёхмерной постановке.

Во всех главах последовательно приводятся постановки задачи, их формализация, разработанная методика решения, в том числе подробно рассматриваются вычислительные аспекты, исследуется вопрос построения начального приближения, приводятся данные полученных конкретных экстремалей, в том числе в первой, третьей, четвёртой, пятой главах – данные численно построенных экстремалей с комбинированной кусочно-непрерывной тягой.

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

**Благодарности.** Автор выражает глубокую благодарность сотрудникам механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова Григорьеву Илье Сергеевичу и Заплетину Максиму Петровичу за поддержку в работе над диссертацией и многократные плодотворные обсуждения задач,

Богачёву Кириллу Юрьевичу за привитый интерес к самостоятельному написанию сложных программ,

Кобелькову Георгию Михайловичу, Корневу Андрею Алексеевичу, Попову Анатолию Вадимовичу, Чижонкову Евгению Владимировичу, Арушаняну Игорю Олеговичу, Алимову Алексею Ростиславовичу, Сальниковой Татьяне Владимировне, Заплетиной Елене Витальевне, Демидову Александру Сергеевичу, Лапшину Евгению Александровичу, Ченцовой Наталье Николаевне и сотруднику ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН Галяеву Андрею Алексеевичу за внимание и доброжелательность;

Рязановскому Андрею Рафаиловичу, Гордину Рафаилу Калмановичу, Сергееву Петру Валентиновичу, Шеню Александру Ханьевичу и его команде за привитую в школьные годы любовь к математике;

всем сотрудникам кафедры вычислительной математики механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова и сотрудникам 38 лаборатории ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН за тёплое отношение;

своей семье за помощь, внимание и поддержку;

всем коллегам, проявившим интерес к работе на научных семинарах и конференциях.

# Глава 1

## Оптимизация траектории экспедиции КА к Фобосу с комбинированной кусочно-непрерывной ограниченной тягой, возвратом к Земле и учётом эфемерид

### 1.1 Постановка задачи

В данной главе рассматривается задача оптимизации экспедиции перелёта КА к Фобосу с возвращением к Земле и учётом эфемерид.

Перелёт начинается с 2020 по 2030 г. В первой части миссии (задача перелёта „вперёд“) КА стартует с КОИСЗ, соответствующей выведению с Байконура с фиксированным углом наклона к экватору  $i_B = 51.6^\circ$ , высотой  $h_E = 200$  км и свободными долготой восходящего узла  $\Omega_0$  и положением КА на орбите  $\varphi_0$ . Затем КА прилетает на Фобос, и при помощи доставленной научной аппаратуры производятся исследования, в том числе забор проб грунта. Продолжительность пребывания КА на Фобосе составляет не менее 30 дней. Во второй части миссии (задача перелёта „назад“) КА летит обратно от Фобоса к Земле. Общая продолжительность экспедиции ограничена 1500 днями. Положения Земли, Марса и Солнца соответствуют эфемеридам DE424, орбита Фобоса — MAR097 [102]. Для учёта эфемерид автором был разработан и реализован программный комплекс на языке C, с интегрированным пакетом NASA SPICE, описание работы с ним приведено в [123]. Гравитационные

поля Солнца, Земли и Марса считаются центральными ньютоновскими. Гравитационное поле Земли учитывается только в первой части миссии. Угловое положение КА на исходной стартовой орбите, моменты старта и финиша оптимизируются.

Всюду в работе предполагается, что КА и Фобос представляют собой непритягивающие материальные точки, их координаты и скорости в конечный момент первой части и начальный момент второй части совпадают. Вопросы сближения с реальным Фобосом и посадки на него в диссертации не рассматриваются, этим вопросам посвящены диссертация и статьи Тучина А.Г. [4], [92]–[95].

Начальная масса КА на КОИСЗ  $M_0 = 10$  т. Предполагается, что КА последовательно управляется четырьмя разными ДУ со следующими характеристиками [98, 100]: Фрегат с тягой  $T=19613$  Н, удельной тягой  $P_{уд} = 331$  с, сухой массой  $M_{Ф}=735$  кг осуществляет разгон КА у Земли; затем на протяжении перелёта от Земли к Марсу может работать ДУ МТ, представленная СПД–230 с  $T=0.784532$  Н вблизи Земли и  $T=0.392266$  Н вблизи Марса,  $P_{уд} = 2700$  с, сухой массой  $M_{МТ}=350$  кг; торможение у Марса осуществляется ДУ перелётного модуля с  $T=1529.8374$  Н, удельной тягой  $P_{уд} = 304$  с, сухой массой  $M_{ДУПМ}=180$  кг; разгон у Марса при старте обратно к Земле осуществляется при помощи ДУ возвращаемого аппарата (ВА) с  $T=125$  Н, удельной тягой  $P_{уд} = 306$  с, сухой массой  $M_{ДУВА}=139$  кг. В первой части миссии после обработки каждой очередной ДУ она сбрасывается.

На Фобосе также остаётся  $M_{ПМ} = 600$  кг, а именно 550 кг перелётного модуля (ПМ) и 50 кг доставленной научной аппаратуры для проведения дальнейших исследований. Во второй части миссии ДУ ВА сбрасывается в конечный момент времени, так как на протяжении перелёта за счёт данной ДУ могут проводиться корректировочные включения тяги. Такие корректировки есть в схеме миссии [98], но в данной работе не учитываются. Предполагается, что сбросы ДУ вместе с баками происходят мгновенно.

Управление КА осуществляется величиной и направлением вектора реактивной тяги. Отлёт от Земли и подлёт и отлёт от Марса предполагаются безвитковыми, реализующимися за одно включение двигателей БТ. Моменты включения, выключения ДУ МТ и ДУ ВА оптимизируются, а ДУ Фрегат и

ДУ ПМ заданы продолжительностями их работы, являющимися параметрами задачи.

Максимизируется конечная масса:

$$M_k = M_0 - \sum_{\text{ДУ}} \left( \frac{T_{\text{ДУ}} \cdot \Delta\tau_{\text{ДУ}}}{C_{\text{ДУ}}} + M_{\text{ДУ}} \right) \longrightarrow \max, \quad (1.1.1)$$

где  $C_{\text{ДУ}} = g_E P_{\text{уд}}$  — скорость истечения реактивной струи соответствующей двигательной установки,  $\Delta\tau_{\text{ДУ}}$  — суммарное время работы соответствующей ДУ.

Производится сквозная оптимизация траектории всей экспедиции по параметрам задачи. Оценивается возможный выигрыш при использовании комбинированной тяги по сравнению с использованием лишь двигателей БТ.

## 1.2 Формализация

Из-за эффекта потери точности [15], связанного с тем, что при использовании какой-либо одной СК вычисление правых частей дифференциальных уравнений вблизи Земли или Марса производится со значительной погрешностью за счёт вычитания близких значений координат КА и притягивающего центра, и удобства записи краевых условий, движение КА на каждом из пяти участков траектории рассматривается в одной трёх различных систем координат.

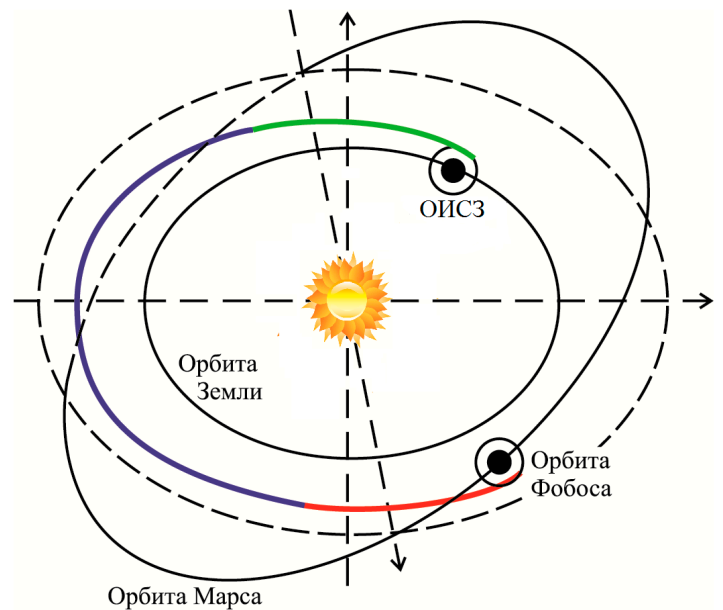


Рис. 1.1: Схема перелёта от Земли к Марсу. На разных участках траектории движение КА рассматривается в различных СК.

На рис. 1.1 приведена схема первой части экспедиции. Зелёным цветом выделен участок использования геоцентрической СК, красным — марсоцентрической при подлёте к Марсу. На промежуточном участке использовалась инерциальная СК с центром в точке О. Рассматривалось два варианта: точка

О — барицентр Солнечной системы или центр масс Солнца. В случае использования гелиоцентрической СК точки S и O совпадали, при этом при учёте неинерциальности гелиоцентрической СК траектории получались близкими с разницей менее суток по времени и менее 1 м/с по затратам характеристической скорости у Земли и Марса.

Задача возврата рассматривается сначала в марсоцентрической, затем в гелиоцентрической или барицентрической СК. Все используемые СК невращающиеся декартовы, их оси параллельны осям СК J2000. Ниже во всех формулах данной главы  $i=1-5$  — номер участка траектории, под инерциальной СК понимается барицентрическая или гелиоцентрическая. Отметим, что на 1, 3 и 4 участках СК неинерциальные.

Рассматриваемая задача космодинамики формализуется как задача оптимального управления совокупностью динамических систем, так как вид дифференциальных связей будет меняться в зависимости от участка траектории из-за рассмотрения на различных участках разных СК, и решается на основе соответствующего принципа максимума [36].

Обозначим компоненты векторов положения и скорости КА за  $x_i, y_i, z_i$  и  $u_i, v_i, w_i$  соответственно на каждом из пяти участков траектории,  $x_{SE}, y_{SE}, z_{SE}$  и  $x_{SM}, y_{SM}, z_{SM}$  — компоненты векторов положения Земли и Марса в гелиоцентрической СК,  $x_{ME}, y_{ME}, z_{ME}$  — компоненты разности этих векторов,  $x_{OS}, y_{OS}, z_{OS}$  — компоненты вектора положения Солнца в барицентрической СК, которые равны 0 в случае учёта гелиоцентрической СК как инерциальной,  $x_{OE}, y_{OE}, z_{OE}$  и  $x_{OM}, y_{OM}, z_{OM}$  — компоненты векторов положения Земли и Марса в рассматриваемой инерциальной СК.

Также введём обозначения:  $x_{E1} = x_1, y_{E1} = y_1, z_{E1} = z_1, x_{S1}=x_1+x_{SE}, y_{S1}=y_1+y_{SE}, z_{S1}=z_1+z_{SE}, x_{M1}=x_1+x_{ME}, y_{M1}=y_1+y_{ME}, z_{M1}=z_1+z_{ME}; x_{Ej} = x_j - x_{OE}, y_{Ej} = y_j - y_{OE}, z_{Ej} = z_j - z_{OE}, x_{Sj} = x_j - x_{OS}, y_{Sj} = y_j - y_{OS}, z_{Sj} = z_j - z_{OS}, x_{Mj}=x_j - x_{OM}, y_{Mj}=y_j - y_{OM}, z_{Mj}=z_j - z_{OM}$  для  $j = 2, 5;$   $x_{Ek} = x_k - x_{ME}, y_{Ek} = y_k - y_{ME}, z_{Ek} = z_k - z_{ME}, x_{Sk} = x_k + x_{SM}, y_{Sk} = y_k + y_{SM}, z_{Sk} = z_k + z_{SM}, x_{Mk} = x_k, y_{Mk} = y_k, z_{Mk} = z_k$  для  $k = 3, 4$ , где  $j$  и  $k$  — номер соответствующего участка экспедиции. Тогда  $r_{Ei} = \sqrt{x_{Ei}^2 + y_{Ei}^2 + z_{Ei}^2}, r_{Si} = \sqrt{x_{Si}^2 + y_{Si}^2 + z_{Si}^2}$  и  $r_{Mi} = \sqrt{x_{Mi}^2 + y_{Mi}^2 + z_{Mi}^2}$  — расстояния от КА до центров Земли, Солнца и Марса соответственно на каждом из участков.

Системы дифференциальных уравнений управляемого движения центра масс КА на каждом из участков траектории имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i, & \dot{u}_i = -g_{xi} - \sum_B \mu_B \frac{x_{Bi}}{r_{Bi}^3} + \frac{P_i}{m_i} \cos \xi_i \cos \eta_i \equiv \varphi_{ui}, \\ \dot{y}_i = v_i, & \dot{v}_i = -g_{yi} - \sum_B \mu_B \frac{y_{Bi}}{r_{Bi}^3} + \frac{P_i}{m_i} \sin \xi_i \cos \eta_i \equiv \varphi_{vi}, \\ \dot{z}_i = w_i, & \dot{w}_i = -g_{zi} - \sum_B \mu_B \frac{z_{Bi}}{r_{Bi}^3} + \frac{P_i}{m_i} \sin \eta_i \equiv \varphi_{wi}, & \dot{m}_i = -\frac{P_i}{C_i}, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

где  $g_{x1}, g_{y1}, g_{z1}$  — компоненты вектора ускорения Земли,  $g_{x3}, g_{y3}, g_{z3}$  и  $g_{x4}, g_{y4}, g_{z4}$  — компоненты вектора ускорения Марса в инерциальной СК,  $g_{x2} \equiv g_{y2} \equiv g_{z2} \equiv g_{x5} \equiv g_{y5} \equiv g_{z5} \equiv 0$  в случае использования инерциальной СК или же равны компонентам вектора ускорения Солнца в барицентрической СК в случае рассмотрения движения в гелиоцентрической СК и учёта её неинерциальности на 2 и 5 участках,  $m_i(t) \equiv M(t)/M_0$  — безразмерная,  $M(t)$  — абсолютная масса КА,  $P_i(t)$  — модуль вектора ускорения за счёт реактивной тяги, изменяющийся в пределах от 0 до  $P_{max} \equiv T_{ду}/M_0$ ,  $\xi_i$  и  $\eta_i$  — углы, определяющие направление вектора тяги.

Первое слагаемое из выражений для изменения скоростей в (1.2.1) возникает из-за неинерциальности рассматриваемых СК, последнее отвечает за управление КА вектором реактивной тяги, остальные отражают закон всемирного тяготения: на КА действуют силы притяжения со стороны Солнца, Земли и Марса, равные  $\mu_B M(t)/r_{Bi}^2(t)$ ,  $B$  — космическое тело ( $E$  — Земля,  $S$  — Солнце,  $M$  — Марс),  $\mu_B$  — гравитационный параметр тела  $B$  (см. с. 5–6). Для задачи перелёта „вперёд“ суммирование в (1.2.1) ведётся по  $B \in \{E, S, M\}$ , „назад“ — по  $B \in \{S, M\}$ .

Переход из первой СК во вторую происходит в момент времени  $t_E$ , пересечения КА сферы влияния Земли; из второй СК в третью — в момент времени  $t_M$  и из четвёртой в пятую — в  $t_{M2}$ , в которые КА пересекает сферу влияния Марса. Так как на каждом из рассматриваемых участков 1, 2, 3 или 4, 5 учитывается влияние одних и тех же притягивающих центров, поэтому при переходе от одного к другому качественно уравнения (1.2.1) не меняются, и на выбор времён  $t_E, t_M$  влияет только эффект потери точности, и они могут быть зафиксированы.

До некоторого момента времени  $t = t_E$  движение КА описывается в СК, связанной с Землёй. В момент времени  $t = t_E$  осуществляется переход к описанию движения КА в инерциальной СК:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + x_{OE}, & y_2 = y_1 + y_{OE}, & z_2 = z_1 + z_{OE}, & m_2 = m_1, \\ u_2 = u_1 + u_E, & v_2 = v_1 + v_E, & w_2 = w_1 + w_E, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

где  $\{u_E, v_E, w_E\}$  — компоненты вектора скорости Земли в инерциальной СК.

Аналогичные формулы имеют место для связи инерциальной и марсоцентрической СК. До некоторого момента времени  $t = t_M$  движение КА описывается в СК, связанной с барицентром Солнечной системы или Солнцем. В момент времени  $t = t_M$  осуществляется переход к описанию движения КА в марсоцентрической СК:

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - x_{OM}, & y_3 = y_2 - y_{OM}, & z_3 = z_2 - z_{OM}, & m_3 = m_2, \\ u_3 = u_2 - u_M, & v_3 = v_2 - v_M, & w_3 = w_2 - w_M, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

где  $\{u_M, v_M, w_M\}$  — компоненты вектора скорости Марса в инерциальной СК.

В задаче перелёта „назад“ движение КА сначала описывается в марсоцентрической СК. В момент времени  $t = t_{M2}$  осуществляется переход к описанию движения КА в инерциальной СК:

$$\begin{cases} x_5 = x_4 + x_{OM}, & y_5 = y_4 + y_{OM}, & z_5 = z_4 + z_{OM}, & m_5 = m_4. \\ u_5 = u_4 + u_M, & v_5 = v_4 + v_M, & w_5 = w_4 + w_M, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Обозначим за  $R_E=6378.16$  км средний экваториальный радиус Земли. В начальный момент  $t = t_0$  до включения Фрегата КА находится на КОИСЗ:

$$\begin{cases} m_1 = 1, & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (R_E + h_E)^2, & x_1 u_1 + y_1 v_1 + z_1 w_1 = 0, \\ u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = \frac{\mu_E}{R_E + h_E}, & x_1 v_1 + y_1 u_1 = (R_E + h_E) \sqrt{\frac{\mu_E}{R_E + h_E}} \cos i_B. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Представленные соотношения обозначают, что масса КА задана, расстояние от КА до центра Земли равно радиусу круговой орбиты, вектор скорости КА относительно Земли ортогонален радиус-вектору КА, величина вектора скорости КА относительно Земли равна круговой скорости, наклон орбиты соответствует выведению КА с космодрома Байконур.



В конечный момент времени первой части миссии  $t = t_1$  после отработки ДУ ПМ координаты и скорости КА должны совпасть с координатами и скоростями Фобоса  $x_F, y_F, z_F$  и  $u_F, v_F, w_F$  соответственно:

$$x_3 = x_F, \quad y_3 = y_F, \quad z_3 = z_F, \quad u_3 = u_F, \quad v_3 = v_F, \quad w_3 = w_F. \quad (1.2.6)$$

В задаче возврата при  $t = t_2$  координаты и скорости КА также должны совпадать с координатами и скоростями Фобоса:

$$x_4 = x_F, \quad y_4 = y_F, \quad z_4 = z_F, \quad u_4 = u_F, \quad v_4 = v_F, \quad w_4 = w_F. \quad (1.2.7)$$

В конечный момент времени задачи возврата при  $t = t_3$  координаты КА должны совпасть с координатами центра Земли, предполагается, что скорость КА гасится об атмосферу Земли:

$$x_5 = x_E, \quad y_5 = y_E, \quad z_5 = z_E. \quad (1.2.8)$$

Формально обозначим за  $t_{\Phi-}, t_{\text{МТ-}}, t_{\text{ДУПМ-}}, t_{\text{ПМ-}}, t_{\text{ВА-}}$  моменты времени до сброса соответствующей ДУ или ПМ, за  $t_{\Phi+}, t_{\text{МТ+}}, t_{\text{ДУПМ+}}, t_{\text{ПМ+}}, t_{\text{ВА+}}$  — после. При этом предполагается, что  $t_{\Phi+} = t_{\Phi-} = t_{\Phi}, t_{\text{МТ+}} = t_{\text{МТ-}} = t_{\text{МТ}}, t_{\text{ДУПМ+}} = t_{\text{ДУПМ-}} = t_1, t_{\text{ПМ+}} = t_{\text{ПМ-}} = t_2, t_{\text{ВА+}} = t_{\text{ВА-}} = t_3$ . Тогда:

$$\begin{cases} m_1(t_{\Phi+}) = m_1(t_{\Phi-}) \cdot (1 - M_{\Phi}/M_0), & m_3(t_{\text{МТ+}}) = m_3(t_{\text{МТ-}}) \cdot (1 - M_{\text{МТ}}/M_0), \\ m_3(t_{\text{ДУПМ+}}) = m_3(t_{\text{ДУПМ-}}) \cdot (1 - M_{\text{ДУПМ}}/M_0), & a_n(t_{j+}) = a_n(t_{j-}), \\ m_4(t_{\text{ПМ+}}) = m_4(t_{\text{ПМ-}}) \cdot (1 - M_{\text{ПМ}}/M_0), & m_5(t_{\text{ВА+}}) = m_5(t_{\text{ВА-}}) \cdot (1 - M_{\text{ВА}}/M_0), \end{cases} \quad (1.2.9)$$

где условие  $a_n(t_{j+}) = a_n(t_{j-})$  обозначает 30 условий вида  $x_1(t_{\Phi+}) = x_1(t_{\Phi-})$  непрерывности всех фазовых переменных кроме массы в моменты времени сброса ДУ или ПМ.

При решении задачи требуется определить неизвестные фазовые переменные  $x_i(\cdot), y_i(\cdot), z_i(\cdot), u_i(\cdot), v_i(\cdot), w_i(\cdot), m_i(\cdot)$ , моменты времени  $t_0, t_1, t_2, t_3$ , управления  $P_i(\cdot), \xi_i(\cdot), \eta_i(\cdot)$ , удовлетворяющие системам дифференциальных уравнений (1.2.1), крайевым условиям (1.2.5) – (1.2.9) и максимизирующие функционал (1.1.1).

### 1.3 Краевая задача

Применим к нашей задаче оптимального управления принцип максимума. Пусть существует оптимальный в сильном смысле процесс в задаче (1.1.1) – (1.2.9), такой, что  $\exists \varepsilon > 0: r_{Ei}(t) > \varepsilon \forall t \in [t_0, t_1]$  и  $r_{Si}(t) > \varepsilon, r_{Mi}(t) > \varepsilon, \forall t \in [t_0, t_3]$  и выполняются условия гладкости: правые части систем дифференциальных уравнений (1.2.1) и их частные производные по  $x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, m_i, i = 1-5$  непрерывны в окрестности оптимальной траектории, функции, определяющие функционал и ограничения (1.1.1), (1.2.5) – (1.2.9) непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке  $[t_k, t_{k+1}], k = 1 - 8$ , где  $t_k$  последовательно пробегает  $\{t_0, t_\Phi, t_E, t_M, t_{MT}, t_1, t_2, t_{M2}, t_3\}$ . Тогда согласно принципу максимума Л.С. Понтрягина для задач управления совокупностью динамических систем [36] существуют множители Лагранжа: константы  $\lambda_{r0}, \lambda_{rv0}, \lambda_{v0}, \lambda_{iБ0}, \lambda_{xF}, \lambda_{yF}, \lambda_{zF}, \lambda_{uF}, \lambda_{vF}, \lambda_{wF}, \lambda_{xtE}, \lambda_{ytE}, \lambda_{ztE}, \lambda_{utE}, \lambda_{vtE}, \lambda_{wtE}, \lambda_{xtM}, \lambda_{ytM}, \lambda_{ztM}, \lambda_{utM}, \lambda_{vtM}, \lambda_{wtM}, \lambda_{xF2}, \lambda_{yF2}, \lambda_{zF2}, \lambda_{uF2}, \lambda_{vF2}, \lambda_{wF2}, \lambda_{xE}, \lambda_{yE}, \lambda_{zE}, \lambda_{xtM2}, \lambda_{ytM2}, \lambda_{ztM2}, \lambda_{utM2}, \lambda_{vtM2}, \lambda_{wtM2}, \lambda_{Tall}, \lambda_{TF}, \lambda_{m0}, \lambda_{mE}, \lambda_{mM}, \lambda_{mM2}, 5$  констант  $\lambda_{mj}$  и 30 констант  $\lambda_{a_nj}$  для условий (1.2.9) и функции  $p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}, p_{ui}, p_{vi}, p_{wi}, p_{mi}$ , не равные одновременно нулю, такие что на оптимальной траектории выполняется система необходимых условий оптимальности. Выпишем основные конструкции принципа максимума – функции Понтрягина задачи:

$$H_i = p_{xi}u_i + p_{yi}v_i + p_{zi}w_i + p_{ui}\varphi_{ui} + p_{vi}\varphi_{vi} + p_{wi}\varphi_{wi} - p_{mi}P_i/C_i.$$

И терминант:

$$l \equiv \lambda_0 M_k + l_{t0} + l_{tE} + l_{tM} + l_{t1} + l_{t2} + l_{tM2} + l_{t3} + l_m + l_a,$$

где для задачи перелёта „вперёд“:

$$\begin{aligned} l_{t0} = & \lambda_{iБ0} \left( x_1 v_1 + y_1 u_1 - (R_E + h_E) \sqrt{\frac{\mu_E}{R_E + h_E}} \cos i_B \right) + \\ & + \lambda_{rv0} (x_1 u_1 + y_1 v_1 + z_1 w_1) + \lambda_{v0} \left( u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - \frac{\mu_E}{R_E + h_E} \right) + \\ & + \lambda_{r0} \left( x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (R_E + h_E)^2 \right) + \lambda_{m0} (m_0 - 1) \quad \text{при } t = t_0; \end{aligned}$$

$$l_{tE} = \lambda_{xtE} (x_2 - x_1 - x_{OE}) + \lambda_{ytE} (y_2 - y_1 - y_{OE}) + \lambda_{ztE} (z_2 - z_1 - z_{OE}) + \\ + \lambda_{utE} (u_2 - u_1 - u_E) + \lambda_{vtE} (v_2 - v_1 - v_E) + \lambda_{wtE} (w_2 - w_1 - w_E) + \\ + \lambda_{mE} (m_2 - m_1) \quad \text{при } t = t_E;$$

$$l_{tM} = \lambda_{xtM} (x_3 - x_2 + x_{OM}) + \lambda_{ytM} (y_3 - y_2 + y_{OM}) + \\ + \lambda_{ztM} (z_3 - z_2 + z_{OM}) + \lambda_{utM} (u_3 - u_2 + u_M) + \\ + \lambda_{vtM} (v_3 - v_2 + v_M) + \lambda_{wtM} (w_3 - w_2 + w_M) + \lambda_{mM} (m_2 - m_1) \text{ при } t = t_M;$$

$$l_{t1} = \lambda_{xF} (x_3 - x_F) + \lambda_{yF} (y_3 - y_F) + \lambda_{zF} (z_3 - z_F) + \lambda_{uF} (u_3 - u_F) + \\ + \lambda_{vF} (v_3 - v_F) + \lambda_{wF} (w_3 - w_F) \text{ при } t = t_1,$$

для задачи перелёта „назад“:

$$l_{t2} = \lambda_{xF2} (x_4 - x_F) + \lambda_{yF2} (y_4 - y_F) + \lambda_{zF2} (z_4 - z_F) + \\ + \lambda_{uF2} (u_4 - u_F) + \lambda_{vF2} (v_4 - v_F) + \lambda_{wF2} (w_4 - w_F) \text{ при } t = t_2;$$

$$l_{tM2} = \lambda_{xtM2} (x_5 - x_4 + x_{OM}) + \lambda_{ytM2} (y_5 - y_4 + y_{OM}) + \\ + \lambda_{ztM2} (z_5 - z_4 + z_{OM}) + \lambda_{utM2} (u_5 - u_4 + u_M) + \lambda_{vtM2} (v_5 - v_4 + v_M) + \\ + \lambda_{wtM2} (w_5 - w_4 + w_M) + \lambda_{mM2} (m_5 - m_4) \text{ при } t = t_{M2};$$

$$l_{t3} = \lambda_{xE} (x_5 - x_E) + \lambda_{yE} (y_5 - y_E) + \lambda_{zE} (z_5 - z_E) \text{ при } t = t_3,$$

для сброса ДУ или ПМ:

$$l_m = \sum_j \lambda_{mj} \left( m_k(t_{j+}) - m_k(t_{j-}) + \frac{M_j}{M_0} \right); \quad l_a = \sum_j \sum_n \lambda_{anj} (a_n(t_{j+}) - a_n(t_{j-})),$$

где индекс  $j$  последовательно пробегает набор  $\{\Phi, \text{МТ}, \text{ДУ ПМ}, \text{ПМ}, \text{ВА}\}$ , индексу  $k$  при этом соответствуют числа  $\{1, 3, 3, 4, 5\}$ ,  $a_n$  для каждого фиксированного  $k$  последовательно пробегает  $x_k, y_k, z_k, u_k, v_k, w_k$ .

Применение принципа максимума сводит решение исходной задачи оптимального управления к решению краевой задачи, состоящей из исходных уравнений (1.2.1) – (1.2.9) и следствий условий оптимальности. А именно,

к системам дифференциальных уравнений (1.2.1) добавляются сопряжённые системы (1.3.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{xi} = \sum_B \left( \frac{\mu_B}{r_{Bi}^5} (p_{ui} (r_{Bi} - 3x_{Bi}^2) - 3(p_{vi}x_{Bi}z_{Bi} + p_{wi}x_{Bi}y_{Bi})) \right), \\ \dot{p}_{yi} = \sum_B \left( \frac{\mu_B}{r_{Bi}^5} (p_{vi} (r_{Bi} - 3y_{Bi}^2) - 3(p_{ui}y_{Bi}z_{Bi} + p_{wi}y_{Bi}x_{Bi})) \right), \\ \dot{p}_{zi} = \sum_B \left( \frac{\mu_B}{r_{Bi}^5} (p_{wi} (r_{Bi} - 3z_{Bi}^2) - 3(p_{ui}z_{Bi}y_{Bi} + p_{vi}z_{Bi}x_{Bi})) \right), \\ \dot{p}_{ui} = -p_{xi}, \quad \dot{p}_{vi} = -p_{yi}, \quad \dot{p}_{wi} = -p_{zi}, \quad \dot{p}_{mi} = \frac{P_i \rho_i}{m_i^2}, \end{array} \right. \quad (1.3.1)$$

где для задачи перелёта „вперёд“ суммирование в (1.2.9) ведётся по  $B = \{E, S, M\}$ , „назад“ — по  $B = \{S, M\}$ ,  $\rho_i = \sqrt{p_{ui}^2 + p_{vi}^2 + p_{wi}^2}$ .

Из условий трансверсальности и стационарности к краевым условиям (1.2.5) – (1.2.7), (1.2.9) добавляются следующие соотношения (1.3.2) – (1.3.5). При  $t = t_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{x1} = 2\lambda_{r0}x_1 + \lambda_{rv0}u_1 + \lambda_{iB0}v_1, \quad p_{u1} = \lambda_{rv0}x_1 + 2\lambda_{v0}u_1 - \lambda_{iB0}y_1, \\ p_{y1} = 2\lambda_{r0}y_1 + \lambda_{rv0}v_1 - \lambda_{iB0}u_1, \quad p_{v1} = \lambda_{rv0}y_1 + 2\lambda_{v0}v_1 + \lambda_{iB0}x_1, \\ p_{w1} = 2\lambda_{r0}z_1 + \lambda_{rv0}w_1, \quad p_{w1} = \lambda_{rv0}z_1 + 2\lambda_{v0}w_1, \quad p_{m1} = 0, \quad H_1 = 0. \end{array} \right. \quad (1.3.2)$$

При  $t = t_1$ :

$$H_3 = -p_{x3}u_F - p_{y3}v_F - p_{z3}w_F - p_{u3}g_{xF} - p_{v3}g_{yF} - p_{w3}g_{zF}, \quad (1.3.3)$$

где  $\{g_{xF}, g_{yF}, g_{zF}\}$  — компоненты вектора ускорения Фобоса в марсоцентрической СК.

При  $t = t_2$ :

$$H_4 = -p_{x4}u_F - p_{y4}v_F - p_{z4}w_F - p_{u4}g_{xF} - p_{v4}g_{yF} - p_{w4}g_{zF}. \quad (1.3.4)$$

При  $t = t_3$ :

$$p_{u5} = 0, \quad p_{v5} = 0, \quad p_{w5} = 0, \quad H_5 = -p_{x5}u_E - p_{y5}v_E - p_{z5}w_E. \quad (1.3.5)$$

Также в задачу добавляются условия дополняющей нежёсткости, неотрицательности:

$$\lambda_{Tall}(t_3 - t_0 - 1500) = 0, \quad \lambda_{TF}(t_2 - t_1 - 30) = 0, \quad \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_{Tall} \geq 0, \quad \lambda_{TF} \geq 0, \quad (1.3.6)$$

условия непрерывности сопряжённых переменных в моменты сброса ДУ или ПМ и формулы их пересчёта при переходах между разными СК:

$$p_{i+1}(t_k) = \frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i}(t_k) \cdot p_i(t_k), \quad (1.3.7)$$

где  $t_k$  — момент склейки  $i$  и  $i + 1$  участков.

В фиксированный момент времени, когда КА сидит на Фобосе перестаёт учитываться притяжение Земли. При этом функция Понтрягина терпит разрыв, фазовые переменные остаются непрерывными.

Функция переключения управления имеет вид  $\chi_i = \rho_i - \frac{m_i p_{mi}}{C}$ , направление тяги определяется соотношениями:

$$\cos \xi_i \cos \eta_i = \frac{p_{ui}}{\rho_i}, \quad \cos \xi_i \sin \eta_i = \frac{p_{vi}}{\rho_i}, \quad \sin \eta_i = \frac{p_{wi}}{\rho_i}. \quad (1.3.8)$$

При  $\chi_i > 0$  тяга двигателя максимальна, при  $\chi_i < 0$  тяга выключена.

Использование для фазовых переменных формул пересчёта (1.2.2) в момент времени  $t = t_E$ , (1.2.3) в момент  $t = t_M$ , (1.2.4) при  $t = t_{M2}$  и (1.2.9) в моменты сброса ДУ или ПМ; условий непрерывности при  $t \in \{t_\Phi, t_{MT}, t_1, t_2, t_3\}$  и склейки (1.3.7) при  $t \in \{t_E, t_M, t_1, t_2, t_{M2}\}$  для сопряжённых переменных позволяет свести решение совокупности шеститочечной краевой задачи „вперёд“ и трёхточечной задачи перелёта „назад“ к решению двухточечных.

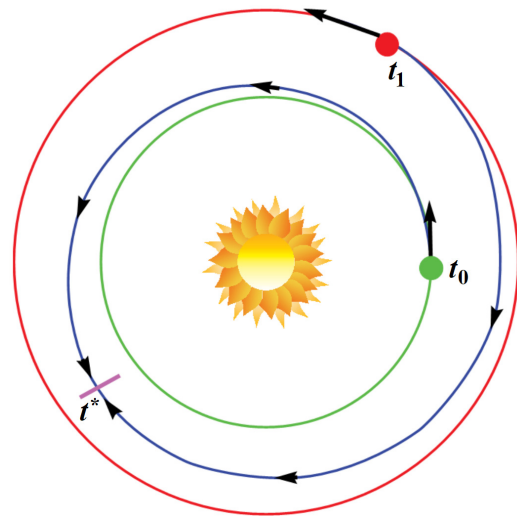
## 1.4 Вычислительная схема

Полученная краевая задача принципа максимума 70-го порядка (1.2.1) – (1.3.8) нелинейна и может быть решена лишь численно. Задачу удалось решить благодаря использованию следующей вычислительной схемы. Краевая задача решалась методом стрельбы [24] с использованием модифицированного метода Ньютона [55, 96]. Задачи Коши интегрировались методом Рунге-Кутты 8 (7) с автоматическим выбором шага [99]. Системы линейных уравнений решались методом Гаусса с выбором главного элемента [16] и повторным пересчётом. Производная вектор-функции невязок по параметрам пристрелки вычислялась численно при помощи центральных разностей [15].

Для решения задачи методом Ньютона нужно хорошее локальное начальное приближение. Кроме того, исходная задача многоэкстремальна и для

поиска области, в которой следует искать локально оптимальное решение, предварительно необходимо провести глобальную оптимизацию.

Сначала задача исследуется на основе решения серии задач Ламберта с учётом одного притягивающего центра на каждом участке перелёта [74, 90]. После этого решается импульсная задача на основе принципа Лагранжа. В результате проведённого анализа для импульсного случая (см. гл. 2) получается окрестность экстремалей с лучшим значением функционала, в которой далее уже решается задача с ограниченной тягой [35].



При исследовании задачи в упрощённой постановке оказалось, что КА на Фобосе выгодно сидеть порядка одного земного года. А значит,  $\lambda_{TF}$  в условии (1.3.6) обращается в 0

Рис. 1.2: Вычислительная схема. Просчёт с двух концов в середину траектории.

и исходную задачу можно в окрестности данного предполагаемого локального минимума легко разбить на две независимые задачи „вперёд“ и „назад“, при этом совокупность их решений будет являться экстремалью в общей задаче.

После получения начального приближения траектории строились следующим образом. Задача перелёта „вперёд“ просчитывалась с двух концов  $t_0$  и  $t_1$  в середину траектории  $t^*$  (рис. 1.2), затем задача перелёта „назад“ считалась от  $t_2$  к  $t_3$ . В качестве параметров пристрелки выбиралось 12–14 значений:  $\lambda_{r0}$ ,  $\Omega_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\xi_1(t_0)$ ,  $\eta_1(t_0)$ ,  $\xi_3(t_1)$ ,  $\eta_3(t_1)$ ,  $p_{x3}(t_1)$ ,  $p_{y3}(t_1)$ ,  $p_{z3}(t_1)$ ,  $\tau_k$ , где  $\tau_k$  — моменты включения и отключения МТ в задаче „вперёд“. При исследовании задачи на траекториях реализовывалось управление с двумя или тремя активными участками МТ, при этом  $k = 2$  или 4 соответственно. И 7 значений:  $\Delta\tau_{дуба}$ ,  $t_3$  и  $p_{x4}$ ,  $p_{y4}$ ,  $p_{z4}$ ,  $\xi_4$ ,  $\eta_4$  при  $t = t_2$  в задаче „назад“. По данным величинам с учётом эфемерид находятся значения всех фазовых и сопряжённых переменных, кроме  $p_{mi}$ , в моменты времени  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ .

Невязками выступают 12 условий склейки фазовых и сопряжённых переменных в момент времени  $t^*$ , 7 краевых условия на правом конце  $t_3$  и, при необходимости, 2 условия  $\chi_i(\tau_2) = \chi_i(\tau_3) = 0$ . Значения  $p_m$  для интегриро-

вания находились из условий  $\chi_i(\tau_1) = \chi_i(\tau_k) = \chi_4(\Delta\tau_{\text{ДУВА}}) = 0$ . В качестве нормировки бралось условие непрерывности  $p_m$  в точке  $t^*$ .

При построении экстремалей Понтрягина времена работы ДУ БТ  $\Delta\tau_{\text{Фрегат}}$  и  $\Delta\tau_{\text{ДУПМ}}$  и моменты времени  $t_0, t_1, t_2$ , считались заданными, далее производилась внешняя оптимизация задачи по этим величинам с использованием градиентных методов и продолжения решения по параметру. При заданных временах  $\Delta\tau_{\text{Фрегат}}, \Delta\tau_{\text{ДУПМ}}, t_0, t_1, t_2$ , и выбранных значениях параметров пристрелки  $\tau_k, \Delta\tau_{\text{ДУВА}}, t_3$  масса вычисляется аналитически из (1.2.1), (1.2.5), (1.2.9) и исключается из числа неизвестных.

В промежуточных расчётах при продолжении решения по параметру положение Фобоса на орбите вокруг Марса в момент времени  $t_1$  не фиксировалось из эфемерид, а рассматривалось как параметр (см. гл. 4).

Для существенного ускорения счёта при продолжении решения по параметрам задачи использовалась линейная и параболическая аппроксимация параметров пристрелки. При этом был разработан и реализован метод автоматического выбора шага продолжения.

## 1.5 Результаты

Данная методика позволяет строить экстремали Понтрягина в исходной задаче. Численные расчёты производились для большого набора значений параметров, в том числе при различных ДУ МТ,  $M_{\text{МТ}}, M_0, M(t_2), \Delta\tau_{\text{Фрегат}}, \Delta\tau_{\text{ДУПМ}}, t_0, t_1, t_2$ , при помощи метода продолжения решения по параметру.

Далее приводится пример конкретной экстремали. На рис. 1.3 представлена проек-

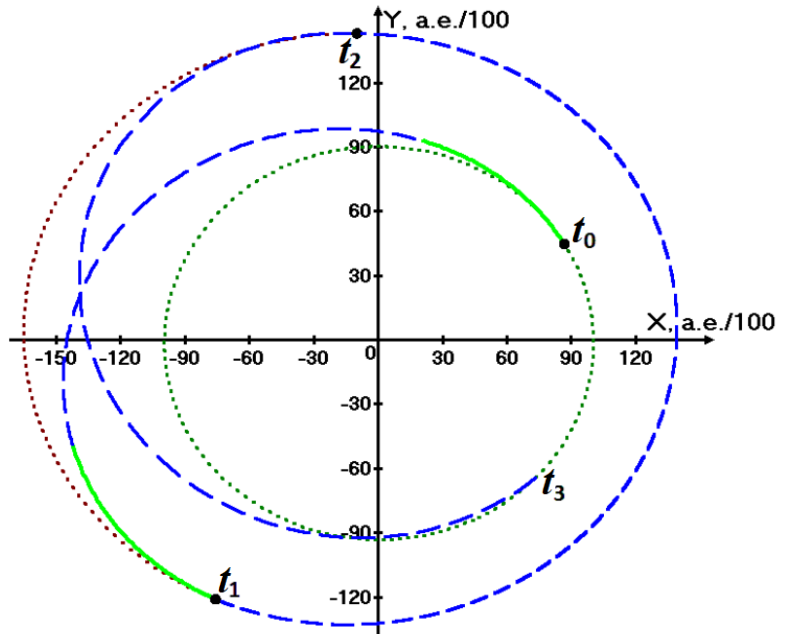


Рис. 1.3: Проекция траектории экспедиции на плоскость эклиптики OXY. Три жирные чёрные точки — области работы ДУ БТ, две зелёные сплошные линии — работа ДУ МТ, три синие пунктирные линии — пассивные участки, коротким пунктиром показаны орбиты Земли и Марса.

ция траектории экспедиции на плоскость эклиптики, суммарное время работы ДУ МТ на которой составляет 130.85 дней. КА стартует в момент времени  $t_0$  (23 октября 2026 г, 03:56:06), при этом  $x_1 = 879.17004851$  км,  $y_1 = -4809.14287323$  км,  $z_1 = -4401.29456367$  км,  $u_1 = 6.91407517$  км/с,  $v_1 = -1.64304414$  км/с,  $w_1 = 3.17640222$  км/с,  $p_{x1} = -7.94503038$ ,  $p_{y1} = -52.07783556$ ,  $p_{z1} = -60.02088770$ ,  $p_{u1} = 0.84320936$ ,  $p_{v1} = -0.05977325$ ,  $p_{w1} = 0.53425195$ ,  $\lambda_{r0} = 8774.83082009$ ,  $\Omega_0 = -1.02314187$ ,  $\varphi_0 = 5.68775345$ ,  $\xi_1 = -0.07076941$ ,  $\eta_1 = 0.56362257$ . ДУ Фрегат работает 1088.04541645 с, реализуя за это время избыток скорости 3.477367 км/с.

В момент времени  $t_1$  (1 сентября 2027 г, 16:29:02)  $x_3 = -4724.89723949$  км,  $y_3 = 5692.78565309$  км,  $z_3 = 5539.12730912$  км,  $u_3 = -1.56937954$  км/с,  $v_3 = -1.48650262$  км/с,  $w_3 = 0.17102365$  км/с,  $p_{x3} = 8.38336441$ ,  $p_{y3} = -8.98237741$ ,  $p_{z3} = -5.17004776$ ,  $p_{u3} = 0.78211515$ ,  $p_{v3} = 0.62007751$ ,  $p_{w3} = 0.06164224$ ,  $\xi_3 = 0.67034830$ ,  $\eta_3 = 0.06168135$ . ДУ ПМ работает 1502.36195216 с, реализуя за это время избыток скорости 1.352682 км/с. Невязки в задаче „вперёд“ вычислялись в момент времени  $t^* = t_0 + 150$  сут.

