

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической механики и мехатроники

На правах рукописи

Терехов Георгий Павлович

**Исследование динамики, планирование траекторий, управление
сферороботами**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель –
д.ф.-м.н., профессор
В.Е. Павловский

Москва – 2019

Содержание

1 Введение	3
2 Теоретическая механическая модель	12
2.1 Примеры конструкций	13
2.1.1 Шар с тремя маховиками на взаимно-ортогональных осях	13
2.1.2 Шар с тремя маховиками на одной оси	15
2.1.3 Шар с маховиком на вращающемся кольце	17
2.2 Интегрируемые случаи	18
2.2.1 Неголономная модель	19
2.2.2 Модель вязкого трения	28
3 Шар на плоскости с двухпараметрическим трением	33
3.1 Описание модели двухпараметрического трения	33
3.2 Поворот на заданный угол	34
3.3 Движение без верчения по отрезку	41
3.3.1 Анализ силы и момента трения	42
3.3.2 Примеры построения управлений для различных конфигураций	46
3.3.3 Некоторые аспекты свободной динамики аппарата при прямолинейном движении	53
3.4 Обход препятствий. Криволинейное движение	56
3.4.1 Основные замечания	56
3.4.2 Анализ сил и моментов для движения без верчения	58
3.4.3 Примеры траекторий	62
4 Шар ср со смещенным центром масс	66
4.1 Неголономная модель	66
4.1.1 Случай неподвижного центра масс	67
4.1.2 Вращение вокруг вертикали	70
4.1.3 Движение по прямой	72
4.1.4 Криволинейное движение	79
4.2 Управление для двухпараметрической модели трения	88
4.2.1 Удержание конфигурации и поворот на месте	88
4.2.2 Движение по прямой	89
5 Заключение	93
6 Список используемой литературы	95

7	Приложение 1. Доказательства некоторых фактов из главы 2	99
8	Приложение 2. Верификация модели и решение прямой за- дачи динамики	101

1 Введение

В последнее время роботы все активнее проникают в повседневную жизнь. Существует большое разнообразие аппаратов, отличающихся как по конструкции, так и по назначению. В частности, отдельный класс мобильных роботов—аппараты, движение которых основано на принципе качения.

Хотя наиболее распространеными среди подобных аппаратов являются колесные роботы, можно указать определенный недостаток таких конструкций, а именно то, что существуют направления, вдоль которых движение “с места” невозможно. Эту проблему можно решить, используя так называемые “омни”-колеса, однако интересным представляется и иной подход, а именно, робот со сферической поверхностью-оболочкой, который, очевидным образом, может двигаться вдоль любого заданного направления. Вместе с тем, существуют и другие преимущества предложенных конструкций, например, герметичность робота и отсутствие мест сопряжений и сочленений, являющихся наиболее уязвимыми для различного рода неблагоприятных воздействий. Таким образом, форма аппарата способствует практическому применению робота в исследовательских и разведывательных целях, например, для работы в зонах с агрессивной внешней средой (места аварий, поверхности других планет и т.д.)

Роботы-шары активно развиваются за рубежом, например, скандинавский Rotundus[1]—коммерчески-ориентированный продукт. Аналогичные роботы были разработаны в Израиле, Канаде, США и других странах мира. В Италии разработан робот-шар в учебных целях для демонстрации основных принципов неголономной механики. В России же примером может являться робот SpheRob (Москва-Ижевск-Санкт-Петербург).



Рис. 1: Робот Rotundus.

Интересно, что ряд организмов в живой природе также используют принцип качения для передвижения. В работе [2] приведены следующие примеры животных и растений, использующих его. К ним относятся американская пещерная саламандра, скатывающаяся по каменистым склонам, сворачиваясь в клубок, паук золотое колесо, катящийся по песчаным дюнам, а также некоторые виды мокриц. Интересен и пример растения перекати-поле, использу-

ющего для передвижения силу ветра. Кроме того, центр тяжести перекатывается не совпадает с геометрическим, что позволяет, по-видимому, ему подпрыгивать в процессе качения для более эффективного разброса семян.