Обратно КА улетает с Фобоса в момент времени  $t_2$  (3 сентября 2028 г, 18:49:31), при этом  $x_4 = -7438.14156580$  км,  $y_4 = -5620.52029090$  км,  $z_4 = 1097.27061370$  км,  $u_4 = 0.93517617$  км/с,  $v_4 = -1.43311628$  км/с,  $w_4 = -1.27677228$  км/с,  $p_{x4} = -12.38649475$ ,  $p_{y4} = -3.75652430$ ,  $p_{z4} = 4.29612288$ ,  $p_{u4} = 0.63345872$ ,  $p_{v4} = -0.49066283$ ,  $p_{w4} = -0.59831432$  и прилетает к Земле в момент  $t_3$  (9 августа 2029 года, 03:51:04).

ДУ ВА работает 6213.57162695 с, реализуя избыток скорости 1.848938 км/с. Моменты времени перехода между различными СК:

$t_E = t_0 + 3.12124399$  дней,  
 $t_M = t_1 - \tau_M$ ,  $t_{M2} = t_2 + \tau_M$ ,  
 где  $\tau_M = 2.71974141$  дней.

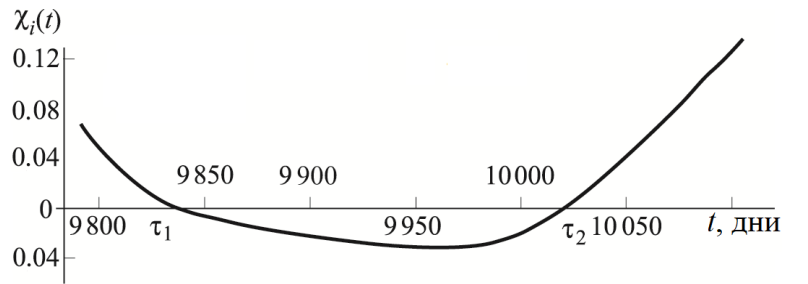


Рис. 1.4: Функция переключения управления. Время считается в днях в системе J2000.

Основными расчётными единицами были а.е./100 и E.D., если использовать другие величины, то приведённые значения сопряжённых переменных



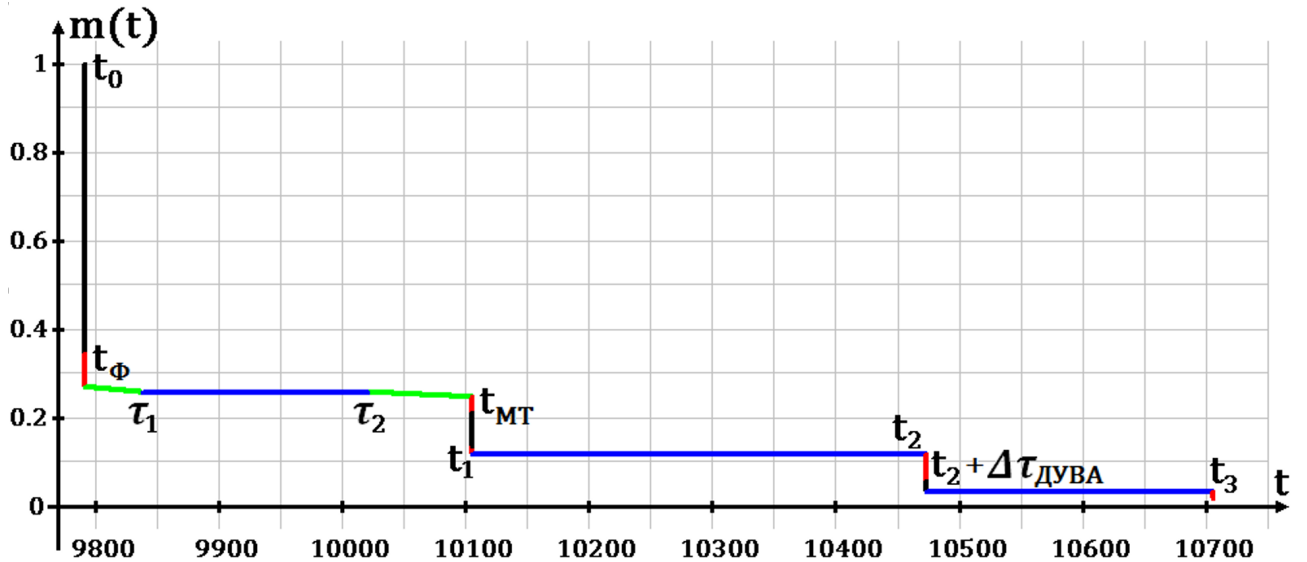


Рис. 1.5: Изменение массы. От времени  $t_0$  до  $t_\Phi$ ,  $t_{\text{МТ}}$  до  $t_1$ ,  $t_2$  до  $t_2 + \Delta\tau_{\text{ДУВА}}$  чёрные линии показывают уменьшение массы за счёт работы ДУ БТ: Фрегата, ПМ и ВА соответственно. Красным в моменты времени  $t_\Phi$ ,  $t_{\text{МТ}}$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  показан сброс ДУ Фрегат, ДУ МТ, ДУ ПМ, ПМ и ДУ ВА. Зелёным отмечены участки работы ДУ МТ от  $t_\Phi$  до  $t_1$  и от  $t_2$  до  $t_{\text{МТ}}$ . Синим показаны пассивные участки траектории перелёта.

необходимо пересчитать [26].

График функции переключения на участке работы ДУ МТ представлен на рис. 1.4. На данной траектории имеем один пассивный и два активных участка работы ДУ МТ. Около Земли ДУ МТ работает 46.54311508 дней, вблизи Марса — 84.30595328 дней.

График изменения массы представлен на рис. 1.5. По этому графику видна схема экспедиции на основе работы различных ДУ. Время по оси абсцисс на рис. 1.4, 1.5 указано в днях и отсчитывается в J2000 от 12:00 ТТ 1 января 2000 года.

В табл. 1.1 приведено сравнение значений массы КА после посадки на Фобос, перед отлётом с Фобоса и доставленной к Земле в конечный момент времени после сброса ДУ ВА в различных вариантах миссии. Выигрыш по массе при использовании БТ+МТ на данной экстремали при посадке на Фобос составляет 128 кг или 12.3%, при отлёте от Фобоса — 29.3%, при подлёте к Земле — 66.58 кг или 67.7%, что позволяет сделать вывод о целесообразности использования в миссии комбинации ДУ МТ и БТ.

В случае уменьшения продолжительности работы ДУ БТ и увеличения времени работы ДУ МТ до 159.549846 дней, масса КА у Фобоса увеличива-

Таблица 1.1: Масса, доставляемая к Фобосу и обратно к Земле, кг.

	БТ+МТ время работы МТ 130.85 дней	только БТ	БТ+МТ, время работы МТ 0 дней
$M(t_1)$	1162.69655986	1035.04885519	858.50068947
$M(t_2)$	562.69655986	435.04885519	258.50068947
$M(t_3)$	164.86977357	98.28969192	3.53554911

ется до 1193.96217690 кг, выигрыш возрастает до 158.9 кг.

Следует отметить, что полученный выигрыш по массе, доставленной к Фобосу, хорошо согласовывается с возможным выигрышем за счёт использования малой тяги в 150–200 кг, отмеченным в схеме экспедиции [3].

## 1.6 Выводы

В первой главе исследуется актуальная задача оптимизации экспедиции КА к Фобосу с возвращением к Земле при управлении комбинированной ограниченной тягой. Притяжение Солнца, Земли и Марса учитывается, положение планет и Фобоса соответствует эфемеридам. Задача анализируется на основе принципа максимума Понтрягина для управления совокупностью динамических систем. Решение данной задачи космодинамики требует синтеза методов локальной и многоэкстремальной оптимизации. Описана методика построения экстремалей в подобных задачах с проведением сквозной оптимизации всей миссии. Полученная 9-точечная краевая задача 70-го порядка решается численно методом стрельбы.

Приводятся числовые характеристики конкретной экстремали, позволяющие повторить расчёты, проведённые в работе. Представлены результаты расчётов, позволяющие судить о целесообразности использования комбинированного управления КА при помощи ДУ БТ и МТ в экспедиции к Фобосу.

При решении задачи возникает необходимость построения начального приближения. Для получения начального приближения во 2 и 3 главах рассматривается аппроксимация миссии серией задач Ламберта, затем задача решается на основе принципа Лагранжа и, наконец, на основе принципа максимума с управлением импульсами и малой тягой.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [51, 120].

## Глава 2

# Лестница задач. Комбинации задач Ламберта

### 2.1 Лестница задач

Ключевой идеей предлагаемой методики является лестница задач. Для решения задачи первой главы в сложной, громоздкой постановке требуется хорошее начальное приближение. Область сходимости метода Ньютона мала, а для получения экстремали требуется знать близкие к решению значения параметров пристрелки. При этом пространство параметров пристрелки имеет большую размерность, что делает невозможным поиск перебором за разумное время даже на суперкомпьютере.

Во второй и третьей главе рассмотрена методика — лестница задач, основная идея которой состоит в следующем. Сначала формулируется основная задача в самой интересной, но трудной постановке — верхняя, последняя ступень лестницы. Например, задача первой главы при таком подходе будет верхней 8-й ступенью лестницы. Затем строится цепочка вспомогательных задач, такая, что задача первой ступени лестницы является прототипом основной задачи в сильно упрощённой постановке, её решение не представляет вычислительных трудностей или может быть найдено аналитически. Задачи промежуточных ступеней постепенно позволяют перейти от самой простой задачи к самой сложной. При этом задачи подбираются таким образом, чтобы они были в каком-то смысле близки и решение задачи текущей ступени являлось хорошим начальным приближением для следующей ступени. На каждой ступени производится продолжение решения по одному или нескольким па-

раметрам. Такими параметрами могут быть, например, величины импульсов, времена старта и финиша КА, гравитационные параметры планет.

Вторая глава посвящена построению начального приближения на основе метода импульсной аппроксимации с разбиением непрерывной межпланетной траектории на участки, на каждом из которых учитывается притяжение только одного тела и траектория представляет собой кусок конического сечения [19, 89, 91], — первым пяти ступеням лестницы. На первой ступени лестницы находятся траектории перехода между Землёй и Марсом без учёта их притяжения. На второй — комбинации траекторий первой ступени, траектории экспедиции к Марсу и обратно. На третьей — траектории с учётом притяжения Солнца и Земли. На четвёртой — траектории с учётом притяжения Солнца, Земли и Марса, рассматриваемые как комбинация задач Ламберта. На пятой — такие же траектории, как и на четвёртой ступени, но уже рассматриваемые на основе принципа Лагранжа.

В третьей главе осуществляется рассмотрение задач многих тел — шестая и седьмая ступени лестницы. На шестой ступени анализируется задача с учётом притяжения рассматриваемых планет и Солнца на каждом участке траектории в импульсной постановке. На седьмой исследуется задача с управлением КА двигателями малой тяги и импульсными воздействиями, аппроксимирующими работу большой тяги или только кусочно-непрерывной большой тягой.

По мере движения вверх по лестнице растёт сложность задач и количество параметров оптимизации.

## **2.2 Оптимизация межпланетной экспедиции с использованием решения задач Ламберта без учёта притяжения Земли и планеты-цели**

Раздел 2.2 посвящён первым двум ступеням лестницы задач.

### **2.2.1 Постановка**

Рассматривается задача оптимизации перелёта КА, в которой единственным притягивающим центром является Солнце. Положение и скорости Земли

и Марса соответствуют эфемеридам DE424. Космический аппарат представляет собой непритягивающую материальную точку. В момент времени (00:00 1 января 2020 года + время старта  $T_{\text{start}}$ ) КА стартует из центра Земли к Марсу и летит время  $T_{\text{forward}}$ , затем время ( $T_{\Delta\text{Phobos}} + 30$  дней) КА „сидит на Фобосе“: координаты КА совпадают с центром Марса. Затем КА летит назад к Земле время ( $T_{\text{all}} - T_{\text{forward}} - T_{\Delta\text{Phobos}} - 30$  дней). Траекториями перелёта от Земли к Марсу и от Марса к Земле являются решения двух соответствующих задач Ламберта [46, 90]. Область поиска решения:  $p_1 \equiv T_{\text{start}}$  : от 0 до 11 лет,  $p_2 \equiv T_{\text{all}}$  : от 500 до 1500 дней,  $p_3 \equiv T_{\text{forward}}$  : от 100 дней до ( $T_{\text{all}} - 130$  дней),  $p_4 \equiv T_{\Delta\text{Phobos}}$  : от 0 дней до ( $T_{\text{all}} - T_{\text{forward}} - 130$  дней).  $T_{\text{all}}$  ограничено 1500 сутками из-за негативного воздействия на КА космической радиации.

**Минимизируемый функционал**  $F$  — сумма модулей трёх импульсов: двух импульсов  $\Delta_1, \Delta_2$  из решения первой задачи Ламберта (перелёт от Земли к Марсу) и первого стартового импульса  $\Delta_3$  из решения второй задачи Ламберта (перелёт обратно к Земле). Самый последний тормозной импульс около Земли в функционал не входит, т.к. считается, что КА тормозит за счёт атмосферы Земли. Под импульсом имеется в виду разность между вектором скорости, полученным из решения задачи Ламберта и вектором скорости Земли (в момент старта или финиша у Земли) или вектором скорости Марса (в момент старта или финиша у Марса).

### 2.2.2 Метод решения

Для фиксированного набора параметров задачи однозначно определены 2 задачи Ламберта: „вперёд“ и „назад“.

Первая задача. Пусть  $\vec{r}_0$  — положение центра Земли в момент времени  $t_0 \equiv T_{\text{start}}$ ,  $\vec{r}_1$  — положение центра Марса в момент времени  $t_1 \equiv T_{\text{start}} + T_{\text{forward}}$ ,  $\tau \equiv t_1 - t_0 = T_{\text{forward}}$ ,  $\vec{r}(t)$  — положение КА в неподвижной относительно звёзд гелиоцентрической системе координат в данный момент времени  $t$ . Необходимо найти  $\vec{v}_0$  — скорость КА в данной СК в момент времени  $t_0$ , такую, что через время  $\tau$  было выполнено  $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$ .

Вторая задача аналогична первой: в ней в момент времени  $t_0$  положение КА совпадает с центром Марса, и в момент времени  $t_1$  должно совпасть с центром Земли.

Эти задачи решаются методом, похожим на метод, описанный в книге [90], с введением фиктивного времени, использованием универсального уравнения Кеплера, метода Ньютона и функций Штумпфа. При этом метод был модифицирован теоретически и значительно модифицирован численно. При решении ищутся эллиптические траектории с общей угловой дальностью перелёта не более  $4\pi$ . Метод заключается в следующем.

Вводится универсальная переменная  $s$  – фиктивное время:

$$\dot{s} = \frac{1}{r}, \quad s(t_0) = 0.$$

Тогда  $s > 0$  при  $t > t_0$ . Далее под  $s$  имеется в виду  $s(t_1)$ . Следуя [46], запишем интеграл энергии в нашей задаче:

$$h = v^2 - \frac{2\mu}{r},$$

где  $h$  – постоянная энергии.

Тогда можно показать, что  $s = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1 - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 - h\tau}{\mu}$ .

Пусть  $\varphi$  – угловая дальность перелёта. Определим  $\rho = \frac{\sqrt{2r_0r_1}}{r_0 + r_1} \cos \frac{\varphi}{2}$ ; введём переменные  $x = -hs^2$ , для эллиптических траекторий  $x > 0$ ;  $z = \frac{\sqrt{x}}{2} - \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}_+$  – число полных оборотов;  $\xi = \xi(z) = \frac{\pi k + z - \sin z \cos z}{\sin^3 z}$ ;  $\eta = \eta(z) = \sqrt{2}\rho - 2 \cos z + \sqrt{2}$ ; и определим функции Штумпфа:

$$c_n = c_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(2m+n)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Нам понадобятся  $c_0, c_1, c_2, c_3$  при  $x > 0$ . Просуммировав соответствующие ряды, можно получить:

$$c_0 = \cos \sqrt{x}, \quad c_1 = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad c_2 = \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}, \quad c_3 = \frac{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}.$$

Тогда из универсального уравнения Кеплера  $\tau = r_0 s c_1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 s^2 c_2 + \mu s^2 c_3$  следует, что:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\tau - \mu s^3 c_3} \left( \vec{r}_1 - \left( 1 - \frac{\mu s^2 c_2}{r_0} \right) \vec{r}_0 \right). \quad (2.2.1)$$

Определим:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\mu}}{(r_0 + r_1)^{3/2}} \cdot \tau, \quad u = \sqrt{1 - \sqrt{2}\rho \cos z}. \quad (2.2.2)$$

Тогда можно выразить

$$s = \sqrt{\frac{r_0 + r_1}{\mu c_2}} \cdot u. \quad (2.2.3)$$

Теперь по  $x = 4 \cdot (z + \pi k)^2$  можно найти  $u$  из (2.2.2), далее из (2.2.3) найти  $s$  и выразить решение  $\vec{v}_0$  из (2.2.1). Само значение  $z$  ищется методом Ньютона из нелинейного уравнения:

$$\Phi(z) \equiv \left( \frac{\xi u^2}{\sqrt{2}} + \rho \right) u = \sigma. \quad (2.2.4)$$

Для реализации метода Ньютона необходима производная  $\Phi_z(z) = \frac{u^2(4u^2 + 3\xi\eta) + 2\rho^2 \sin^2 z}{2\sqrt{2}u \sin z}$ .

Описанный метод хорош тем, что при фиксированном  $k = 0$  функция  $\Phi$  монотонна, а при  $k > 0$  численные эксперименты показывают её выпуклость в области поиска решения  $z \in (0, \pi)$ , и модифицированный метод Ньютона быстро сходится с любого начального приближения. Все же остальные шаги алгоритма – аналитические и остаётся лишь последовательно применить формулы.

Для гиперболических траекторий (уход от Земли и т.п.) формулы другие. В этом случае нелинейное уравнение принимает вид:

$$F(x) \equiv \frac{c_3}{c_2^{3/2}} u^3 + \rho u = \sigma. \quad (2.2.5)$$

Для поиска корня в этом случае необходима производная  $F$  по  $x$ . Она может быть вычислена численно, но намного лучше для расчётов использовать аналитическое выражение:

$$F_x(x) = \left( \rho \cdot \frac{1}{4 \cdot c_2 \cdot \sqrt{c_2}} \cdot \frac{c_2 \cdot (c_2 - c_3) + c_1 \cdot (c_4 - 0.5 \cdot c_3)}{u} \right) \cdot \left( \rho + \frac{3}{c_2 \cdot \sqrt{c_2}} \cdot c_3 \cdot u^2 \right) + \left( \frac{1}{2 \cdot c_2 \cdot \sqrt{c_2}} \cdot \left( 3 \cdot c_5 - c_4 + 3 \cdot (0.5 \cdot c_3 - c_4) \cdot \frac{c_3}{c_2} \right) \right) \cdot u^3. \quad (2.2.6)$$

Предлагаемая формула (2.2.6) успешно работает в реализованном автором программном комплексе и сильно отличается от формулы для производной из [90].

Пусть  $u_m \equiv \sqrt{1 - \sqrt{2}|\rho|}$ . При фиксированном  $k$  может существовать 0, 1 или 2 решения уравнения (2.2.5). Если  $k = 0$ , то решение существует и единственно. При этом при  $k \geq 0$  можно взять в качестве начального приближения для  $z$

$$z_0^{(1)} = \pi - \left( \frac{\pi(k+1)}{\frac{2}{3}u_m^3 + \sigma - \rho u_m} \right)^{1/3} u_m,$$

при  $k > 0$  приближением для второго корня можно взять:

$$z_0^{(2)} = \left( \frac{\pi k}{\sqrt{2}(\sigma - \rho u_m)} \right)^{1/3} u_m.$$

Перейдём непосредственно к описанию решения исходной задачи.

В области поиска решения рассматривается сетка с шагом 20 дней по каждому из четырёх параметров.

Из каждой точки сетки  $\vec{p}^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0, p_4^0)^T$  запускается вычислительный процесс, за основу которого взят градиентный метод [20]. А именно, вычисляется производная  $\frac{\partial F}{\partial \vec{p}^0} = \left( \frac{\partial F}{\partial p_1^0}, \frac{\partial F}{\partial p_2^0}, \frac{\partial F}{\partial p_3^0}, \frac{\partial F}{\partial p_4^0} \right)^T$ . Обозначим этот вектор сдвига  $\vec{s}^0$ . Далее  $F$  вычисляется в точке  $\vec{p}^1 = \vec{p}^0 + \vec{s} = \left( p_i^0 + \alpha \cdot \frac{\partial F}{\partial p_i^0} \right)$ ,  $\vec{s} = \vec{s}^0$ ,  $\alpha = 10000$ . Если норма функционала улучшилась, то сдвиг по параметрам принимается, иначе  $\alpha$  делится пополам, и процесс повторяется до тех пор, пока  $\alpha$  не станет меньше  $10^{-10}$ . Если таким образом сдвинуться не удалось, то принимаются попытки уменьшить функционал ещё в трёх направлениях:

1) вместо  $\vec{s}^0$  берётся антиградиент  $\vec{s} = -\vec{s}^0$ ; 2)  $s_i = (-1)^i s_i^0$ ; 3)  $s_i = (-1)^{i+1} s_i^0$ .

Если ни в одном из этих четырёх направлений функционал уменьшить не удалось, то считаем, что мы в точке локального минимума. Иначе переходим к следующей итерации с удвоенным последним принятым  $\alpha$ .

Условие завершения работы — выполнение одного из условий:  $|F(p^{n+1}) - F(p^n)| < 10^{-6}$  или  $\|p^{n+1} - p^n\| < 10^{-7}$ . Точность метода Ньютона при решении задачи Ламберта  $10^{-9}$ .

Найденные таким образом локальные минимумы — наборы параметров  $\vec{p}$ , будем называть грубыми решениями задачи. На следующем шаге



производится их прореживание: из множества грубых решений далее будут рассматриваться только лучшие по функционалу из своей окрестности. А именно, грубые решения последовательно перебираются от меньшего к большему по значению функционала на них. И для каждого такого  $\vec{p}^i$  из рассмотрения убираются близкие  $\vec{p}^j$ , лежащие в области:  $\left\{ \left| F(\vec{p}^i) - F(\vec{p}^j) \right| < 50 \text{ м/с} \cup \left\| \vec{p}^i - \vec{p}^j \right\| < 3 \text{ дня} \right\}$ . Оставшиеся после этой процедуры траектории уточняются вычислительным процессом, описанным выше, с более сильными условиями остановки счёта. Уточнённые траектории опять прореживаются тем же способом, что и грубые.

### 2.2.3 Результаты

Локальные минимумы, которые удалось найти в 2020-м – 2030-м году в результате решения задачи представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1: Локальные минимумы в 2020 – 2030 годах.

N	$F$	$\Delta_1, \%$	$\Delta_2, \%$	$\Delta_3, \%$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$T_{\text{start}}$	$T_{\text{all}}$	$T_{\text{forward}}$	$T_{\Delta\text{Phobos}}$	$T_{\text{back}}$
1	8.09	38	32	31	3.0	2.6	2.5	2496	1014	310	335	339
2	8.15	37	32	31	3.0	2.6	2.5	2496	946	310	341	265
3	8.32	36	36	28	3.0	3.0	2.3	3250	1034	301	385	318
4	8.48	40	29	32	3.4	2.5	2.7	1736	990	334	306	320
5	8.50	39	29	32	3.4	2.5	2.7	1736	953	333	315	274
6	8.84	37	32	31	3.3	2.9	2.7	2507	1038	272	420	316
7	9.12	36	31	33	3.3	2.9	3.0	2507	1064	272	455	307
8	9.13	35	39	26	3.2	3.5	2.4	4015	979	285	447	218
9	9.15	35	38	26	3.2	3.5	2.4	4015	1040	285	463	263
10	9.35	34	40	26	3.2	3.7	2.5	4018	961	296	416	220
11	9.38	34	39	27	3.2	3.7	2.5	4018	1024	295	412	286
12	9.41	41	28	31	3.8	2.6	2.9	974	984	350	314	290
13	9.67	34	30	37	3.3	2.9	3.6	2507	1095	272	505	287
14	9.68	38	27	35	3.7	2.6	3.4	205	1000	205	488	277
15	9.78	34	42	24	3.3	4.1	2.3	3277	1007	231	427	318
16	9.95	39	26	35	3.8	2.6	3.5	974	943	350	329	235
17	10.15	36	26	38	3.7	2.6	3.8	205	930	205	492	203
18	10.20	46	26	29	4.6	2.6	2.9	992	965	234	410	290
19	10.36	31	28	41	3.3	2.9	4.2	2507	1123	272	554	267
20	10.74	43	24	32	4.6	2.6	3.5	993	925	234	426	235
21	10.86	40	29	31	4.3	3.2	3.4	205	1000	345	348	277

*Продолжение на следующей странице*

Глава 2. Лестница задач. Задачи Ламберта. ИМП

N	F	$\Delta_1, \%$	$\Delta_2, \%$	$\Delta_3, \%$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$T_{\text{start}}$	$T_{\text{all}}$	$T_{\text{forward}}$	$T_{\Delta\text{Phobos}}$	$T_{\text{back}}$
22	11.33	38	28	34	4.3	3.2	3.8	205	931	345	352	203
23	12.42	30	21	49	3.7	2.6	6.1	205	786	205	42	509
24	13.04	24	27	48	3.2	3.6	6.3	4018	873	285	193	365
25	13.74	35	20	45	4.8	2.8	6.1	179	821	303	0	487
26	13.88	24	18	58	3.4	2.5	8.1	1736	1433	334	369	700
27	14.02	27	19	54	3.8	2.6	7.5	974	1467	350	443	644
28	14.14	22	18	60	3.0	2.6	8.5	2496	1401	310	309	753
29	14.41	30	22	48	4.3	3.2	6.9	208	1500	353	525	591
30	14.53	36	48	16	5.2	7.0	2.4	3501	1492	582	663	218
31	14.81	22	19	59	3.3	2.9	8.7	2507	1401	272	386	713
32	14.92	20	20	60	3.0	3.0	8.9	3250	1377	301	244	803
33	15.25	35	46	19	5.3	7.1	2.9	3522	1500	622	515	333
34	15.39	21	19	60	3.3	2.9	9.3	2507	1433	272	466	665
35	15.44	36	49	15	5.5	7.6	2.3	2776	1500	649	495	326
36	15.48	35	49	16	5.5	7.6	2.4	2771	1435	637	520	248
37	16.03	20	22	58	3.2	3.5	9.3	4014	1342	285	176	852
38	16.38	35	50	15	5.8	8.1	2.5	2039	1471	689	413	339
39	16.38	20	25	55	3.3	4.1	8.9	3277	1350	231	286	803
40	16.44	35	49	15	5.8	8.1	2.5	2040	1401	690	416	265
41	17.27	35	50	15	6.0	8.6	2.7	1319	1407	753	304	320
42	18.15	34	49	16	6.2	9.0	2.9	586	1371	799	252	290
43	18.69	33	48	19	6.2	9.0	3.5	586	1331	799	268	235
44	19.12	17	22	61	3.3	4.1	11.7	3277	1500	231	628	610
45	19.62	35	52	13	6.9	10.3	2.5	3856	1205	929	0	246
46	21.67	31	57	12	6.8	12.4	2.5	3063	1144	887	0	228
47	21.87	14	14	73	3.0	3.0	15.9	3250	1209	301	333	546
48	22.03	17	12	71	3.7	2.6	15.7	205	1042	205	151	656
49	23.04	28	61	11	6.5	14.1	2.5	2269	1243	873	1	338
50	23.21	19	14	68	4.3	3.2	15.7	205	1042	345	10	656
51	23.33	14	18	68	3.3	4.1	15.9	3277	1182	231	376	546
52	24.58	15	11	74	3.7	2.6	18.3	205	1404	205	124	1044
53	25.53	16	10	74	4.2	2.5	18.8	963	1408	328	0	1050
54	25.71	18	10	72	4.6	2.6	18.4	992	1350	234	0	1086
55	25.77	17	12	71	4.4	3.1	18.3	202	1410	339	0	1041
56	28.78	10	11	79	3.0	3.1	22.6	3254	1500	315	116	1039
57	29.28	12	27	62	3.4	7.8	18.0	3358	1500	392	146	932
58	29.82	17	24	59	5.0	7.3	17.6	3470	1435	522	0	883
59	30.64	17	26	56	5.3	8.0	17.3	2736	1439	577	0	832
60	30.90	14	30	56	4.2	9.3	17.4	2652	1500	473	132	865
61	31.26	18	28	54	5.6	8.7	17.0	2005	1445	630	0	786
62	31.73	18	29	53	5.9	9.2	16.7	1276	1448	683	0	735

*Продолжение на следующей странице*

N	$F$	$\Delta_1, \%$	$\Delta_2, \%$	$\Delta_3, \%$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$T_{\text{start}}$	$T_{\text{all}}$	$T_{\text{forward}}$	$T_{\Delta\text{Phobos}}$	$T_{\text{back}}$
63	32.00	15	32	53	4.8	10.2	17.0	1928	1500	539	113	818
64	32.01	19	30	51	6.1	9.6	16.3	549	1449	737	0	682

Значение  $F$  в первом столбце табл. 2.1 и значения  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  в 4-7 столбцах указаны в км/с, времена  $T_{\text{start}}, T_{\text{all}}, T_{\text{forward}}, T_{\Delta\text{Phobos}}, T_{\text{back}}$  приведены в днях (один день полагался равным 86400 с).  $T_{\text{back}}$  – время перелёта назад от Марса к Земле:  $T_{\text{back}} = T_{\text{all}} - T_{\text{forward}} - T_{\Delta\text{Phobos}} - 30$ .

Таким образом, удалось найти 64 локальных минимума. Заметим, что траектории, соответствующие 10, 11, 24, 29, 33, 35, 44 – 46, 53 – 64 строкам таблицы находятся на границе области поиска решения. Также отметим, что метод, описанный в части 2.2.2 сходил к каждой из точек табл. 2.1 несколько сотен раз.

На лучшей из найденных траекторий КА стартует в 2026-м году: время старта  $T_{\text{start}^*}$ : 2495.87263 дней от начала 2020 г., что соответствует 3 ноября 2026 года, общая продолжительность экспедиции: 1014.21224 дней, перелёт от Земли к Марсу занимает 309.79314 дней, на Фобосе КА сидит: 335.34216 дней, перелёт назад к Земле занимает: 339.07693 дней, импульсы:  $F^* = 8.09232$  км/с,  $\Delta_1^* = 3.04350$  км/с,  $\Delta_2^* = 2.56928$  км/с,  $\Delta_3^* = 2.47954$  км/с.

Угол между средней плоскостью эклиптики и средней плоскостью орбиты Марса  $\approx 1.85^\circ$ . Проекция лучшей из полученных траекторий на плоскость эклиптики представлена на рис. 2.1.

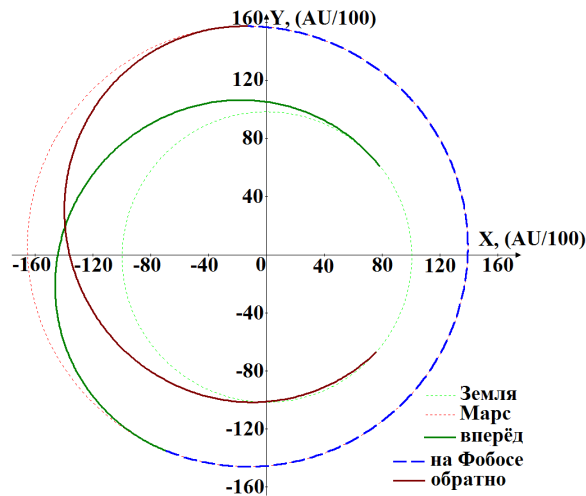


Рис. 2.1: Проекция лучшей из полученных траекторий на плоскость эклиптики.

По осям отложены сотые доли астрономической единицы ( $AU/100$ )  $\approx 1.5$  млн км. На рис. 2.2 изображена зависимость  $z(\varphi - \varphi_0)$ , где  $z$  — аппликата КА в системе координат  $OXYZ$  с Солнцем в центре  $O$  и средней плоскостью эклиптики в качестве плоскости  $OXY$ ,  $\varphi(t)$  — угловое положение КА в данный момент времени  $t$  в цилиндрической системе координат, согласованной с  $OXYZ$ , угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $OX$ , направленной в сторону точки весеннего равноденствия,  $\varphi_0$  — угловое положение КА в момент старта экспедиции.

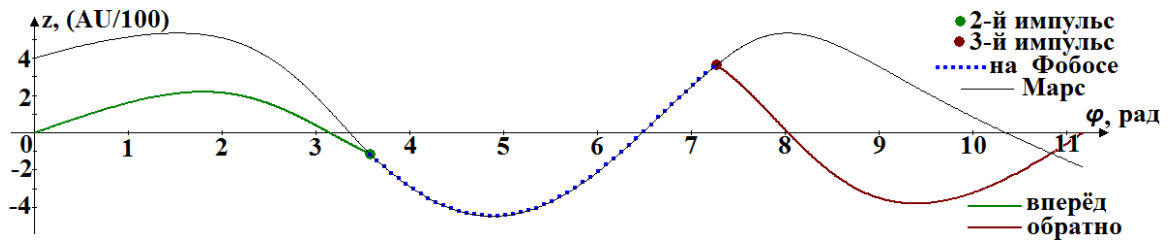


Рис. 2.2: Изменение аппликаты КА, траектория с началом в 2026-м году.

Также на рис. 2.2 изображена зависимость расстояния от Марса до плоскости эклиптики.

## 2.2.4 Различные исследования

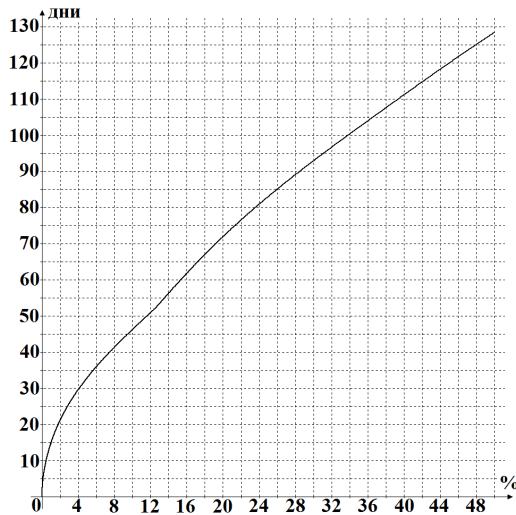


Рис. 2.3: Окно старта для лучшей траектории промежутка 2020-й – 2030-й годы.

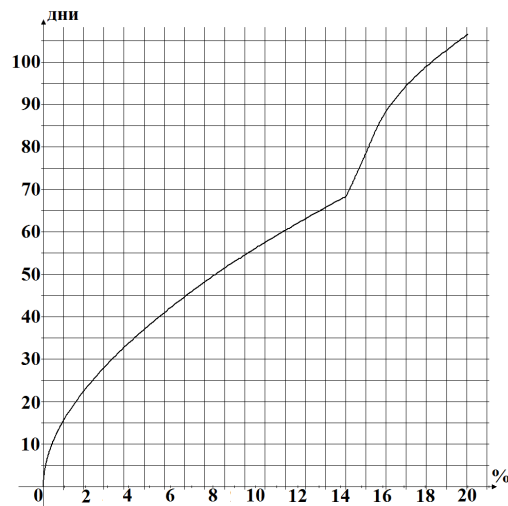


Рис. 2.4: Окно старта для лучшей траектории 2020-го года.

Были проведены следующие исследования задачи.

1) Были построены графики окон старта: рис. 2.3 для миссии в 2026 году и рис. 2.4 для 2020-го года.

По оси абсцисс на рис. 2.3 отложены проценты от 0 до 50, по оси ординат – ширина окна старта в днях. Для каждого значения  $x$  оси абсцисс находились наибольшие времена  $\delta t_- \geq 0$  и  $\delta t_+ \geq 0$ , такие что для любой даты старта из промежутка  $[T_{\text{start}^*} - \delta t_-, T_{\text{start}^*} + \delta t_+]$  существует траектория, отличающаяся по функционалу от  $F^*$  не более чем на  $x$  процентов.

По оси абсцисс на рис. 2.4 отложено отличие в процентах от лучшего найденного значения функционала, по оси ординат – ширина окна старта в днях, соответствующая данному проценту. Данный рис. 2.4 можно сравнить с аналогичным рис. 2.3 для найденного экстремума в 2026-м году.

2) 2020-й год интересен тем, что на него изначально был запланирован повтор российской экспедиции к Фобосу – проект „ФОБОС-ГРУНТ 2“.

В 4-мерном усечённом кубе области поиска решения задачи выбирался минимальный усечённый подкуб, содержащий все точки, значение функционала в которых больше полученного оптимального решения в 2020-м году не более чем на 10%. Таких точек всего 114 или примерно 0.000025 от общего числа точек исходной грубой сетки. Получившийся усечённый подкуб представляет из себя область размером порядка 0.0007 от исходной сетки:

$T_{\text{start}}$  : от 180 до 220 дней,  $T_{\text{all}}$  : от 900 до 1100 дней,  $T_{\text{forward}}$  : от 180 дней до  $\min\{240, (T_{\text{all}} - 130 \text{ дней})\}$ ,  $T_{\Delta\text{Phobos}}$  : от 0 дней до  $\min\{560, (T_{\text{all}} - T_{\text{forward}} - 130 \text{ дней})\}$ .

Для сравнения, если брать усечённый подкуб, содержащий все точки, значение функционала в которых больше минимального не более чем на 50%, то таких точек будет 9911 или 0.002 от общего числа точек исходной сетки, а соответствующий усечённый подкуб получился бы размером порядка 0.076 от исходного множества поиска решения.

Описанная выше модификация градиентного метода была запущена на более мелкой сетке в указанной области с шагом 10 дней по каждому времени. Новых локальных минимумов данный тест не даёт, программа сходится к минимумам, указанным выше в табл. 2.1. Параметры лучшей траектории со стартом в 2020-м году: время старта: 205.24708 дней от начала 2020 г., что соответствует 24 июля 2020 года, общая продолжительность экспедиции: 1000.22735 дней, перелёт от Земли к Марсу занимает 205.29658 дней, на Фо-

босе КА сидит: 518.14471 дней, перелёт назад к Земле занимает: 276.75097 дней, импульсы:  $F = 9.68138$  км/с (до уточнения градиентным методом на грубой сетке оптимальным значением было 9.76 км/с),  $\Delta_1 = 3.69094$  км/с,  $\Delta_2 = 2.61897$  км/с,  $\Delta_3 = 3.37147$  км/с.

Полученную траекторию в 2026-м году (см. стр. 51) можно сравнить с лучшей траекторией из 2020-го года, изображённой на рис. 2.5:

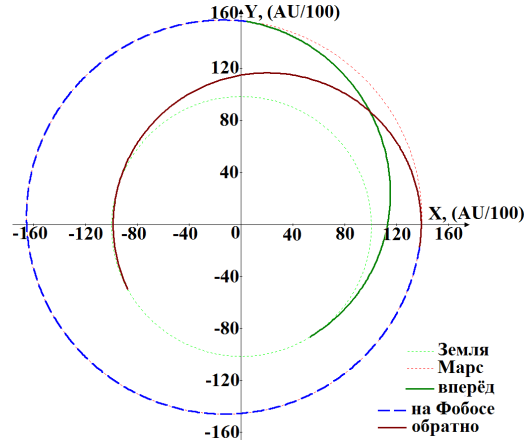


Рис. 2.5: Проекция лучшей из полученных траекторий в 2020-м году на плоскость эклиптики.

Аналогично рис. 2.2 на рис. 2.6 представлено изменение аппликаты для траектории с началом в 2020-м году и зависимость расстояния от Марса до плоскости эклиптики.

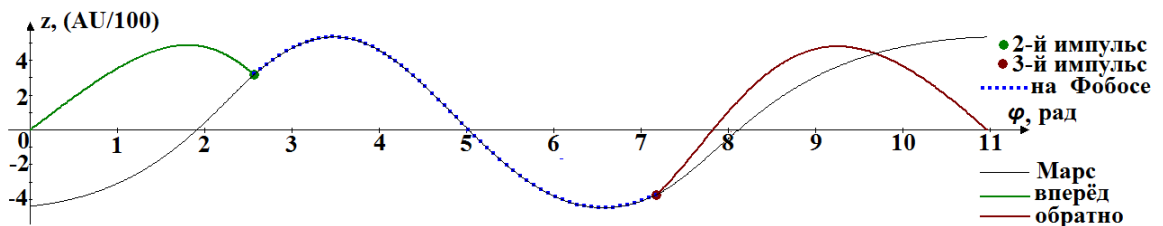


Рис. 2.6: Изменение аппликаты КА, траектория с началом в 2020-м году.

3) Был запущен градиентный метод из точек грубой сетки, не содержащих область (минимальный усечённый подкуб, содержащий область  $\arg(\text{минимальное значение функционала} + 50\%)$ ). Тем самым была осуществлена проверка: сойдётся ли градиентный метод к полученному ранее в пункте 1) минимуму, если его запускать из далёких от этого минимума точек. В итоге из достаточно далёких от решения точек метод сошёлся к тому же решению 36 раз, т.е. к минимуму удавалось сойтись из каждой 8-тысячной точки такой области (примерно 1/600 часть грубой сетки).

Поиск локальных минимумов на сетке в два раза грубее по каждому из параметров дал те же локальные минимумы, которые приведены в табл. 2.1.

4) Была вычислена матрица вторых производных функционала по 4 оптимизируемым параметрам. Если все главные миноры положительны, то в данной точке выполнено условие второго порядка. Соответствующие определители считаются при помощи прямого хода метода Гаусса за  $\approx \frac{2}{3}n^3$  арифметических операций, а не непосредственным вычислением определителей, требующем  $O(n!)$  операций для матрицы  $n \times n$ .

Так как численно было получено, что для небольших  $h$  при сдвиге вектора параметров задачи  $\vec{\Delta}_i = (0, 0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0)$  — вектор в 4-мерном пространстве параметров задачи с единственной ненулевой компонентой на  $i$ -ом месте, функционал меняется на один и тот же порядок для разных  $i$ , шаги для численного вычисления производной по разным параметрам брались одинаковые.

Для вычисления элементов главной диагонали матрицы использовалась стандартная численная аппроксимация второй производной:  $F''_{p_i} \approx \frac{F(\vec{p} + \vec{\Delta}_i) - 2F(\vec{p}) + F(\vec{p} - \vec{\Delta}_i)}{h^2}$ . Главный член погрешности данной аппроксимации:  $\frac{h^2}{12} F''''_{p_i}$ . Для аппроксимации смешанной производной использовалась формула:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} \approx \frac{F(\vec{p} + \vec{\Delta}_i + \vec{\Delta}_j) + F(\vec{p} - \vec{\Delta}_i - \vec{\Delta}_j) - F(\vec{p} - \vec{\Delta}_i + \vec{\Delta}_j) - F(\vec{p} + \vec{\Delta}_i - \vec{\Delta}_j)}{4h^2}.$$

В [119] проверено, что на соответствующих первым 29-м строкам таблицы 2.1 траекториям, критерий Сильвестра выполнен, и эти решения являются локальными минимумами задачи, так как они удовлетворяют условиям второго порядка.

5) Была построена аналогичная табл. 2.1 табл. 2.2 со значениями локальных минимумов для перелёта только от Земли к Марсу (без нахождения КА на Фобосе и возвращения назад) в 2020–2021-м годах. Таким образом, оптимизируется сумма 2 импульсов по 2 переменным, а не трёх по четырём, как было в исходной задаче.

Таблица 2.2: Локальные минимумы среди перелётов от Земли к Марсу с началом в 2020-м году.

N	$F$	$\Delta_1, \%$	$\Delta_2, \%$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$T_{\text{start}}$	$T_{\text{forward}}$
1	6.3	58	42	3.7	2.6	205	205
2	7.5	58	42	4.3	3.2	205	345
3	15.2	41	59	6.2	9.0	586	799
4	18.7	41	59	7.6	11.1	230	1197

Видно, что лучшая траектория для 2020-го года (соответствующая 9-й строке таблицы 2.1) содержит в себе данные из лучшей из найденных траекторий перелёта „вперёд“. Числа из второй и третьей строки таблицы 2.2 также можно найти в таблице 2.1.

Значит, элементом лучшей экспедиции в 2020-м году является траектория лучшего по функционалу перелёта от Земли к Марсу.

б) Абсолютный минимум манёвра. КА стартует от Земли и переходит на орбиту Марса и обратно с орбиты Марса на Землю. Т.е. ищется оптимальное решение задачи в исходной постановке, но без привязки даты старта к 2020-2030-м годам. За основу для поиска были взяты орбиты Земли и Марса в 2020-2021 годах. Для каждого реального положения Земли, полученного из эфемерид DE424, перебирались всевозможные угловые положения Марса на его орбите. Т.е. считалось, что Земля в данный момент времени там, где она должна быть, а Марс – где угодно на своей орбите 2020-2021 годов. Шаг изменения положений Земли и Марса брался равным 10 дням. Для каждого их взаиморасположения модифицированным градиентным методом решалась исходная задача. В результате решения были получены оптимальные угловые положения  $\varphi^*$  и  $\psi^*$  Земли и Марса соответственно в момент старта экспедиции. Далее каждый год методом хорд находился момент времени  $t^*$ , в который Земля занимает данное угловое положение согласно эфемеридам DE422, и считалось отклонение углового положения Марса на своей орбите от оптимального  $\psi^*$  во время  $t^*$ . Моменты времени  $t^*$ , в которые Земля находится в оптимальном положении  $\varphi^*$ , а угловое положение Марса смещено от  $\psi^*$  не более чем на  $\Delta\psi$ , ближайшие к 1 января 2020-го года для различных  $\Delta\psi$  приведены в табл. 2.3.



Таблица 2.3: Оптимальные даты для старта экспедиции к Марсу.

$\Delta\psi$	Время $t^*$	$ \psi^* - \psi(t^*) $ , градусы
0.1°	2263 NOV 07 14:53:24	$7.64 \cdot 10^{-2}$
	1332 OCT 24 23:13:47	$4.84 \cdot 10^{-2}$
1°	2263 NOV 07 14:53:24	$7.64 \cdot 10^{-2}$
	1979 NOV 03 19:45:26	$3.60 \cdot 10^{-1}$
5°	2026 NOV 03 20:54:15	3.46
	1979 NOV 03 19:45:26	$3.60 \cdot 10^{-1}$

В окрестности 2026 NOV 03 20:54:15 и 2263 NOV 07 14:53:24 градиентным методом были уточнены оптимальные времена старта в эти годы и построены графики соответствующих экспедиций. Отметим, что оптимальная экспедиция, найденная таким способом в 2026-м году соответствует первой строчке из таблицы 1 — траектории, найденной градиентным методом, запускавшимся из точек сетки в области поиска решения (см. часть 2.2.2).

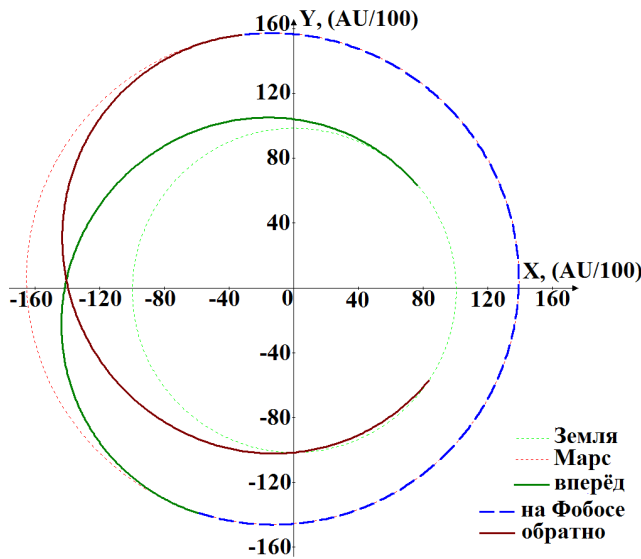


Рис. 2.7: Проекция лучшей траектории 2263-го года на плоскость эклиптики.

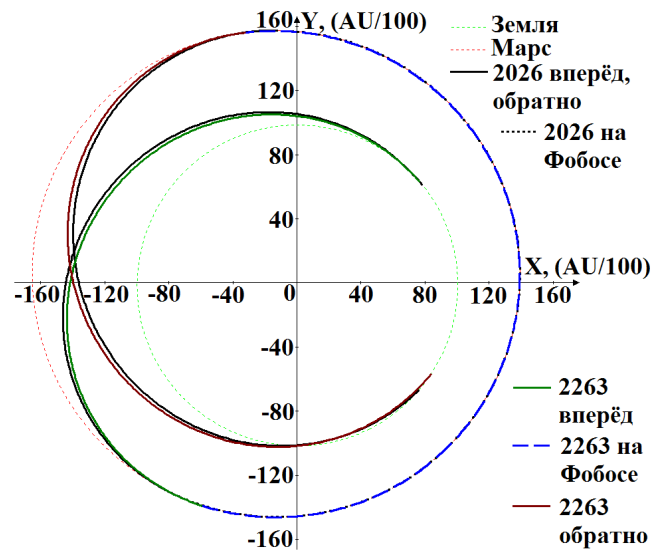


Рис. 2.8: Сравнение лучшей траектории 2026-го года с траекторией 2263-го года.

В 2263 году положение Земли и Марса будет практически полностью соответствовать их положению на своих орбитах, при котором возможна лучшая по функционалу экспедиция (см. рис. 2.7). Сравнение проекции на плоскость эклиптики этой траектории с проекцией лучшей траектории 2026-го года (под лучшей подразумевается оптимальная по функционалу, среди всех

локальных минимумов, которые удалось найти описанным в работе методом) приведено на рис. 2.8.

Таблица 2.4: Сравнение лучших траекторий за разные годы.

Год	$F$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$T_{\text{start}}$	$T_{\text{all}}$	$T_{\text{forward}}$	$T_{\Delta\text{Phobos}}$	$T_{\text{back}}$	%
2026	7.9	3.0	2.6	2.3	2496	<b>1787</b>	310	1129	319	17.955
2263	8.1	3.0	2.6	2.5	89063	1020	310	341	339	16.475
2026	8.1	3.0	2.6	2.5	2496	1014	310	335	339	16.413
2020	9.7	3.7	2.6	3.4	205	1000	205	488	277	—

В последней колонке таблицы 2.4 показано, на сколько процентов функционал, соответствующий данной траектории, меньше функционала лучшей траектории 2020-го года.

Оптимальное значение функционала для экспедиции с рассматриваемыми в работе ограничениями: КА должен пробыть на Фобосе не менее 30 дней, а общая продолжительность миссии не должна превысить 1500 дней получится равным 8.0697412388 км/с. Более точные значения функционала для найденных лучших экспедиций в 2263 и 2026 годах: 8.0863789968 км/с и 8.0923327074 км/с соответственно. Отличие значения функционала на лучшей траектории 2026-го года от функционала на абсолютно оптимальной траектории составляет всего 23 м/с.

Если расширить область поиска решения и рассмотреть экспедиции с продолжительностью от 1500 дней до 1835 дней, то при том же диапазоне рассматриваемых дат старта 2020-2030-й годы функционал можно улучшить ещё на 150 м/с, параметры соответствующей экспедиции приведены в первой строке табл. 2.4. Отметим, что время пребывания КА на Фобосе на такой траектории составляет более 3 лет, общая же продолжительность миссии получается на 2 года больше продолжительности лучшей экспедиции 2026-го года.

7) Оптимальный перелёт от Земли к Марсу — часть первой ступени лестницы. Рассматривается первый кусок исходной задачи. Оптимизируется сумма двух импульсов в зависимости от  $T_{\text{start}}$  и  $T_{\text{forward}}$ . Для каждого реального положения Земли, полученного из эфемерид DE424, перебирались всевоз-

возможные положения Марса на его орбите. Т.е. считалось, что Земля в данный момент времени там, где она должна быть, а Марс – где угодно на своей орбите 2020-2021 годов.

Характеристики оптимального перехода от Земли к Марсу приведены в первой строке табл. 2.5.

Таблица 2.5: Локальные минимумы в задаче перехода от Земли к Марсу.

$F$ , км/с	$\Delta_1$ , %	$\Delta_2$ , %	$\Delta_1$ , км/с	$\Delta_2$ , км/с	$T_{\text{start}}$ , дни	$T_{\text{forward}}$ , дни	$T_{\text{Mars shift}}$ , дни
5.60	55	45	3.1	2.5	295	316	119
5.62	50	50	2.8	2.8	145	206	653

В последнем столбце табл. 2.5 указано оптимальное положение Марса: на оптимальной траектории Марс сдвинут на  $T_{\text{Mars shift}}$  дней полёта по своей орбите от своего реального положения в момент времени  $T_{\text{start}}$ . Вторая строка таблицы соответствует ещё одному локальному минимуму в данной задаче, отличающемуся по функционалу от оптимального на 19 м/с.

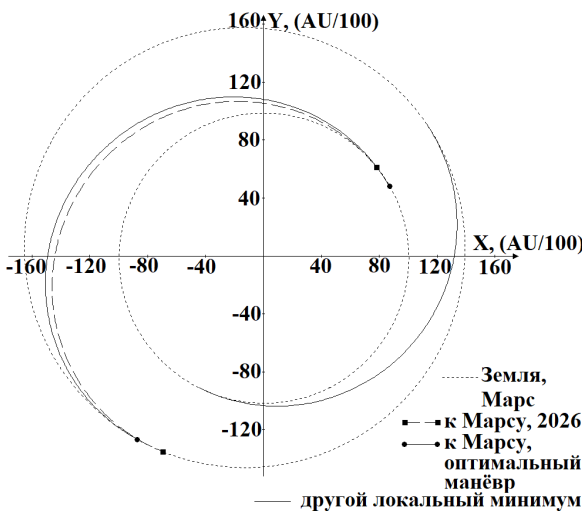


Рис. 2.9: Проекция лучшего перехода Земля-Марс, следующего по функционалу перехода и лучшего перехода 2026-го года на плоскость эклиптики.

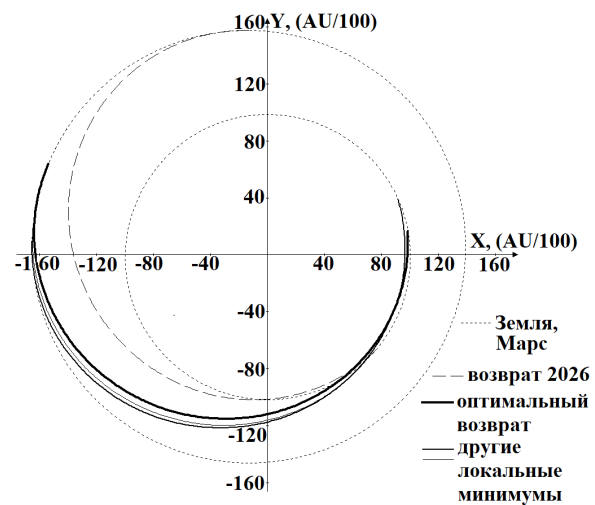


Рис. 2.10: Проекция лучшего перехода Марс-Земля, ещё одного локального минимума этой задачи и перехода из лучшей экспедиции, стартующей в 2026-м году на плоскость эклиптики.

Значение функционала оптимального перехода от Земли к Марсу 5.5991095810 км/с лучше суммы первых двух импульсов оптимальной траектории 2026 года 5.6127799676 км/с на 13.6 м/с, т.е. примерно на 0.2%.

Стоит отметить, что найденная в диссертационной работе лучшая траектория перелёта к Марсу на основе решения задач Ламберта по дате старта и функционалу близка к аналогичной траектории, построенной независимо другой группой исследователей в разработанном ими программном комплексе ValCalc [57]. В работе [17] отмечается, что на лучшей траектории со стартом в 2026 году значение функционала составляет 5.61 км/с, что полностью совпадает с результатом, полученным в настоящей работе.

Также на рис. 2.9 приведена проекция траектории, соответствующей второй строке табл. 2.5. На рис. 2.11 видно два локальных минимума в задаче перелёта к Марсу при рассмотрении в качестве параметра продолжительности перелёта. При построении данного графика для каждого фиксированного времени перелёта находились оптимальные угловые положения Земли и Марса.

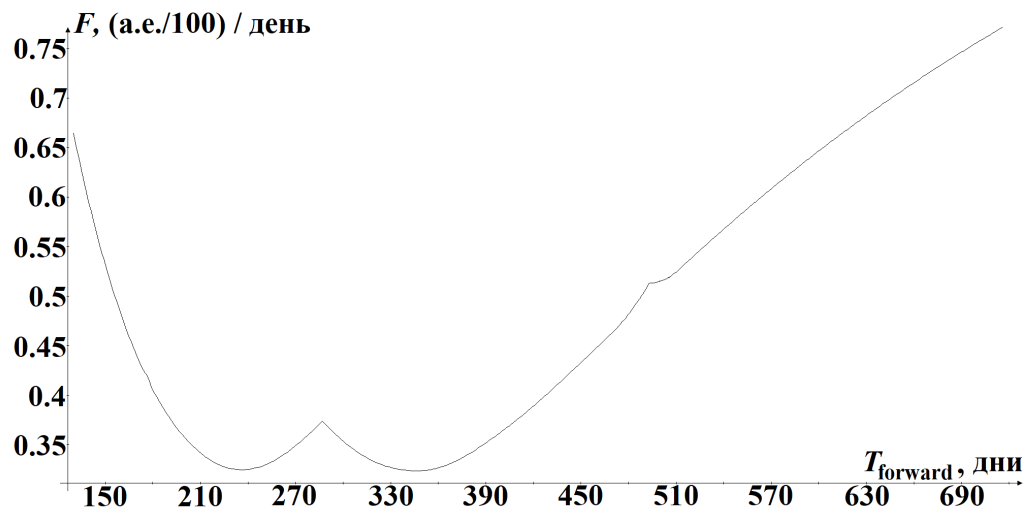


Рис. 2.11:  $F$  оптимальное (по положению Земли и Марса) в задаче оптимального перехода от Земли к Марсу в зависимости от продолжительности перелёта

Ниже приведена табл. 2.6 для данной задачи, аналогичная табл. 2.3. Производится просчёт, в какой ближайший к 00:00 1 января 2020 года момент времени  $t^*$  угловое положение Земли совпадает с её положением, соответствующим началу траектории из первой строки табл. 2.5, а угловое положение Марса отличается от оптимального в этот момент  $t^*$  не более чем на  $\Delta\psi$ .

Таблица 2.6: Оптимальные даты для старта перелёта к Марсу в задаче оптимального перехода Земля–Марс.

$\Delta\psi$	Время $t^*$	$ \psi^* - \psi(t^*) $ , градусы
0.1°	2562 ОСТ 30 02:33:34	$9.51 \cdot 10^{-2}$
	1915 ОСТ 22 06:08:04	$3.09 \cdot 10^{-2}$
1°	2278 ОСТ 26 07:16:28	$5.74 \cdot 10^{-1}$
	1915 ОСТ 22 06:08:04	$3.09 \cdot 10^{-2}$
5°	2073 ОСТ 22 18:07:15	2.09
	1994 ОСТ 22 12:13:51	1.03
6°	2026 ОСТ 22 16:51:59	5.69
	1994 ОСТ 22 12:13:51	1.03

8) Оптимальный перелёт от Марса к Земле — другая часть первой ступени лестницы. Рассматривается последний кусок исходной задачи. Оптимизируется один стартовый импульс ухода от Марса в зависимости от  $T_{\text{start}}$  (время старта с Марса в этом пункте) и  $T_{\text{back}}$ . Для каждого реального положения Земли, полученного из эфемерид DE424, перебирались всевозможные положения Марса на его орбите. Т.е. считалось, что Земля в данный момент времени там, где она должна быть, а Марс — где угодно на своей орбите 2020-2021 годов.

Характеристики оптимального перехода от Марса к Земле приведены в первой строке табл. 2.7.

Таблица 2.7: Локальные минимумы в задаче перехода от Марса к Земле.

$F$ , км/с	$T_{\text{start}}$ , дни	$T_{\text{back}}$ , дни	$T_{\text{Mars shift}}$ , дни
2.32	333	308	228
2.37	354	230	245

В последнем столбце табл. 2.7 указано оптимальное положение Марса: на оптимальной траектории Марс сдвинут на  $T_{\text{Mars shift}}$  дней полёта по своей орбите от своего реального положения в момент времени  $T_{\text{start}}$ . Вторая строка табл. 2.7 соответствует ещё одному локальному минимуму в данной задаче, отличающемуся по функционалу от оптимального на 48 м/с.

Значение функционала оптимального перехода от Марса к Земле 2.3241068418 км/с лучше соответствующего импульса оптимальной траектории экспедиции, стратрующей в 2026 году 2.4795446462 км/с на 155 м/с, т.е. примерно на 6.2%. Сравнить проекции этих траекторий на плоскость эклиптики можно на рис. 2.10. Также на рис. 2.10 приведены проекции траекторий, соответствующих второй строке табл. 2.7.

Ниже приведена табл. 2.8 для данной задачи, аналогичная таблице 2.3. Производится просчёт, в какой ближайший к 00:00 1 января 2020 года момент времени  $t^*$  угловое положение Земли совпадает с её положением, соответствующим началу траектории из первой строки табл. 2.7, а угловое положение Марса отличается от оптимального в этот момент  $t^*$  не более чем на  $\Delta\psi$ .

Таблица 2.8: Оптимальные даты для старта перелёта от Марса к Земле в задаче оптимального перехода Марс–Земля.

$\Delta\psi$	Время $t^*$	$ \psi^* - \psi(t^*) $ , градусы
0.1°	2709 DEC 10 02:36:51	$2.46 \cdot 10^{-2}$
1°	2062 NOV 30 04:57:25	$4.15 \cdot 10^{-1}$
	1857 NOV 27 15:26:34	$8.37 \cdot 10^{-1}$
5°	2030 NOV 29 23:58:53	4.60
	2015 NOV 30 03:44:29	2.80

Отсюда видно, что для улучшения значения функционала выгодно в 2026 стартовать с Земли к Марсу, а в 2030 полететь назад с Фобоса к Земле.

### 9) Задача оптимального перехода Земля-Марс.

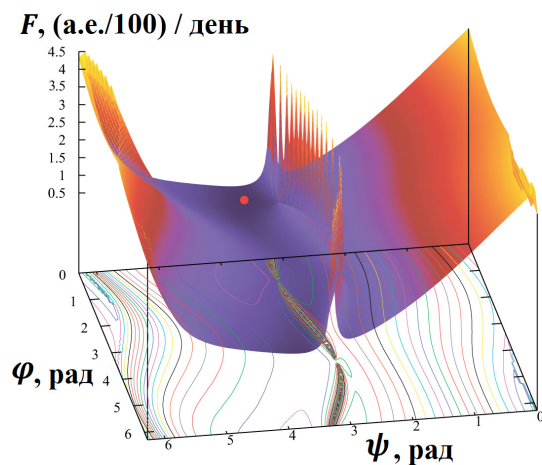


Рис. 2.12:  $\tau_{opt}=316$ , вид спереди.

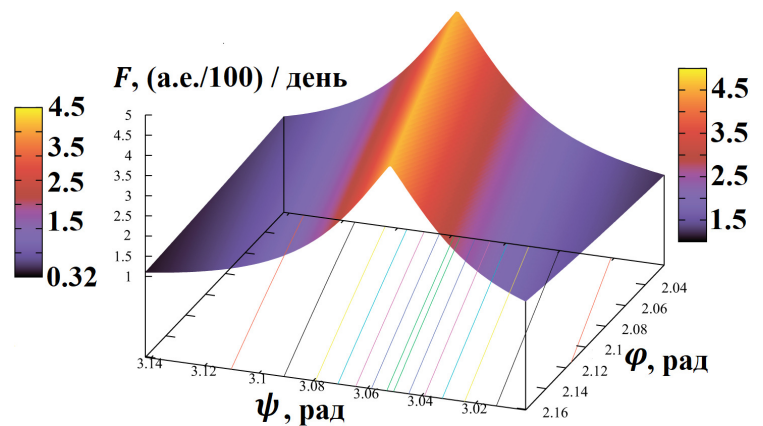


Рис. 2.13: Увеличение „горы“ вблизи пика на квадрате по  $\varphi, \psi$   $[2.02, 2.16] \times [3.0, 3.15]$  рад.

„Горы“ вблизи очень гладкие и хорошо просчитываются при измельчении сетки.

По оси  $OX \equiv \varphi$  на рис. 2.12, 2.13 отложено угловое положение Земли, отсчитываемое от направления на весеннее равноденствие. По оси  $OZ \equiv F(\varphi, \psi)$  – значение функционала. Значение угла  $\psi \equiv OY$ : угловая дальность перелёта (положение Марса в момент времени  $t_1$ , отсчитываемое от  $\varphi$  или оно же  $+ 2\pi$ ). На рис. 2.12 хорошо видно, где находится минимум – лучшая траектория отмечена красной точкой. Минимум в задаче достигается в точке  $\psi = 3.604$  рад,  $\varphi = 0.505$  рад, продолжительность перелёта при этом составляет  $\tau \equiv T_{forward} = 316.414$  дней.

Траектория ниже, изображённая на рис. 2.14, 2.15 соответствует самой высокой точке рис. 2.12:  $\varphi = 2.0944$ ,  $\psi = 3.0717794835$ ,  $\Delta_1 = 36.7$  км/с,  $\Delta_2 = 28.6$  км/с, суммарный импульс 65.3 км/с, реальный угол между  $r_0$  и  $r_1$  составляет 3.1744.

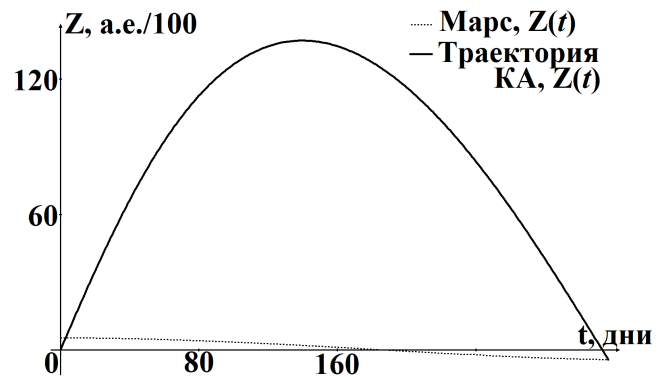
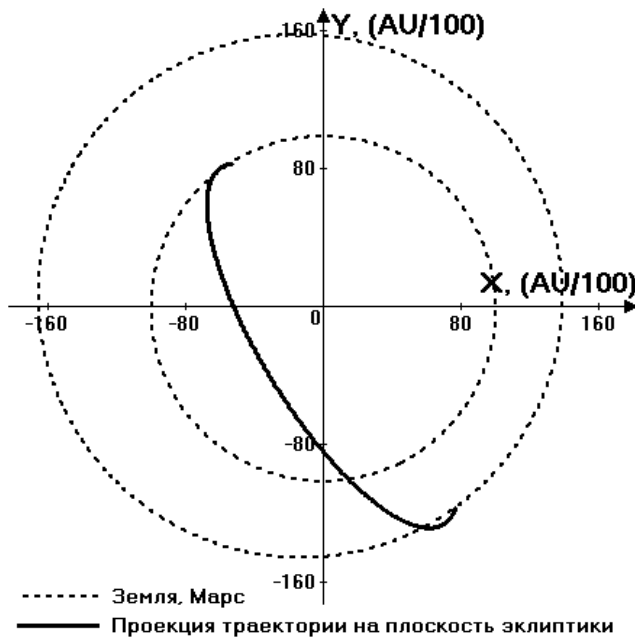


Рис. 2.15: Зависимость  $Z(t)$ .

Рис. 2.14: Проекция на плоскость эклиптики.

Ещё одна траектория с параметрами:  $\varphi = 6.2090310475$ , реальное  $\psi = 3.1675$ ,  $\Delta_1 = 43.8$  км/с,  $\Delta_2 = 29.6$  км/с, суммарный импульс 73.8 км/с приведена на рис. 2.16, 2.17.

Эллиптическая траектория с 0 оборотов существует только одна для фиксированных параметров задачи (или параболическая, гиперболическая). Когда угол между  $r_0$  и  $r_1$  в задаче Ламберта близок к  $\pi$ , то из-за наклона

плоскости Марса к плоскости эклиптики решение задачи Ламберта — пролёт над Солнцем или под Солнцем, а не между орбитами Земли и Марса. Так устроено решение задачи Ламберта. Из-за наклона орбит и пространственности траектории вылет из окрестности плоскости эклиптики происходит не только при  $\psi = \pi$ , но и при близких к  $\pi$  значениях.

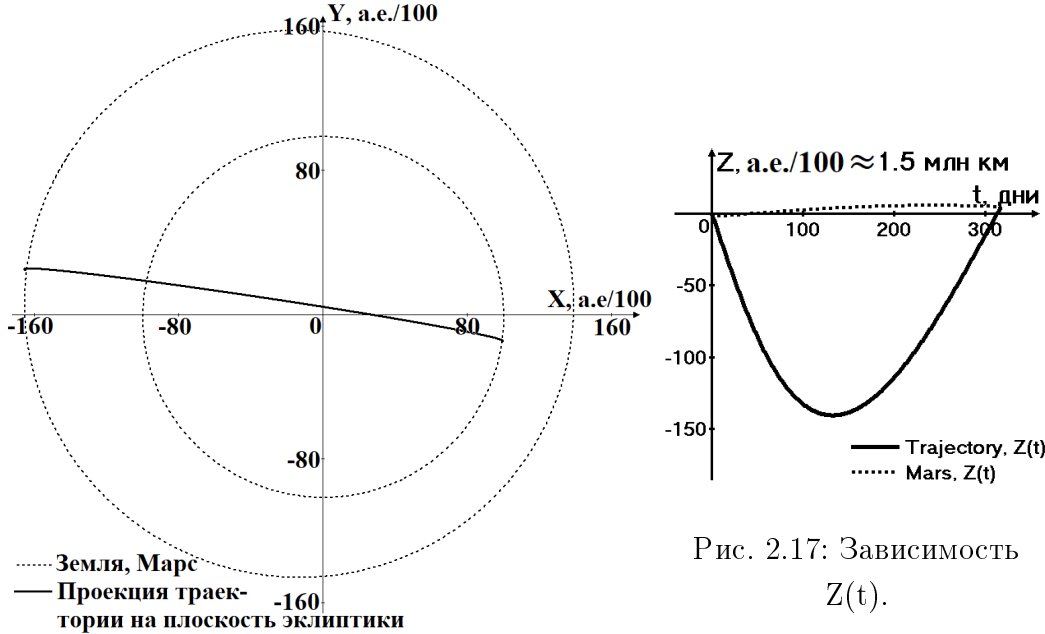


Рис. 2.16: Проекция на плоскость эклиптики.

Значения  $|v_0|$  на этих горах близки к  $|v_0|$  на других траекториях, но за счёт того, что импульс направлен не по движению Земли или Марса — получается большое значение функционала в данной постановке задачи. Такие „горы“ являются верным решением задачи Ламберта при  $\psi \in (\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — некая малая величина. Можно искусственно изменить постановку задачи, требуя, чтобы КА находился на конечной орбите в нужной точке в заданное время, разрешив при этом выход на данную орбиту и реализацию соответствующего импульса в более ранний момент времени, чем конец перелёта. В такой постановке „горы“ естественным образом пропадут.



## 2.3 Оптимизация межпланетной экспедиции с учётом Земли и Марса и использованием решения задач Ламберта

В разделе 2.3 добавляется учёт притяжения Земли и Марса, он посвящён 3 и 4 ступеням лестницы.

Задача z1 — оптимизация суммы модулей трёх импульсов в задаче оптимизации перелёта к Марсу в зависимости от четырёх параметров:  $T_{\text{start}}$ ,  $T_{\text{all}}$ ,  $T_{\text{forward}}$ ,  $T_{\Delta\text{Phobos}}$ , импульсы понимаются как  $\vec{v}_{\text{хар КА Р (P)}} = \vec{v}_{\text{хар КА Р (S)}} - \vec{v}_{\text{P (S)}}$ , где индекс  $(S)$  обозначает гелиоцентрическую систему координат,  $(P)$  — планетоцентрическую (геоцентрическую для импульса около Земли и марсоцентрическую для импульса около Марса). Характеристические скорости  $\vec{v}_{\text{хар КА Р (S)}}$  — решения задач Ламберта;  $\vec{v}_{\text{P (S)}}$  — скорости Земли и Марса в гелиоцентрической невращающейся СК.

Задача z2 такая же как z1 — оптимизация трёх импульсов по тем же четырём параметрам, но импульсы вычисляются по-другому. Считается, что скорость КА равна  $\vec{v}_{\text{хар КА Р (S)}}$ , полученному в z1, на самом деле не в центре планеты  $P$ , а в какой-то точке её сферы влияния радиуса  $\rho_{2(P)}$  [46, с. 538]. Для этой траектории справедлив интеграл энергии, и он выписывается на сфере влияния и на круговой орбите ИС высоты  $h_p$ :

$$h = \frac{v_{\text{ух КА Р (P)}}^2}{2} - \frac{\mu_P}{\rho_{2(P)}}, \quad (2.3.1)$$

$$h = \frac{v_{\text{хар КА Р (P)}}^2}{2} - \frac{\mu_P}{R_P + h_p}, \quad (2.3.2)$$

где  $h$  — постоянная энергии,  $v_{\text{ух КА Р (P)}}$  — скорость КА на круговой орбите высоты  $h_p$  после импульса в планетоцентрической СК.

Для Земли:  $h_E = 200$  км;  $v_{\text{кр. E (E)}}(h_E) = 7.78$  км/с.

Для Марса:  $h_M = 9300$  км;  $v_{\text{кр. M (M)}}(h_M) = 1.84$  км/с.

Далее из (2.3.1), (2.3.2) выражается модуль скорости ухода КА с круговой

орбиты ИС планеты  $P$ :

$$\left| v_{\text{yx KA P}_{(P)}} \right| = \sqrt{v_{\text{хар KA P}_{(P)}}^2 + 2\mu_P \cdot \left( \frac{1}{R_P + h_P} - \frac{1}{\rho_{2(P)}} \right)}.$$

Наконец, в функционал пойдёт разница между полученным модулем скорости ухода КА с круговой орбиты ИС и круговой скоростью КА на этой орбите  $|\vec{v}_{\text{кр. P}_{(P)}}(h_P)|$ :

$$\Delta_{\text{new}} = \left| v_{\text{yx KA P}_{(P)}} \right| - \left| \vec{v}_{\text{кр. P}_{(P)}}(h_P) \right|.$$

Графики зависимости значения функционала от даты старта очень похожи в задачах  $z1$  и  $z2$ , они приведены на рис. 2.18, 2.19.



Рис. 2.18: Функционал  $z2$  (от времени старта).

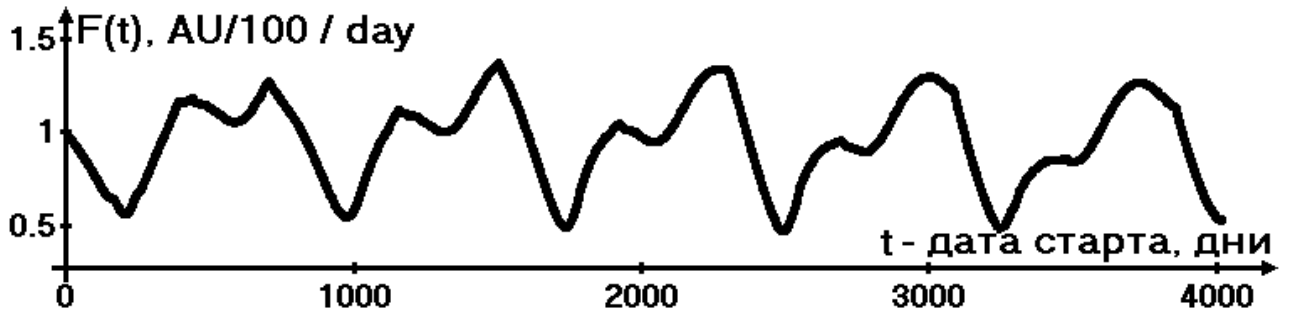


Рис. 2.19: Функционал  $z1$  (от времени старта).

Ниже в табл. 2.9 приведены данные для сравнения лучших экспедиций этих задач:

Таблица 2.9: Сравнение минимумов задач  $z1$  и  $z2$ .

$Z$	$F$	$\Delta_1, \%$	$\Delta_2, \%$	$\Delta_3, \%$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$T_{\text{start}}$	$T_{\text{all}}$	$T_{\text{forward}}$	$T_{\Delta\text{Phobos}}$	$T_{\text{back}}$
$z2$	7.18	50	25	24	3.6	1.8	1.7	2496.6	1013.4	310.2	334.1	339.13
$z1$	8.09	38	32	31	3.0	2.6	2.5	2495.9	1014.2	309.8	335.3	339.07

Ниже приведён пример пересчёта старого функционала в новый для лучшей траектории z1, где  $\Delta_{i \text{ new}}$  и  $\Delta_{i \text{ last}}$  — соответственно импульсы после пересчёта в постановку z2 и до пересчёта в постановке z1,  $i \in \{1, 2, 3\}$ : 1 — стартовый импульс у Земли, 2 — финишный импульс у Марса, 3 — стартовый импульс с Марса назад:

$$\Delta_{i \text{ new}} = \sqrt{\Delta_{i \text{ last}}^2 + 2\mu_P \cdot \left( \frac{1}{R_P + h_P} - \frac{1}{\rho_{2(P)}} \right) - |\vec{v}_{\text{кр.Р (P)}}(h_P)|}.$$

В z1 минимальное значение функционала было 8.092 км/с в гелиоцентрической СК, в z2 после пересчёта:

$$2\mu_E \cdot \left( \frac{1}{R_E + h_E} - \frac{1}{\rho_{2(E)}} \right) = 2 \cdot 3.986013 \cdot 10^5 \cdot \left( \frac{1}{6378.16 + 200} - \frac{1}{2.5012764 \cdot 10^6} \right) \approx 120.868 \text{ км}^2/\text{с}^2,$$

$$2\mu_M \cdot \left( \frac{1}{R_M + h_M} - \frac{1}{\rho_{2(M)}} \right) = 2 \cdot 4.297780 \cdot 10^4 \cdot \left( \frac{1}{9300 + 3402} - \frac{1}{1.8011584 \cdot 10^6} \right) \approx 6.179 \text{ км}^2/\text{с}^2,$$

$$\Delta_{1 \text{ new}} = \sqrt{3.044^2 + 120.868} - 7.784 = 3.624 \text{ км/с},$$

$$\Delta_{2 \text{ new}} = \sqrt{2.570^2 + 6.719} - 1.839 = 1.811 \text{ км/с},$$

$$\Delta_{3 \text{ new}} = \sqrt{2.480^2 + 6.719} - 1.839 = 1.748 \text{ км/с}.$$

Значение функционала на этой траектории получается 7.183 км/с — сумма одного импульса в геоцентрической СК и двух в марсоцентрической. На лучшей же траектории z2, близкой к этой, значение функционала получилось 7.181 км/с.

Далее идёт описание задач, в которых добавлен учёт притяжения Земли и Марса не по методике точечных сфер действия, а как центральных ньютоновских полей сил гравитационного притяжения.

Положение Земли, Марса, Фобоса всюду соответствует эфемеридам DE424 и MAR097 соответственно. Оси всех систем координат сонаправлены с осями J2000.

Итак, в z1 осуществляется оптимизация 3 импульсов экспедиции по 4 моментам времени без учёта притяжения Земли и Марса. Решаются две задачи Ламберта.

В  $z_2$  — оптимизация 3 импульсов экспедиции по 4 моментам времени с учётом Земли и Марса по методике точечных сфер действия (в качестве сфер берутся сферы влияния). Решаются две задачи Ламберта.

В задачах далее минимум ищется в окрестности оптимальных дат прилёта/отлёта от Земли и Марса, полученных в  $z_1$  и  $z_2$  (соответствует началу экспедиции в 2026 году).

В задаче  $z_3$  рассматривается только перелёт „вперёд“, эта задача соответствует 3-й ступени лестницы задач. Марс учитывается по методике точечных сфер действия (в качестве сферы берётся сфера действия Марса  $\rho_1$ , [46, с. 537–538]). Перелёт начинается в центральном ньютоновском гравитационном поле Земли и в момент пересечения КА сферы действия Земли продолжается в центральном ньютоновском гравитационном поле сил притяжения Солнца. Система координат, связанная с Землёй, считается инерциальной. Оптимизируется сумма 3 импульсов: импульса выравнивания скорости с Марсом в конце и двух импульсов ухода от Земли, т.к. предполагается, что в сфере действия Земли может быть 2 импульса. Итого оптимизируется 8 неизвестных параметров: время старта от Земли  $T_E$ , время промежуточного импульса в сфере действия Земли, время пересечения КА сферы действия Земли, время прилёта на Марс  $T_M$ , долгота восходящего узла  $\Omega_0$  исходной орбиты ИСЗ и положение  $\varphi_0$  КА на ней, углы  $\varphi_{actE}$  и  $\psi_{actE}$ , задающие точку на сфере действия Земли, через которую пролетает КА. Наклонение исходной орбиты соответствует минимальному наклону орбиты при выведении КА с Байконура  $i_0 = 51.6^\circ$ . Была выбрана следующая вычислительная схема. Решается задача Ламберта из точки на сфере действия Земли в Марс, затем с полученной скоростью на сфере действия траектория продолжается назад во времени до момента промежуточного импульса (траектории, на которых в этот момент времени КА находится под поверхностью Земли или вне сферы действия Земли, отбрасываются). Далее решается задача Ламберта с заданной точки на орбите ИСЗ до точки промежуточного импульса.

В результате получилось, что в некоторой окрестности оптимального решения промежуточный импульс равен 0. Задача решалась по-прежнему градиентным методом из узлов сетки по параметрам оптимизации, при этом в окрестности решения сетка измельчалась, и производилось уточнение реше-

ния с более сильными условиями остановки счёта и более точным решением задач Ламберта и просчётом пассивного полёта с использованием аналитических формул. Ниже в табл. 2.10 приведены данные для сравнения лучшей траектории z3 и перелётом „вперёд“ на лучшей экспедиции z2.

Таблица 2.10: Сравнение минимумов задач z2 и z3.

Z	F	$\Delta_1, \%$	$\Delta_2, \%$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$T_E$	$T_M$
z3	5.4	66	33	3.6	1.8	2496.5	2807.4
z2	5.4	66	33	3.6	1.8	2496.6	2806.8

На этой траектории КА до сферы действия Земли летит 3.28 суток, углы в радианах:  $\varphi_{actE} = 2.31$ ,  $\psi_{actE} = 0.53$ ,  $\Omega_0 = -0.18$ ,  $\varphi_0 = 5.93$ . Угол между круговой скоростью на орбите ИСЗ в точке старта и итоговой скоростью после импульса в начальный момент времени составляет  $2 \cdot 10^{-3}$  (– $1.2 \cdot 10^{-3}$  рысканье и  $1.7 \cdot 10^{-3}$  тангаж).

На рис. 2.20 представлена зависимость функционала задачи от времени старта  $T_E$ . Каждой точке графика соответствует фиксированное время старта и значение функционала, оптимизированное относительно остальных 7 параметров.

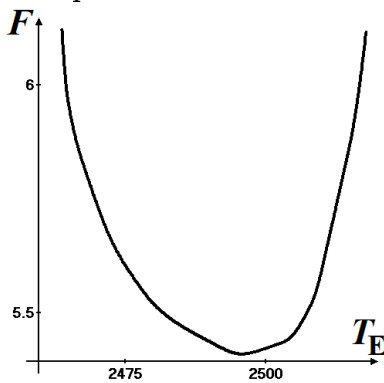


Рис. 2.20: Функционал z3 (от времени старта).

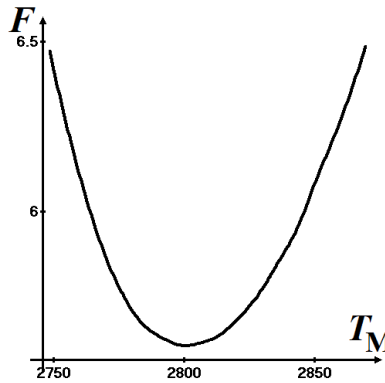


Рис. 2.21: Функционал z4 (от времени прилёта на Фобос).

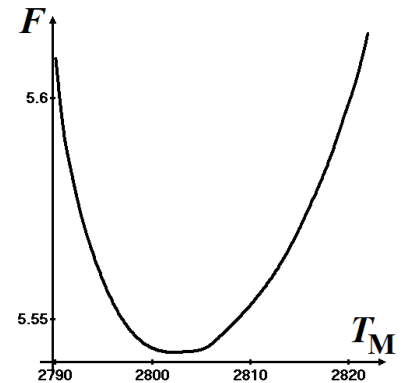


Рис. 2.22: Функционал z6 (от времени финиша).

В z4 рассматривается только перелёт „вперёд“. Земля учитывается по методике точечных сфер действия (в качестве сферы берётся сфера действия Земли  $\rho_1$ ). Перелёт начинается в центральном ньютоновском гравитационном поле Солнца и в момент пересечения КА сферы действия Марса продол-

жается в центральном ньютоновском гравитационном поле сил притяжения Марса. Система координат, связанная с Марсом, считается инерциальной. Оптимизируется сумма 3 импульсов: импульса ухода от Земли в начале и двух импульсов на подлёте к Марсу, т.к. предполагается что в сфере действия Марса может быть 2 импульса. Всего оптимизируется 6 неизвестных параметров оптимизируется: время старта от Земли  $T_E$ , время промежуточного импульса в сфере действия Марса, время пересечения КА сферы действия Марса, время прилёта на Фобос  $T_M$ , углы  $\varphi_{actM}$  и  $\psi_{actM}$ , задающие точку на сфере действия Марса, через которую пролетает КА. Была выбрана следующая вычислительная схема. Решается задача Ламберта из Земли в точку на сфере действия Марса, затем с полученной скоростью на сфере действия Марса траектория продолжается вперёд во времени до момента промежуточного импульса (траектории, на которых в этот момент времени КА находится под поверхностью Марса или вне сферы действия Марса отбрасываются). Далее решается задача Ламберта с полученной промежуточной точки в Фобос.

В результате получилось, что в некоторой окрестности оптимального решения промежуточный импульс равен 0. Ниже в табл. 2.11 приведены данные для сравнения лучшей траектории z4 и перелётом „вперёд“ на лучшей экспедиции z2.

Таблица 2.11: Сравнение минимумов задач z2 и z4.