Спектр различных решений и реализаций внутренних механизмов, приводящих в движение сферические роботы, тоже весьма широк. Большое количество работ использует принцип смещения центра масс системы, такие, как различные роботы с маятниками внутри, или роботы с движущимися внутренними массами. Среди них можно привести в пример как упомянутый Rotundus, так, например, робот Solarbot[3], который использует для движения встроенное устройство типа катящейся по сфере тележки. Его уникальность заключается в том, что этот робот использует солнечную энергию в качестве источника питания, что делает его еще и независимым от внутренних источников энергии. Робот, представленный фирмой Sony[4], обладает отличительной особенностью в виде управления голосом. Представляют интерес и аппараты, приводимые в движение за счет деформации корпуса. Данная работа посвящена иной реализации принципа гиростата, подразумевающей наличие внутри шара системы приводов, обеспечивающей создание внутреннего кинетического момента. В частности, рассмотрены три различных конструкции—два шара с тремя маховиками и один с маховиком на врачающемся плоском теле.



Рис. 2: Роботы Sony и Solarbot

Подробный анализ широкого спектра конструкций проведен в работе [2], где выполнено сравнение различных реализаций с выявлением их достоинств и недостатков. В частности, согласно этой работе наиболее выгодным является использование подвижных внутренних масс: это обеспечивает хорошую маневренность, что позволяет как оперативно обходить препятствия, так и успешно передвигаться в ограниченном пространстве. Недостатком подобной конструкции, тем не менее, является существенная масса робота, так как только наличие тяжелых внутренних механизмов позволяет достаточно эффективно управлять роботом. Неплохим с практической точки зрения будет и использование так называемых балластных масс, вращающихся вокруг некоторой подвижной или неподвижной оси. Утверждается, что такой робот тоже

довольно неплохо может маневрировать в ограниченном пространстве, и, вместе с тем, не имеет ярко выраженных недостатков. Аппараты, использующие гироскопические механизмы, согласно этому исследованию, достаточно плохо маневрируют, в связи с чем им непросто преодолевать препятствия. Кроме того, масса робота будет также большая. Вместе с тем указаны и достоинства подобных конструкций, а именно, их относительная простота по сравнению с аналогами, а также обеспечение высокой автономности.

В другой работе, [5], принимаются во внимание при рассмотрении сферических роботов следующие факты, имеющие важную практическо-инженерную направленность: указано, что больший размер робота помогает генерировать больший движущий момент, а также уменьшает реактивный момент, возникающий при взаимодействии с окружающими объектами, такими как камни, дверные пороги или мелкие препятствия. Вместе с тем, как правило, это влечет за собой увеличение массы робота. Касательно аппаратов, использующих гироскопический реактивный момент, утверждается, что этот момент на практике ограничен, что не позволяет осуществлять непрерывное движение, так как необходимо время на торможение управляющей вращающейся массы вплоть до полной ее остановки, а значит применимость такого метода допустима лишь на небольших интервалах времени. Следует упомянуть и работу [6], в которой также приведен сравнительный анализ аппаратов. Для роботов с маховиками указывается, что такие движения, как резкий поворот и омни-направленное перемещение возможны в большинстве случаев, за исключением некоторых особых (сингулярных) конфигураций. Далее в этой работе строится интересный анализ движения робота с омни-колесами внутри.

Возвращаясь к исследуемым в работе гиростатическим аппаратам, отметим, что первые попытки анализа движения и планирования траекторий для одного из таких аппаратов (с тремя маховиками на взаимно-ортогональных осях) на абсолютно шероховатой плоскости были предприняты в [7],[8],[9]. Затем в [10] была доказана управляемость этой же системы для неголономной постановки, а также явно указаны алгоритмы управления роботом. В [11] результаты были обобщены на случай плоскости с трением, в частности, рассмотрены модели сухого трения Кулона, вязкого трения. Важной особенностью полученных моделей было наличие первого интеграла вектора кинетического момента относительно точки контакта.