Z	F	$\Delta_1, \%$	$\Delta_2, \%$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$T_E$	$T_M$
z4	5.6	64.5	35.5	3.6	2.0	2488.0	2801.0
z2	5.4	66	33	3.6	1.8	2496.6	2806.8

На этой траектории КА от сферы действия Марса до Фобоса летит 2.74 суток, углы в радианах:  $\varphi_{actM} = -0.26$ ,  $\psi_{actE} = -0.33$ . Угол между скоростью Фобоса в точке финиша и итоговой скоростью перед импульсом в конечный момент времени составляет  $2.7 \cdot 10^{-1}$  ( $3.7 \cdot 10^{-2}$  рысканье и  $-2.7 \cdot 10^{-1}$  тангаж). Наклон и долгота восходящего узла орбиты Фобоса фиксированы, поэтому тангаж и рысканье существенно больше соответствующих значений при отлёте от Земли в z3, в которой свобода выбора начальной орбиты ИСЗ

существенно больше.

Фобос совершает оборот за 7 часов 39 мин. Как и ожидалось, на каждом обороте Фобоса примерно одному и тому же его угловому положению соответствует локальный минимум задачи. На рис. 2.21 представлена зависимость функционала задачи от времени финиша  $T_M$ . Лучшему времени финиша на данном обороте Фобоса соответствует значение функционала, оптимизированное относительно остальных 5 параметров. Эти точки соединены между собой сплайном. При оптимизации считалось, что последний импульс существенно ненулевой.

$z5$  — задача, аналогичная  $z4$ , в которой рассматривается перелёт „назад“. В результате решения получилось, что в некоторой окрестности оптимального решения промежуточный импульс равен 0. Ниже в табл. 2.12 приведены данные для сравнения лучшей траектории  $z5$  и перелётом „назад“ на лучшей экспедиции  $z2$ .

Таблица 2.12: Сравнение минимумов задач  $z2$  и  $z5$ .

$Z$	$F = \Delta_3$	$T_{M_{back}}$	$T_{M_{back}}$
$z5$	1.75	3168.8	3508.5
$z2$	1.7	3171	3510.1

На этой траектории КА до сферы действия Марса летит 2.87 суток, углы в радианах:  $\varphi_{actM} = 0.28$ ,  $\psi_{actE} = -0.35$ . Угол между скоростью Фобоса в точке старта и итоговой скоростью после импульса в начальный момент времени составляет  $1.1 \cdot 10^{-2}$  ( $2.3 \cdot 10^{-3}$  рысканье и  $1.1 \cdot 10^{-2}$  тангаж).

В  $z6$  рассматривается только перелёт „вперёд“. Перелёт начинается в центральном ньютоновском гравитационном поле Земли, в момент пересечения КА сферы действия Земли продолжается в центральном ньютоновском гравитационном поле сил притяжения Солнца, в момент пересечения КА сферы действия Марса продолжается рассмотрение перелёта в центральном ньютоновском гравитационном поле Марса. Системы координат, связанные с Землёй и Марсом, считаются инерциальными. Оптимизируется сумма 4 импульсов: начального, конечного и двух импульсов на сферах действия Земли и Марса. 10 неизвестных параметров оптимизируются: время старта от Земли

$T_E$ , времена пересечения КА сфер действия Земли и Марса, время прилёта на Марс  $T_M$ , долгота восходящего узла  $\Omega_0$  исходной орбиты ИСЗ и положение  $\varphi_0$  КА на ней, углы  $\varphi_{actE}$ ,  $\psi_{actE}$  и  $\varphi_{actM}$ ,  $\psi_{actM}$ , задающие точки на сфере действия Земли и Марса соответственно, через которые пролетает КА. Наклонение исходной орбиты соответствует минимальному наклону орбиты при выведении КА с Байконура  $i_0 = 51.6^\circ$ . Была выбрана следующая вычислительная схема. Решаются 3 задачи Ламберта: из точки на орбите ИСЗ в точку на сфере действия Земли, из этой точки в точку на сфере действия Марса, из неё – в Фобос.

В результате получилось, что в некоторой окрестности оптимального решения промежуточные импульсы равны 0. Задача решалась по-прежнему градиентным методом из узлов сетки по параметрам оптимизации, при этом в окрестности решения сетка измельчалась и производилось уточнение решения с более сильными условиями останова счёта и более точным решением задач Ламберта по приведённому выше методу. Ниже в табл. 2.13 приведены данные для сравнения лучшей траектории z6 и перелётом „вперёд“ на лучшей экспедиции z2.

Стоит отметить, что в z2 числа получены для сфер влияния Марса и Земли, а в z3, z4, z5, z6 — для сфер действия, радиусы которых примерно в 3 раза меньше.

Таблица 2.13: Сравнение минимумов задач z2 и z6.

Z	F	$\Delta_1, \%$	$\Delta_2, \%$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$T_E$	$T_M$
z6	5.54	65	35	3.60	1.95	2491.3	2803.5
z2	5.4	66	33	3.6	1.8	2496.6	2806.8

На этой траектории КА от ИСЗ до сферы действия Земли летит 3.30 суток, от сферы действия Марса до Фобоса — 2.79 суток, углы в радианах:  $\varphi_{actE} = 2.32$ ,  $\psi_{actE} = 0.43$ ,  $\varphi_{actM} = -0.24$ ,  $\psi_{actM} = -0.35$ ,  $\Omega_0 = -0.04$ ,  $\varphi_0 = 5.83$ . Угол между круговой скоростью на орбите ИСЗ в точке старта и итоговой скоростью после импульса в начальный момент времени составляет  $1.9 \cdot 10^{-2}$  ( $1.2 \cdot 10^{-3}$  рысканье и  $1.9 \cdot 10^{-2}$  тангаж). Угол между скоростью Фобоса и скоростью КА перед импульсом в конечный момент времени составляет  $2.6 \cdot 10^{-1}$  ( $3.7 \cdot 10^{-2}$  рысканье и  $-2.54 \cdot 10^{-1}$  тангаж).



На рис. 2.22 представлена зависимость функционала задачи от времени финиша  $T_M$ . Лучшему времени финиша на данном обороте Фобоса соответствует значение функционала, оптимизированное относительно остальных 9 параметров.

Сравнение лучших экспедиций с учётом Земли и Марса по методике точечных сфер действия и с учётом углов орбит ИС проводится в табл. 2.14.

Таблица 2.14: Сравнение минимумов задач  $z_2$  и  $z_5+z_6$ .

$Z$	$F$	$\Delta_1, \%$	$\Delta_2, \%$	$\Delta_3, \%$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$T_E$	$T_M$	$T_{M_{back}}$	$T_{M_{back}}$
$z_5 + z_6$	7.29	49	27	24	3.6	1.95	1.75	2491.3	2803.5	3168.8	3508.5
$z_2$	7.18	50	25	24	3.6	1.8	1.7	2496.6	2806.8	3171	3510.1

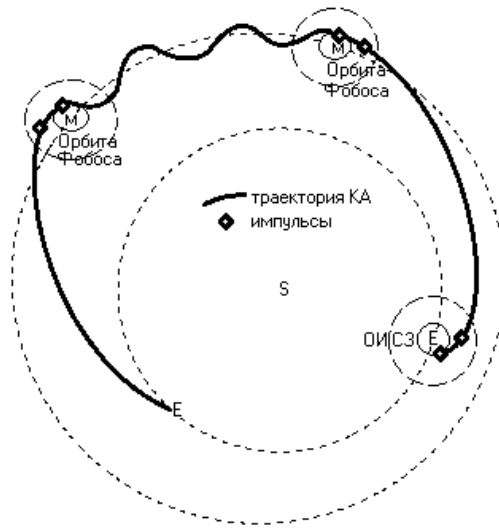


Рис. 2.23: Комбинация задач Ламберта.

В работе [74] приведено полноценное исследование задачи 4-й ступени лестницы — исходной задачи гл. 1, приближённой комбинацией восьми задач Ламберта (см. рис. 2.23).

## 2.4 Схема с пертурбационным манёвром у Луны

На основе представления траектории КА комбинацией задач Ламберта был исследован возможный выигрыш от совершения пертурбационного манёвра у Луны на траектории к Марсу. Траектория представляет комбинацию 4 задач Ламберта: из т. 1 в т. 2, из т. 2 в т. 3, из т. 3 в т. 4, из т. 4 в т. 5, см. рис. 2.24.

Минимизируемый функционал в этом случае представляет собой сумму пяти импульсов в этих точках  $F = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$ .

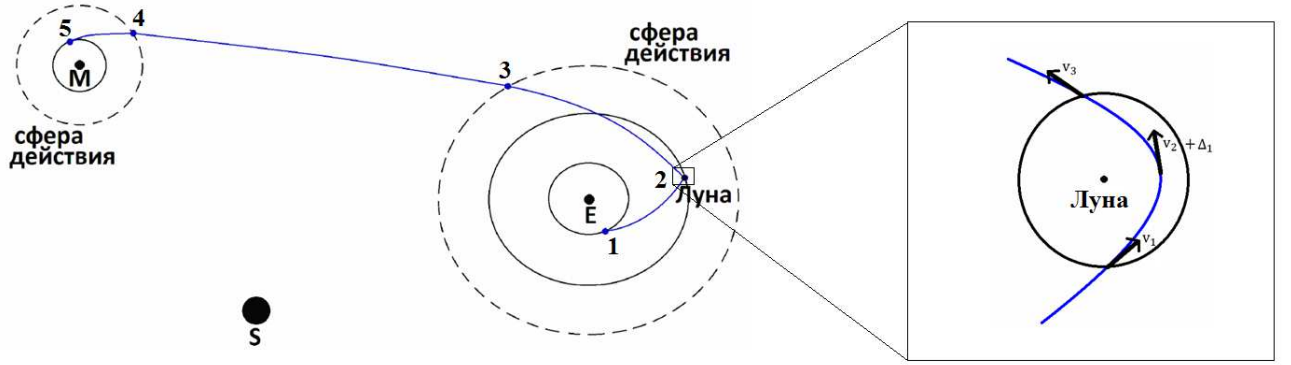


Рис. 2.24: Пертурбационный манёвр у Луны.

Всего на такой траектории имеем 11 параметров оптимизации:  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \varphi_0, \Omega_0, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ , задающих положения точек 1–5 и время прохождения КА через них. Запишем интеграл энергии в сфере действия Луны:

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu_M}{R_p} = \frac{v_1^2}{2} - \frac{\mu_M}{\rho_{1M}}, \quad \frac{(v_2 + \Delta_1)^2}{2} - \frac{\mu_M}{R_p} = \frac{v_3^2}{2} - \frac{\mu_M}{\rho_{1M}}.$$

Тогда

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2\mu_M \left( \frac{1}{R_p} - \frac{1}{\rho_{1M}} \right)}, \quad v_2 + \Delta_1 = \sqrt{v_3^2 + 2\mu_M \left( \frac{1}{R_p} - \frac{1}{\rho_{1M}} \right)}.$$

Отсюда можно найти величину импульса в перигентре манёвра:

$$\Delta_1 = \sqrt{v_3^2 + 2\mu_M \left( \frac{1}{R_p} - \frac{1}{\rho_{1M}} \right)} - \sqrt{v_1^2 + 2\mu_M \left( \frac{1}{R_p} - \frac{1}{\rho_{1M}} \right)}.$$

Для проверки достаточности высоты манёвра выпишем условия:  $(\vec{v}_1, \vec{v}_3) = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_3| \cos \delta \Rightarrow$  найдём  $\delta$ . Из  $\sin(\delta/2) = \frac{\mu_M/R_p}{v_1^2 + \mu_M/R_p}$ ,  $\mu_M/R_p \cdot (1 - \sin(\delta/2)) = v_1^2 \sin(\delta/2)$ , откуда найдём высоту перигентра

$$R_p = \frac{\mu_M(1 - \sin(\delta/2))}{v_1^2 \sin(\delta/2)},$$

и сможем проверить выполнение условия  $R_p \geq R_M + 50$ .

В результате расчётов лучшей найденной траекторией оказалась траектория с  $\Delta_E = 3.45$  км/с, импульсом у Луны  $\Delta_1 = 0$  км/с,  $\Delta_M = 1.95$  км/с. Выигрыш при этом составляет 148 м/с по характеристической скорости по сравнению с экспедицией без манёвра у Луны, что позволяет оценить целесообразность такого манёвра на траектории к Марсу.

## 2.5 Выводы

Несмотря на простоту постановки рассмотренных в данной главе задач относительно других задач работы, такое исследование представляет самостоятельный интерес.

Так как изучение решений задач Ламберта может быть проведено относительно легко, в данной постановке можно быстро получить различные оценки.

В данной главе найдены абсолютные минимумы манёвров от Земли к Марсу и от Марса к Земле, с ними сравниваются траектории разрабатываемой экспедиции.

Построены окна старта. Проверены условия второго порядка на найденных решениях.

Проверены различные схемы экспедиции. Оценен возможный выигрыш от совершения пертурбационного манёвра у Луны. В предположении о необходимости одного дополнительного импульса в сфере действия каждой из рассматриваемых планет получено отсутствие таких промежуточных импульсов.

Применение теоремы Брэквелла [18] для нахождения значений сопряжённых переменных позволяет получить необходимые данные для дальнейшего исследования задачи на основе принципа Лагранжа и перейти к рассмотрению задачи многих тел с учётом притяжения Солнца, Земли и Марса на всей траектории в гл. 3.

Характеристики найденных траекторий перелёта к Марсу сравниваются с данными из работ других авторов.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [74, 119].

## Глава 3

# Лестница задач. Переход от импульсной постановки к постановке задачи с непрерывной тягой

В данной главе исследуются очередные две ступени лестницы задач. Раздел 3.1 посвящён задаче оптимизации траектории экспедиции КА к Фобосу с возвращением к Земле в импульсной постановке на основе принципа Лагранжа, формализованной как задача нескольких тел. В разделе 3.2 рассматривается миссия к Марсу при управлении КА импульсными воздействиями и двигателями малой тяги.

### 3.1 Оптимизация межпланетной экспедиции с учётом Земли и Марса в импульсной постановке

В данном разделе рассматриваются 2 задачи оптимального управления межпланетным пространственным перелётом КА с реактивным двигателем в импульсной постановке. В первой задаче „вперёд“ перелёт начинается на круговой орбите искусственного спутника Земли высоты  $h_e = 200$  км с наклоном  $i_e = 51.6^\circ$  к экватору и заканчивается на орбите естественного спутника Марса Фобоса высоты  $\approx 9300$  км. Долгота восходящего узла  $\Omega_0$  исходной орбиты ИСЗ и положение  $\varphi_0$  КА на ней в начальный момент времени  $t_0$  оптимизируются. Вторая задача возврата к Земле начинается в момент времени  $t_2$ , в который КА стартует с Фобоса. В момент времени  $t_3$  КА прилетает к Земле.

КА должен стартовать с 2020 по 2030 гг. Сход КА с круговой орбиты ИСЗ

осуществляется за счёт импульсного воздействия  $\vec{\Delta}_1$ . В конечный момент времени первой задачи  $t_1$  также предполагается импульсное воздействие  $\vec{\Delta}_2$ , после которого положение и координаты КА совпадают с соответствующими параметрами Фобоса. Затем при помощи импульса  $\vec{\Delta}_3$  КА стартует обратно к Земле в момент времени  $t_2 \geq t_1 + 30$  дней и прилетает к Земле в момент времени  $t_3$ . Импульсы аппроксимируют продолжительные во времени участки с включениями тяги, обеспечивающие разгон КА около Земли и торможение и разгон КА около Марса.

В первой задаче учитывается притяжение Солнца, Земли, Марса, их гравитационные поля считаются центральными ньютоновскими, во второй задаче учитывается притяжение Солнца и Марса. КА представляет собой непритягивающую материальную точку.

Моменты времени  $t_0, t_1, t_2, t_3$  оптимизируются. Общая продолжительность миссии не превышает 1500 дней. Отдельно решается задача „вперёд“ с минимизацией сумм величин импульсных воздействий,  $\Delta_1 + \Delta_2 \rightarrow \inf$ , и „назад“ с минимизацией  $\Delta_3 \rightarrow \inf$ . Последний тормозной импульс у Земли не учитывается, т.к. считается, что КА тормозится за счёт атмосферы: на последнем участке траектории решается задача попадания в центр Земли.

Положения центров Земли и Марса соответствуют эфемеридам DE424, Фобоса — MAR097. Необходимые для решения задачи константы берутся из [46, 63].

### 3.1.1 Формализация задачи

На первых трёх участках рассматривается задача перелёта „вперёд“. На первом участке траектории используется неинерциальная геоцентрическая система координат, на втором участке — гелиоцентрическая СК, на третьем участке — неинерциальная марсоцентрическая СК. На 4-м и 5-м участках рассматривается задача перелёта „назад“. На четвёртом участке используется неинерциальная марсоцентрическая СК, на пятом участке — инерциальная гелиоцентрическая СК. Рассматриваемые СК невращающиеся, декартовы, их оси параллельны осям СК J2000. Ниже во всех формулах  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  — номер участка траектории. За  $\{x_i, y_i, z_i\}$  и  $\{u_i, v_i, w_i\}$  обозначим компонен-

ты векторов скоростей и ускорений КА соответственно на каждом из пяти рассматриваемых участков.

Дополнительное введение геоцентрической и марсоцентрической СК на 1-м, 3-м и 4-м участках обусловлено эффектом потери точности [15, с. 25–36] — при использовании какой-либо одной СК вычисление правых частей дифференциальных уравнений вблизи Земли или Марса производится со значительной погрешностью за счёт вычитания близких значений координат КА и притягивающего центра.

Задача космодинамики формализуется как задача оптимального управления переменной структуры, вид дифференциальных связей будет меняться в зависимости от участка траектории, так как на различных участках рассматриваются различные системы координат.

Пусть  $\{x_{SE}, y_{SE}, z_{SE}\}$  и  $\{x_{SM}, y_{SM}, z_{SM}\}$  — компоненты векторов положения Земли и Марса в гелиоцентрической СК,  $\{x_{ME}, y_{ME}, z_{ME}\}$  — компоненты разности этих векторов. Введём обозначения:  $x_{E1} = x_1, y_{E1} = y_1, z_{E1} = z_1, x_{S1} = x_1 + x_{SE}, y_{S1} = y_1 + y_{SE}, z_{S1} = z_1 + z_{SE}, x_{M1} = x_1 + x_{ME}, y_{M1} = y_1 + y_{ME}, z_{M1} = z_1 + z_{ME}; x_{Ej} = x_j - x_{SE}, y_{Ej} = y_j - y_{SE}, z_{Ej} = z_j - z_{SE}, x_{Sj} = x_j, y_{Sj} = y_j, z_{Sj} = z_j, x_{Mj} = x_j - x_{SM}, y_{Mj} = y_j - y_{SM}, z_{Mj} = z_j - z_{SM}$  для  $j = 2, 5; x_{Ek} = x_k - x_{ME}, y_{Ek} = y_k - y_{ME}, z_{Ek} = z_k - z_{ME}, x_{Sk} = x_k + x_{SM}, y_{Sk} = y_k + y_{SM}, z_{Sk} = z_k + z_{SM}, x_{Mk} = x_k, y_{Mk} = y_k, z_{Mk} = z_k$  для  $k = 3, 4$ , где  $j$  и  $k$  — номер соответствующего участка экспедиции.

Тогда  $r_{Ei} = \sqrt{x_{Ei}^2 + y_{Ei}^2 + z_{Ei}^2}, r_{Si} = \sqrt{x_{Si}^2 + y_{Si}^2 + z_{Si}^2}$  и  $r_{Mi} = \sqrt{x_{Mi}^2 + y_{Mi}^2 + z_{Mi}^2}$  — расстояния от КА до центров Земли, Солнца и Марса соответственно на каждом из участков. Следующие системы дифференциальных уравнений описывают скорость и ускорение центра масс КА на каждом участке траектории:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = u_i, \quad \dot{y}_i = v_i, \quad \dot{z}_i = w_i, \\ \ddot{x}_i = -g_{xi} - \sum_B \mu_B \frac{x_{Bi}}{r_{Bi}^3} \equiv \varphi_{wi}, \\ \ddot{y}_i = -g_{yi} - \sum_B \mu_B \frac{y_{Bi}}{r_{Bi}^3} \equiv \varphi_{vi}, \\ \ddot{z}_i = -g_{zi} - \sum_B \mu_B \frac{z_{Bi}}{r_{Bi}^3} \equiv \varphi_{wi}, \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

где  $\{g_{x1}, g_{y1}, g_{z1}\}$  и  $\{g_{x3} = g_{x4}, g_{y3} = g_{y4}, g_{z3} = g_{z4}\}$  — компоненты векторов ускорения Земли и Марса соответственно в гелиоцентрической СК,  $g_{x2} = g_{y2} = g_{z2} = g_{x5} = g_{y5} = g_{z5} = 0$ . Для задачи перелёта „вперёд“  $B = \{E, S, M\}$ , „назад“ —  $B = \{S, M\}$ .

Первое слагаемое из выражений для изменения скоростей в (3.1.1) соответствует неинерциальности рассматриваемых СК, остальные — закону всемирного тяготения: на КА действуют силы притяжения со стороны Земли, Марса и Солнца равные  $\mu_b \frac{M}{r_b^2}$ , где  $b$  — космическое тело: Земля, Марс или Солнце,  $r_b$  — расстояние от этого космического тела до КА;  $\mu_b$  — гравитационный параметр соответствующего тела,  $M$  — масса КА.

Переход из первой системы координат во вторую происходит в момент времени  $t_E$ , когда КА находится вблизи сферы действия Земли. Переход из второй системы координат в третью происходит в момент времени  $t_M$ , в который КА находится вблизи сферы влияния Марса. На каждом из рассматриваемых участков учитывается притяжение одних и тех же притягивающих центров, поэтому при переходе от одного к другому качественно уравнения (3.1.1) не меняются и на выбор времён  $t_E, t_M$  влияет только эффект потери точности.

До некоторого момента времени  $t = t_E$  движение КА описывается в СК, связанной с Землёй. В момент времени  $t = t_E$  осуществляется переход к описанию движения КА в гелиоцентрической СК:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + x_{SE}, & y_2 = y_1 + y_{SE}, & z_2 = z_1 + z_{SE}, \\ u_2 = u_1 + u_E, & v_2 = v_1 + v_E, & w_2 = w_1 + w_E, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

где  $\{u_E, v_E, w_E\}$  — компоненты вектора скорости Земли в гелиоцентрической СК.

Аналогичные формулы имеют место для связи гелиоцентрической и марсоцентрической систем координат. До некоторого момента времени  $t = t_M$  движение КА описывается в СК, связанной с Солнцем. В момент времени  $t = t_M$  осуществляется переход к описанию движения КА в марсоцентрической СК:

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - x_{SM}, & y_3 = y_2 - y_{SM}, & z_3 = z_2 - z_{SM}, \\ u_3 = u_2 - u_M, & v_3 = v_2 - v_M, & w_3 = w_2 - w_M, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

где  $\{u_M, v_M, w_M\}$  – компоненты вектора скорости Марса в гелиоцентрической СК.

В задаче перелёта „назад“ движение КА сначала описывается в марсоцентрической СК. В момент времени  $t = t_{Mback}$  осуществляется переход к описанию движения КА в гелиоцентрической СК:

$$\begin{cases} x_5 = x_4 + x_{SM}, & y_5 = y_4 + y_{SM}, & z_5 = z_4 + z_{SM}, \\ u_5 = u_4 + u_M, & v_5 = v_4 + v_M, & w_5 = w_4 + w_M. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

В начальный фиксированный момент времени  $t = t_0$  задачи перелёта „вперёд“ КА находится в некоторой точке исходной круговой орбиты ИС Земли высоты  $h_E = 200$  км над поверхностью Земли с наклоном к экватору  $51.6^\circ$  и движется со скоростью  $\vec{v}_{кр.Е}(h_E) + \vec{\Delta}_1$ , где  $v_{кр.Е}(h_E) \equiv \sqrt{\frac{\mu_E}{(R_E + h_E)}}$  – круговая скорость на орбите ИСЗ высоты  $h_E$  в геоцентрической СК,  $\vec{\Delta}_1 \equiv (\Delta u_0, \Delta v_0, \Delta w_0)$  – импульс в начальный момент времени. При  $t = t_0$ :

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (R_E + h_E)^2, \\ x_1(u_1 - \Delta u_0) + y_1(v_1 - \Delta v_0) + z_1(w_1 - \Delta w_0) = 0, \\ (u_1 - \Delta u_0)^2 + (v_1 - \Delta v_0)^2 + (w_1 - \Delta w_0)^2 = \frac{\mu_E}{R_E + h_E}, \\ x_1(v_1 - \Delta v_0) + y_1(u_1 - \Delta u_0) = (R_E + h_E) \sqrt{\frac{\mu_E}{R_E + h_E}} \cos i_B. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

В конечный, момент времени  $t = t_1$  после импульса  $\vec{\Delta}_2 \equiv (\Delta u_1, \Delta v_1, \Delta w_1)$  координаты и скорости КА должны совпадать с координатами и скоростями Фобоса:

$$\begin{cases} x_3 = x_F, & y_3 = y_F, & z_3 = z_F, \\ u_3 + \Delta u_1 = u_F, & v_3 + \Delta v_1 = v_F, & w_3 + \Delta w_1 = w_F. \end{cases} \quad (3.1.6)$$

В начальный момент времени  $t = t_2$  задачи возврата на Землю до импульса  $\vec{\Delta}_3 \equiv (\Delta u_2, \Delta v_2, \Delta w_2)$  координаты и скорости КА должны совпадать с координатами и скоростями Фобоса:

$$\begin{cases} x_4 = x_F, & y_4 = y_F, & z_4 = z_F, \\ u_4 - \Delta u_2 = u_F, & v_4 - \Delta v_2 = v_F, & w_4 - \Delta w_2 = w_F. \end{cases} \quad (3.1.7)$$



В конечный момент времени  $t = t_3$  задачи возврата на Землю координаты КА должны совпадать с координатами Земли:

$$x_5 = x_E, \quad y_5 = y_E, \quad z_5 = z_E. \quad (3.1.8)$$

Для задачи „вперёд“ минимизируемый функционал:

$$B_0 \equiv \Delta_1 + \Delta_2 \longrightarrow \inf, \quad (3.1.9)$$

для задачи „назад“:

$$B_0 \equiv \Delta_3 \longrightarrow \inf. \quad (3.1.10)$$

При решении задач „вперёд“ и „назад“ требуется определить неизвестные фазовые переменные  $x_i(\cdot)$ ,  $y_i(\cdot)$ ,  $z_i(\cdot)$ ,  $u_i(\cdot)$ ,  $v_i(\cdot)$ ,  $w_i(\cdot)$ , импульсы  $\vec{\Delta}_1$  и  $\vec{\Delta}_2$  или  $\vec{\Delta}_3$ , моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  или  $t_2$  и  $t_3$ , удовлетворяющие системам дифференциальных уравнений (3.1.1), начальным условиям (3.1.5) или (3.1.8), конечным условиям (3.1.6) или (3.1.8) и минимизирующие функционал (3.1.9) или (3.1.10) соответственно.

### 3.1.2 Необходимые условия оптимальности

Сформулированные задачи представляют собой задачи оптимального управления переменной структуры, и к ним применяется принцип максимума Л. С. Понтрягина [10, с. 314], [67, с. 13], [20, с. 386]. Пусть существует оптимальный в сильном смысле процесс в задаче (3.1.1), (3.1.5)–(3.1.9), такой что  $\exists \varepsilon > 0: r_E(t) > \varepsilon, r_S(t) > \varepsilon, r_M(t) > \varepsilon, \forall t \in [t_0, t_3]$ , и выполняются условия гладкости: правые части систем дифференциальных уравнений (3.1.1) и их частные производные по  $x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, i = 1-5$  для систем (3.1.1) непрерывны в окрестности оптимальной траектории, функции, определяющие ограничения и функционал (3.1.5)–(3.1.9) непрерывно дифференцируемы.

Тогда согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина существуют множители Лагранжа: константы  $\boldsymbol{\lambda} \equiv \{\lambda_{r0}, \lambda_{rv0}, \lambda_{v0}, \lambda_{iB0}, \lambda_{xF}, \lambda_{yF}, \lambda_{zF}, \lambda_{uF}, \lambda_{vF}, \lambda_{wF}, \lambda_{xtE}, \lambda_{ytE}, \lambda_{ztE}, \lambda_{utE}, \lambda_{vtE}, \lambda_{wtE}, \lambda_{xtM}, \lambda_{ytM}, \lambda_{ztM}, \lambda_{utM}, \lambda_{vtM}, \lambda_{wtM}, \lambda_{xtM2}, \lambda_{ytM2}, \lambda_{ztM2}, \lambda_{utM2}, \lambda_{vtM2}, \lambda_{wtM2}, \lambda_{xF2}, \lambda_{yF2}, \lambda_{zF2}, \lambda_{uF2}, \lambda_{vF2}, \lambda_{wF2}, \lambda_{xE}, \lambda_{yE}, \lambda_{zE}, \lambda_{uE}, \lambda_{vE}, \lambda_{wE}$ , и функции  $\mathbf{p}_{ij}(t) \equiv \{p_{xj}(t), p_{yj}(t), p_{zj}(t), p_{uj}(t)$ ,

$p_{vj}(t)$ ,  $p_{wj}(t)$  ( $i = 1 \quad t \in [t_1, t_E]$ ,  $i = 2 \quad t \in [t_E, t_M]$ ,  $i = 3 \quad t \in [t_M, t_1]$ ),  
 ( $i = 4 \quad t \in [t_2, t_{Mback}]$ ,  $i = 5 \quad t \in [t_{Mback}, t_3]$ ), такие что на оптимальной  
 траектории выполняется система необходимых условий оптимальности а)-  
 ж). Для применения принципа максимума сначала выпишем его основные  
 конструкции – функции Понтрягина задачи:

$$H_i = p_{xi}u_i + p_{yi}v_i + p_{zi}w_i + p_{ui}\varphi_{ui} + p_{vi}\varphi_{vi} + p_{wi}\varphi_{wi}.$$

И терминант. Для задачи перелёта „вперёд“:  $l \equiv \lambda_0 B_0 + l_{t_0} + l_{t_1} + l_{t_E} + l_{t_M}$  :

$$\begin{aligned} l_{t_0} = & \lambda_{r_0} ((x_1(t_0))^2 + (y_1(t_0))^2 + (z_1(t_0))^2 - (R_E + h_E)^2) + \\ & + \lambda_{rv_0}(x_1(t_0)(u_1(t_0) - \Delta u_0) + y_1(t_0)(v_1(t_0) - \Delta v_0) + z_1(t_0)(w_1(t_0) - \Delta w_0)) + \\ & + \lambda_{v_0} \left( (u_1(t_0) - \Delta u_0)^2 + (v_1(t_0) - \Delta v_0)^2 + (w_1(t_0) - \Delta w_0)^2 - \frac{\mu_E}{R_E + h_E} \right) + \\ & + \lambda_{i_{B_0}} \left( x_1(t_0)(v_1(t_0) - \Delta v_0) + y_1(t_0)(u_1(t_0) - \Delta u_0) - (R_E + h_E) \sqrt{\frac{\mu_E}{R_E + h_E}} \cos i_B \right), \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} l_{t_1} = & \lambda_{xF}(x_3(t_1) - x_F(t_1)) + \lambda_{yF}(y_3(t_1) - y_F(t_1)) + \lambda_{zF}(z_3(t_1) - z_F(t_1)) + \\ & \lambda_{uF}(u_3(t_1) + \Delta u_1 - u_F(t_1)) + \lambda_{vF}(v_3(t_1) + \Delta v_1 - v_F(t_1)) + \lambda_{wF}(w_3(t_1) + \Delta w_1 - w_F(t_1)), \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned} l_{t_E} = & \lambda_{xtE}(x_2(t_E) - x_1(t_E) - x_{SE}) + \lambda_{ytE}(y_2(t_E) - y_1(t_E) - y_{SE}) + \lambda_{ztE}(z_2(t_E) - z_1(t_E) - z_{SE}) + \\ & \lambda_{utE}(u_2(t_E) - u_1(t_E) - u_E) + \lambda_{vtE}(v_2(t_E) - v_1(t_E) - v_E) + \lambda_{wtE}(w_2(t_E) - w_1(t_E) - w_E), \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned} l_{t_M} = & \lambda_{xtM}(x_3(t_M) - x_2(t_M) + x_{SM}) + \lambda_{ytM}(y_3(t_M) - y_2(t_M) + y_{SM}) + \lambda_{ztM}(z_3(t_M) - z_2(t_M) + z_{SM}) + \\ & + \lambda_{utM}(u_3(t_M) - u_2(t_M) + u_M) + \lambda_{vtM}(v_3(t_M) - v_2(t_M) + v_M) + \lambda_{wtM}(w_3(t_M) - w_2(t_M) + w_M). \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Для задачи перелёта „назад“:  $l \equiv \lambda_0 B_0 + l_{t_2} + l_{t_3} + l_{t_{M2}}$  :

$$\begin{aligned} l_{t_2} = & \lambda_{xF2}(x_4(t_2) - x_F(t_2)) + \lambda_{yF2}(y_4(t_2) - y_F(t_2)) + \lambda_{zF2}(z_4(t_2) - z_F(t_2)) + \\ & \lambda_{uF2}(u_4(t_2) - \Delta u_2 - u_F(t_2)) + \lambda_{vF2}(v_4(t_2) - \Delta v_2 - v_F(t_2)) + \lambda_{wF2}(w_4(t_2) - \Delta w_2 - w_F(t_2)), \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$l_{t_3} = \lambda_{xE}(x_5(t_3) - x_E(t_3)) + \lambda_{yE}(y_5(t_3) - y_E(t_3)) + \lambda_{zE}(z_5(t_3) - z_E(t_3)), \quad (3.1.16)$$

$$\begin{aligned} l_{t_{M2}} = & \lambda_{xtM2}(x_5(t_M) - x_4(t_M) + x_{SM}) + \lambda_{ytM2}(y_4(t_M) - y_4(t_M) + y_{SM}) + \lambda_{ztM2}(z_5(t_M) - z_4(t_M) + z_{SM}) + \\ & + \lambda_{utM2}(u_5(t_M) - u_4(t_M) + u_M) + \lambda_{vtM2}(v_5(t_M) - v_4(t_M) + v_M) + \lambda_{wtM2}(w_5(t_M) - w_4(t_M) + w_M). \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Необходимые условия оптимальности:

- а) уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряжённая система уравнений, условие стационарности по  $\overrightarrow{(x_j)}$ ),  $\overrightarrow{(p_{xj})} = -\overrightarrow{\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\right)}$ , где  $x_j$  пробегает набор из всех фазовых переменных задач, а  $i$  — номер рассматриваемого участка траектории имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{xi} = \sum_{B=\{E, S, M\}} \left( -\frac{\mu_B}{r_{Bi}^5} (p_{ui}(r_{Bi} - 3x_{Bi}^2) - 3(p_{vi}x_{Bi}z_{Bi} + p_{wi}x_{Bi}y_{Bi})) \right), \\ \dot{p}_{yi} = \sum_{B=\{E, S, M\}} \left( -\frac{\mu_B}{r_{Bi}^5} (p_{vi}(r_{Bi} - 3y_{Bi}^2) - 3(p_{ui}y_{Bi}z_{Bi} + p_{wi}y_{Bi}x_{Bi})) \right), \\ \dot{p}_{zi} = \sum_{B=\{E, S, M\}} \left( -\frac{\mu_B}{r_{Bi}^5} (p_{wi}(r_{Bi} - 3z_{Bi}^2) - 3(p_{ui}z_{Bi}y_{Bi} + p_{vi}z_{Bi}x_{Bi})) \right), \\ \dot{p}_{ui} = -p_{xi}, \quad \dot{p}_{vi} = -p_{yi}, \quad \dot{p}_{wi} = -p_{zi}. \end{array} \right. \quad (3.1.18)$$

Для задачи перелёта „назад“ суммирование ведётся по  $B = \{S, M\}$ ;

- б) Условия трансверсальности по импульсам  $\frac{\partial l}{\partial \Delta u_j} = \frac{\partial l}{\partial \Delta v_j} = \frac{\partial l}{\partial \Delta w_j} = 0$ , где  $j = 0, 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial l}{\partial \Delta u_0} = \lambda_0 \frac{\Delta u_0}{\Delta_1} - \lambda_{rv0}x_1(t_0) - 2\lambda_{v0}(u_1(t_0) - \Delta u_0) + \lambda_{iB0}y(t_0) = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta v_0} = \lambda_0 \frac{\Delta v_0}{\Delta_1} - \lambda_{rv0}y_1(t_0) - 2\lambda_{v0}(v_1(t_0) - \Delta v_0) + \lambda_{iB0}y(t_0) = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta w_0} = \lambda_0 \frac{\Delta w_0}{\Delta_1} - \lambda_{rv0}z_1(t_0) - 2\lambda_{v0}(w_1(t_0) - \Delta w_0) = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta u_1} = \lambda_0 \frac{\Delta u_1}{\Delta_2} - \lambda_{uF} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta v_1} = \lambda_0 \frac{\Delta v_1}{\Delta_2} - \lambda_{vF} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta w_1} = \lambda_0 \frac{\Delta w_1}{\Delta_2} - \lambda_{wF} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.19)$$

в задаче перелёта „вперёд“. И

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \Delta u_2} = \lambda_0 \frac{\Delta u_2}{\Delta_3} - \lambda_{uF2} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta v_2} = \lambda_0 \frac{\Delta v_2}{\Delta_3} - \lambda_{vF2} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta w_2} = \lambda_0 \frac{\Delta w_2}{\Delta_3} - \lambda_{wF2} = 0 \end{cases} \quad (3.1.20)$$

в задаче возврата к Земле.

Условия трансверсальности по  $\overrightarrow{(x_j)}$ ,  $p_{x_j}(\tau_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_j(\tau_k)}$ , где  $x_j$  пробегает все фазовые переменные, в задаче „вперёд“  $k = \overline{0, 3}$ ,  $\tau_0 = t_0$ ,  $\tau_1 = t_E$ ,  $\tau_2 = t_M$ ,  $\tau_3 = t_1$ .

В момент времени  $t = t_0$ :

$$\begin{cases} p_{x1}(t_0) = 2\lambda_{r0}x_1(t_0) + \lambda_{rv0}(u_1(t_0) - \Delta u_0) + \lambda_{iB0}(v_1(t_0) - \Delta v_0), \\ p_{y1}(t_0) = 2\lambda_{r0}y_1(t_0) + \lambda_{rv0}(v_1(t_0) - \Delta v_0) - \lambda_{iB0}(u_1(t_0) - \Delta u_0), \\ p_{z1}(t_0) = 2\lambda_{r0}z_1(t_0) + \lambda_{rv0}(w_1(t_0) - \Delta w_0), \\ p_{u1}(t_0) = \lambda_{rv0}x_1(t_0) + 2\lambda_{v0}(u_1(t_0) - \Delta u_0) - \lambda_{iB0}y_1(t_0), \\ p_{v1}(t_0) = \lambda_{rv0}y_1(t_0) + 2\lambda_{v0}(v_1(t_0) - \Delta v_0) + \lambda_{iB0}x_1(t_0), \\ p_{w1}(t_0) = \lambda_{rv0}z_1(t_0) + 2\lambda_{v0}(w_1(t_0) - \Delta w_0). \end{cases} \quad (3.1.21)$$

В момент времени  $t = t_1$ :

$$\begin{cases} p_{x3}(t_1) = -\lambda_{xF}, & p_{y3}(t_1) = -\lambda_{yF}, & p_{z3}(t_1) = -\lambda_{zF}, \\ p_{u3}(t_1) = -\lambda_{uF}, & p_{v3}(t_1) = -\lambda_{vF}, & p_{w3}(t_1) = -\lambda_{wF}. \end{cases} \quad (3.1.22)$$

В момент времени  $t = t_E$ :

$$\begin{cases} p_{x1}(t_E) = \lambda_{xtE}, & p_{y1}(t_E) = \lambda_{ytE}, & p_{z1}(t_E) = \lambda_{ztE}, \\ p_{u1}(t_E) = \lambda_{utE}, & p_{v1}(t_E) = \lambda_{vtE}, & p_{w1}(t_E) = \lambda_{wtE}, \\ p_{x2}(t_E) = \lambda_{xtE}, & p_{y2}(t_E) = \lambda_{ytE}, & p_{z2}(t_E) = \lambda_{ztE}, \\ p_{u2}(t_E) = \lambda_{utE}, & p_{v2}(t_E) = \lambda_{vtE}, & p_{w2}(t_E) = \lambda_{wtE}. \end{cases} \quad (3.1.23)$$

В момент времени  $t = t_M$ :

$$\begin{cases} p_{x2}(t_M) = \lambda_{xtM}, & p_{y2}(t_M) = \lambda_{ytM}, & p_{z2}(t_M) = \lambda_{ztM}, \\ p_{u2}(t_M) = \lambda_{utM}, & p_{v2}(t_M) = \lambda_{vtM}, & p_{w2}(t_M) = \lambda_{wtM}, \\ p_{x3}(t_M) = \lambda_{xtM}, & p_{y3}(t_M) = \lambda_{ytM}, & p_{z3}(t_M) = \lambda_{ztM}, \\ p_{u3}(t_M) = \lambda_{utM}, & p_{v3}(t_M) = \lambda_{vtM}, & p_{w3}(t_M) = \lambda_{wtM}. \end{cases} \quad (3.1.24)$$

И для задачи возврата к Земле. В момент времени  $t = t_2$ :

$$\begin{cases} p_{x4}(t_2) = \lambda_{xF2}, & p_{y4}(t_2) = \lambda_{yF2}, & p_{z4}(t_2) = \lambda_{zF2}, \\ p_{u4}(t_2) = \lambda_{uF2}, & p_{v4}(t_2) = \lambda_{vF2}, & p_{w4}(t_2) = \lambda_{wF2}. \end{cases} \quad (3.1.25)$$

В момент времени  $t = t_{M \text{ back}}$ :

$$\begin{cases} p_{x4}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{xtM2}, & p_{y4}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{ytM2}, & p_{z4}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{ztM2}, \\ p_{u4}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{utM2}, & p_{v4}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{vtM2}, & p_{w4}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{wtM2}, \\ p_{x5}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{xtM2}, & p_{y5}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{ytM2}, & p_{z5}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{ztM2}, \\ p_{u5}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{utM2}, & p_{v5}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{vtM2}, & p_{w5}(t_{M \text{ back}}) = \lambda_{wtM2}. \end{cases} \quad (3.1.26)$$

В момент времени  $t = t_3$ :

$$\begin{cases} p_{x5}(t_3) = \lambda_{xE}, & p_{y5}(t_3) = \lambda_{yE}, & p_{z5}(t_3) = \lambda_{zE}, \\ p_{u5}(t_3) = p_{v5}(t_3) = p_{w5}(t_3) = 0; \end{cases} \quad (3.1.27)$$

в) условия стационарности по  $t_k$ :

$$\begin{aligned} H_1(t_0) &= \frac{\partial l}{\partial t_0} = 0, \\ H_3(t_1) &= -\frac{\partial l}{\partial t_1} = -p_{x3}(t_1)u_F(t_1) - p_{y3}(t_1)v_F(t_1) - p_{z3}(t_1)w_F(t_1), \\ &\quad -p_{u3}(t_1)g_{xF}(t_1) - p_{v3}(t_1)g_{yF}(t_1) - p_{w3}(t_1)g_{zF}(t_1), \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

где  $\{g_{xF}, g_{yF}, g_{zF}\}$  – компоненты вектора ускорения Фобоса в марсоцен-

трической СК, для задачи „вперёд“. И

$$\begin{aligned} H_4(t_2) &= \frac{\partial l}{\partial t_2} = p_{x4}(t_2)u_F(t_2) + p_{y4}(t_2)v_F(t_2) + p_{z4}(t_2)w_F(t_2) + \\ &\quad + p_{u4}(t_2)g_{xF}(t_2) + p_{v4}(t_2)g_{yF}(t_2) + p_{w4}(t_2)g_{zF}(t_2), \\ H_5(t_3) &= -\frac{\partial l}{\partial t_3} = -p_{x5}(t_3)u_E(t_3) - p_{y5}(t_3)v_E(t_3) - p_{z5}(t_3)w_E(t_3) - \\ &\quad - p_{u5}(t_3)g_{xE}(t_3) - p_{v5}(t_3)g_{yE}(t_3) - p_{w5}(t_3)g_{zE}(t_3) \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

для задачи возврата;

г) условия дополняющей нежёсткости:

нет, так как в исходной задаче отсутствуют условия вида „меньше или равно“;

д) условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ ;

е) условие нормировки (множители Лагранжа  $\lambda$ ,  $\mathbf{p}_{ij}(\cdot)$  могут быть выбраны с точностью до положительного множителя);

ж) НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю).

### 3.1.3 Исследование необходимых условий оптимальности

Импульсы  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  не равны 0, иначе КА не уйдёт с исходной орбиты или не затормозится на конечной орбите.

Из условий б) и в) получается, что в задаче „вперёд“:

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta v_0 \\ \Delta w_0 \end{pmatrix} = \Delta_1 \begin{pmatrix} p_{u1}(t_0) \\ p_{v1}(t_0) \\ p_{w1}(t_0) \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta w_1 \end{pmatrix} = \Delta_2 \begin{pmatrix} p_{u3}(t_1) \\ p_{v3}(t_1) \\ p_{w3}(t_1) \end{pmatrix}. \quad (3.1.30)$$

В задаче „назад“:

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \Delta w_2 \end{pmatrix} = \Delta_3 \begin{pmatrix} p_{u4}(t_2) \\ p_{v4}(t_2) \\ p_{w4}(t_2) \end{pmatrix}. \quad (3.1.31)$$

Если в качестве условия нормировки выбрать  $\lambda_0 = 1$ , то из (3.1.31) получается выражение  $p_{u1}$ ,  $p_{v1}$ ,  $p_{w1}$ ,  $p_{u3}$ ,  $p_{v3}$ ,  $p_{w3}$  через импульсы. В аномальном

случае задачи „вперёд“  $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_{v0} = \lambda_{rv0} = \lambda_{iB0} = 0, p_{u1}(t_0) = p_{v1}(t_0) = p_{w1}(t_0) = p_{u3}(t_1) = p_{v3}(t_1) = p_{w3}(t_1) = 0,$

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} p_{x1}(t_0) \\ p_{y1}(t_0) \\ p_{z1}(t_0) \end{pmatrix} = 2\lambda_{r0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.1.32)$$

Этот случай должен исследоваться отдельно, в качестве параметров пристрелки в нём можно выбрать  $t_0, \lambda_{r0}, \varphi_0, \Omega_0, \Delta u_0, \Delta v_0, \Delta w_0.$

Случай  $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$  необходимо рассматривать отдельно, но из приближённого решения задачи с использованием решения задач Ламберта можно предположить, что этот случай неоптимален. В этом случае параметрами пристрелки выбираются величины:  $t_0, \lambda_{r0}, \lambda_{iB0}, \Omega_0, \Delta u_0, \Delta v_0, \Delta w_0.$

Использование формул пересчёта (3.1.2) в момент времени  $t = t_E,$  формул пересчёта (3.1.3) в момент времени  $t = t_M,$  формул пересчёта (3.1.4) в момент времени  $t = t_{Mback}$  и условий склейки сопряжённых переменных, следующих из пункта в) позволяет свести решения четырёхточечной краевой задачи „вперёд“ и трёхточечной задачи перелёта „назад“ к решению двухточечных.

### 3.1.4 Краевая задача принципа максимума

На основе принципа максимума Льва Семёновича Понтрягина решение задач оптимального управления переменной структуры сведено к решению краевых задачи. Дифференциальные связи задач имеют вид: (3.1.1), (3.1.18).

Краевыми условиями в задаче перелёта „вперёд“ являются соотношения (3.1.5), (3.1.6), (3.1.21), (3.1.22), (3.1.28) в моменты времени  $t = t_0, t = t_1.$

Краевыми условиями в задаче перелёта „назад“ являются соотношения (3.1.7), (3.1.8), (3.1.27), (3.1.29) в моменты времени  $t = t_2, t = t_3.$

Вместо краевых условий на сопряжённые переменные (3.1.23)–(3.1.26), как было отмечено выше, в моменты времени  $t = t_E, t = t_M$  и  $t = t_{Mback}$  используются условия их склейки, следующие из пункта в), для фазовых переменных используются формулы пересчёта (3.1.2)–(3.1.4).

### 3.1.5 Численное решение краевой задачи

Полученные краевые задачи принципа максимума 36-го и 24-го порядка нелинейны и могут быть решены лишь численно. В работе они решаются методом стрельбы [24, гл. 2], [9, §2] с использованием следующей вычислительной схемы.

В задаче перелёта „вперёд“ в качестве параметров пристрелки было выбрано 12 значений:  $t_0, \Omega_0, \varphi_0, \Delta u_0, \Delta v_0, \Delta w_0, t_1, \Delta u_1, \Delta v_1, \Delta w_1$  и любые два значения из  $\{p_{x3}(t_1), p_{y3}(t_1), p_{z3}(t_1)\}$ . По этим величинам можно вычислить значения всех фазовых и сопряжённых переменных в моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ .

А именно, по значениям  $t_0, \Omega_0, \varphi_0, \Delta u_0, \Delta v_0, \Delta w_0$  аналитически находятся значения  $x, y, z, u, v, w, p_{u1}, p_{v1}, p_{w1}$  в момент времени  $t_0$ . По значениям  $p_{u1}, p_{v1}, p_{w1}$  аналитически находятся  $\lambda_{rv0}, \lambda_{iB0}$ . Из условия  $H_1(t_0) = 0$  выражается  $\lambda_{r0}$  и по  $\lambda_{rv0}, \lambda_{iB0}, \lambda_{r0}$  находятся значения  $p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}$  в момент времени  $t_0$ .

По  $t_1$  из эфемерид находятся значения  $x, y, z, u, v, w$  в момент времени  $t_1$ . По  $\Delta u_1, \Delta v_1, \Delta w_1$  аналитически находятся значения  $p_{u3}, p_{v3}, p_{w3}$ . Единственный неизвестный параметр из  $\{p_{x3}(t_1), p_{y3}(t_1), p_{z3}(t_1)\}$  находится из условия  $H_3(t_1) = -\frac{\partial l}{\partial t_1}$ .

В качестве невязок используются 12 условий склейки фазовых и сопряжённых переменных в момент времени  $t_E$ .

В задаче перелёта „назад“ в качестве параметров пристрелки было выбрано 7 значений:  $t_2, t_3, \Delta u_2, \Delta v_2, \Delta w_2$  и любые два значения из  $\{p_{x4}(t_2), p_{y4}(t_2), p_{z4}(t_2)\}$ . По этим величинам можно вычислить значения всех фазовых и сопряжённых переменных в момент времени  $t_2$ .

По  $t_2$  из эфемерид находятся значения  $x, y, z, u, v, w$  в момент времени  $t_2$ . По  $\Delta u_2, \Delta v_2, \Delta w_2$  аналитически находятся значения  $p_{u4}, p_{v4}, p_{w4}$ . Единственный неизвестный параметр из  $\{p_{x4}(t_2), p_{y4}(t_2), p_{z4}(t_2)\}$  находится из условия  $H_4(t_2) = \frac{\partial l}{\partial t_2}$ .

В качестве невязок используется 7 условий в момент времени  $t_3$ :

$$x_5 = x_E, y_5 = y_E, z_5 = z_E, p_{u5} = p_{v5} = p_{w5} = 0, H_5(t_3) = -\frac{\partial l}{\partial t_3}. \quad (3.1.33)$$



### 3.1.6 Анализ полученных результатов

Поставленная задача решена численно. В качестве результатов далее сначала описана часть экстремали, соответствующая перелёту от Земли к Марсу в импульсной постановке с учётом притяжения Солнца, Земли, Марса на всей траектории, затем описан перелёт обратно.

Характеристики полученной в результате расчётов траектории, проекция которой на среднюю плоскость эклиптики  $SX_2Y_2$  представлена на рис. 3.1, следующие.

В момент времени  $t_0$  (25 октября 2026 г., 01 : 36 : 17)  $x_1 = 6069.19402111$  км,  $y_1 = -2534.13970440$  км,  $z_1 = -123.32428113$  км,  $u_1 = 2.89066265$  км/с,  $v_1 = 6.48721021$  км/с,  $w_1 = 8.95555644$  км/с,  $p_{x1} = 64.25834307$ ,  $p_{y1} = -26.82979234$ ,  $p_{z1} = -1.30592131$ ,  $p_{u1} = 0.25285249$ ,  $p_{v1} = 0.56743263$ ,  $p_{w1} = 0.78363629$ ,  $\Delta_0 = 3.64567870$  км/с. В момент времени  $t_1$  (1 сентября 2027 г., 15 : 42 : 34)  $x_3 = 310.16152790$  км,  $y_3 = 8399.82495280$  км,  $z_3 = 3971.52777442$  км,  $u_3 = -3.90921026$  км/с,  $v_3 = -0.41179295$  км/с,  $w_3 = 0.71485390$  км/с,  $p_{x3} = 0.17215218$ ,  $p_{y3} = -11.43171012$ ,  $p_{z3} = -0.54153935$ ,  $p_{u3} = 0.99511150$ ,  $p_{v3} = 0.01078953$ ,  $p_{w3} = 0.09816656$ ,  $\Delta_1 = 2.00484698$  км/с. Моменты времени перехода между различными СК:  $t_E = t_0 + 3.12124399$  дней,  $t_M = t_1 - 2.71974141$  дней. Значение функционала  $B_0$  составляет 5.65052568 км/с.

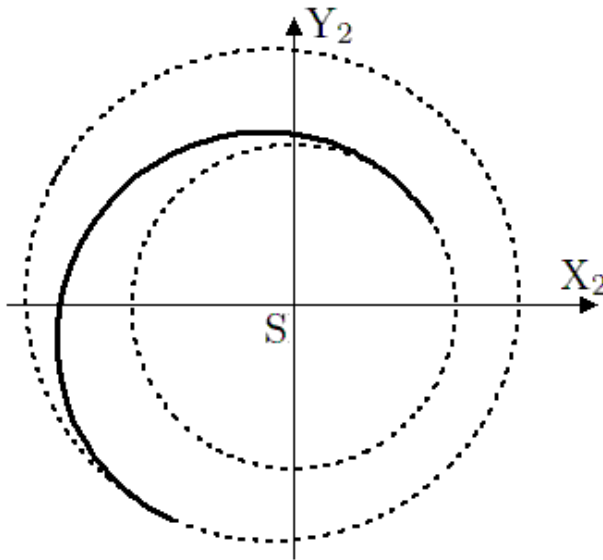


Рис. 3.1: Траектория перелёта к Марсу.

Проверим, что КА не разобьётся о поверхность Земли, Марса, Луны. Будем считать Землю, Марс и Луну шарами радиусами  $R_E$ , 3402 км и 1738.09 км соответственно, центры которых движутся в соответствии с эфемеридами DE424. Тогда на найденной траектории минимальное расстояние от КА до поверхности Земли достигается в момент времени  $t_0$  и составляет 200 км, до поверхности Марса –  $t_1$ , 5894.57422248 км, до поверхности Луны

ны – 25 октября 2026 г. в 01 : 52 : 47, 363966.90171942 км.

Сравним функционал полученной экстремали с суммой импульсов гомановского перехода. Для этого будем считать, что Земля и Марс движутся по компланарным круговым орбитам с радиусами  $R_{SE} = 1$  а.е. и  $R_{SM} = 1.5236878$  а.е. Тогда большая полуось гомановского эллипса  $a = (R_{SM} + R_{SE})/2$ . Избытки скорости КА на гомановской траектории будут составлять: в начале относительно Земли  $\Delta_E = |v_{hom\ E} - v_E|$  и в конце относительно Марса  $\Delta_M = |v_{hom\ M} - v_M|$ , где круговые скорости Земли и Марса:  $v_E = \sqrt{\frac{\mu_s}{R_{SE}}}$  и  $v_M = \sqrt{\frac{\mu_s}{R_{SM}}}$ , скорости КА на гомановской траектории:  $v_{hom\ E} = \sqrt{\frac{\mu_s R_{SM}}{a R_{SE}}}$ ,  $v_{hom\ M} = \sqrt{\frac{\mu_s R_{SE}}{a R_{SM}}}$ . Тогда  $\Delta_E = 2.94472671$  км/с,  $\Delta_M = 2.64892503$  км/с. Будем считать, что  $\Delta_E$ ,  $\Delta_M$  достигаются КА не в центрах Земли и Марса, а в некоторых точках их сфер действия, и пересчитаем их в импульсы  $\Delta'_E$  на КОИС Земли высоты  $h_E$  и  $\Delta'_M$  на КОИС Марса высоты  $h_M$ . Тогда  $\Delta'_E = 3.57424747$  км/с,  $\Delta'_M = 1.8548435123$  км/с, и сумма импульсов гомановской траектории 5.4290909859 км/с меньше функционала исходной задачи всего на 221.43469 м/с.

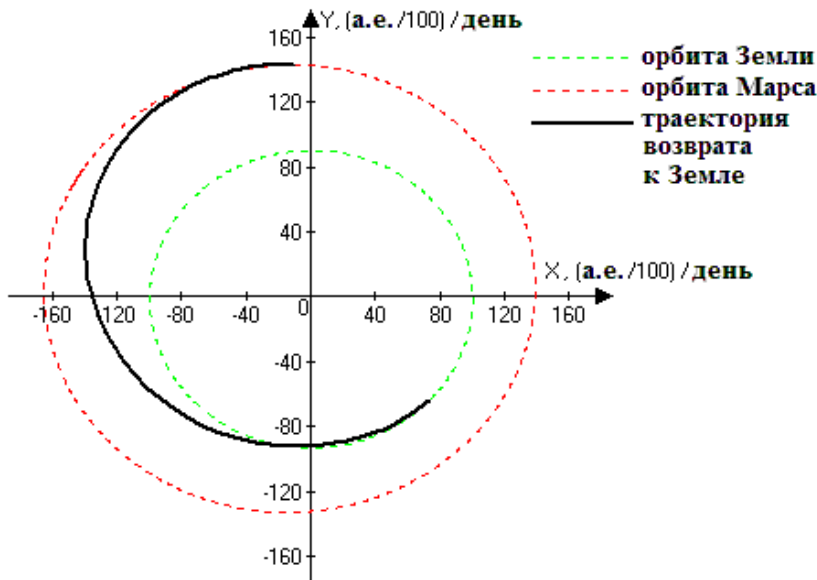


Рис. 3.2: Траектория возврата к Земле.

в этих единицах получились следующие значения. Параметры пристрелки:  $t_2 = 10473.320765043647$  измеряется от начала 2000 года и

Далее приводятся характеристики лучшей среди найденных траектории возврата к Земле. Импульс на ней составляет  $\Delta_2 = 1.7665966547$  км/с. Проекция на среднюю плоскость эклиптики представлена на рис. 3.2.

Основными расчетными единицами были а.е./100 и  $E.D.$ ,

соответствует 03 сентября 2028, 19:40:49,  $\Delta u_2 = 0.086556967079$ ,  $\Delta v_2 = -0.013493458898$ ,  $\Delta w_2 = -0.052305217009$ ,  $p_{x_4}(t_2) = -3.617755864210$ ,  $p_{y_4}(t_2) = -9.791725390030$ ,  $t_3 = 10812.641836908319$  измеряется от начала 2000 года и соответствует 09 августа 2029, 03:23:10.

Ниже приводятся значения всех фазовых и сопряжённых переменных на краях.

В момент времени  $t_2$  в марсоцентрической СК:

$$\begin{aligned} x_4 &= -0.002021433417266233 \text{ а.е./100}, & y_4 &= -0.005573132865659488 \\ &\text{а.е./100}, & z_4 &= -0.001854918299851107 \text{ а.е./100}, & u_4 &= 0.191526132587222231 \\ &(\text{а.е./100})/\text{день}, & v_4 &= -0.028068127930405837 \text{ (а.е./100)}/\text{день}, & w_4 &= \\ &= -0.117759090807815964 \text{ (а.е./100)}/\text{день}, & p_{x_4} &= -3.617755864209901695, \\ p_{y_4} &= -9.791725390029750287, & p_{z_4} &= -3.458635580895180972, \\ p_{u_4} &= 0.848352406956578653, & p_{v_4} &= -0.132250571164289232, & p_{w_4} &= \\ &= -0.512648007933025007. \end{aligned}$$

В момент времени  $t_3$  в гелиоцентрической СК:

$$\begin{aligned} x_5 &= 73.460788994104134986 \text{ а.е./100}, & y_5 &= -64.112490542847424990 \\ &\text{а.е./100}, & z_5 &= -27.791314037331012798 \text{ а.е./100}, & u_5 &= 1.399021165255804000 \\ &(\text{а.е./100})/\text{день}, & v_5 &= 1.137722933993970065 \text{ (а.е./100)}/\text{день}, & w_5 &= \\ &= 0.560908609045517648 \text{ (а.е./100)}/\text{день}, & p_{x_5} &= -0.001339442130252593, \\ p_{y_5} &= -0.000567686587674739, & p_{z_5} &= 0.004775112367720742, \\ p_{u_5} &= -0.000000135080984988, & p_{v_5} &= 0.000000040852305522, & p_{w_5} &= \\ &= 0.000000001147397038. \end{aligned}$$

Исходная задача была решена, приведены характеристики найденных экстремалей и их анализ. Представленных данных достаточно для повторения расчётов.

## 3.2 Управление импульсами и малой тягой

Оптимизируется траектория полёта космического аппарата к Марсу и его спутнику Фобосу. На всей траектории учитывается притяжение трёх тел: Солнца, Земли, Марса. Положения Земли и Марса соответствуют эфемеридам DE424, а положение Фобоса — эфемеридам MAR097. Управление осу-

ществляется двумя импульсами у Земли и Марса и двигателем малой тяги во время перелёта. Момент старта КА от Земли выбирается с начала 2020 по конец 2030 года, общее время экспедиции ограничено 1300 днями. Минимизируются затраты массы. На основе принципа максимума Понтрягина решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи. Краевая задача решается численно методом стрельбы с использованием многоточечной пристрелки.

### 3.2.1 Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления межпланетным пространственным перелётом КА. Перелёт начинается на круговой орбите искусственного спутника Земли высотой  $h_{\text{е}} = 200$  км с наклоном  $i_{\text{в}} = 51.6^\circ$  к экватору и заканчивается на орбите естественного спутника Марса Фобоса высотой  $h_{\text{м}} \approx 9300$  км. Долгота восходящего узла  $\Omega_0$  исходной КОИСЗ и положение  $\varphi_0$  КА на ней в начальный момент времени  $t_0$  оптимизируются.

В данной задаче осуществляется сквозная оптимизация с подробным рассмотрением планетоцентрических участков и учётом эфемерид.

Предполагается, что сход КА с КОИСЗ в начальный момент времени  $t_0$  осуществляется за счет импульсного воздействия  $\Delta_{\text{Е}} \equiv (\Delta u_0, \Delta v_0, \Delta w_0)$ . В конечный момент времени  $t_1$  координаты КА совпадают с координатами Фобоса, а их скорости выравниваются посредством импульсного воздействия  $\Delta_{\text{М}} \equiv (\Delta u_1, \Delta v_1, \Delta w_1)$ .

На всей траектории учитывается притяжение Солнца, Земли, Марса, гравитационные поля которых считаются центральными ньютоновскими. Фобос и КА представляют собой непритягивающие материальные точки. Предполагается, что КА должен стартовать с 2020 по 2030 гг. Моменты старта КА от Земли  $t_0$  и прилета к Фобосу  $t_1$  оптимизируются. Общая продолжительность перелёта ограничена:  $t_1 - t_0 \leq 1300$  дней. Положения центров Земли и Марса соответствуют эфемеридам DE424, Фобоса — MAR097.

Масса КА при старте с орбиты ИС Земли составляет  $M_0 = 11364$  кг, что соответствует максимально возможной массе, необходимой для реализации первого импульса. Продолжительный во времени разгон у Земли, аппрок-

симирующийся в работе мгновенным импульсом, осуществляется разгонным блоком Фрегат с тягой  $T = 19613$  Н, удельной тягой  $P_{уд} = 331$  с, сухой массой  $M_{Фрегат} = 735$  кг. На протяжении траектории могут включаться и выключаться двигатели малой тяги. В качестве таких двигателей в работе рассматривается разрабатываемый в данный момент СПД-290, его характеристики:  $T = 1.5$  Н,  $P_{уд} = 3300$  с,  $M_{МТ}$  оценивается в промежутке от 300 до 500 кг. Импульс у Марса осуществляется двигательной установкой перелётного модуля с параметрами:  $T = 1530$  Н,  $P_{уд} = 304$  с,  $M_{ДУПМ} = 180$  кг. Максимируется доставляемая к Фобосу в момент времени  $t_1$  масса  $M_k \equiv M(t_1)$ :

$$M_k = \left[ M_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{C_{Фрегат}}} - M_{Фрегат} - \left( \frac{T_{МТ} \cdot \Delta \tau_{МТ}}{C_{МТ}} + M_{МТ} \right) \right] \cdot e^{-\frac{\Delta M}{C_{ДУПМ}}} - M_{ДУПМ}, \quad (3.2.1)$$

где  $C_{ду} = g_E P_{уд}$  — скорость истечения реактивной струи соответствующей двигательной установки,  $\Delta \tau_{МТ}$  — суммарное время работы двигателей малой тяги.

Отметим, что в случае импульсной постановки задачи неизвестным управлением является конечное число величин, а именно, моменты приложения импульсов, их величина и направление. Принципиальное отличие задачи с малой тягой в том, что искомое управление становится кусочно-непрерывной функцией, которую необходимо определять уже в каждой точке траектории.

В связи с эффектом потери точности движение КА рассматривается в трёх различных невращающихся декартовых СК с осями, параллельными осям СК J2000: сначала в геоцентрической, затем в гелиоцентрической и на последнем участке траектории в марсоцентрической. Ниже во всех формулах данного раздела  $i = 1, 2, 3$  — номер участка траектории.

### 3.2.2 Формализация

Рассматриваемая задача формализуется как задача оптимального управления совокупностью динамических систем. Вид дифференциальных связей будет меняться в зависимости от участка траектории, так как перелёт рассматривается в различных СК.

Обозначим компоненты векторов положения  $\{x_i, y_i, z_i\}$  и скорости

$\{u_i, v_i, w_i\}$  КА соответственно на каждом из трёх участков траектории  $i = 1, 2, 3$ ,  $\{x_{SE}, y_{SE}, z_{SE}\}$  и  $\{x_{SM}, y_{SM}, z_{SM}\}$  — компоненты векторов положения Земли и Марса в гелиоцентрической СК,  $\{x_{ME}, y_{ME}, z_{ME}\}$  — компоненты разности этих векторов. Введем обозначения:  $x_{E1} = x_1, y_{E1} = y_1, z_{E1} = z_1$ ,  $x_{S1} = x_1 + x_{SE}, y_{S1} = y_1 + y_{SE}, z_{S1} = z_1 + z_{SE}$ ,  $x_{M1} = x_1 + x_{ME}, y_{M1} = y_1 + y_{ME}, z_{M1} = z_1 + z_{ME}$ ,  $x_{E2} = x_2 - x_{SE}, y_{E2} = y_2 - y_{SE}, z_{E2} = z_2 - z_{SE}$ ,  $x_{S2} = x_2, y_{S2} = y_2, z_{S2} = z_2$ ,  $x_{M2} = x_2 - x_{SM}, y_{M2} = y_2 - y_{SM}, z_{M2} = z_2 - z_{SM}$ ,  $x_{E3} = x_3 - x_{ME}, y_{E3} = y_3 - y_{ME}, z_{E3} = z_3 - z_{ME}$ ,  $x_{S3} = x_3 + x_{SM}, y_{S3} = y_3 + y_{SM}, z_{S3} = z_3 + z_{SM}$ ,  $x_{M3} = x_3, y_{M3} = y_3, z_{M3} = z_3$ . Тогда  $r_{Ei} = \sqrt{x_{Ei}^2 + y_{Ei}^2 + z_{Ei}^2}$ ,  $r_{Si} = \sqrt{x_{Si}^2 + y_{Si}^2 + z_{Si}^2}$  и  $r_{Mi} = \sqrt{x_{Mi}^2 + y_{Mi}^2 + z_{Mi}^2}$  — расстояния от КА до центров Земли, Солнца и Марса соответственно на каждом из участков.

Системы дифференциальных уравнений управляемого движения центра масс КА на каждом из участков траектории имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = u_i, \quad \dot{u}_i = -g_{xi} - \sum_{B=\{E, S, M\}} \mu_B \frac{x_{Bi}}{r_{Bi}^3} + \frac{P_i}{m_i} \cos \xi_i \cos \eta_i \equiv \varphi_{ui}, \\ \dot{y}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = -g_{yi} - \sum_{B=\{E, S, M\}} \mu_B \frac{y_{Bi}}{r_{Bi}^3} + \frac{P_i}{m_i} \sin \xi_i \cos \eta_i \equiv \varphi_{vi}, \\ \dot{z}_i = w_i, \quad \dot{w}_i = -g_{zi} - \sum_{B=\{E, S, M\}} \mu_B \frac{z_{Bi}}{r_{Bi}^3} + \frac{P_i}{m_i} \sin \eta_i \equiv \varphi_{wi}, \quad \dot{m}_i = -\frac{P_i}{C_{MT}}, \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

где  $\{g_{x1}, g_{y1}, g_{z1}\}, \{g_{x3}, g_{y3}, g_{z3}\}$  — компоненты векторов ускорений Земли и Марса соответственно в гелиоцентрической СК,  $g_{x2} \equiv g_{y2} \equiv g_{z2} \equiv 0$ ,  $m_i(t) \equiv M(t)/M_{t0}$  — обезразмеренная масса,  $M_{t0} = M_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{C_{Фрегат}}} - M_{Фрегат}$  — масса КА после отработки Фрегата.  $P_i(t)$  — модуль вектора ускорения за счет реактивной тяги, изменяющийся в пределах от 0 до  $P_{max} \equiv T_{MT}/M_{t0}$ ,  $\xi_i$  и  $\eta_i$  — углы, определяющие направление вектора тяги.

Первое слагаемое из выражений для изменения скоростей в (3.2.2) возникает из-за неинерциальности рассматриваемых СК, остальные отражают закон всемирного тяготения: на КА действуют силы притяжения со стороны Солнца, Земли и Марса, равные  $\mu_B \frac{M}{r_B^2}$ , где  $M$  — масса КА,  $v$  — космическое тело (E — Земля, S — Солнце, M — Марс),  $r_B$  — расстояние от этого космического тела до КА,  $\mu_B$  — гравитационный параметр тела  $v$ . Необходимые константы взяты из [46].

Пусть  $\{v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}\}$ ,  $\{v_{x3}, v_{y3}, v_{z3}\}$  — компоненты векторов скоростей Земли и Марса соответственно в гелиоцентрической СК. Переход из первой СК во вторую происходит в момент времени  $t_E$ , когда КА пересекает сферу действия Земли:  $x_2 = x_1 + x_{SE}$ ,  $y_2 = y_1 + y_{SE}$ ,  $z_2 = z_1 + z_{SE}$ ,  $u_2 = u_1 + v_{x1}$ ,  $v_2 = v_1 + v_{y1}$ ,  $w_2 = w_1 + v_{z1}$ ,  $m_2 = m_1$ . В момент пересечения КА сферы действия Марса  $t_M$  осуществляется переход к описанию движения КА в марсоцентрической СК:  $x_3 = x_2 - x_{SM}$ ,  $y_3 = y_2 - y_{SM}$ ,  $z_3 = z_2 - z_{SM}$ ,  $u_3 = u_2 - v_{x3}$ ,  $v_3 = v_2 - v_{y3}$ ,  $w_3 = w_2 - v_{z3}$ ,  $m_3 = m_2$ .

Обозначим  $\tilde{u}_1 = u_1 - \Delta u_0$ ,  $\tilde{v}_1 = v_1 - \Delta v_0$ ,  $\tilde{w}_1 = w_1 - \Delta w_0$  — компоненты вектора скорости КА до первого импульсного воздействия и  $\tilde{u}_3 = u_3 + \Delta u_1$ ,  $\tilde{v}_3 = v_3 + \Delta v_1$ ,  $\tilde{w}_3 = w_3 + \Delta w_1$  — компоненты вектора скорости КА после заключительного импульсного воздействия. До первого импульсного воздействия КА находится на КОИСЗ:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (R_E + h_E)^2, & x_1 \tilde{u}_1 + y_1 \tilde{v}_1 + z_1 \tilde{w}_1 = 0, & \tilde{u}_1^2 + \tilde{v}_1^2 + \tilde{w}_1^2 = \frac{\mu_E}{R_E + h_E}, \\ x_1 \tilde{v}_1 + y_1 \tilde{u}_1 = (R_E + h_E) \sqrt{\frac{\mu_E}{R_E + h_E}} \cos i_B, & \Delta u_0^2 + \Delta v_0^2 + \Delta w_0^2 = \Delta_E^2, & m_1 = 1. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Представленные соотношения обозначают, что расстояние от КА до центра Земли равно радиусу круговой орбиты, вектор скорости КА относительно Земли ортогонален радиус-вектору КА, величина вектора скорости КА относительно Земли равна круговой скорости, наклон орбиты соответствует выведению КА с космодрома Байконур, величина импульсного воздействия задана. После заключительного импульсного воздействия КА должен оказаться на орбите Фобоса:

$$x_3 = x_F, \quad y_3 = y_F, \quad z_3 = z_F, \quad \tilde{u}_3 = u_F, \quad \tilde{v}_3 = v_F, \quad \tilde{w}_3 = w_F, \quad \Delta u_1^2 + \Delta v_1^2 + \Delta w_1^2 = \Delta_M^2. \quad (3.2.4)$$

Представленные соотношения обозначают, что положение и скорость КА совпадают с положением и скоростью Фобоса, величина заключительного импульсного воздействия задана.

При решении задачи требуется определить неизвестные фазовые переменные  $x_i(\cdot)$ ,  $y_i(\cdot)$ ,  $z_i(\cdot)$ ,  $u_i(\cdot)$ ,  $v_i(\cdot)$ ,  $w_i(\cdot)$ ,  $m_i(\cdot)$ , импульсы  $\Delta_E$  и  $\Delta_M$ , моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ , управления  $P_i(\cdot)$ ,  $\xi_i(\cdot)$ ,  $\eta_i(\cdot)$ , удовлетворяющие системам дифференциальных уравнений (3.2.2), начальным условиям (3.2.3), конечным условиям (3.2.4) и минимизирующие функционал (3.2.1).

### 3.2.3 Краевая задача

Для применения принципа максимума Понтрягина введем неизвестные множители Лагранжа: константы  $\lambda_{r0}$ ,  $\lambda_{v0}$ ,  $\lambda_{rv0}$ ,  $\lambda_{iB0}$  и функции  $p_{xi}$ ,  $p_{yi}$ ,  $p_{zi}$ ,  $p_{ui}$ ,  $p_{vi}$ ,  $p_{wi}$ ,  $p_{mi}$ ; обозначим за  $\rho_i$  величину  $\sqrt{p_{ui}^2 + p_{vi}^2 + p_{wi}^2}$ ; за  $\{g_{xF}, g_{yF}, g_{zF}\}$  — компоненты вектора ускорения Фобоса в марсоцентрической СК; определим функцию переключения управления  $\chi_i = \rho_i - \frac{m_i p_{mi}}{C_{MT}}$ ; и выпишем функции Понтрягина:  $H_i = p_{xi}u_i + p_{yi}v_i + p_{zi}w_i + p_{ui}\varphi_{ui} + p_{vi}\varphi_{vi} + p_{wi}\varphi_{wi} + p_{mi}m_i$ .

Тогда система необходимых условий оптимальности задачи будет состоять из сопряженной системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{xi} = \sum_{B=\{E, S, M\}} \left( \frac{\mu_B}{r_{Bi}^3} (p_{ui}r_{Bi}^2 - 3x_{Bi}(p_{ui}x_{Bi} + p_{vi}y_{Bi} + p_{wi}z_{Bi})) \right), \quad \dot{p}_{ui} = -p_{xi}, \\ \dot{p}_{yi} = \sum_{B=\{E, S, M\}} \left( \frac{\mu_B}{r_{Bi}^3} (p_{vi}r_{Bi}^2 - 3y_{Bi}(p_{ui}x_{Bi} + p_{vi}y_{Bi} + p_{wi}z_{Bi})) \right), \quad \dot{p}_{vi} = -p_{yi}, \\ \dot{p}_{zi} = \sum_{B=\{E, S, M\}} \left( \frac{\mu_B}{r_{Bi}^3} (p_{wi}r_{Bi}^2 - 3z_{Bi}(p_{ui}x_{Bi} + p_{vi}y_{Bi} + p_{wi}z_{Bi})) \right), \quad \dot{p}_{wi} = -p_{zi}, \quad \dot{p}_{mi} = \frac{P_i \rho_i}{m_i^2}. \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

условий трансверсальности и стационарности при  $t = t_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{x1} = 2\lambda_{r0}x_1 + \lambda_{rv0}\tilde{u}_1 + \lambda_{iB0}\tilde{v}_1, \quad p_{y1} = 2\lambda_{r0}y_1 + \lambda_{rv0}\tilde{v}_1 - \lambda_{iB0}\tilde{u}_1, \\ p_{z1} = 2\lambda_{r0}z_1 + \lambda_{rv0}\tilde{w}_1, \quad p_{u1} = \lambda_{rv0}x_1 + 2\lambda_{v0}\tilde{u}_1 - \lambda_{iB0}y_1, \\ p_{v1} = \lambda_{rv0}y_1 + 2\lambda_{v0}\tilde{v}_1 + \lambda_{iB0}x_1, \quad p_{w1} = \lambda_{rv0}z_1 + 2\lambda_{v0}\tilde{w}_1, \quad H_1 = 0, \end{array} \right. \quad (3.2.6)$$

условия стационарности при  $t = t_1$ :

$$H_3 = p_{x3}u_F + p_{y3}v_F + p_{z3}w_F + p_{u3}g_{xF} + p_{v3}g_{yF} + p_{w3}g_{zF}, \quad (3.2.7)$$

условий оптимальности по импульсам:

$$\left( \begin{array}{c} \Delta u_0 \\ \Delta v_0 \\ \Delta w_0 \end{array} \right) = \Delta_E \left( \begin{array}{c} p_{u1}(t_0) \\ p_{v1}(t_0) \\ p_{w1}(t_0) \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} \Delta u_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta w_1 \end{array} \right) = \Delta_M \left( \begin{array}{c} p_{u3}(t_1) \\ p_{v3}(t_1) \\ p_{w3}(t_1) \end{array} \right), \quad (3.2.8)$$

условия оптимальности по управлению:

$$\begin{aligned} \chi_i > 0 &\Rightarrow \cos \xi_i \cos \eta_i = \frac{p_{ui}}{\rho_i}, \quad \sin \xi_i \cos \eta_i = \frac{p_{vi}}{\rho_i}, \quad \sin \eta_i = \frac{p_{wi}}{\rho_i}, \quad P_i = P_{max}; \\ \chi_i < 0 &\Rightarrow P_i = 0; \quad \chi_i = 0 \Rightarrow \forall P_i \in [0, P_{max}]. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$



Также из условий трансверсальности следует непрерывность сопряженных переменных в моменты времени  $t_E$  и  $t_M$ . Тем самым решение исходной задачи сводится к решению краевой задачи (3.2.2)–(3.2.9).

### 3.2.4 Вычислительная схема

Полученная краевая задача нелинейна, правые части ее системы дифференциальных уравнений имеют разрывы в заранее неизвестные моменты времени. В работе она решается методом стрельбы [24]. Составной частью метода стрельбы является модифицированный метод Ньютона. Серия задач Коши в методе Ньютона решается численно явным методом Рунге-Кутты 8-го порядка, основанным на расчетных формулах Дормана-Принса 8(7) (DOPRI8) с автоматическим выбором шага [99].

При решении задачи осуществлялся просчет вперед во времени от момента  $t_0$  к  $t_E$  и затем просчет назад от  $t_1$  к  $t_E$ . В зависимости от вида функции переключения на траектории 0, 2 или 3 активных участка. В качестве параметров пристрелки выбираются 14 значений: момент старта  $t_0$ , долгота восходящего узла исходной КО ИСЗ  $\Omega_0$ , угловое положение КА на ней  $\varphi_0$ , углы  $\xi_1(t_0)$  и  $\eta_1(t_0)$ ,  $p_{m1}(t_0)$ ,  $\lambda_{r0}$ , момент финиша  $t_1$ , углы  $\xi_3(t_1)$  и  $\eta_3(t_1)$ ,  $p_{x3}(t_1)$ ,  $p_{y3}(t_1)$ ,  $p_{z3}(t_1)$ ,  $p_{m3}(t_1)$ . Если на траектории два активных участка, то также задается еще два параметра пристрелки:  $\tau_1$  — конец первого активного участка и  $\tau_2$  — начало последнего активного участка. В случае наличия на траектории еще одного активного участка к параметрам пристрелки добавляется его начало  $\tau_3$  и конец  $\tau_4$ . Всего в схеме от 14 до 18 параметров пристрелки. По этим величинам можно вычислить значения всех фазовых и сопряженных переменных в моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ .

А именно, по значениям  $\Omega_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\xi_1(t_0)$  и  $\eta_1(t_0)$  аналитически находятся значения  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ ,  $p_{u1}$ ,  $p_{v1}$ ,  $p_{w1}$  в момент времени  $t_0$ . По значениям  $p_{u1}$ ,  $p_{v1}$  и  $p_{w1}$  аналитически находятся  $\lambda_{rv0}$  и  $\lambda_{iB0}$ . По  $\lambda_{rv0}$ ,  $\lambda_{iB0}$ ,  $\lambda_{r0}$  находятся значения  $p_{x1}$ ,  $p_{y1}$ ,  $p_{z1}$  в момент времени  $t_0$ .

По  $t_1$  из эфемерид находятся значения  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$ ,  $u_3$ ,  $v_3$ ,  $w_3$  в конце перелёта. По углам  $\xi_3$  и  $\eta_3$  находятся  $\Delta u_1$ ,  $\Delta v_1$ ,  $\Delta w_1$  и аналитически определяются значения  $p_{u3}$ ,  $p_{v3}$ ,  $p_{w3}$ . Величина  $m_3$  вычисляется по формуле (3.2.1).

В качестве невязок используется 12 условий склейки всех фазовых и сопряженных переменных в момент времени  $t_E$ , кроме находимой аналитически массы и склейки  $p_{m1}$  и  $p_{m2}$ , являющейся нормировкой задачи. А также два условия стационарности из (3.2.6) и (3.2.7) и 0 – 4 условий вида  $\chi_i(\tau_j) = 0$  для каждого  $\tau_j$ . Общее число невязок совпадает с числом параметров пристрелки.

Начальное приближение для метода Ньютона строится на основе решения серии задач Ламберта с учётом одного притягивающего центра на каждом участке перелёта (см. гл. 2) и последующего решения задачи Лагранжа (см. гл. 3.1), являющейся частным случаем текущей задачи, когда двигатели малой тяги не используются.

### 3.2.5 Результаты

В результате решения задачи удалось построить экстремали Понтрягина и провести их параметрическое исследование.

На рис. 3.3 представлена зависимость функционала — конечной массы от величины импульсов  $\Delta_E$  и  $\Delta_M$ . На горизонтальной оси 100% соответствует импульсному решению без малой тяги, при этом  $\Delta_E = 3.65$  км/с,  $\Delta_M = 2.00$  км/с. Далее  $\Delta_E$  и  $\Delta_M$  равномерно уменьшаются с постоянным соотношением между шагами изменения импульсов у Земли и Марса, до значений 3.22 км/с и 0.87 км/с соответственно. Это минимальные необходимые для безвиткового ухода от Земли и подлета к Фобосу величины импульсов, при дальнейшем их уменьшении возникнут дополнительные полные обороты КА у Земли и Марса, которые в работе не рассматривались. При уменьшении  $\Delta_E$  и  $\Delta_M$  продолжительность участков с малой тягой увеличивается. Проценты на горизонтальной оси отсчитываются по величине  $\Delta_E$  относительно исходного значения 3.65 км/с. Жирная точка соответствует импульсному решению без учёта массы  $M_{MT}$ , функционал при этом составляет  $M_{ИМП} = 1332.6$  кг. Выигрыш по функционалу при оценке веса  $M_{MT}$  от 500 до 300 кг составляет от 19 до 30%, значение функционала при этом меняется от 1590.3 до 1736.8 кг.

Между вертикальными пунктирными линиями на рис. 3.3 находится область, соответствующая трём активным участкам на траекториях, а вне нее — двум. Гладко продолжить решение при переходе через вертикальную пунк-

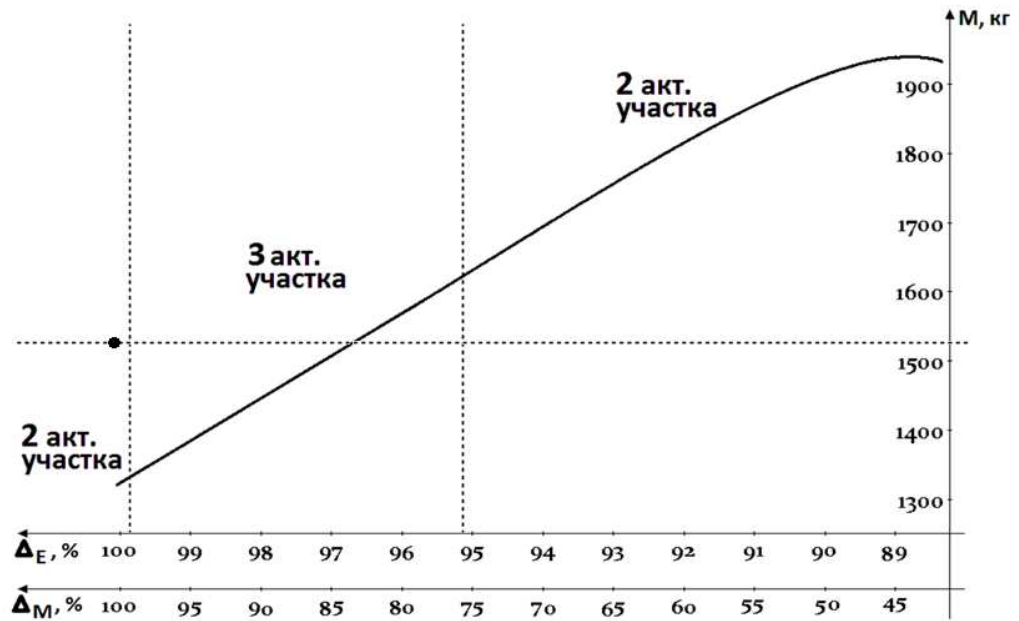


Рис. 3.3: Изменение массы при увеличении продолжительности работы двигателей малой тяги.

тирную линию нельзя, так как в этот момент происходит перестройка структуры траектории и не существует производная вектор-функции невязок по параметрам пристрелки, в результате чего изменяется вычислительная схема метода стрельбы.