Существуют также работы, останавливающиеся на кинематике катящихся сфер. В частности, представляет интерес задача о переконфигурации сферы (т.е. смены ориентации в смысле движения вдоль многообразия $\text{SO}(3)$). Методы решения задачи различны, сводятся они, как правило, к задачам планиметрии или сферической тригонометрии [12-14]. Интерес представля-

ют здесь и работы [15],[16], в которых затрагивается вопрос планирования движения не с точечным контактом, а с занимающим некоторую ограниченную область. Там же упоминается, что несмотря на то, что система "шар-плоскость" является вполне управляемой, тем не менее она не удовлетворяет некоторым условиям, облегчающим исследование, в частности, она не представима в так называемой "цепной форме". (О цепной форме систем впервые говорится в [17]). Предложенные в этих статьях алгоритмы планирования движения отходят от принципов построения сферических многоугольников. Упоминается, что такой подход влечет за собой особенности в их вершинах, поэтому предложена их замена гладкими кривыми. Такими траекториями в этом исследовании являются окружности и кривые Вивиани, причем, как оказывается, алгоритм основанный на построении сферических треугольников благополучно расширяется до предложенного. Однако, следует отметить, что даже оптимальные с кинематической точки зрения (например, при минимизации пути) кривые-траектории абсолютно не обязательно являются таковыми с динамической точки зрения (например, быстродействие). Кроме того, ставится вопрос о реализуемости таких движений в условиях ограниченности управляющих функций. В вышеупомянутой работе [15], в частности, говорится, что динамическое планирование уже представляет собой весьма сложную задачу, даже если не накладывать никаких ограничений, в то время как на практике, как правило, имеется ряд ограничений для управляющих функций.

Вместе с тем, следует отметить еще и то, что теоретическое исследование движения сферического робота сводится к классической задаче механики—исследованию движения шара по неподвижной плоскости. Этой задачей в разное время занимались такие основоположники механики, как Л. Эйлер[18], Ж.Даламбер[19], П.Аппель[20,21], Г.Кориолис[22], С.Чаплыгин[23]. Что касается современности, то помимо упомянутых работ [10],[11] у тех же авторов есть и работа [24], в которой изучено движения шара Чаплыгина на наклонной плоскости.

Основополагающим вопросом является выбор модели контактного взаимодействия между шаром и опорной плоскостью. Применительно к робототехнике, можно заключить, что наиболее распространенным является использование гипотезы абсолютно шероховатой плоскости. Кроме того, зачастую модель дополняется еще одним предположением: полагается отсутствие вращения вокруг вертикали. Находит место в работах и использование классического закона сухого трения—закона Кулона.

Тем не менее, для данных моделей реальные эксперименты зачастую расходятся с теоретическими расчетами, что заставляет ставить вопрос о границах применимости неголономной модели. В частности, для физической ре-

лизации рассматриваемого в работе робота при достаточно слабом создаваемом моменте на маховиках, согласно неголономной постановке, движение все равно будет происходить, хоть и с малой скоростью, однако реальные эксперименты демонстрируют обратное. Этот эффект невозможно объяснить и в рамках классической модели сухого трения Кулона, более того, при ускорении шара, лежащем вне конуса трения ($\|a\| < kg$), модель трения Кулона вырождается в неголономную модель. Что касается вертикальной компоненты угловой скорости, то в обоих случаях со стороны контакта нет противодействия такому движению, а также вращение вокруг вертикали не оказывает влияния на движение в плоскости. Эти два утверждения приводят к противоречиям между теоретическими расчетами и экспериментальными данными.