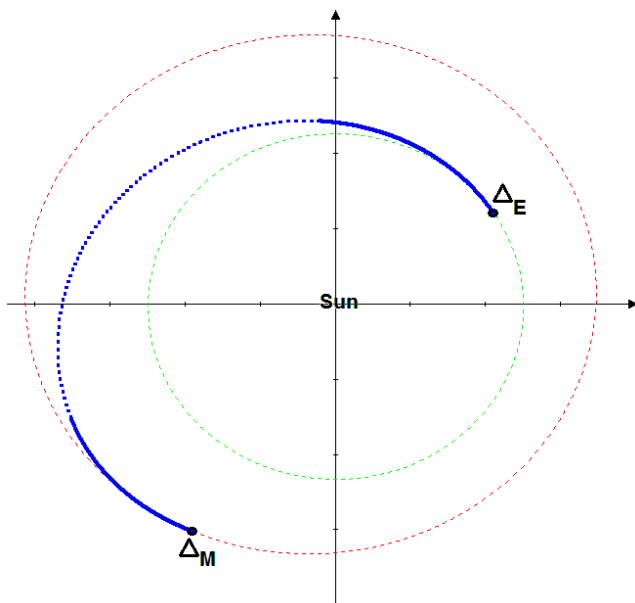


Рис. 3.4: Проекция траектории на плоскость эклиптики в гелиоцентрической СК.

Несмотря на возникающую при вычислениях особенность, минимизируемый функционал, не зависящий явно от параметров пристрелки, остается гладким, что можно наблюдать на рис. 3.3. Точки графиков, лежащие выше горизонтальной пунктирной линии, соответствуют траекториям, на которых функционал достигает лучшего значения при использовании двигателей малой тяги по сравнению со схемой перелёта, в которой используются только двигатели большой тяги.

На рис. 3.4 представлена лучшая по функционалу траектория. Двигатели малой тяги работают 60 суток в начале траектории и 70 суток в конце.

Характерный вид угла между радиус-вектором и направлением тяги на траекториях близок к локально-оптимальному значению  $\pi/2$  при работающем двигателе. Угол же между направлением тяги и вектором скорости КА, напротив, сильно отличается от локально-оптимального решения задачи оптимального увеличения энергии, равного нулю.

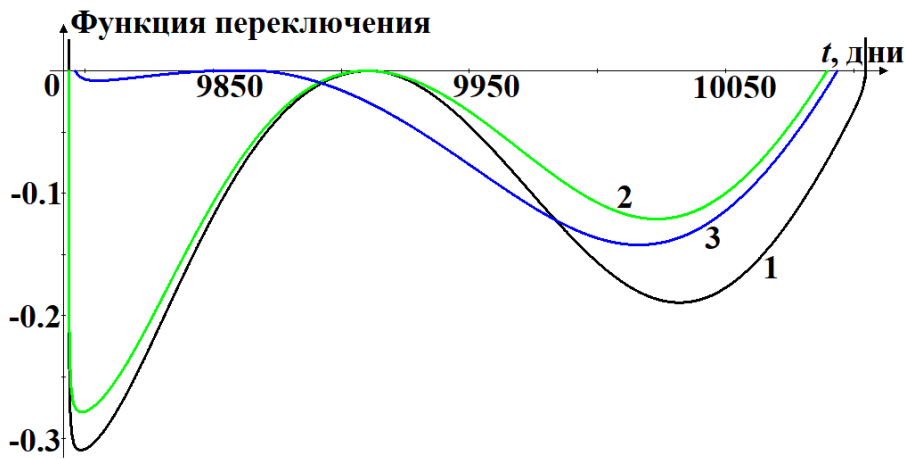


Рис. 3.5: Характерный вид функций переключения.

На рис. 3.5 приведены типичные функции переключения: первая соответствует траектории с двумя активными участками в начале и в конце перелёта, а вторая — траектории, близкой к первой, но с тремя включениями малой тяги: в начале экспедиции, на промежуточном участке и в конце. Точка, соответствующая первой траектории, на рис. 3.3 находится вблизи левой вертикальной пунктирной линии, слева от нее, а соответствующая второй — справа.

При исследовании задачи было проведено значительное число параметрических расчетов, при которых  $\Delta_E$  и  $\Delta_M$  уменьшались неравномерно с разными соотношениями шагов по импульсам около Земли и Марса. В ходе численных экспериментов удалось построить экстремали с продолжительным промежуточным активным участком, функция переключения на котором очень близка нулевой, имеет порядок  $10^{-15}$ .

Пример такой экстремали приведен в качестве третьего графика на рис. 3.5, значения импульсов на этой траектории  $\Delta_E = 3.58$  км/с и  $\Delta_M = 1.85$  км/с. На ней  $\dot{\chi}_i = -(p_{xi}p_{ui} + p_{yi}p_{vi} + p_{zi}p_{wi})$  на промежуточном активном участке монотонно убывает с  $9 \cdot 10^{-5}$  до  $-2 \cdot 10^{-5}$ , значит такой режим

управления не является особым и удовлетворяет необходимым условиям оптимальности принципа максимума [21].

Таким образом, в результате решения получилось, что использование двигателей малой тяги в экспедиции к Фобосу эффективно, так как позволяет доставить к цели большую полезную массу. Выигрыш от 258 до 404 кг может оказаться важным при принятии решения об усложнении конструкции аппарата.

При рассмотрении двигателей меньшей мощности, таких как СПД-100, СПД-140 выигрыш по массе в случае их использования сохранялся в сравнении со схемой без малой тяги, при этом получалось, что они работали на всей траектории без пассивных участков.

Отметим, что исследование, проведённое в гл. 2 и гл. 3.1 позволяет сделать вывод, что экстремаль возврата к Земле из гл. 3.1 является уже найденной частью миссии в случае рассмотрения оптимизации всей экспедиции с возвратом к Земле в рамках задачи текущего раздела с малой тягой, так как ДУ МТ сбрасывается при подлёте КА к Марсу.

В случае изменения в формализации задачи параметров ДУ МТ на ДУ БТ удалось решить задачу без использования аппроксимации работы двигательных установок большой тяги импульсами. В такой постановке отчасти по управлению КА работа близка к [42]. При этом КА управляется кусочно-непрерывной ограниченной большой тягой. Траектории были построены постепенной заменой импульсных воздействий на продолжительную работу ДУ большой тяги вплоть до обнуления величин импульсов. Данные экстремали были построены и для части миссии по перелёту КА к Фобосу, и для возврата к Земле и используются в гл. 1 при сравнении различных схем экспедиции. Полная постановка миссии КА по такой схеме, условия принципа максимума, их анализ, краевая задача, вычислительная схема, решение, числовые характеристики конкретной экстремали описаны в [123].

### 3.3 Выводы

В данной главе подробно рассмотрены важные промежуточные задачи ещё двух ступеней описанной выше лестницы задач, представляющие также свой собственный интерес.

В разделе 3.1 рассмотрена задача оптимизации траектории экспедиции КА к Фобосу с возвращением к Земле в импульсной постановке. Задача формализована как задача нескольких тел, в этом её главное отличие от задач главы 2, в которой траектория делилась на кусочки, на каждом из которых учитывалось притяжение только одного тела.

Данная задача была решена на основе принципа Лагранжа. Построены экстремали, удовлетворяющие условиям стационарности, приводятся характеристики найденных экстремалей, их анализ, в том числе посчитано минимальное расстояние до Луны на траектории.

В разделе 3.2 рассмотрено добавление малой тяги, при этом работа двигателей большой тяги по-прежнему аппроксимируется импульсными воздействиями. В данной постановке произведён анализ возможного выигрыша от использования МТ по сравнению с экспедицией, в которой КА оснащён только БТ. Данное исследование позволяет судить о целесообразности оснащения КА двигательной установкой малой тяги в будущих миссиях.

Решение задачи в такой постановке является удовлетворительным начальным приближением для решения исходной задачи гл. 1.

Отметим также другую методику [66, 116], позволяющую получать решения сложных задач космодинамики с малой тягой, основанную на гомотопии [62] и продолжении решения по параметру. Такой подход оказывается удачным при построении многовитковых траектории. В настоящей же диссертационной работе он не применялся, предлагается описанный альтернативный подход формирования лестницы задач и их поэтапного решения.

В первых 4-х главах диссертации многовитковые траектории не возникали, в 5-й главе удалось построить многовитковые экстремали Понтрягина на основе предлагаемого подхода.

## Глава 4

# Оптимизация траектории экспедиции КА с трёхимпульсным подлётом к Фобосу

В данной главе представлен пример применения разработанной методики к задаче подлёта к Фобосу с трёхимпульсным маневром около Марса. Данная задача близка по постановке и методу решения к задачам, рассмотренным в главах 1, 2, 3 диссертационной работы. Тем не менее рассматривается другая схема экспедиции, эта разница существенна и приводит к другим вспомогательным задачам и отличию по функционалу миссии.

В данной главе в качестве орбиты Фобоса рассматривается как орбита из эфемерид, так и рассчитанная средняя круговая орбита, приближающая орбиту Фобоса.

Общая схема решения включает построение лестницы задач: рассмотрение приближения экспедиции комбинацией задач Ламберта, переход к задаче в импульсной постановке с оптимизацией суммы импульсов, рассматриваемой на основе принципа Лагранжа, и, наконец, переход к задаче с управлением КА импульсными воздействиями и кусочно-непрерывной ограниченной малой тягой с минимизацией затрат массы.

Сравниваются схемы с трёхимпульсным подлётом к Фобосу и с прямой схемой выведения.

## 4.1 Построение траекторий трёхимпульсного подлёта к Фобосу с выходом на сферу Хилла Марса на основе решения серии задач Ламберта.

В данном разделе рассматривается задача оптимизации траектории межпланетного перелёта космического аппарата от Земли к Фобосу и возврат обратно к Земле в импульсной постановке. Для решения задач в более сложных непрерывных постановках, например, на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина, необходимо хорошее начальное приближение. В рассматриваемой постановке траектория перелёта представляет собой совокупность решений задач Ламберта, приближающих миссию, которые решаются численно на ЭВМ с учётом эфемерид. Их комбинация оптимизируется внешними градиентными методами аналогично тому, как это делается в гл. 2.

Основная идея трёхимпульсного подлёта к спутнику заключается в том, что поворачивать вектор скорости КА для необходимого выравнивания с отличающимся по направлению вектором скорости Фобоса в окрестности перицентра подлётной гиперболической траектории КА или близкой к Марсу конечной орбиты энергетически невыгодно. Поворот же плоскости орбиты КА на значительном удалении от притягивающего центра позволяет теоретически получить существенный выигрыш.

### 4.1.1 Постановка задачи

Траектория перелёта отдельно рассматривается в сферах действия Земли, Марса и на гелиоцентрическом участке. В каждый момент времени учитывается гравитация лишь одного притягивающего центра, оказывающего основное влияние. Исследование выполнялось для старта экспедиции в диапазоне с 2020 по 2030 год. В начальный момент времени  $t_0$  КА находится на круговой орбите искусственного спутника Земли заданной высоты 200 км и наклона к экватору в  $51.6^\circ$ . В конечный момент времени  $t_1$  первой части миссии КА садится на Фобос: положение и скорость КА совпадают с положением и скоростью центра масс Фобоса. Так как массы КА и Фобоса, а следовательно,



и влияние их притяжения на траектории движения рассматриваемых в задаче тел пренебрежимо мало, в данной главе они по-прежнему считаются непритягивающими материальными точками. Гравитационные поля Солнца, Земли, Марса считаются центральными ньютоновскими, прочие возмущения не учитываются. Уравнения  $\dot{r} = v$ ,  $\dot{v} = -\mu r/|r|^3$  описывают изменение вектора  $r$  координат КА и вектора скорости  $v$ , где  $\mu$  — гравитационный параметр притягивающего центра на текущем участке траектории. Положения Земли и Марса соответствует эфемеридам DE424, Фобоса — MAR097. Для успешного забора грунта перед взлётом с Фобоса в момент  $t_2$  начала второй части миссии КА должен находиться на спутнике Марса не менее заданного времени:

$$t_2 - t_1 \geq 30 \text{ дней.} \quad (4.1.1)$$

Предполагается, что в сферах действия Земли и Марса при отлётах от данных планет может быть реализовано от 1 до 2 импульсов, которыми осуществляется управление. При подлёте к Фобосу рассматривается возможность реализации трёхимпульсного выхода к спутнику Марса, и такая траектория сравнивается с безвитковой траекторией прямой схемы выведения с 1 или 2 импульсами в сфере действия Марса, рассмотренной в первых трёх главах работы. В конечный момент времени  $t_3$  КА тормозится об атмосферу Земли, в расчётах её притяжение на последнем участке не учитывается. Данное предположение позволяет исключить из схемы миссии импульсы при подлёте к Земле, а также не рассматривать поворот плоскости орбиты КА при отлёте от Фобоса. Для повышения шансов на успех экспедиции общая продолжительность перелёта ограничена из-за негативного воздействия жёсткого космического излучения на КА:

$$t_3 - t_0 \leq 1500 \text{ дней.} \quad (4.1.2)$$

Необходимо построить непрерывную комбинацию решений задач Ламберта, аппроксимирующую траекторию перелёта, минимизировав при этом сумму величин импульсов  $\sum_{i=1}^N \Delta_i$ ,  $N = 6$  для безвиткового подлёта к Фобосу и  $N = 8$  для трёхимпульсного, по параметрам: долгота восходящего узла исходной орбиты и положение КА на ней, времена осуществления импульсов и положения КА в моменты промежуточных импульсов. Положение КА в моменты  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  задано из эфемерид.

**Трёхимпульсный подлёт к Фобосу.** Рассматривается следующая схема подлёта к Фобосу (см. рис. 4.1).

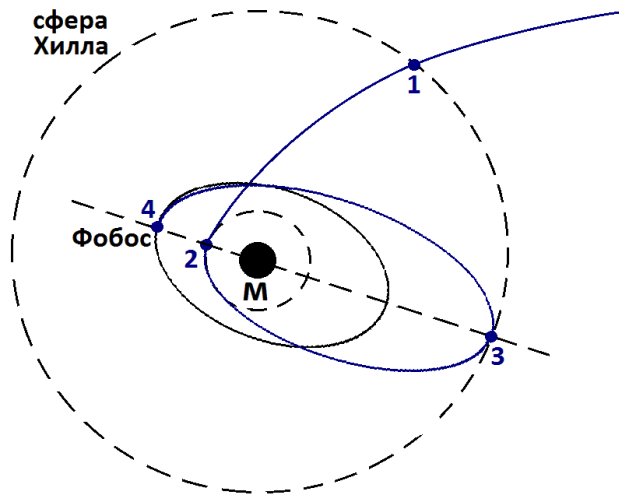


Рис. 4.1: Схема трёхимпульсного подлёта к Фобосу.

Для посадки на спутник Марса вначале даётся тормозной импульс по направлению скорости КА в точке 2 – перигелие траектории на расстоянии 50 км от поверхности Марса в плоскости Фобоса. Этот импульс необходим для выхода на сферу Хилла Марса. На сфере Хилла в точке 3 даётся импульс, необходимый для подъёма перигелия орбиты и поворота до плоскости Фобоса. Точка 3 находится на пересечении подлётной плоскости и плоскости Фобоса. Далее в точке 4 даётся тормозной импульс по скорости, необходимый для выравнивания скорости КА со скоростью Фобоса. Для попадания в точку 4 решается задача фазировки. Перелёты КА из точек 2 в 3 и из 3 в 4 считаются гомановскими, соответствующие им импульсы вычисляются аналитически. Тем самым вектор скорости КА поворачивается в точке 3, на что затрачивается существенно меньше характеристической скорости по сравнению с прямой схемой подлёта, предполагающей поворот в точке 4 сразу после точки 1.

#### 4.1.2 Численное решение и результаты

Задача решается численно, для постановки, рассматриваемой в данном разделе автором также реализован программный комплекс на ЭВМ на языке С с использованием пакета НАСА SPICE. Вначале производится грубая

внешняя оптимизации без учёта притяжения Земли и Марса (см. гл. 2). Затем в окрестности лучших из найденных траекторий добавляется учёт притяжения планет. Траектории перелёта внутри сферы действия одного притягивающего центра строятся на основе решения задачи Ламберта с использованием универсального уравнения Кеплера, соответствующая методика описана в [74]. Комбинация полученных траекторий оптимизируется по параметрам задачи градиентными методами. В качестве начального приближения берутся узлы сетки параметров задачи, и данная сетка с последовательно измельчается. Если градиентный метод сходится к траектории с нарушением ограничений (4.1.1), (4.1.2), то траектория пересчитывается с обращением нарушенного неравенства в строгое равенство.

Поставленную в данном разделе задачу удалось решить численно. Все промежуточные импульсы на сферах действия планет и сфере Хилла (или действия) Марса в точке 1 (рис. 4.1) получились равными 0. При трёхимпульсном подлёте к Фобосу время перелёта по гомановским траекториям от точки 2 до точки 3 и от точки 3 до точки 4 составляет 63 дня или 141 день (в зависимости от рассматриваемой сферы) и вычитается из времени нахождения КА на спутнике Марса. Выигрыш по функционалу в этом случае по сравнению с прямым попаданием КА из точки 1 в точку 4 составляет 437 м/с и может быть пересчитан в выигрыш массы в килограммах по формуле Циолковского при задании начальной массы.

## **4.2 Задача оптимизации межпланетного перелёта к Марсу с трёхимпульсным подлётом к Фобосу на основе принципа Лагранжа**

Рассматривается задача оптимального управления межпланетным перелётом космического аппарата от Земли к Марсу с трёхимпульсным выходом на орбиту сопровождения Фобоса. Задача решается численно на основе принципа Лагранжа в импульсной постановке. Построение начального приближения осуществлено в предыдущем разделе на основе комбинации решений задач Ламберта. При расчётах учитываются эфемериды, используется пакет

NASA SPICE.

### 4.2.1 Постановка задачи

Схема экспедиции представлена на рис. 1.1, рис. 4.1. В начальный момент времени  $t_0$  КА находится на круговой орбите искусственного спутника Земли высоты 200 км и наклона  $51.6^\circ$  к экватору, соответствующей выведению КА с Байконура. В конечный момент времени  $t_3$  КА выводится на орбиту искусственного спутника Марса – круговую орбиту сопровождения Фобоса, соответствующую его средней орбите из эфемерид MAR097, при этом угловое положение КА и Фобоса на конечной орбите может отличаться. КА и Фобос считаются непритягиваемыми материальными точками, так как их масса мала. Гравитационные поля Солнца, Земли, Марса полагаются центральными ньютоновскими и учитываются во время всего перелёта. Положения центров масс Земли и Марса соответствует эфемеридам DE424. Дата запуска  $t_0$  выбирается с 2020 по 2030 год, общая продолжительность миссии  $t_3-t_0$  ограничена 1300 днями. Из-за эффекта потери точности движение КА описывается в нескольких системах координат.

Для выхода на ОИСМ используется следующая схема, представленная на рис. 4.1. После пересечения КА сферы Хилла Марса в точке 1 далее КА движется по гиперболической подлётной траектории и в момент времени  $t_1$  в точке 2, находящейся в перицентре траектории на расстоянии 50 км от поверхности Марса в плоскости конечной орбиты сопровождения Фобоса подается тормозной импульс по направлению скорости КА, необходимый для подъёма орбиты КА до сферы Хилла Марса. На сфере Хилла в момент  $t_2$  в точке 3 дается еще один импульс, необходимый для подъёма перицентра орбиты и поворота орбиты КА до плоскости орбиты ИСМ. В момент времени  $t_3$  в точке 3 выдается последний тормозной импульс, который необходим для выравнивания скорости КА со скоростью движения по конечной круговой орбите. Потенциально необходимое условие фазировки не учитывается, считается что попадание в Фобос в конечный момент времени может быть обеспечено небольшим уменьшением высоты точки 3, что незначительно повлияет на всю траекторию, это предположение было подтверждено проведён-

ными расчетами.

Полёты КА от точки 2 до 3 и от точки 3 до 4 считаются гомановскими, соответствующие им импульсы рассчитываются аналитически и добавляются в функционал задачи, благодаря чему численное интегрирование может быть завершено в момент времени  $t_1$  в точке 2. Работа двигателей большой тяги для ускорения и торможения КА вблизи Земли и Марса аппроксимируется импульсными воздействиями. Управление осуществляется направлением и величиной четырёх импульсов в моменты  $t_0, t_1, t_2, t_3$ .

Оптимизируются долгота восходящего узла исходной орбиты ИСЗ, положение КА на ней, моменты времени  $t_0, t_1$ , направления и величины импульсов. Минимизируется аналог затрат массы – сумма значений четырёх импульсов задачи.

#### 4.2.2 Различная формализация. Лестница задач

Рассматриваемая задача формализуется как задача Лагранжа и на основе принципа Лагранжа её решение сводится к решению краевой задачи 36-го порядка. Краевая задача нелинейна и в данном разделе также решалась численно методом многоточечной пристрелки.

Рассматривалась различная формализация задачи, а именно условий подлёта к Фобосу. Для ускорения счёта орбита Фобоса в том числе аппроксимировалась его средней орбитой. Условия окончания счёта в т. 2, находящейся на линии узлов подлётной траектории и плоскости Фобоса, в перицентре подлётной орбиты КА на расстоянии 50 км от поверхности Марса задавались следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (x_T, y_T, z_T) &\in \pi_F, \\ x_F^2 + y_F^2 + z_F^2 &= (R_M + 50)^2, \\ \vec{r}_T \cdot \vec{v}_T &= 0. \end{aligned}$$

Вместо математически выгодной принимаемой в расчётах в работе, но технически трудно реализуемой высоты 50 км над поверхностью Фобоса точка 2 рис. 4.1 может браться также на большей высоте, например, 150 км над поверхностью Марса.

Первое условие может быть расписано следующим образом:

$$A_F x_3(T) + B_F y_3(T) + C_F z_3(T) = 0.$$

При этом численные расчёты заканчивались в точке 2, далее функционал и траектория рассчитывались аналитически. Рассмотрим пример экстремали в такой постановке. Числовые характеристики, позволяющие повторить расчёты следующие. В момент  $t_0 = 9801.557755374640692025$  дней от 01 января 2000 12:00 ТТ в геоцентрической СК:  $x_1 = 0.003919907020828109$  а.е./100,  $y_1 = -0.001915466315535246$  а.е./100,  $z_1 = -0.000548575442148598$  а.е./100,  $u_1 = 0.238887437972377964$  а.е./100 / день,  $v_1 = 0.342759447200221057$  а.е./100 / день,  $w_1 = 0.510177485849882428$  а.е./100 / день,  $p_{x1} = 62.145923755019772727$ ,  $p_{y1} = -30.369116096596407317$ ,  $p_{z1} = -8.695881691784672185$ ,  $p_{u1} = 0.362291387006706433$ ,  $p_{v1} = 0.519845180611838709$ ,  $p_{w1} = 0.773631655954823083$ .

В точке 2 в момент времени  $t_1 = 10110.853253468723778496$  дней от 01 января 2000 12:00 ТТ в марсоцентрической СК:  $x_3 = -0.000650036853843234$  а.е./100,  $y_3 = 0.001799785560286538$  а.е./100,  $z_3 = 0.001289523226607886$  а.е./100,  $u_3 = -0.309648531982448016$  а.е./100 / день,  $v_3 = -0.090975427948472978$  а.е./100 / день,  $w_3 = -0.029116727166880040$  а.е./100 / день,  $p_{x3} = 15.646498975507576290$ ,  $p_{y3} = -43.321527117836822640$ ,  $p_{z3} = -31.038905803586121834$ ,  $p_{u3} = 0.955565947545433558$ ,  $p_{v3} = 0.280748857287123788$ ,  $p_{w3} = 0.089854321133798945$ .

Если внутри сферы действия или Хилла Марса учитывать притяжение только Марса, то численные расчёты могут быть остановлены в т. 1. Для этого сначала задача с остановкой в т. 2 была реализована через условия на вектор Лапласа орбиты КА  $\vec{\Lambda}_{КА}$  и вектор  $\vec{C}_\varphi$ , задающий угловое положение орбиты Фобоса. Запишем условия:

$$\vec{\Lambda}_{КА} \cdot \vec{C}_\varphi = 0, \quad R_\Pi = R_M + 50, \quad r_T = R_M + 50. \quad (4.2.1)$$

Первые два условия системы (4.2.1) должны выполняться на всей подлётной траектории вблизи Марса. А последнее условие этой системы позволяет задавать точку остановки вычислений и используется для продолжения траектории по параметру при задании различных значений  $r_T$ . Условие на вектор

Лапласа может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\mu x}{r} + v(xv - yu) - w(zu - xw)\right) A_F + \left(-\frac{\mu y}{r} + w(yw - zv) - u(xv - yu)\right) B_F + \\ & + \left(-\frac{\mu z}{r} + u(zu - xw) - v(yw - zv)\right) C_F = 0. \end{aligned}$$

Условие на перицентр может быть записано следующим образом:

$$\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} C^2 \left(v^2 - \frac{2\mu}{r}\right)}}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}} = R_M + 50,$$

$$\text{где } C^2 = (yw - zv)^2 + (zu - xw)^2 + (xv - yu)^2, \quad v^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Траектория продолжалась по времени остановки счёта от  $r_T = R_M + 50$  км до  $r_T$ , равного радиусу сферы действия или Хилла Марса.

Сначала задача рассматривалась со следующим функционалом:

$$B_0 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4,$$

где  $\Delta_1$  — импульс у Земли,

$$\Delta_2 = \sqrt{(u_A(r(T)) - u_3(T))^2 + (v_A(r(T)) - v_3(T))^2 + (w_A(r(T)) - w_3(T))^2},$$

$$\Delta_3 = \sqrt{(u_{B2}(r(T)) - u_{B1}(r(T)))^2 + (v_{B2}(r(T)) - v_{B1}(r(T)))^2 + (w_{B2}(r(T)) - w_{B1}(r(T)))^2},$$

$$\Delta_4 = |v_C| - |v_{\text{кр.Ф}}|.$$

Затем так как около Земли и Марса используются разные двигательные установки со скоростями истечения  $C_1$ ,  $C_2$ , и с учётом аналитического пересчёта последних импульсов в константы, функционал записывался в следующем виде:

$$\frac{\Delta_0}{C_1} + \frac{|\vec{v}(t_1)|}{C_2} \longrightarrow \inf.$$

При переходе от завершения расчётов в т. 2 к завершению расчётов в т. 1 функционал может быть пересчитан по методике точечных сфер действия:

$$\frac{\Delta_0}{C_1} + \frac{\sqrt{\vec{v}^2(t_1) + 2\mu \left(\frac{1}{R_{\Pi}} - \frac{1}{\rho_M}\right)}}{C_2} \longrightarrow \inf.$$

Формулы для аналитического пересчёта импульса в т. 3 при фиксировании подлётной плоскости КА имеют следующий вид:

$$\Delta_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \cdot \frac{(n_{\Pi}, n_F)}{\|n_{\Pi}\|}},$$

$$\text{где } c_1 = \sqrt{\frac{2\mu_M r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}, c_2 = \sqrt{\frac{2\mu_M r_3}{r_2(r_2 + r_3)}}, r_1 = R_M + 50, r_3 = R_{M\Phi},$$

$r_2$  — радиус сферы Хилла или сферы действия Марса,

$n_F = (A_F, B_F, C_F)$  — нормаль к средней плоскости Фобоса,

$n_{\Pi} = (yw - zv, zu - xw, xv - yu) \approx (A_{\Pi}, B_{\Pi}, C_{\Pi})$  — нормаль к подлётной плоскости.

В каждой формализации были получены экстремали при помощи продолжения решения по различным параметрам задачи.

### 4.3 Малая тяга

В итоге на основе полученного из импульсного случая начального приближения удалось построить экстремали Понтрягина в задаче с малой тягой, аналогичной рассмотренной в гл. 3.2, но с выгодным трёхимпульсным подлётом к Фобосу.

При этом был осуществлён переход от оптимизации функционала, представляющего сумму импульсов с весами, к задаче минимизации затрат массы с учётом трат топлива ДУ МТ:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 - \frac{M_K}{M_0} = 1 - \frac{1}{M_0} \\ &\cdot \left( \left( M_0 \cdot e^{\frac{\Delta E}{C_{\varphi}}} - M_{\Phi} - \left( \frac{T_{MT} \cdot \Delta \tau_{MT}}{C_{MT}} + M_{MT} \right) \right) e^{\frac{-|\sqrt{\dot{\varphi}^2(t_1) + 2\mu \left( \frac{1}{R_{\Pi}} - \frac{1}{\rho_M} \right) - v_A}|}{C_{ДУ\text{ ПМ}}} - M_{ДУ\text{ ПМ}}} \right) \\ &= 1 - m(t_1) \cdot e^{\frac{-|\sqrt{\dot{\varphi}^2(t_1) + 2\mu \left( \frac{1}{R_{\Pi}} - \frac{1}{\rho_M} \right) - v_A}|}{C_{ДУ\text{ ПМ}}} - \frac{M_{ДУ\text{ ПМ}}}{M_0} \longrightarrow \inf, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$



где  $v_A$  — сумма вычисляемой аналитически скорости КА в перицентре подлётной к Марсу траектории, необходимой для осуществления первого гомановского перелёта, и последних двух импульсных воздействий в задаче на сфере Хилла и орбите сопровождения Фобоса.

Полная формализация задачи близка к гл. 3.2, отличаются лишь краевые условия в т. 1 рис. 4.1 и функционал (4.3.1). Далее приведены характеристики конкретной полученной экстремали Понтрягина.

Управление осуществлялось 3 двигателями СПД-100 с  $T_{MT}=0.081$  Н вблизи Земли и вдвое меньшей у Марса. Импульс у Земли за счёт работы ДУ МТ уменьшился до 98.45%, у Марса — до 96.42%.

Получившиеся значения параметров пристрелки:  $p_0 \equiv 2\lambda_{r_0} = 27319.6455606252202414907515$ ;  $p_1 \equiv \Omega_0 = -0.2089860017162806227198$ ;  $p_2 \equiv \varphi_0 = 5.9271245829944279037704$ ;  $p_3 \equiv \Delta_{u_0} = 0.0839778534941156840077$ ;  $p_4 \equiv \Delta_{v_0} = 0.1027818526647929497919$ ;  $p_5 \equiv \Delta_{w_0} = 0.1584578066810815311083$ ;  $p_6 = 26.1373738003985138789176$  — продолжительность работы ДУ МТ около Земли;  $p_7 = 21.4140963939653303782507$  — продолжительность работы ДУ МТ около Марса;  $p_8 \equiv \lambda_{ortog} = 0.0468897709289169337121$ ;  $p_9 \equiv \lambda_{laplas} = 0.0047110529760759391193$ ;  $p_{10} \equiv \lambda_{R\pi} = -0.0085421383850873885274$ ;  $p_{11} \equiv p_m(t_0) = 2.8693214715907049416899$ .

Значения фазовых и сопряжённых переменных в момент времени  $t_0 = 9800.99512$  (дней от полудня 01 января 2000 года) в геоцентрической СК:  $x = 0.00383$  а.е/100,  $y = -0.00204$  а.е/100,  $z = -0.00072$  а.е/100,  $u = 0.26764$  (а.е/100)/день,  $v = 0.32566$  (а.е/100)/день,  $w = 0.50292$  (а.е/100)/день,  $p_x=104.62682$ ,  $p_y=-55.62452$ ,  $p_z=-19.66277$ ,  $p_u=0.69933$ ,  $p_v=0.85097$ ,  $p_w=1.31401$ ,  $m = 0.25863$ .

## 4.4 Фазировка КА с Фобосом

Фазировка с Фобосом в главах 1–3 диссертационной работы являлась непростой задачей, так как КА подлетал к Фобосу по быстрой гиперболической траектории и должен был попасть фактически в точку, которая в свою очередь быстро вращалась вокруг Марса.

Фазировка, осуществляемая в главах 1–3 осуществлялась следующим образом.

Для каждого оборота Фобоса вокруг Марса существует локально оптимальная траектория. Орбита Фобоса задана эфемеридами, поэтому мы имеем жёсткую фазировку. Эта проблема показана на рис. 4.2. По оси абсцисс отложена дата запуска КА от Фобоса обратно к Земле в днях, отсчитываемая от начала 2020 года. Ордината показывает разницу  $\Delta$  в км/с между скоростями Фобоса и КА в начальный момент, т.е. на самом деле, какая избыточная скорость должна быть реализована посредством двигателей реактивной тяги. Это непосредственно влияет на функционал, так как в дальнейшем во время полёта двигатель выключен, и масса КА больше не меняется.

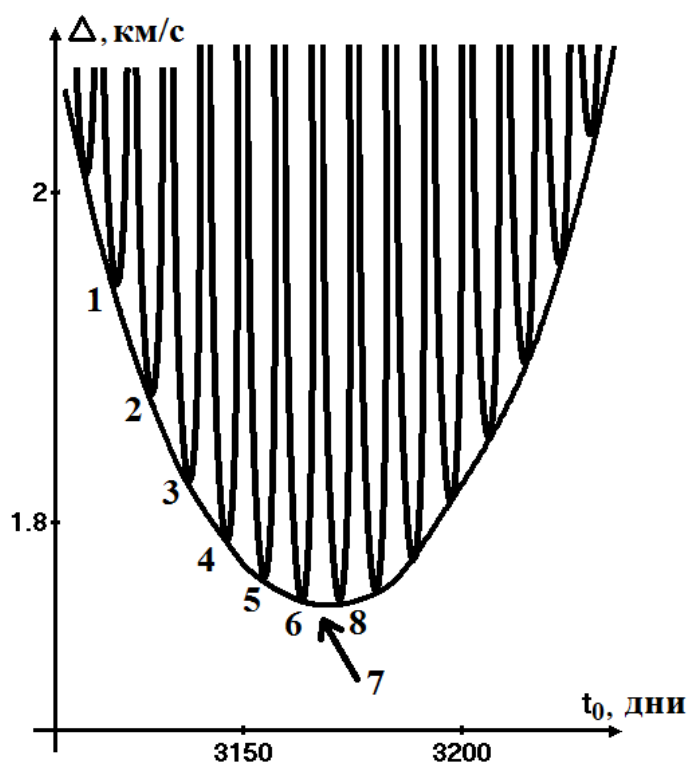


Рис. 4.2: Фазировка КА с Фобосом.

Этот график построен в предположении, что время старта фиксировано и является продолжаемым параметром. Можно видеть удачные и неудачные времена запуска, соответствующие разным положениям Фобоса на орбите вокруг Марса. Крутые „параболы“ на рис. 4.2 схематически представляют решение для каждой фиксированной времени старта. Одна парабола соответствует одному обороту Фобоса вокруг Марса.

Неудачное угловое положение Фобоса в момент старта КА к Земле влечёт за собой катастрофическое ухудшение функционала.

Представленная на графике 4.2 огибающая рассчитана численно с высокой точностью. Локальный минимум исследуемой задачи существует на каждой крутой параболе рисунка 4.2. В первых главах работы использовались два различных метода локальной оптимизации, которые позволяют выбрать

оптимальную дату старта.

Первым методом является продолжение решения задачи по параметру. При этом осуществляется попытка сразу переходить от локального минимума (отмеченного числами 1, 2, 3, ... на рис. 4.2) одной параболы к локальному минимуму следующей параболы. В этом случае время полного обращения Фобоса вокруг Марса добавляется или вычитается из времени старта на текущей параболе. Тогда есть надежда на то, что мы попадём в область сходимости метода Ньютона для следующей параболы. Эта задумка хорошо работала при относительно малом времени работы двигателей малой тяги.

Второй метод заключается в идее промежуточных вычислений при продолжении решения по дате старта при фиксировании положении Фобоса на орбите вокруг Марса. Угловое положение Фобоса становится параметром и больше не задаётся из эфемерид. А именно, так как нам известно локально оптимальное угловое положение Фобоса при запуске КА на текущем витке, мы предполагаем, что локально оптимальное положение Фобоса близко к данному угловому положению и на следующем или предыдущем витке.

Затем зафиксируем это угловое положение Фобоса так, как будто Фобос перестал вращаться вокруг Марса и замер в одном угловом положении. Это позволяет скользить по огибающей кривой, изображенной на рис. 4.2. Удобство заключается в том, что в этом случае во время продолжения по параметру нет привязки к дискретному набору локальных минимумов, характеризующихся примерно одним и тем же угловым положением на орбите и отстоящих друг от друга на несколько часов.

Это позволяет использовать удобный параметр продолжения при исследовании задачи, тем самым достигается сходимость метода Ньютона. Тем не менее, почти все такие решения сами по себе не имеют физического смысла. Когда таким образом найдено желаемое угловое положение старта КА на следующем витке Фобоса — вершина соседней параболы рисунка 4.2 или же оптимальное по данному параметру решение (точка 7 рис. 4.2), необходимо снова уточнить координаты и скорости Фобоса до реальных точных значений, полученных из эфемерид.

В свою очередь, орбита Фобоса эволюционирует крайне слабо, поэтому

такое уточнение успешно выполняется за одну итерацию. Теоретически, в случае возникновения трудностей, этот процесс может быть осуществлён в несколько этапов продолжением по параметру. Однако в настоящей работе такие проблемы не возникали.

Данный подход обеспечивает хорошее попадание в локально оптимальную область на очередном соседнем витке. Оптимизация на этом новом витке более не представляет сложности.

Линейная аппроксимация параметров пристрелки может быть использована для увеличения скорости работы обоих методов. В этом случае, при переходе с одной найденной траектории на другую осуществляется попытка предугадать хорошее начальное приближение для параметров пристрелки в предположении их приблизительно линейного изменения, что верно для достаточно гладких задач при отсутствии перестройки траектории.

Эта идея позволяет увеличить шаг продолжения за счёт попадания в область сходимости метода Ньютона. Оба описанных метода фазировки использовались при расчётах. Первый метод легче реализовать. Однако численные эксперименты показали лучшую сходимость второго способа. В области, где предположение о преимущественно линейном изменении параметров пристрелки при переходе между близкими параболами на рис 4.2 уже некорректно, а также в случае сложной постановки задачи — значительного времени работы двигательной установки малой тяги на траектории, в особенности вблизи области точки жёсткой фазировки, первый метод начинает работать плохо, метод Ньютона при попытках его использования часто расходится.

Второй же метод позволил решить задачу с малой тягой.

Использование трёхимпульсной схемы подлёта к Фобосу, рассмотренной в данной главе, позволяет существенно упростить решение задачи фазировки. Небольшое понижение апоцентра промежуточной орбиты (точки 3 на рис. 4.1) на несколько метров позволяет сократить время перелёта от т. 2 до т. 3 и т. 3 до т. 4 рис. 4.1 на необходимые несколько часов для попадания в Фобос. При этом функционал задачи при таком манёвре меняется на доли 1 м/с, также на такой траектории по-прежнему удовлетворяются ограничения на продолжительность миссии.

В случае же приближения орбиты Фобоса круговой орбитой, необходимое понижение т. 3 рассчитывалось в работе аналитически, как и времена гомановских перелётов и импульсы трёхимпульсного маневра по известной скорости КА в т. 1 или 2, в этом случае выкладки существенно упрощались и численное решение завершалось в т. 1 или 2.

Подробнее вопрос фазировки и числовые характеристики найденных экстремалей приводятся в работе [123].

## 4.5 Выводы

В данной главе рассматривалась задача космодинамики оптимизации управления КА при трёхимпульсном подлёте к Фобосу. Применялась разработанная методика построения лестницы задач. Сначала была построена комбинация траекторий, являющихся решениями задач Ламберта, реализующая необходимые перелёты к Фобосу и обратно к Земле.

Затем задача исследовалась на основе принципа Лагранжа и её решение сводилось к краевой задаче. Задача в импульсной постановке была формализована различными способами. Краевая задача решалась численно методом многоточечной пристрелки. Результаты расчётов использовались в качестве начального приближения для исследования задачи в более точной постановке с добавлением управления КА вектором реактивной малой тяги.

Описан вопрос аккуратного учёта условий фазировки для точного попадания в Фобос. В результате решения задачи с использованием реализованного автором на ЭВМ на языке С программного комплекса было численно построено множество траекторий перелёта к Фобосу.

Полученные результаты позволяют судить о целесообразности осуществления трёхимпульсного маневра при подлёте к Фобосу.

## Глава 5

# Оптимизация траектории экспедиции КА с многовитковым безимпульсным подлётом к Фобосу

### 5.1 Постановка задачи

В данной главе рассматривается задача оптимального управления межпланетным пространственным перелётом космического аппарата с комбинированным управлением реактивными двигателями большой и малой тяги. В качестве реактивного двигателя ограниченной малой тяги используется двигатель СПД-100 со значением тяги 83 мН [100], максимально допустимое значение тяговооружённости (перегрузки космического аппарата)  $n_{0\max} = 0.00001$ . Перелёт начинается на круговой орбите искусственного спутника Земли высоты  $h_{\text{З}} = 200$  км свободной ориентации и заканчивается на круговой орбите искусственного спутника Марса высоты  $h_{\text{М}} = 9300$  км фиксированной ориентации, приближающей орбиту сопровождения естественного спутника Марса Фобоса. Положение КА на исходной орбите ИСЗ в начальный момент времени и положение КА на орбите ИСМ в конечный момент времени не фиксированы, а оптимизируются.

Сход КА с круговой орбиты ИСЗ осуществляется за счёт избытка скорости в начальный момент времени, равного по величине  $(\sqrt{2}-1)$  круговой скорости на этой орбите ( $\approx 3.22$  км/с), достаточного для ухода от Земли без дополнительных витков. В конечный момент времени также предполагается избыток скорости, его величина является параметром задачи и варьируется от 0 км/с

— многовиткового ухода от Марса до  $(\sqrt{2} - 1)$  круговой скорости на орбите сопровождения Фобоса высоты  $h_m = 9300$  км ( $\approx 0.76$  км/с) — безвиткового ухода от Марса. Эти избытки скорости аппроксимируют продолжительные во времени участки с включениями двигателей большой ограниченной тяги, обеспечивающие разгон КА около Земли и торможение КА около Марса.

Рассматривается задача быстрого действия — требуется минимизировать время перелёта. Предполагается, что орбиты Земли и Марса являются круговыми и некомпланарными, угол наклона между ними составляет около  $1.85^\circ$ .

Траектория перелёта рассматривается на трёх участках. На первом участке вблизи Земли притягивающими центрами являются Земля и Солнце, КА представляет собой непритягивающую материальную точку — рассматривается задача 3 тел. На втором участке перелёт КА рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле притяжения Солнца, влияние Земли и Марса не учитывается. На третьем участке вблизи Марса, аналогично первому, рассматривается задача 3 тел — притягивающими центрами являются Солнце и Марс. Влияние на КА Луны, Юпитера, Сатурна и других планет не учитывается.

## 5.2 Формализация задачи

Задача космодинамики формализуется как задача оптимального управления переменной структуры, вид дифференциальных связей будет меняться в зависимости от участка траектории, так как на различных участках в задаче учитывается влияние различных притягивающих центров.

На первом участке траектории, на котором учитывается влияние Земли, при решении используется неинерциальная геоцентрическая вращающаяся декартова система координат, на втором участке учитывается влияние

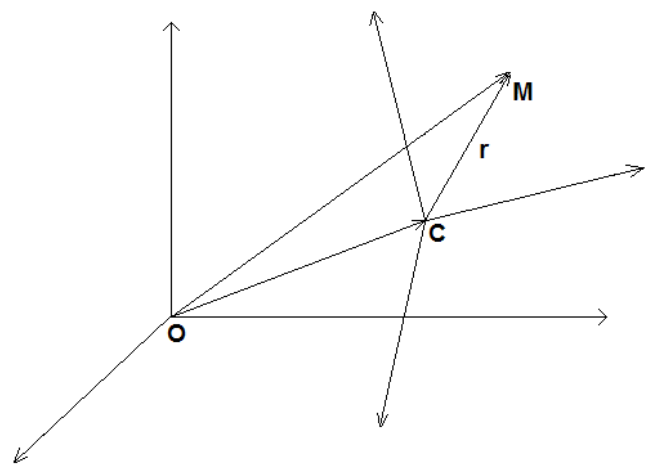


Рис. 5.1: Переход в другую СК.

только Солнца и используется гелиоцентрическая система координат, считающаяся в данной главе инерциальной. На третьем участке учитывается притяжение Марса и используется неинерциальная марсоцентрическая вращающаяся декартова система координат.

Выведем системы дифференциальных уравнений, описывающие движение центра масс КА с реактивным двигателем (материальной точки  $M$ ) во вращающихся системах координат. Пусть  $\Gamma$  – ортогональный оператор, определяющий ориентацию системы координат  $\mathcal{C}$  с началом в точке  $C$  относительно системы координат  $\mathcal{O}$  с началом в  $O$  (Рис. 5.1). Запишем и дважды продифференцируем векторное равенство:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC} + \Gamma \vec{r}, \\ \vec{v}_{abc} &= \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\overrightarrow{OC}} + \Gamma [\vec{\omega} \times \vec{r}] + \Gamma \dot{\vec{r}},\end{aligned}\quad (5.2.1)$$

$$\begin{aligned}\vec{w}_{abc} &= \ddot{\overrightarrow{OM}} = \ddot{\overrightarrow{OC}} + \Gamma [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] + \\ &+ \Gamma [\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}] + 2\Gamma [\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}] + \Gamma \ddot{\vec{r}},\end{aligned}\quad (5.2.2)$$

где  $\omega$  – угловая скорость репера  $\mathcal{C}$  относительно  $\mathcal{O}$ . Так как в рассматриваемых вращающихся системах координат  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$  и  $\omega_z^2 = \omega^2$ , то

$$[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \vec{\omega}) = \omega^2(0, 0, z) - \omega^2 \vec{r} = -\omega^2(x, y, 0),$$

где  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

Пусть координаты центра масс КА на каждом из 3 участков описываются радиус-вектором  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  и скорость равна  $(u_i, v_i, w_i)$ , где  $\dot{x}_i = u_i$ ,  $\dot{y}_i = v_i$ ,  $\dot{z}_i = w_i$ . Тогда

$$(0, 0, \omega_E) \times (u_1, v_1, z_1) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega_E \\ u_1 & v_1 & z_1 \end{vmatrix} = (-\omega_E v_1, \omega_E u_1, 0),$$

$$(0, 0, \omega_M) \times (u_3, v_3, z_3) = (-\omega_M v_3, \omega_M u_3, 0),$$

где  $\vec{\omega}_E$  и  $\vec{\omega}_M$  – угловые скорости вращения Земли и Марса вокруг Солнца. Из предположения о том, что орбиты Земли и Марса круговые, следует, что соответствующие угловые скорости постоянны, значит  $\dot{\vec{\omega}}_E = \dot{\vec{\omega}}_M = 0$ .



В первой системе координат началом  $C$  является центр Земли, основной плоскостью  $CX_1Y_1$  является средняя плоскость Земли (плоскость эклиптики). Ось  $CX_1$  является прямой, проходящей через центр Солнца  $O$  и точку  $C$ , с положительным направлением от Солнца к Земле, третья ось  $Z_1$  ей перпендикулярна и сонаправлена с вектором  $\vec{\omega}_E$  углового вращения Земли вокруг Солнца. Вторая ось  $CY_1$  перпендикулярна осям  $CX_1$ ,  $CZ_1$  и дополняет систему координат до правой.

Аналогично, в третьей системе координат началом  $C$  является центр Марса, основной плоскостью  $CX_3Y_3$  является средняя плоскость Марса, ось  $CX_3$  является прямой, проходящей через центр Солнца  $O$  и точку  $C$ , с положительным направлением от Солнца к Марсу, третья ось  $Z_3$  ей перпендикулярна и сонаправлена с вектором  $\vec{\omega}_M$  углового вращения Марса вокруг Солнца. Вторая ось  $CY_3$  перпендикулярна осям  $CX_3$ ,  $CZ_3$  и дополняет систему координат до правой.

Во второй системе координат ось  $OX_2$  направлена по линии узлов средних орбит Земли и Марса,  $O$  — центр масс Солнца, ось  $OZ_2$  ей перпендикулярна и сонаправлена с вектором  $\vec{\omega}_M$  углового вращения Марса вокруг Солнца, перпендикулярная им ось  $OY_2$  дополняет систему до правой. Поэтому на первом и третьем участках траектории вектор  $\vec{OC}$  постоянен, значит,  $\ddot{\vec{OC}} = \ddot{\vec{OC}} = 0$ .

Тогда в формуле (5.2.2) на этих участках траектории 1-е и 3-е слагаемое обращаются в 0, формулы для 2-го и 4-го слагаемых были получены выше, а последнее слагаемое является оператором  $\Gamma$ , применённым к искомому вектору  $\ddot{\vec{r}}$ . Чтобы найти этот вектор домножим (5.2.2) на  $\Gamma^{-1}$  слева и перенесём все слагаемые, кроме  $\ddot{\vec{r}}$ , в левую часть равенства.

Ускорение, придаваемое КА реактивным двигателем, составляет  $M(0)\mathbf{P}$ , где  $M(0) \equiv M_1(0)$  — начальная масса КА,  $\mathbf{P} \equiv P\mathbf{e}$  — вектор реактивной тяги двигателя КА, здесь  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, сонаправленный с вектором тяги,  $\mathbf{e} \equiv (\cos \xi \cos \eta; \sin \xi \cos \eta; \sin \eta)$ , где  $\xi$  — угол, отсчитываемый от оси  $X$  до проекции вектора тяги  $\mathbf{P}$  на плоскость  $XY$ ,  $\eta$  — угол, отсчитываемый от проекции вектора тяги  $\mathbf{P}$  на плоскость  $XY$  до самого вектора тяги  $\mathbf{P}$ , а  $P$  — соответственно модуль вектора реактивной тяги,  $P = g_E n_0$ , где  $n_0$  — тяговооружённость;  $C \equiv g_E P_{уд}$  — скорость истечения реактивной струи

(постоянная величина, не зависящая от тяги),  $P_{уд} = 1500$  с — удельная тяга для СПД-100 по данным производителя ОКБ „Факел“ [100] (характеристика используемого топлива).  $P_{\max} \equiv g_E n_{0\max} = 0.00001 \cdot g_E$  — максимальная величина реактивной тяги. Изменение массы за счёт истечения реактивной струи:  $\dot{M}_i(t) = \frac{-M(0)P(t)}{C}$  на каждом участке,  $i = 1, 2, 3$ .

Разделим выражения для ускорений на  $M(t)$  и закон изменения массы на  $M(0)$ . Таким образом из уравнений (5.2.1) и (5.2.2), с учётом выкладок, приведённых выше, получаются следующие системы дифференциальных уравнений, описывающие скорость, ускорение центра масс КА и изменение массы на каждом участке траектории. На первом участке учитывается влияние Земли и Солнца ( $i = 1, B='E'$ ), на третьем ( $i = 3, B='M'$ ) — Марса и Солнца:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = u_i, \\ \dot{y}_i = v_i, \\ \dot{z}_i = w_i, \\ \dot{m}_i = -\frac{P_i}{C}, \\ \ddot{u}_i = -\frac{\mu_S}{r_S^3}(x_i + R_{SB}) - \frac{\mu_B}{r_B^3}x_i + \omega_B^2(x_i + R_{SB}) + 2\omega_B v_i + \frac{P_i}{m_i} \cos \xi_i \cos \eta_i, \\ \ddot{v}_i = -\frac{\mu_S}{r_S^3}y_i - \frac{\mu_B}{r_B^3}y_i + \omega_B^2 y_i - 2\omega_B u_i + \frac{P_i}{m_i} \sin \xi_i \cos \eta_i, \\ \ddot{w}_i = -\frac{\mu_S}{r_S^3}z_i - \frac{\mu_B}{r_B^3}z_i + \frac{P_i}{m_i} \sin \eta_i. \end{array} \right. \quad (5.2.3)$$

Здесь  $m_i \equiv \frac{M_i}{M(0)}$  — относительная масса КА на  $i$ -ом участке,  $r_E$ ,  $r_S$  и  $r_M$  — расстояние от КА до Земли, Солнца и Марса соответственно;  $R_{SE} = 1$  а.е. — среднее расстояние от центра Земли до Солнца,  $R_{SM} = 1.5236878$  а.е. — среднее расстояние от центра Марса до Солнца.

Переход из первой системы координат во вторую происходит в фиксированный момент времени  $t_1$ , в который КА заведомо покинет сферу влияния Земли.

На втором участке учитывается влияние только Солнца, так как притяжение КА Землёй и Марсом мало, им в данной главе пренебрегается. Система координат инерциальная и в уравнениях дифференциальной связи не будет

слагаемых, связанных с вращением системы координат:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = u_2, & \dot{y}_2 = v_2, & \dot{z}_2 = w_2, & \dot{m}_2 = -\frac{P_2}{C}, \\ \dot{u}_2 = -\frac{\mu_s}{r_s^3}x_2 + \frac{P_2}{m_2} \cos \xi_2 \cos \eta_2, \\ \dot{v}_2 = -\frac{\mu_s}{r_s^3}y_2 + \frac{P_2}{m_2} \sin \xi_2 \cos \eta_2, \\ \dot{w}_2 = -\frac{\mu_s}{r_s^3}z_2 + \frac{P_2}{m_2} \sin \eta_2. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Переход из второй системы координат в третью происходит в фиксированный момент времени  $t_2$ , в который КА будет подлетать к сфере влияния Марса. Моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  изначально выбираются с запасом равными 100 и  $T - 200$  дням соответственно, а их точные значения, выбираются позднее. Обозначим момент окончания первого участка траектории за  $t_1^- \equiv t_1$ , момент начала второго участка траектории за  $t_1^+ \equiv t_1$ , момент окончания второго участка траектории за  $t_2^- \equiv t_2$ , момент начала третьего участка траектории за  $t_2^+ \equiv t_2$ . Входящие в (5.2.3)–(5.2.4) функции управления  $P_i$ ,  $\xi_i$  и  $\eta_i$ , определяющие соответственно модуль и угловое положение вектора реактивной тяги  $P_i \cdot (\cos \xi_i \cos \eta_i; \sin \xi_i \cos \eta_i; \sin \eta_i)$  полагаются ограниченными кусочно-непрерывными функциями:

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_i(t) \leq P_{\max} < \infty, \\ 0 &\leq \xi_i(t) < 2\pi, \\ -\pi/2 &\leq \eta_i(t) \leq \pi/2, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

при  $i = 1$  соотношения (5.2.5) должны быть выполнены  $\forall t \in [0, t_1^-]$ ; при  $i = 2 - \forall t \in [t_1^+, t_2^-]$ ; при  $i = 3 - \forall t \in [t_2^+, T]$ , где  $T$  – заранее неизвестный конечный момент времени, момент окончания перелёта.

При кусочно-непрерывных ограниченных управлениях  $P_i$ ,  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  фазовые переменные  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ ,  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ ,  $m_i$  будут непрерывными кусочно-гладкими функциями, удовлетворяющими на участках непрерывности своих производных (между моментами переключения тяги) уравнениям дифференциальной связи (5.2.3)–(5.2.4).

До некоторого момента времени  $t = t_1$  движение КА описывается в системе координат, связанной с Землёй. В момент времени  $t = t_1$  осуществляется

переход к описанию движения КА в гелиоцентрической системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_2(t_1^+) = (x_1(t_1^-) + R_{SE}) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) - y_1(t_1^-) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M), \\
 y_2(t_1^+) = ((x_1(t_1^-) + R_{SE}) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + y_1(t_1^-) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M)) \cdot \\
 \quad \cdot \cos i_M - z_1(t_1^-) \sin i_M, \\
 z_2(t_1^+) = ((x_1(t_1^-) + R_{SE}) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + y_1(t_1^-) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M)) \cdot \\
 \quad \cdot \sin i_M + z_1(t_1^-) \cos i_M, \\
 u_2(t_1^+) = (u_1(t_1^-) + R_{SE}) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) - v_1(t_1^-) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) - \\
 \quad - \omega_E ((x_1(t_1^-) + R_{SE}) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + y_1(t_1^-) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M)), \\
 v_2(t_1^+) = ((u_1(t_1^-) + R_{SE}) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + v_1(t_1^-) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + \\
 \quad + \omega_E ((x_1(t_1^-) + R_{SE}) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) - y_1(t_1^-) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M))) \cdot \\
 \quad \cdot \cos i_M - w_1(t_1^-) \sin i_M, \\
 w_2(t_1^+) = ((u_1(t_1^-) + R_{SE}) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + v_1(t_1^-) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + \\
 \quad + \omega_E ((x_1(t_1^-) + R_{SE}) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) - y_1(t_1^-) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M))) \cdot \\
 \quad \cdot \sin i_M + w_1(t_1^-) \cos i_M, \\
 m_2(t_1^+) = m_1(t_1^-),
 \end{array} \right. \quad (5.2.6)$$

где  $\varphi_E(t) = \omega_E t + \varphi_E(0)$ , — угловое положение Земли в гелиоцентрической системе координат;  $i_M = 1.85061^\circ = 0.032288222578$  рад — наклон средней плоскости орбиты Марса к средней плоскости орбиты Земли;  $\Omega_M = 49.57854^\circ = 0.858184535514$  рад — долгота восходящего узла орбиты Марса в гелиоцентрической системе координат, в которой нулевая точка — Первая точка Овна (точка весеннего равноденствия), в используемой же при решении данной задачи системе координат  $\Omega_M = 0^\circ = 0$  рад, так как нулевая точка находится на полуоси пересечения плоскостей орбит Марса и Земли, на которой Марс пересекает плоскость эклиптики, переходя из отрицательных значений по оси аппликат в положительные.

При использовании некоторых вычислительных схем для решения рассматриваемой задачи, а также для проверки полученной траектории необходим просчёт перелёта назад во времени. Для этого понадобятся формулы пересчёта в момент времени  $t = t_1$  фазовых переменных из гелиоцентриче-

ской системы координат в геоцентрическую:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1(t_1^-) = x_2(t_1^+) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + \\
 \quad + (y_2(t_1^+) \cos i_M + z_2(t_1^+) \sin i_M) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M), \\
 y_1(t_1^-) = -x_2(t_1^+) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + \\
 \quad + (y_2(t_1^+) \cos i_M + z_2(t_1^+) \sin i_M) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M), \\
 z_1(t_1^-) = -y_2(t_1^+) \sin i_M + z_2(t_1^+) \cos i_M, \\
 u_1(t_1^-) = u_2(t_1^+) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + (v_2(t_1^+) \cos i_M + w_2(t_1^+) \cdot \\
 \quad \cdot \sin i_M) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + \omega_E(-x_2(t_1^+) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + \\
 \quad + (y_2(t_1^+) \cos i_M + z_2(t_1^+) \sin i_M) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M)), \\
 v_1(t_1^-) = -u_2(t_1^+) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + (v_2(t_1^+) \cos i_M + w_2(t_1^+) \cdot \\
 \quad \sin i_M) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) - \omega_E(x_2(t_1^+) \cos(\varphi_E(t_1) - \Omega_M) + \\
 \quad + (y_2(t_1^+) \cos i_M + z_2(t_1^+) \sin i_M) \sin(\varphi_E(t_1) - \Omega_M)), \\
 w_1(t_1^-) = -v_2(t_1^+) \sin i_M + w_2(t_1^+) \cos i_M, \\
 m_1(t_1^-) = m_2(t_1^+).
 \end{array} \right. \quad (5.2.7)$$

Аналогичные формулы могут быть получены для связи гелиоцентрической и марсоцентрической систем координат. Пусть  $\varphi_M(t) = \omega_M t + \varphi_M(0)$  — угловое положение Марса в гелиоцентрической системе координат. До некоторого момента времени  $t = t_2$  движение КА описывается в системе координат, связанной с Солнцем. В момент времени  $t = t_2$  осуществляется переход к описанию движения КА в марсоцентрической системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_3(t_2^+) = x_2(t_2^-) \cos \varphi_M(t_2) + y_2(t_2^-) \sin \varphi_M(t_2) - R_{SM}, \\
 y_3(t_2^+) = -x_2(t_2^-) \sin \varphi_M(t_2) + y_2(t_2^-) \cos \varphi_M(t_2), \\
 u_3(t_2^+) = u_2(t_2^-) \cos \varphi_M(t_2) + v_2(t_2^-) \sin \varphi_M(t_2) + \\
 \quad + \omega_M(-x_2(t_2^-) \sin \varphi_M(t_2) + y_2(t_2^-) \cos \varphi_M(t_2)), \\
 v_3(t_2^+) = -u_2(t_2^-) \sin \varphi_M(t_2) + v_2(t_2^-) \cos \varphi_M(t_2) - \\
 \quad - \omega_M(x_2(t_2^-) \cos \varphi_M(t_2) + y_2(t_2^-) \sin \varphi_M(t_2)), \\
 z_3(t_2^+) = z_2(t_2^-), \quad w_3(t_2^+) = w_2(t_2^-), \quad m_3(t_2^+) = m_2(t_2^-).
 \end{array} \right. \quad (5.2.8)$$

Формулы пересчёта при пролёте назад в момент времени  $t = t_2$  фазовых

переменных из марсоцентрической системы координат в гелиоцентрическую:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(t_2^-) = (x_3(t_2^+) + R_{SM}) \cos \varphi_M(t_2) - y_3(t_2^+) \sin \varphi_M(t_2), \\ y_2(t_2^-) = (x_3(t_2^+) + R_{SM}) \sin \varphi_M(t_2) + y_3(t_2^+) \cos \varphi_M(t_2), \\ \tilde{u}_3(t_2^+) = u_3(t_2^+) - \omega_M y_3(t_2^+), \\ \tilde{v}_3(t_2^+) = v_3(t_2^+) + \omega_M (x_3(t_2^+) + R_{SM}), \\ u_2(t_2^-) = \tilde{u}_3(t_2^+) \cos \varphi_M(t_2) - \tilde{v}_3(t_2^+) \sin \varphi_M(t_2), \\ v_2(t_2^-) = \tilde{u}_3(t_2^+) \sin \varphi_M(t_2) + \tilde{v}_3(t_2^+) \cos \varphi_M(t_2), \\ z_2(t_2^-) = z_3(t_2^+), \quad w_2(t_2^-) = w_3(t_2^+), \quad m_2(t_2^-) = m_3(t_2^+). \end{array} \right. \quad (5.2.9)$$

В начальный фиксированный момент времени  $t = 0$  тяга включена, КА находится в некоторой точке исходной круговой орбиты ИС Земли произвольной ориентации высоты  $h_E = 200$  км над поверхностью Земли и движется со скоростью  $\vec{v}_{кр.Е}(h_E) + \vec{\Delta}_E$ , где  $|\vec{v}_{кр.Е}(h_E)| \equiv \sqrt{\frac{\mu_E}{R_E + h_E}} - \omega_E \cdot (R_E + h_E) \approx 7.78$  км/с — круговая скорость на орбите ИСЗ высоты  $h_E$  во вращающейся СК, связанной с Землей,  $|\vec{\Delta}_E| \equiv |(\Delta u_0; \Delta v_0; \Delta w_0)| = (\sqrt{2} - 1) \cdot v_{кр.Е}(h_E) \approx 3.22$  км/с — избыток скорости в начальный момент времени, добавка за счёт вращения системы координат составляет  $\omega_E \cdot (R_E + h_E) \approx 0.00131$  км/с:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1(0))^2 + (y_1(0))^2 + (z_1(0))^2 = (R_E + h_E)^2, \\ x_1(0)(u_1(0) - \Delta u_0) + y_1(0)(v_1(0) - \Delta v_0) + z_1(0)(w_1(0) - \Delta w_0) = 0, \\ (u_1(0) - \omega_E y_1(0) - \Delta u_0)^2 + (v_1(0) - \omega_E x_1(0) - \Delta v_0)^2 + \\ \quad + (w_1(0) - \Delta w_0)^2 = \frac{\mu_E}{R_E + h_E}, \\ \Delta u_0^2 + \Delta v_0^2 + \Delta w_0^2 = \Delta_E^2, \\ m_1(0) = 1. \end{array} \right. \quad (5.2.10)$$

Система координат, связанная с Землёй, была выбрана также в связи с удобством записи в ней условий (5.2.10), уравнения, задающие орбиту ИСЗ не зависят от угла  $\varphi_E(0)$ .

В конечный, заранее нефиксированный момент времени  $t = T$  космический аппарат должен находиться в произвольной (оптимальной) точке круговой орбиты сопровождения Фобоса высоты  $h_M = 9300$  км над поверхностью Марса, причём высота орбиты Марса полагается равной  $R_{SM} = 1.5237494573$

а.е. — среднее расстояние от Марса до Солнца, и двигаться по ней со скоростью  $\vec{v}_{\text{кр.М}}(\mathbf{h}_M) + \vec{\Delta}_M$ , где  $|\vec{v}_{\text{кр.М}}(\mathbf{h}_M)| \equiv \sqrt{\frac{\mu_M}{(R_M + h_M)}} - \omega_M \cdot (R_M + h_M) \approx 1.84$  км/с — круговая скорость на орбите Фобоса высоты  $h_M = 9300$  км во вращающейся СК, связанной с Марсом,  $|\vec{\Delta}_M| \equiv |(\Delta u_T; \Delta v_T; \Delta w_T)| = (\sqrt{2} - 1) \cdot v_{\text{кр.М}}(h_M) \approx 0.76$  км/с — избыток скорости в конечный момент времени, добавка за счёт вращения системы координат составляет  $\omega_M \cdot (R_M + h_M) \approx 0.00134$  км/с:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_3(T))^2 + (y_3(T))^2 + (z_3(T))^2 = (R_M + h_M)^2, \\ x_3(T)(u_3(T) + \Delta u_T) + y_3(T)(v_3(T) + \Delta v_T) + z_3(T)(w_3(T) + \Delta w_T) = 0, \\ y_3(T)(w_3(T) + \Delta w_T) - z_3(T)(v_3(T) + \Delta v_T + \omega_M x_3(T)) = C_x, \\ z_3(T)(u_3(T) + \Delta u_T - \omega_M y_3(T)) - x_3(T)(w_3(T) + \Delta w_T) = C_y, \\ x_3(T)(v_3(T) + \Delta v_T + w_3(T) + \omega_M x_3(T)) - \\ \quad - y_3(T)(u_3(T) + \Delta u_T + \omega_M y_3(T)) = C_z, \\ \Delta u_T^2 + \Delta v_T^2 + \Delta w_T^2 = \Delta_M^2, \end{array} \right. \quad (5.2.11)$$

где  $(C_x, C_y, C_z) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  — вектор кинетического момента, задающий ориентацию орбиты.

Минимизируемый функционал:

$$T \longrightarrow \inf. \quad (5.2.12)$$

Решением задачи является набор неизвестных фазовых переменных  $x_i(\cdot)$ ,  $y_i(\cdot)$ ,  $z_i(\cdot)$ ,  $u_i(\cdot)$ ,  $v_i(\cdot)$ ,  $w_i(\cdot)$ ,  $m_i(\cdot)$ , управлений  $P_i(\cdot)$ ,  $\xi_i(\cdot)$ ,  $\eta_i(\cdot)$  и момент времени  $T$ , которые должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (5.2.3)–(5.2.4), ограничениям на управление (5.2.5), начальным условиям (5.2.10), конечным условиям (5.2.11) и минимизировать функционал (5.2.12).

### 5.3 Краевая задача принципа максимума

Поставленная задача космодинамики формализована как задача оптимального управления. На основе принципа максимума Льва Семёновича Понтрягина с введением множителей Лагранжа: сопряжённых переменных  $p_{xi}$ ,  $p_{yi}$ ,  $p_{zi}$ ,  $p_{ui}$ ,  $p_{vi}$ ,  $p_{wi}$ ,  $p_{mi}$  и констант  $\lambda_{r0}$ ,  $\lambda_{rv0}$ ,  $\lambda_{v0}$ ,  $\lambda_{\Delta 0}$ ,  $\lambda_{m0}$ ,  $\lambda_{x1}$ ,  $\lambda_{y1}$ ,  $\lambda_{z1}$

$\lambda_{u1}, \lambda_{v1}, \lambda_{w1}, \lambda_{m1}, \lambda_{x2}, \lambda_{y2}, \lambda_{z2}, \lambda_{u2}, \lambda_{v2}, \lambda_{w2}, \lambda_{m2}, \lambda_T, \lambda_{rT}, \lambda_{rvT}, \lambda_{CX}, \lambda_{CY}, \lambda_{CZ}, \lambda_{\Delta T}$ , и анализа системы необходимых условий оптимальности решение задачи оптимального управления переменной структуры сводится к решению четырёхточечной краевой задачи 42-го порядка.

Дифференциальными уравнениями задачи являются 21 уравнение из постановки задачи (5.2.3)–(5.2.4) и 21 уравнение из необходимых условий оптимальности на сопряжённые переменные (5.3.2)–(5.3.1).

Краевыми условиями в задаче являются краевые условия из постановки задачи, в том числе соотношения переходов между различными СК (5.2.6), (5.2.8) или (5.2.7), (5.2.9), а также необходимые условия стационарности и трансверсальности по фазовым переменным и по импульсам.

Пусть на  $i$ -ом участке траектории  $r = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ . Тогда на первом участке  $r = r_E, r_s = \sqrt{(x_1 + R_{SE})^2 + y_1^2 + z_1^2}$ , на втором участке,  $r = r_s$ , на третьем участке  $r = r_M, r_s = \sqrt{(x_3 + R_{SM})^2 + y_3^2 + z_3^2}$ . Обозначим  $\rho_i = \sqrt{p_{ui}^2 + p_{vi}^2 + p_{wi}^2}$ . Тогда сопряжённые системы дифференциальных уравнений на первом ( $i = 1, B='E'$ ) и третьем ( $i = 3, B='M'$ ) участке имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{xi} = p_{ui} \cdot \left( \frac{\mu_s}{r_s^3} - \frac{3\mu_s \cdot (x_i + R_{SB})^2}{r_s^5} + \frac{\mu_B}{r_B^3} - \frac{3\mu_B \cdot x_i^2}{r_B^5} - \omega_B^2 \right) - \\ p_{vi} \left( \frac{3\mu_s \cdot (x_i + R_{SB})y_i}{r_s^5} + \frac{3\mu_B \cdot x_i y_i}{r_B^5} \right) - p_{wi} \left( \frac{3\mu_s \cdot (x_i + R_{SB})z_i}{r_s^5} + \frac{3\mu_B \cdot x_i z_i}{r_B^5} \right), \\ \dot{p}_{yi} = p_{vi} \cdot \left( \frac{\mu_s}{r_s^3} - \frac{3\mu_s \cdot y_i^2}{r_s^5} + \frac{\mu_B}{r_B^3} - \frac{3\mu_B \cdot y_i^2}{r_B^5} - \omega_B^2 \right) - \\ p_{ui} \cdot \left( \frac{3\mu_s \cdot (x_i + R_{SB})y_i}{r_s^5} + \frac{3\mu_B \cdot x_i y_i}{r_B^5} \right) - p_{wi} \cdot \left( \frac{3\mu_s \cdot y_i z_i}{r_s^5} + \frac{3\mu_B \cdot y_i z_i}{r_B^5} \right), \\ \dot{p}_{zi} = p_{wi} \cdot \left( \frac{\mu_s}{r_s^3} - \frac{3\mu_s \cdot z_i^2}{r_s^5} + \frac{\mu_B}{r_B^3} - \frac{3\mu_B \cdot z_i^2}{r_B^5} \right) - \\ p_{ui} \cdot \left( \frac{3\mu_s \cdot (x_i + R_{SB})z_i}{r_s^5} + \frac{3\mu_B \cdot x_i z_i}{r_B^5} \right) - p_{vi} \cdot \left( \frac{3\mu_s \cdot y_i z_i}{r_s^5} + \frac{3\mu_B \cdot y_i z_i}{r_B^5} \right), \\ \dot{p}_{ui} = -p_{xi} + 2\omega_B p_{vi}, \quad \dot{p}_{vi} = -p_{yi} - 2\omega_B p_{ui}, \quad \dot{p}_{wi} = -p_{zi}, \\ \dot{p}_{mi} = p_{ui} \frac{P_i}{m_i^2} \cos \xi_i \cos \eta_i + p_{vi} \frac{P_i}{m_i^2} \sin \xi_1 \cos \eta_i + p_{wi} \frac{P_i}{m_i^2} \sin \eta_i. \end{array} \right. \quad (5.3.1)$$



На втором участке ( $i = 2, B = 'S'$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{x2} = p_{u2} \cdot \left( \frac{\mu_s}{r_s^3} - \frac{3\mu_s \cdot x_2^2}{r_s^5} \right) - p_{v2} \cdot \frac{3\mu_s \cdot x_2 y_2}{r_s^5} - p_{w2} \cdot \frac{3\mu_s \cdot x_2 z_2}{r_s^5}, \\ \dot{p}_{y2} = p_{v2} \cdot \left( \frac{\mu_s}{r_s^3} - \frac{3\mu_s \cdot y_2^2}{r_s^5} \right) - p_{u2} \cdot \frac{3\mu_s \cdot x_2 y_2}{r_s^5} - p_{w2} \cdot \frac{3\mu_s \cdot y_2 z_2}{r_s^5}, \\ \dot{p}_{z2} = p_{w2} \cdot \left( \frac{\mu_s}{r_s^3} - \frac{3\mu_s \cdot z_2^2}{r_s^5} \right) - p_{u2} \cdot \frac{3\mu_s \cdot x_2 z_2}{r_s^5} - p_{v2} \cdot \frac{3\mu_s \cdot y_2 z_2}{r_s^5}, \\ \dot{p}_{u2} = -p_{x2}, \quad \dot{p}_{v2} = -p_{y2}, \quad \dot{p}_{w2} = -p_{z2}, \\ \dot{p}_{m2} = p_{u2} \frac{P_2}{m_2^2} \cos \xi_2 \cos \eta_2 + p_{v2} \frac{P_2}{m_2^2} \sin \xi_2 \cos \eta_2 + p_{w2} \frac{P_2}{m_2^2} \sin \eta_2. \end{array} \right. \quad (5.3.2)$$

Сформированная краевая задача в работе решается методом стрельбы [24, гл. 2], [9, §2].

Метод Ньютона сходится за меньшее число итераций при просчёте в сторону притягивающего центра (Земли, Марса), чем при удалении от него. Поэтому для улучшения сходимости метода Ньютона была выбрана следующая вычислительная схема.

В качестве параметров пристрелки выбирается значение  $\alpha_1 = T$  и недостающие для решения задач Коши константы, при  $t = 0$  :  $\alpha_2 = \xi_1(0)$ ,  $\alpha_3 = \eta_1(0)$ ,  $\alpha_4 = \rho_1(0)$ ,  $\alpha_5 = i_{KA}(0)$ ,  $\alpha_6 = \Omega_{KA}(0)$ ,  $\alpha_7 = \varphi_{KA}(0)$ , при  $t = T$  :  $\alpha_8 = \xi_3(T)$ ,  $\alpha_9 = \eta_3(T)$ ,  $\alpha_{10} = \varphi_{KA}(T)$ ,  $\alpha_{11} = \lambda_{rT}$ ,  $\alpha_{12} = \lambda_{CY}$ ,  $\alpha_{13} = \rho_3(T)$ , где величины  $i_{KA}(0)$ ,  $\Omega_{KA}(0)$  и  $\varphi_{KA}(0)$  задают ориентацию начальной орбиты КА и положение КА на ней,  $\varphi_{KA}(T)$  задаёт положение КА на конечной орбите фиксированной ориентации. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачи Коши на отрезках времени  $[0, \tau]$ ,  $[T, \tau]$ , получим соответствующие выбранному значению  $\vec{\alpha}$  функции  $x_i(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $y_i(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $z_i(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $u_i(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $v_i(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $w_i(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $m_i(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $p_{xi}(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $p_{yi}(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $p_{zi}(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $p_{ui}(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $p_{vi}(\cdot)[\vec{\alpha}]$ ,  $p_{wi}(\cdot)[\vec{\alpha}]$ , и, в частности, значения фазовых и сопряжённых переменных, зависящие от вектора  $\vec{\alpha}$ , в момент времени  $\tau$ . В фиксированный момент времени  $\tau$ , в работе полагалось  $\tau = 350$  дней, происходит склейка значений всех фазовых и сопряжённых переменных, см. рис. 1.2. Соответствующие выражения и выражение  $\lambda_{rv0} z_1(0) + \lambda_{v0}(w_1(0) - \Delta w_0) - p_{w1}(0)$  из краевых условий составляют вектор-функцию невязок  $\vec{X}[\vec{\alpha}]$ .

Серия задач Коши в методе Ньютона решается численно явным методом Рунге-Кутты 8-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса 8(7) DOPRI8 с автоматическим выбором шага [99, гл. II.4; II.6], то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге.

Схема численного решения краевой задачи методом стрельбы выбрана таким образом, что при отсутствии ошибок в программной реализации решения задачи Коши, найденный методом Ньютона корень будет правильным (действительно удовлетворяющим краевым условиям задачи, без учёта погрешности численного интегрирования), даже если внутри метода Ньютона есть какие-то ошибки. Напротив, ошибка в решении задачи Коши делает бесполезным полученный результат, даже если всё остальное запрограммировано правильно и методу Ньютона удалось найти корень.

Исходя из этого были проведены тесты части программы, решающей задачу Коши, на системах дифференциальных уравнений с известным аналитическим решением.

Основные конструкции принципа максимума в задаче данной главы, система необходимых условий оптимальности, её подробный анализ, выбор условия нормировки, итоговая краевая задача и полное описание вычислительной схемы произведено в работе [122].

## 5.4 Лестница вспомогательных задач

Основная трудность в решении полученной краевой задачи опять заключается в выборе хорошего начального приближения для параметров пристрелки, с которого сошёл бы метод Ньютона. Полученная краевая задача принципа максимума не решается с произвольным начальным приближением. Поэтому для нахождения начального приближения, необходимого для решения исходной задачи, была решена серия вспомогательных задач.

**Первая ступень лестницы.** Начальное приближение берётся из задачи перелёта с круговой орбиты ИСЗ высоты 300 км на орбиту ИСЗ высоты 500 км за минимальное время с избытком скорости в начальный момент вре-

мени, равным 100 м/с. Эта задача решалась в полярной геоцентрической системе координат, единицей измерения длины брался 1 километр, времени — 1 секунда. Решение данной задачи не представляет вычислительных трудностей.

Экстремаль в декартовой системе координат была получена продолжением по параметру — высоте орбиты Марса за 2 шага. Также начальные значения параметров пристрелки могли быть пересчитаны при переходе в декартову систему координат.

**Вторая ступень лестницы.** С приближения, полученного при решении задачи первой ступени, сошёлся метод Ньютона в задаче перехода за минимальное время с круговой орбиты сопровождения Земли на орбиту сопровождения Марса в гелиоцентрической полярной системе координат, причём Земля и Марс считались непритягивающими точками. В этой задаче уже единицей длины бралась величина а.е./100, время измерялось в днях. Была получена экстремаль Понтрягина, и эта задача была далее исследована. Продолжением по параметру удалось решить отдельную задачу минимизации затрат массы с ограничением на время перелёта — 1 виток траектории. Также были получены 2-витковая и 3-витковая траектории и произведена импульсная оценка снизу остатка массы.

**Третья ступень лестницы.** Далее последняя задача быстрогодействия была решена в декартовой гелиоцентрической системе координат. Особенностью такой задачи является существование интеграла Белецкого-Егорова-Пайнса  $p_\varphi \equiv 0$ , благодаря которому в полярной системе координат в задаче быстрогодействия получается на 1 параметр пристрелки меньше, чем в декартовой (соответственно 3 и 4 параметра пристрелки).

**Четвёртая ступень лестницы.** Далее в задачу была добавлена орбита ИСЗ продолжением по высоте этой орбиты от 0 до 200 километров, что возможно в связи с отсутствием притяжения Земли. При этом начальное положение КА на орбите ИСЗ бралось равным 0 радиан. На начальном участке траектории эта задача описывалась в СК, связанной с Землёй. Был проведён тест формул пересчёта фазовых и сопряжённых переменных. А именно, совершалось 2 просчёта задачи с одинаковыми начальными данными, но с

переходом от геоцентрической СК в гелиоцентрическую СК и назад в геоцентрическую, причём эти 2 точки перехода к описанию в другой системе координат при разных просчётах брались различными, и далее сравнивались значения фазовых и сопряжённых переменных в фиксированный момент времени.

**Пятая ступень лестницы.** Затем в задачу добавился учёт Земли — гравитационный параметр  $\mu_E$  стал равным правильному значению, а не 0, как в задачах нижних ступеней, и экстремаль, полученная в последней задаче, была просчитана назад во времени от орбиты сопровождения Марса к орбите ИСЗ. На этой траектории модифицированным для интегрирования задачи Коши методом хорд был найден корень — момент времени, в который вектор тяги космического аппарата сонаправлен с круговой скоростью относительно Земли на орбите высоты  $r_E$  в той же точке, что и КА. Для гладкости правых частей в исходной задаче  $r_E$  здесь и далее бралось равным  $R_E$  в том случае, если на каком-то шаге интегрирования оказывалось, что  $r_E < R_E$ .

Полученная траектория пересчитывалась как раньше от орбиты ИСЗ к орбите сопровождения Марса. Продолжением по параметру удалось добиться равенства  $\rho_1(0) = 1$  и  $m_1(0) = 1$ . Тем самым было получено начальное приближение для решения исходной задачи с высотой орбиты ИСЗ больше требуемой примерно в 10000 раз и избытком скорости относительно круговой скорости ИСЗ на заданной орбите больше требуемой примерно в 12 раз.

После этого в задачу аналогичным образом была добавлена орбита ИСМ.

**Шестая ступень лестницы.** Исходная задача в плоской постановке была решена продолжением по параметрам: высоте начальной орбиты ИСЗ, избытку скорости в начальный момент времени и положению КА на исходной орбите. Была выбрана следующая схема продолжения по этим параметрам. Высота орбиты равномерно снижалась, избыток скорости варьировался с переменным шагом (всего было произведено 5 смен шага). Положение КА на исходной орбите ИСЗ из условия сонаправленности тяги в начальный момент времени и круговой скорости может быть определено с помощью угла  $\theta_1(0)$ . Однако продолжить высоту орбиты до 200 километров с таким начальным положением КА на орбите ИСЗ не удалось. Так же это не удалось сделать при

фиксированном угле  $\varphi_{\text{КА}}(0)$ . Поэтому была выбрана комбинация этих двух способов задания  $\varphi_{\text{КА}}(0)$ :  $\varphi_{\text{КА}}(0)$  считался по значению  $\theta_1(0)$  с некоторым сдвигом, который также варьировался при продолжении по параметру.

В результате в данной задаче оптимального управления удалось построить экстремаль Понтрягина со значением  $\varphi_{\text{КА}}(0) = 4.4123972316904556123518$ . С помощью продолжения по параметру  $\varphi_{\text{КА}}(0)$  был найден локальный минимум функционала  $T$  по  $\varphi_{\text{КА}}(0)$ . При этом значение  $\varphi_{\text{КА}}(0)$  получилось равным 4.4383460942788701686368. Значение функционала — времени перелёта на этой траектории равно 278.0111146470518406204064 дням. Числа представляются с большой точностью в связи с тем, что при маленькой точности результат повторного просчёта отличается при различных методах ввода начальных данных. Метод Ньютона сошёлся с заданной точностью  $10^{-8}$ . Точность на шаге решения задачи Коши:  $10^{-12}$ , шаг вычисления производной:  $10^{-8}$ . Невязки: отклонение по высоте орбиты сопровождения Марса 1.808600 см; по скоростям  $-3.526547 \cdot 10^{-7}$  см/с и  $8.215275 \cdot 10^{-8}$  см/с; и по сопряжённым переменным  $3.377698 \cdot 10^{-12}$ . Переход в систему координат, связанную с Солнцем, на экстремали происходил в момент времени  $t = 100$  дней. Остаток массы составил 31.37%. В начальный момент времени вектор тяги получился направлен ниже в СК, связанной с Землёй, чем направление круговой скорости КА на  $\approx 0.000052$  радиан.

**Седьмая — последняя ступень лестницы.** Траекторию из плоского случая удалось продолжить по углу наклона плоскости средней орбиты Марса  $i_M$  относительно плоскости эклиптики до нужного значения  $\sim 1.85^\circ$ . Она уже является экстремалью Понтрягина для задачи пространственного перелёта между орбитами ИСЗ и ИСМ в исходной постановке раздела 5.1 для некоторых значений параметров орбиты ИСМ, а именно, для орбиты ИСМ, лежащей в средней плоскости Марса.

Далее эта траектория была продолжена по множеству параметров задачи:

$$n_{0\text{max}}, \quad \Delta_M, \quad i_M, \quad i_F, \quad \Omega_F, \quad \varphi_E(T), \quad \text{дата старта}, \quad (5.4.1)$$

в том числе для того, чтобы орбита ИСМ удовлетворяла условию кругового приближения орбиты сопровождения естественного спутника Марса

Фобоса. При продолжении экстремалей по импульсу в конечный момент времени с  $(\sqrt{2}-1)$  величины круговой скорости на круговой орбите ИСМ высоты 9300 км, то есть около 0.76 км/с, до 0 км/с время перелёта возрастает на 120 дней.

Различное  $n_{0\max}$  соответствует различному числу двигателей, установленных на КА одной и той же начальной массы. Продолжение по дате старта даёт оптимальное время запуска и окно старта КА к Фобосу среди экстремалей, удовлетворяющих остальным условиям перелёта к Фобосу.

При этом параметры положения Земли, Марса и Фобоса брались с сайта НАСА [108] из эфемерид DE-405 и MAR-085. Перелёт рассматривался со следующими параметрами:  $h_E = 200$  км,  $h_F = 9300$  км,  $i_F = 25^\circ$ ,  $\Omega_F = 38^\circ$ , предполагалось, что КА оснащён ДУ малой тяги СПД-100.

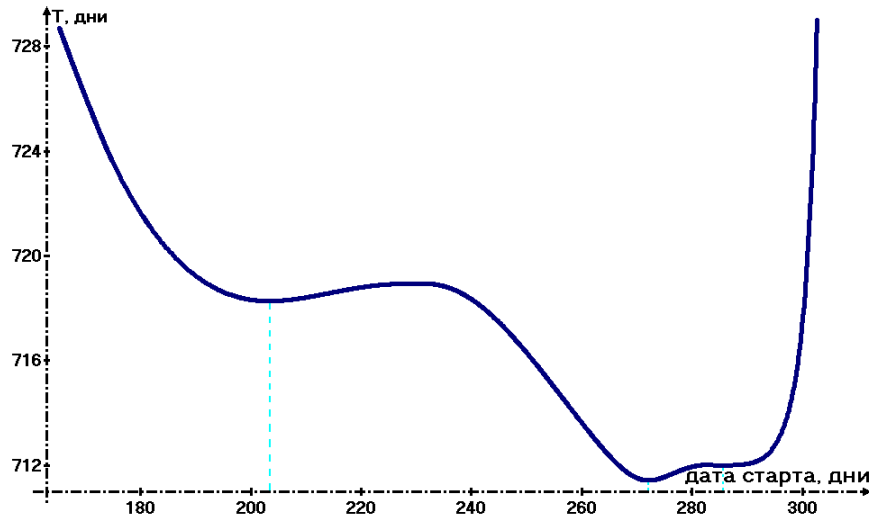


Рис. 5.2: Зависимость  $T$  от даты старта, отсчитываемой в днях от 01 января 2011 года.

Рис. 5.2 был построен при помощи продолжения по времени старта  $t_0$  для окна старта к Марсу в 2011 году, приуроченного к миссии „ФОБОС-ГРУНТ“ 2011-го года. На графике видно три локальных минимума задачи для выбранного окна старта к Марсу.

При продолжении по параметрам вблизи притягивающих центров (Земли и Марса в работе) метод Ньютона сходится плохо, то есть продолжать по параметру приходится со слишком маленьким шагом. Значительно улучшить скорость продолжения по параметрам позволила линейная аппроксимация параметров пристрелки.

Вначале делается несколько максимально допустимых шагов (например,

10). Затем первые и последние полученные значения параметров пристрелки рассматриваются как один большой шаг, и следующий шаг делается ещё в несколько раз (например, 100) больше. Таким образом при варьировании этих чисел (10 и 100), и таком методе аппроксимации параметров пристрелки, при счёте на ЭВМ в среднем удалось увеличить скорость продолжения по параметру в 10000 раз.

## 5.5 Результаты

Основным результатом является то, что задачу удалось решить и определить конкретные экстремали Понтрягина в исходной задаче.

Параметры лучшей найденной экстремали перелёта к Фобосу приведены на рис. 5.3–5.10.

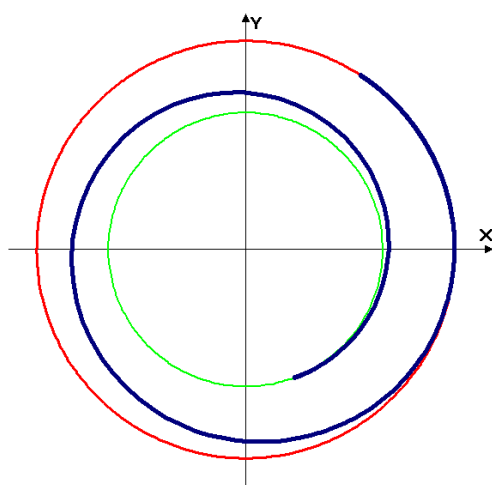


Рис. 5.3: Пространственный перелёт,  $\Delta_E = 3.2$  км/с,  $\Delta_M = 0$ , гелиоцентрическая СК, проекция на плоскость эклиптики.

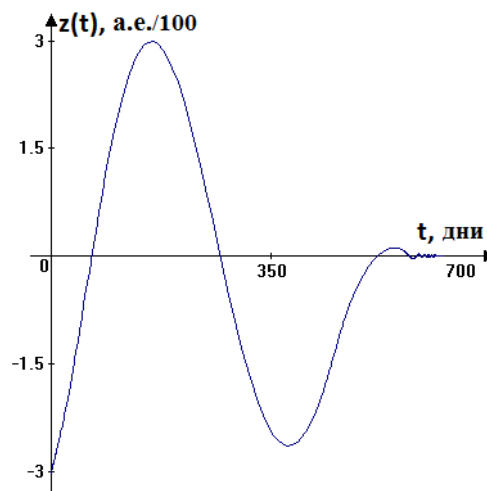


Рис. 5.4: Зависимость апшкаты  $z(t)$  на траектории.

Проекция траектории с  $\Delta_M = 0$  приведены на рис. 5.3, 5.4. На рисунках 5.5 и 5.6 показаны составляющие векторов скорости и управление в каждый момент времени. На рисунке 5.7 изображена абсолютная скорость КА в гелиоцентрической СК при торможения у Марса за 66 витков вокруг Фобоса.

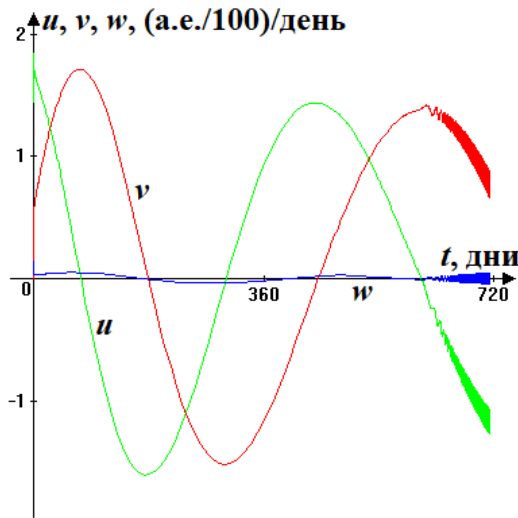


Рис. 5.5: Компоненты вектора скорости  $(u, v, w)$ .

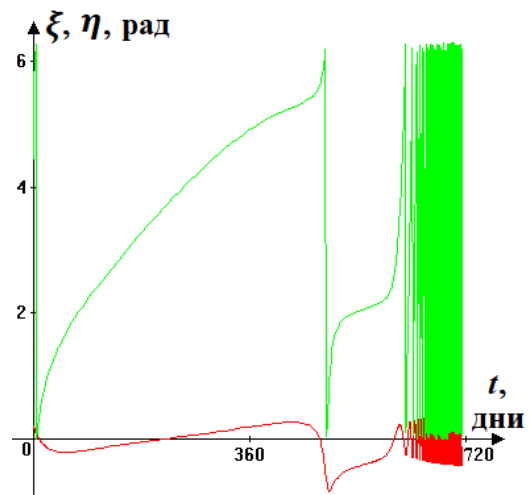


Рис. 5.6: Управление:  $\xi$  в плоскости и  $\eta$  в пространстве.

На рис. 5.8 видно, что угол  $\gamma$  между вектором скорости и вектором тяги не близок к 0. Заметим, что решение всей задачи отличается от решения задачи локальной оптимизации энергии КА. В задаче локальной оптимизации направления вектора тяги в данной точке (относительно затрат энергии), он должен лежать на той же прямой, что и скорость, что не обязательно должно быть выполнено при оптимизации всего перелёта.

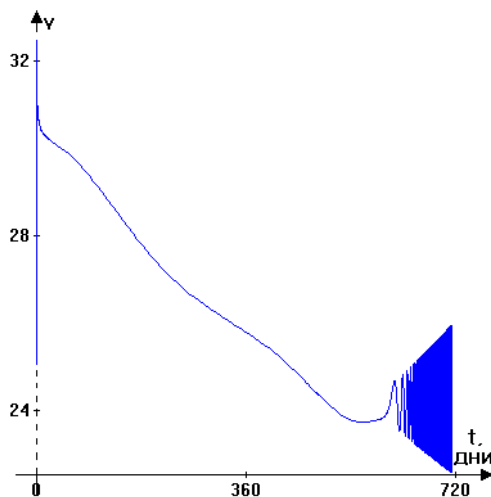


Рис. 5.7: Абсолютная скорость.

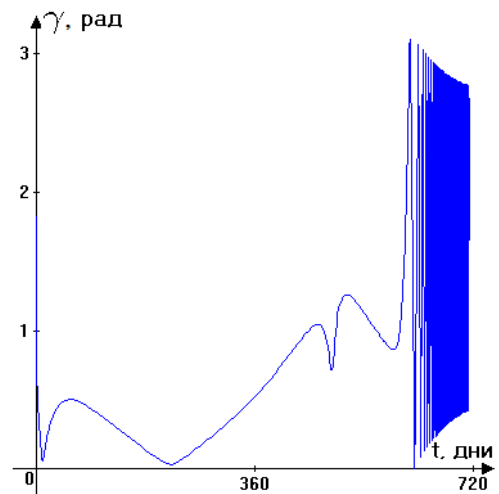


Рис. 5.8: Угол между вектором тяги и вектором скорости.



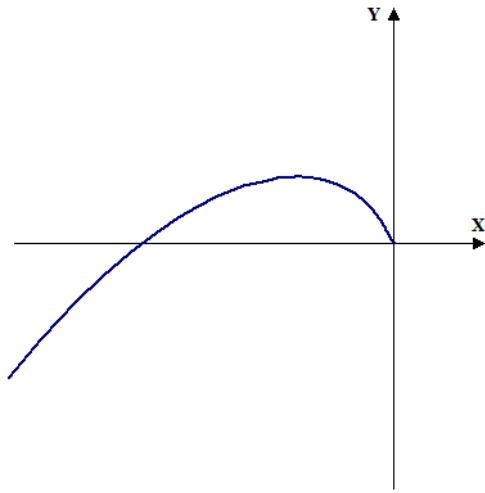


Рис. 5.9: Безвитковый полёт к Марсу,  $\Delta_M = 0.76$  км/с в марсоцентрической СК.

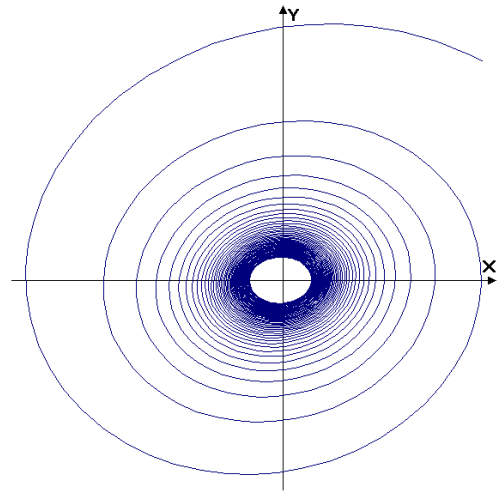


Рис. 5.10: Многовитковый полёт к Марсу,  $\Delta_M = 0$  км/с, 66 витков в марсоцентрической СК.

На рисунках 5.9 и 5.10 видно различие между траекториями многовиткового торможения у Марса без импульса в конце полёта и безвиткового полёта к Марсу за счёт использования достаточного по величине импульса. На тормозной манёвр у Марса за счёт только двигателей большой тяги тратится 20% массы КА. Использование же лишь двигателей малой тяги для торможения позволяет сэкономить 15% массы.

Аналогичный 19-витковый манёвр был построен около естественного спутника Марса Деймоса, см. рис. 5.11.

Время перелёта на экстремали к Фобосу: 711.75 дней, остаток массы: 59%. Точность на шаге при решении задачи Коши:  $10^{-12}$ , шаг вычисления производной в методе Ньютона:  $10^{-8}$ . Метод Ньютона сошёлся с заданной точностью  $1.e-9$ , что на данной траектории соответствует невязкам по координатам  $\sim 10^{-1}$  м; по скоростям  $\sim 10^{-5}$  мм/с; по сопряжённым переменным  $\sim 10^{-12}$ ; невязка в начале  $\sim 10^{-18}$ . Переход из геоцентрической в гелиоцентрическую СК, на экстремали происходил в момент времени  $t = 100$  дней, из марсоцентрической в ге-

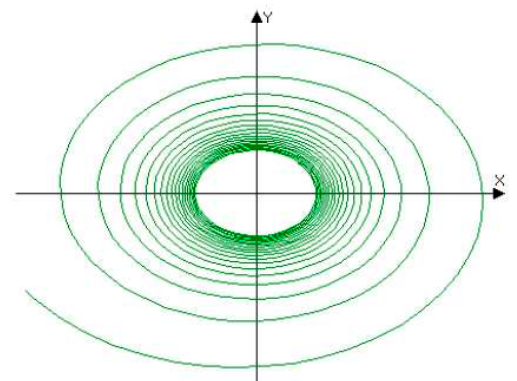


Рис 5.11: Многовитковый полёт к Деймосу.

лиоцентрическую в момент времени  $t = T - 200$  дней.

Приведённые графики построены в инерциальной гелиоцентрической СК, основной плоскостью является плоскость средней орбиты Марса. При увеличении  $n_{0\max}$  с  $1 \cdot 10^{-5}$  до  $1.22 \cdot 10^{-5}$  происходит уменьшение времени перелёта на 120 дней, с 712 до 592 (при оптимальной дате старта), то есть в 1.2 раза.

## 5.6 Выводы

В данной главе описан ещё один успешный пример применения автором разработанной методики построения лестницы задач.

На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина исследовались траектории наискорейших межпланетных пространственных перелётов КА, оснащённого реактивными двигателями большой и малой тяги, между круговыми орбитами ИС Земли и Марса. Учитывалось притяжение Солнца, Земли, Марса. Краевые задачи принципа максимума решались численно методом стрельбы, приведена вычислительная схема.

Подробно описывается построение начального приближение при помощи лестницы задач. Осуществлялось продолжение экстремалей более простых плоских задач по различным параметрам. Исходную задачу удалось решить, были построены семейства экстремалей для широкого диапазона параметров задачи. Итоговая экстремаль продолжалась по значению восьми различных величин (5.4.1).

В том числе построены экстремали Понтрягина для перелёта на орбиту сопровождения спутника Марса Фобоса в 2011 году, приуроченные к реальной миссии, без импульсного воздействия в конечный момент времени. Для увеличения точности решения использовалось несколько систем координат, в том числе две неинерциальные вращающиеся, связанные с Землёй и Марсом. Проведены множество численных тестов, обосновывающих точность полученных траекторий [24].

Основные результаты данной главы опубликованы в работе [122].

# Заключение

В работе исследовались трёхмерные космодинамические задачи сквозной оптимизации траекторий межпланетных перелётов космического аппарата с единым функционалом. При этом подробно рассматривался учёт планетоцентрических участков без использования грависфер нулевой протяжённости.

В работе предложена методика решения многоэкстремальных задач оптимизации траекторий межпланетных перелётов с возвратом к Земле, с учётом эфемерид, с жёсткой фазировкой, ограниченной комбинированной большой и малой кусочно-непрерывной тягой, включающая построение „лестницы задач“.

Разработаны численные методы решения краевых задач принципа максимума, возникающих при управлении совокупностью динамических систем, с учётом эффекта потери точности и перестройки структуры траектории при изменении количества активных участков во время продолжения решения по параметру.

На основе предложенных методик и численных методов реализован программный комплекс на языке С, учитывающий эфемериды, численно решены 9-точечные краевые задачи 70-го порядка. Построены конкретные экстремали в трёх различных вариантах экспедиции космического аппарата к Марсу и его спутнику Фобосу.

При построении начального приближения на основе решения задач Ламберта найден абсолютный минимум манёвра от Земли к Марсу, проверено выполнение условий второго порядка.

Проведён анализ построенных экстремалей, оценен выигрыш от использования малой тяги при доставке образцов грунта с Фобоса, позволяющий судить о целесообразности оснащения космического аппарата таким двигате-

лем. Произведено сравнение различных схем экспедиции: с осуществлением пертурбационного манёвра у Луны, с трёхимпульсным подлётом к Фобосу.

Так как положение КА, ориентация КА известны с некоторой погрешностью, а также в виду невозможности идеальной реализации рассчитанного математически управления, для успеха перелёта КА требуется учитывать ошибки, в том числе ошибки ДУ МТ [8]. В диссертационной работе данные вопросы не рассматривались. При этом в реальном проекте по доставке образцов грунта с Фобоса планировалось проведение 4–5 коррекций на траектории возврата к Земле [1], [2].

**Достоверность.** Для решения рассмотренных в диссертации задач автором был разработан программный комплекс на языке С. Было произведено сравнение различных методов вычисления координат и скоростей космического тела при пассивном полёте. А именно, сравнивались результаты расчётов различными методами векторов положения и скоростей КА по известным начальным данным. В качестве теста было взято положение и вектор скоростей Марса из эфемерид DE424 в 00:00 1 января 2020 г. Далее производился расчёт положений и скоростей через заданное время тремя разными способами:

1. Вычисление положения и скорости на орбите в заданное время без численного интегрирования, которое в основном использовалось в расчётах в случае учёта одного притягивающего центра [19, 90, 119].

Во втором и третьем методах, наоборот, использовалось численное интегрирование на компьютере:

2. Используя пакет SPICE с сайта NASA [102], который обеспечивает возможность точных вычислений положения и скорости с помощью эфемерид (DE424). Работа автора с эфемеридами представлена в [123];

3. Явным методом Рунге-Кутты 8-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана-Пренса 8(7) DOPRI8 с автоматическим выбором шага и с контролем максимально допустимой погрешности на шаге интегрирования (см. [99, гл. II.4, II.6] и [15]).

Результаты сравнения приведены в [119] и указывают на обоснованность применения данных методов в диссертационной работе.

## Заключение

Переходы между системами координат тестировались переключением между различными СК в первой, третьей, четвёртой и пятой главах диссертации в различные моменты времени. В том числе при построении графика траектории в одной, чаще всего гелиоцентрической или барицентрической системе координат, происходил переход к такой СК от планетоцентрических и правильность в том числе подтверждается непрерывными графиками, представленными в работе. Также было проведено множество расчётов задач Коши и задач оптимального управления с известным аналитическим решением [24], проверено правило Рунге и осуществлён просчёт назад во времени: траектории вычислялись методом Рунге-Кутты вперёд во времени с левого конца к правому, затем обратно производилось интегрирование к левому концу назад во времени и проверялось отклонение от исходных точек. Результаты расчётов свидетельствуют о корректности реализованных численных методов.

Также решение краевых задач разработанным автором программным комплексом было проверено независимо программой учёных из NASA на международных соревнованиях GTOC X, прошедших 2019 году [107, 115].

Кроме того о достоверности полученных результатов позволяет судить сравнение возможного выигрыша при использовании ДУ МТ с [3] и сравнение полученных траекторий с [17], проведённые в работе.

# Литература

- [1] Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М., Рузский Е.Г., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Доставка на Землю реликтового вещества с Фобоса — проект ФОБОС–ГРУНТ: баллистика, навигация и управление полётом // *Астрономический вестник*, 2010, т. 44, № 1, с. 29–40.
- [2] Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Баллистика, навигация и управление полётом космического аппарата в проекте „ФОБОС – ГРУНТ“ // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2002, № 5, с. 153–161.
- [3] Авдудевский В.С., Аким Э.Л., Кремнев Р.С., Куликов С.Д., Маров М.Я., Пичхадзе К.М., Попов Г.А., Энеев Т.М. Космический проект „Фобос–Грунт“: основные характеристики и стратегия развития // *Космонавтика и ракетостроение*, 2000, том 19, с. 8–21.
- [4] Аким Э.Л., Архангельский Р.Н., Зайко Ю.К., Лавренов С.М., Порошин А.Л., Рузский Е.Г., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Федотов В.П., Ярошевский В.С. Баллистика, навигация и управление движением космического аппарата на этапе его посадки на поверхность Фобоса // *Космические исследования*, 2009, т. 47, № 4, с. 332–342.
- [5] Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М., Рузский Е.Г., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Доставка на Землю реликтового вещества с Фобоса — проект „Фобос-Грунт“: баллистика, навигация и управление полетом, *Астрономический Вестник*, 2010, том 44, № 1, с. 29–40.
- [6] Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Баллистика, навигация и управление полетом космического аппарата „Фобос-Грунт“ // *Изв. РАН ТиСУ*, 2020, № 5, с. 153–161.

- [7] Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М., Рузский Е.Г., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Доставка на Землю реликтового вещества с Фобоса. Проект Фобос-Грунт: баллистика, навигация и управление полетом // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*, 2010, т. 44, № 1, с. 29–40.
- [8] Аким Э.Л., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Сазонов В.В. Управление и навигация в перелёте КА с малой тягой к Юпитеру // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2010, № 36, 24 с.
- [9] Александров В.В., Бахвалов Н.С., Григорьев К.Г., Данков Г.Ю., Зеликин М.И., Ищенко С.Я., Конягин С.В., Лапшин Е.А., Силаев Д.А., Тихомиров В.М., Фурсиков А.В. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988, 76 с.
- [10] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.
- [11] Ахметшин Р.З., Белоглазов С.С., Белоусова Н.С., Глазков А.И., Гуцин В.В., Егоров В.А., Ефимов Г.Б. Оптимизация перелетов к астероидам и кометам КА с комбинированием двигателей большой и малой тяги // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР*, 1985, № 144, 28 с.
- [12] Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б., Энеев Т.М. Траектории экспедиций космических аппаратов с двигателями малой тяги по доставке образцов грунта с астероидов Главного пояса и Фобоса // *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*, 2008, № 40, 23 с.
- [13] Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б., Энеев Т.М. Траектории экспедиций космических аппаратов с двигателями малой тяги по доставке образцов грунта с астероидов Главного пояса и Фобоса // *Космические исследования*, 2009, том 47, №1, с. 38–47.
- [14] Галимов Э.М. Научное обоснование проекта доставки грунта с Фобоса // *Астрономический Вестник*, 2010, т. 44, № 1, с. 7–16.
- [15] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008, 636 с.

- [16] Богачёв К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 1999, 200 с.
- [17] Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Заславский Г.С., Захваткин М.В., Корянов В.В., Лавренев С.М., Морской И.М., Симонов А.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полётов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы. МО, г. Химки: Научно-производственное объединение им. С.А. Лавочкина, 2018, 336 с.
- [18] Бреквелл Дж.В. Оптимизация траекторий // Вопросы ракетной техники, 1961, No. 1, с. 46–69.
- [19] Бэттин Р. Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966, 448 с.
- [20] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002, 824 с.
- [21] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
- [22] Голикова Г.Н., Горбунов Д.А., Григорьев И.С., Самохин А.С., Самохина М.А. Построение траекторий перелётов космического аппарата между орбитами на основе решения задач Ламберта // Материалы 52-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского, Калуга, изд-во АКФ «Политоп», 2017, с. 202–203.
- [23] Голикова Г.Н., Горбунов Д.А., Самохин А.С. Численная оптимизация пространственных перелётов космического аппарата на основе решения задач Ламберта // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов – 2017», Москва, изд-во МАКС Пресс, 2017, 1 с.
- [24] Григорьев И.С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005, 160 с.
- [25] Григорьев И.С. Оптимизация траекторий межпланетных перелетов космического аппарата, управляемого посредством двигателей большой и



малой тяги // *Фундаментальные и прикладные проблемы космонавтики*, 2000, №3, с. 11–18.

- [26] Григорьев И.С., Заплетин М.П. Об одной задаче оптимизации траекторий посещения КА группы астероидов // *Космические исследования*, 2009, т. 47, №5, с. 460–470.
- [27] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С., Самохина М.А. Методика построения начального приближения в задачах оптимального управления движением КА с ограниченной кусочно-непрерывной комбинированной тягой и фазировкой // *Ломоносовские чтения – 2018. Секция механики*, Москва, изд-во МГУ, 2018, с. 68–69.
- [28] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С., Самохина М.А. Методика построения экстремалей Понтрягина в задачах с комбинированной тягой. XLIII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства, Москва, издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019, т. 1, с. 135–136.
- [29] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С., Самохина М.А. О построении оптимальных траекторий для космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в задачах с фазировкой. Материалы 55-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Часть 1, Калуга, изд-во Эйдос, 2020, с. 253–255.
- [30] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С., Самохина М.А. Об учете возмущения траектории КА солнечным ветром при численных расчетах межпланетного движения. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 18-27 апреля 2016 г., Москва, изд-во МГУ, 2016, с. 68–68.
- [31] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С., Самохина М.А. Об учете неинерциальности гелиоцентрической системы координат при расчете движения КА на ЭВМ с использованием эфемерид. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 18-27 апреля 2016 г., Москва, изд-во МГУ, 2016, с. 68–69.

- [32] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С., Самохина М.А. Оптимизация экспедиции к Фобосу с возвращением к Земле с комбинированной тягой. ХLI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, Москва, изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, с. 319–319.
- [33] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С., Самохина М.А. Оценка возможного выигрыша по массе при использовании двигателей малой тяги в экспедиции к Марсу. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань 20-24 августа 2015 г.), Казань, изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015, том 20, с. 84–84.
- [34] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С., Самохина М.А. Оценка возможного выигрыша по массе при использовании двигателей малой тяги в экспедиции к Марсу. Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань 20-24 августа 2015 г.), Казань, изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015, том 20, с. 1063–1065.
- [35] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. II // Косм. иссл., 2007, том 45, №6, с. 1–11.
- [36] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Об условиях принципа максимума в задачах оптимального управления совокупностью динамических систем и их применении к решению задач оптимального управления движением космических аппаратов // Косм. иссл., 2003, т. 41, № 3, с. 307–331.
- [37] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Оптимальные траектории возвращения космического аппарата с реактивными двигателями большой ограниченной тяги от Луны к Земле // Косм. иссл., 1995, т. 33, № 5, с. 513–532.
- [38] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Оптимальные траектории перелетов космического аппарата с реактивными двигателями большой ограниченной

тяги между орбитой искусственного спутника Земли и Луной // Космические исследования, 1994, т.32, № 6, с. 108–129.

- [39] Григорьев И.С., Рыжов С.Ю. К проблеме решения задач оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных перелётов КА // Космические исследования, 2006, т. 44, № 3, с. 272–280.
- [40] Григорьев К.Г. О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени // Космические исследования, 1994, т. 32, № 2, с. 45.
- [41] Григорьев К.Г. О наискорейших маневрах космического аппарата // Космические исследования, 1994, т. 32, № 1, с. 56.
- [42] Григорьев К.Г., Григорьев И.С. Исследование оптимальных траекторий перелётов космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между орбитами искусственных спутников Земли и Луны // Космические исследования, 1997, том 35, №1, с. 52–75.
- [43] Григорьев К.Г. Федына А.В. Оптимальные перелеты космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между компланарными круговыми орбитами // Косм. иссл., 1995, т. 33, № 4, с. 403.
- [44] Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975, 702 с.
- [45] Денисов М.А., Игрицкая А.Ю., Игрицкий В.А., Павлюченко В.А., Тепло Ф.А. Анализ возможности обеспечения радиационной защиты обитаемой базы на спутнике Фобос. XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства, издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2020, том 1, 132–133.
- [46] Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976, 584 с.
- [47] Жеребцова Е.О., Кузнецов М.К., Горбунова К.В., Прозорова М.А., Игрицкий В.А. Системы обеспечения температурно-влажностных режимов

и жизнеобеспечения перспективной обитаемой базы на Фобосе. XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства, Москва, издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, том 1, 126–128.

- [48] Ельников Р.В. Проектирование межпланетных траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками при использовании лунного гравитационного маневра: дис. ... канд. техн. наук: 05.07.09, МАИ, Москва, 2012, 119 с.
- [49] Ефимов Г.Б., Ахметшин Р.З. О некоторых задачах в проекте "Фобос-Грунт" // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем, 2007, т. 12, № 1(23), с. 40–50.
- [50] Заплетин М.П., Григорьев И.С., Самохин А.С., Самохина М.А. Методика построения начального приближения при оптимизации трехимпульсного подлета к планете на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина. Ломоносовские чтения – 2020. Секция механики. Тезисы докладов, Москва, изд-во Московского университета, 2020, с. 94–95.
- [51] Заплетин М.П., Григорьев И.С., Самохин А.С., Самохина М.А. Оптимизация экспедиции к Фобосу с комбинированной тягой с возвращением к Земле // Инженерный журнал: наука и инновации, 2017, № 7, 24 с. Doi: 10.18698/2308-6033-2017-7.
- [52] Заплетин М.П., Мамонтов Е.К., Самохин А.С., Самохина М.А. Оптимизация траектории перелёта космического аппарата к астероиду с использованием эфемерид в импульсной постановке. Материалы 52-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского, Калуга, изд-во АКФ «Политоп», 2017, с. 183–184.
- [53] Зеленый Л.М., Захаров А.В., Полищук Г.М., Мартынов М.Б. Проект экспедиции к Фобосу // Астрономический вестник, 2010, т. 44, № 1, с. 17–28.
- [54] Иванов Ю.Н. Оптимальное сочетание двигательных систем // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 2, с. 3–14.

- [55] Исаев В.К., Сонин В.В. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 6, с. 1114–1116.
- [56] Козубский К.Н., Мурашко В.М., Рылов Ю.П., Трифонов Ю.В., Ходненко В.П., Ким В., Попов Г.А., Обухов В.А. СПД работают в космосе // Физика плазмы, т. 29, № 3, 2003, с. 277–292.
- [57] Лаврентьев В.Г., Тучин Д.А., Лавренов С.М., Корянов В.В., Романов С.В., Ярошевский В.С., Грушевский А.В. Программно-моделирующий комплекс для расчёта схем межпланетных траекторий полёта КА к планетам и телам (включая полеты к Марсу и Луне) Солнечной системы в интересах реализации проектов, планируемых в рамках ФКП-2025, и последующих программах. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018619769, 10.08.2018. Заявка № 2018617318 от 13.07.2018.
- [58] Майорова В.И., Игрицкий В.А., Шаповалов А.В., Станишевский Г. Ю., Колчин А.М., Лысенко М.В. Пилотируемая транспортная инфраструктура для обеспечения долговременной базы на Фобосе. XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, Москва, изд-во: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, том 1, с. 120–121.
- [59] Мамонтов Е.К., Самохин А.С. Численное решение задачи оптимизации траектории перелёта космического аппарата с использованием пакета SPICE. Ломоносовские чтения – 2018. Секция механики, Москва, изд-во МГУ, 2018, с. 139–140.
- [60] Мамонтов Е.К., Самохин А.С., Самохина М.А. Оптимизация траектории перелёта к астероиду с использованием эфемерид в импульсной постановке без учёта притяжения Земли. Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов, Москва, изд-во: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017, с. 1060–1061.

- [61] Маров М.Я. Космический проект „Фобос-Грунт“: новый этап российской планетной программы // Астрон. Вестник, т. 44, № 1, 2010, стр. 3–6.
- [62] Овчинников М.Ю., Ширококов М.Г., Трофимов С.П. Математические методы современной механики космического полёта. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. Уфа, изд-во: Башкирский государственный ун-т, 2019, т. 1, с. 49–51.
- [63] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полёта. М.: Наука, 1990, 448 с.
- [64] Панфилов Д.Н., Самохин А.С. Оптимизация перелёта космического аппарата к Луне на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина. Ломоносовские чтения – 2018. Секция механики, Москва, изд-во МГУ, 2018, с. 163–163.
- [65] Петрухина К.В. Оптимизация комбинированных схем межорбитальных перелетов с использованием двигателей большой и малой тяги: дис. ... канд. техн. наук: 05.07.09, Сам. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева, Самара, 2010, 167 с.
- [66] Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения: дис. ... док. техн. наук: 05.07.09, МАИ, Москва, 2013, 223 с.
- [67] Понтрягин Л.С, Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983, 393 с.
- [68] Сегмент Российской международной экспедиции Экзомарс-2022. Т.1 / под ред. Ефанова В.В., Карчаева Х.Ж., 2020, 231 с.
- [69] Рыжов С.Ю. Проблемы оптимизации многовитковых траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем ограниченной тяги: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2007, 98 с.

- [70] Рыжов С.Ю., Григорьев И.С., Егоров В.А. Оптимизация многовитковых межорбитальных перелётов КА // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005, № 63, 33 с.
- [71] Самохин А.С. Обоснование необходимости использования двигателей малой тяги при перелётах к Фобосу для строительства и снабжения обитаемой базы. Ломоносовские чтения 2020. Секция механики. Тезисы докладов, Москва, издательство Московского университета, 2020, с. 183–184.
- [72] Самохин А.С. Оптимизация перелёта к Фобосу с комбинированной ограниченной большой и малой тягой. Ломоносовские чтения – 2017. Секция механики, Москва, изд-во МГУ, 2017, с. 177–178.
- [73] Самохин А.С. Оптимизация перелёта космического аппарата с большой тягой от Фобоса к Земле. Математика. Компьютер. Образование: Сборник научных тезисов, выпуск 21, Дубна, изд-во: Межрег. общественная организация „Женщины в Науке и Образовании“, 2014 том 1, с. 159–159.
- [74] Самохин А.С. Оптимизация экспедиции к Фобосу при управлении импульсами с использованием решения задач Ламберта и учетом притяжения Земли и Марса // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2014, № 2, с. 62–66.  
(перевод) Samokhin A.S. Optimization of expedition to Phobos using the impulse control and solution to Lambert problems taking into account attraction of the Earth and Mars. Moscow University Mathematics Bulletin, 2014, V. 69, № 2, pp. 84-87. Doi: 10.3103/S0027132214020089.
- [75] Самохин А.С. Построение траектории межпланетного перелёта космического аппарата с переходом между различными системами координат на основе данных решения краевой задачи. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020614266, 27.03.2020. Заявка № 2020610776 от 30.01.2020.
- [76] Самохин А.С., Григорьев И.С. Об оптимизации возврата КА с Фобоса без учёта притяжения Земли. Тезисы докладов секции "Механика" научной конференции "Ломоносовские чтения". 14 апреля 2014 г., Москва, МГУ,

издательство Московского университета, Механико-математический факультет, НИИ механики МГУ, 2014, с. 60–60.

- [77] Самохин А.С., Григорьев И.С., Заплетин М.П. Об оптимизации посадки на Фобос со сферы Хилла Марса. Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXIX академических чтений по космонавтике, 27-30 января 2015, Москва, изд-во: Комиссия РАН, 2015, с. 91–91.
- [78] Самохин А.С., Григорьев И.С., Заплетин М.П. Оптимизация полета к Фобосу с малой тягой в 2020-2030 гг. Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXVIII Академических чтений по космонавтике, январь 2014, Москва, изд-во: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2014, с. 388–388.
- [79] Самохин А.С., Самохина М.А. Вычисление координат и скоростей космического аппарата по известным начальным данным при кеплеровском невозмущённом движении. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020612093, 14.02.2020. Заявка № 2020610797 от 30.01.2020.
- [80] Самохин А.С., Самохина М.А. Задача оптимизации межпланетного перелёта к Марсу с трёхимпульсным подлётом к Фобосу на основе принципа Лагранжа. Материалы конференции «Управление в аэрокосмических системах» (УАКС–2020) имени академика Е.А. Микрина». СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2020, с. 51–53.
- [81] Самохин А.С., Самохина М.А. Методика построения оптимальных траекторий с ограниченной тягой в задачах с фазировкой. Ломоносовские чтения – 2017. Секция механики, Москва, изд-во МГУ, 2017, с. 178–179.
- [82] Самохин А.С., Самохина М.А. Построение траекторий трехимпульсного подлёта к Фобосу с выходом на сферу Хилла Марса на основе решения серии задач Ламберта. XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов, Санкт-Петербург, изд-во: «Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2020, с. 127–129.
- [83] Самохин А.С., Самохина М.А. Решение задачи Коши многомерным методом Рунге-Кутты, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса



8(7), с автоматическим выбором шага. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020611811, 11.02.2020. Заявка № 2020610774 от 30.01.2020.

- [84] Самохин А.С., Самохина М.А., Григорьев И.С., Заплетин М.П. Численная оптимизация трёхимпульсного подлёта к Фобосу с выходом на сферу Хилла Марса на основе решения серии задач Ламберта. Математика. Компьютер. Образование. XXVII международная конференция, Ижевск, изд-во: Автономная некоммерческая организация Ижевский институт компьютерных исследований, 2020, том 27, с. 176–176.
- [85] Самохин А.С., Самохина М.А., Мамонтов Е.К., Голикова Г.Н., Горбунов Д.А. Построение оптимальных траекторий экспедиций с возвращением к Земле КА с комбинированной тягой. «Орбита молодёжи» и перспективы развития российской космонавтики. Всероссийская молодёжная научно-практическая конференция, Томск, издательство ТПУ, 2017, с. 43–44.
- [86] Самохина М.А., Самохин А.С. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса с движением по матрице при помощи указателей, выбором главного элемента и повторным пересчётом. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020612092, 14.02.2020. Заявка № 2020610796 от 30.01.2020.
- [87] Симонов А.В. Полет к главному поясу астероидов с использованием орбит искусственного спутника Марса // Космонавтика и ракетостроение, 2008, том 51, №2, с. 43–54.
- [88] Симонов А.В., Морской И.М., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Баллистическая схема полета КА „Фобос-Грунт“ // Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина, №3, 2011, с. 66–73.
- [89] Соловьев Ц.В., Тарасов Е.В. Прогнозирование межпланетных полётов. М.: Машиностроение, 1973, 400 с.
- [90] Суханов А.А. Астродинамика. Серия “Механика, управление, информатика”. М.: Ротапринт ИКИ РАН, 2000, 204 с.

## Литература

- [91] Тарасов Е.В. Космонавтика. Механика полёта и баллистическое проектирование. М.: Машиностроение, 1977, 216 с.
- [92] Тучин А.Г. Квазисинхронные орбиты и их использование для сближения космического аппарата с Фобосом // Космические исследования, 2007, т. 45, № 2, с. 144–149.
- [93] Тучин А.Г. Баллистико-навигационное проектирование полетов к Луне, планетам и малым телам Солнечной системы: дис. . . . док. физ.-мат. наук: 01.02.01, ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва, 2010, 238 с.
- [94] Тучин А.Г. Проектирование квазисинхронных орбит космического аппарата вокруг Фобоса для решения задачи посадки на его поверхность // Космические исследования, 2008, т. 46, № 6, с. 536–546.
- [95] Тучин А.Г. Проектирование квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса для решения задачи посадки на его поверхность // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2008, № 15, с. 1–30.
- [96] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Издательство Московского физико-технического института, 1994, 528 с.
- [97] Федотов Г.Г. Об использовании возможностей комбинации большой и малой тяги при полётах к Марсу // Космические исследования, 2001, том 39, №6, с. 613–621.
- [98] Фобос–Грунт. Проект космической экспедиции. В 2 т. Т. 1, 2. Москва, ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина», 2011, 519 с.
- [99] Хайрер Э., Нёрсетт С.П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990, 512 с.
- [100] Характеристики стационарных плазменных двигателей. URL: <https://fakel-russia.com/produksiya>, Федеральное государственное унитарное предприятие «Опытное Конструкторское Бюро „Факел“», 2020 (дата обращения 26.12.2020).
- [101] Энеев Т.М. Актуальные задачи исследования дальнего космоса // Космические исследования, 2005, том 43, №6, с. 403–407. М.: Наука.

- [102] An Observation Geometry System for Space Science Missions. Navigation and Ancillary Information Facility of JPL of NASA. NASA, 2020, 15 Dec. URL: <http://naif.jpl.nasa.gov/naif> (дата обращения 26.12.2020).
- [103] Bolle A., Circi C., Corrao G. Optimal Mars transfers for small payload transportation // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 106 (2006), pp. 183-196. Doi: 10.1007/s10569-009-9250-1.
- [104] Edelbaum T. N. The Use of High- and Low-Thrust Propulsion in Combination for Space Missions // *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 9, No. 2, 1962, pp. 49–69.
- [105] Elnikov R.V. The analysis of a transfer Earth Mars with a lunar gravity assist maneuver and use of a small thrust // *Spacecraft and Rockets*, 2012, vol. 19, No. 5, pp. 38–44.
- [106] Elnikov R.V. Use of lunar gravity assist maneuver in interplanetary electric propulsion trajectory design // *Space technics and technology*, 2012, No. 50, 24 p.
- [107] GTOC X Homepage. URL: <http://gtocx.jpl.nasa.gov> (дата обращения 27.12.2020).
- [108] HORIZONS System. JPL NASA, 2019, 10 Dec. URL: <http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons> (дата обращения 27.12.2020).
- [109] Mailhe L.M., Heister S.D. Design of a hybrid chemical/electric propulsion orbital transfer vehicle // *Journal of Spacecraft and Rockets* 39, 2002, No 1, pp. 131–139.
- [110] Miele A., Wang T. Optimal Planetary Orbital Transfers via Chemical Engines and Electrical Engines // *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2005, vol. 127, No. 3, pp. 587–604. Doi: 10.1007/s10957-005-7505-x.
- [111] Miele A., Wang T., Williams P.N., Computation of optimal Mars trajectories via combined chemical/electrical propulsion, Part 1, Paper IAC-02-A.6.05, 53rd International Astronautical Congress, Houston, Texas, 2002.

- [112] Miele A., Wang T., Williams P.N., Computation of optimal Mars trajectories via combined chemical/electrical propulsion, Part 2: Minimum time solutions with bounded thrust direction // *Acta Astronautica*, 2005, vol. 57, pp. 819–828. Doi: 10.1016/j.actaastro.2005.04.007.
- [113] Miele A., Wang T., Williams P.N., Computation of optimal Mars trajectories via combined chemical/electrical propulsion, Part 3: Compromise solutions // *Acta Astronautica* 2005, vol. 57, pp. 829–840. Doi: 10.1016/j.actaastro.2005.04.008.
- [114] Miele A., Wang T., Williams P.N. Optimal Interplanetary Orbital Transfers via Electrical Engines // *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2005, vol. 127, No. 3, pp. 605–625. Doi: 10.1007/s10957-005-7506-9.
- [115] Petropoulos A.E., Gustafson E.D., Whiffen G.J., Anderson B.D., GTOC X: Settlers of the Galaxy Problem Description and Summary of the Results // *Advances in the Astronautical Sciences*, 2019, vol. 171, pp. 3309–3326.
- [116] Petukhov V.G., Zhou R. Computing the perturbed impulse trajectory of transferring between the near-Earth and near-Lunar orbits by the continuation method.
- [117] Salmin V.V., Ishkov S.A., Starinova O.L., Volotsuev V.V., Gogolev M.Yu., Korovkin G.A., Petrukhina K.V., Tkachenko I.S., Chetverikov A.S. Optimization methods of design-ballistic characteristics circumterrestrial and interplanetary space vehicle with electrojet engines of low thrust. *Vestnik of Samara university. Aerospace and mechanical engineering*, 2010, No. 2(22), pp. 166–190.
- [118] Samokhin A.S., Samokhina M.A. Optimization of interplanetary flight to Phobos on the basis of maximum principle. Оптимальное управление и дифференциальные игры. Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина, Москва, 12–14 декабря 2018 г, МАКС Пресс, 2018, с. 249–251. Doi: 10.4213/proc23042.
- [119] Samokhin A.S., Samokhina M.A. Verification of the second-order optimality conditions in the modeling of the SC expedition with the returning to

the Earth based on two Lambert's problems solving // *Advances in the Astronautical sciences*, 2018, vol. 161, pp. 843–862.

- [120] Samokhin A.S., Samokhina M.A., Grigoriev I.S., Zapletin M.P. The optimization of interplanetary flight to Phobos with a jet engine of combined low and high limited thrust // *Advances in the Astronautical sciences*, 2020, vol. 170, pp. 213–227.
- [121] Samokhin A., Samokhina M. Construction of a three-pulse approach to Phobos trajectories with access to the Mars Hill sphere based on the solution of a series of Lambert's problems // 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), IEEE, 2020, pp. 1–3. Doi: 10.23919/icins43215.2020.9133816.
- [122] Samokhin A., Samokhina M., Zapletin M., Grigoriev I. Optimal interplanetary spacecraft flights design with many-revolution braking maneuver by a low thrust jet engine // *Advances in the Astronautical sciences*, 2018, vol. 161, pp. 587–606.
- [123] Samokhina M., Samokhin A., Zapletin M., Grigoriev I. Method of optimal trajectories design for a spacecraft with a jet engine of a large limited thrust in problems with the phasing condition // *Advances in the Astronautical sciences*, 2018, vol. 161, pp. 711–730.
- [124] Tkachenko S.I., Salmin V.V., Semkin N.D., Kurenkov V.I., Abrashkin V.I., Prokhorov A.G., Tkachenko I.S., Safronov S.L., Petrukhina K.V. The design shape and basic performances of small satellite of SSAU and SRP SRC “TSSKB-Progress” // *Vestnik of Samara university. Aerospace and mechanical engineering*, 2010, No. 2(22), pp. 154–165.
- [125] Usui T., Bajo K., Fujiya W., Furukawa Y., Koike M., Miura Y.N., Sugahara H., Tachibana S., Takano Y., Kuramoto K. The Importance of Phobos Sample Return for Understanding the Mars-Moon System // *Space Science Reviews*, 2020, vol. 216, № 49, 18 p. Doi: 10.1007/s11214-020-00668-9.