Вместе с тем, в последнее время появляется много работ, предполагающих существенно измененные модели трения, дополняющие и обобщающие модель сухого трения Кулона. Обобщение происходит за счет того, что точечное кулоновское взаимодействие катящегося тела с плоскостью заменяется на взаимодействие вдоль некоторой области (пятна контакта). Классическим подходом является рассмотрение пятна контакта в виде круга, в каждой точке которого локально выполняется закон сухого трения Кулона; этот подход был впервые предложен Контенсу в работе [25]. Таким образом, полученные силы и моменты будут зависеть от угловой скорости верчения, а также скорости скольжения шара. Однако, в своей работе Контенсу оставил выражения для сил и моментов трения в виде неэлементарных функций (эллиптических интегралов). Дальнейшее развитие модель получила уже в работах В.Ф.Журавлева [26],[27], где помимо того, что силы и моменты найдены в виде элементарных функций, предложен подход, позволяющий учитывать влияние не только верчения, но и качения (т.н. связанная пятикомпонентная модель качения, скольжения и верчения). Использование модели Контенсу-Журавлева позволяет говорить о деформациях сферической оболочки шара вблизи контакта с абсолютно твердой плоскостью. Также проблематика моделей трения разобрана в работах А.П.Иванова [28],[29] и А.А.Киреенкова[30-33].

Наконец, есть и подход, при котором пятно контакта представляет собой не плоскую область, а сферический сегмент, что соответствует предложению о деформации как шара, так и плоскости вблизи их контакта. Такая модель была предложена и затем модифицирована А.В.Карапетяном в работах[34],[35]. Интересно, что эта модель зависит от двух параметров и при некоторых их значениях переходит в модели Кулона и Контенсу-Журавлева. В рамках двухпараметрической модели трения проведен качественный и численный анализ движения тяжелого симметричного шара [36]. В частности, показано, что при движении по прямой, скольжение и качение шара возмож-

ны только одновременно почти при всех начальных условиях. Далее в работе используется двухпараметрическая модель трения [34].

Целью данной работы является создание алфавита базовых движений для трех различных конструкций сферических роботов. Исследуются различные модели контактного взаимодействия. Наибольшее внимание уделено моделям абсолютно шероховатой плоскости, а также модели двухпараметрического трения. Центр масс робота предполагается как в геометрическом центре сферы, так и смещенным относительно него. Кроме того, напряжения на электродвигателях, приводящих в движения маховики предполагаются ограниченными.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулированы основные предпосылки к исследованию проблематики сферических роботов, дан краткий обзор по некоторым конкретным примерам реальных аппаратов. Показаны некоторые наиболее важные и интересные задачи, ставящиеся при исследовании подобных систем—внимание могут привлекать как кинематические проблемы (переконфигурация сферы, планирование движения), так и особенности конструкций (сравнение свойств различных реализаций, маятниковых, гирокопических и пр.)

Вместе с тем, с динамической точки зрения важнейшей характеристической механической системы является модель контактного взаимодействия. Использование модели абсолютно шероховатой плоскости (неголономной модели) зачастую ведет к неверным экспериментальным данным и не дает ответа на многие вопросы, встречающиеся на практике. Так, в этой модели, старт робота возможен независимо от параметров двигателей, приводящих аппарат в движение, отсутствует трение верчения, что означает беспрепятственное движение вокруг вертикали. На практике такого не наблюдается. Модель сухого трения Кулона тоже не подходит для описания подобных систем.

Таким образом, для более корректного описания условий, приближенных к реальным, необходимо использовать другую модель трения. Выше отражены наиболее интересные работы, касающиеся изучения феномена трения и его использования в прикладных задачах (модели Контенсу-Журавлева, Иванова). Для дальнейшего изучения выбрана модель трения, предложенная А.В.Карапетяном, которая вбирает в себя и трение качения, и скольжения, и верчения.

Первая глава посвящена созданию теоретико-механической модели для трех различных аппаратов—робота с тремя маховиками на взаимно-ортогональных осях, робота с тремя маховиками с центрами на одной прямой, но ориентированных во взаимно-ортогональных направлениях и, наконец, робота с некоторым плоским телом, проходящим через центр шара и которое может поворачиваться вокруг двух своих взаимно-перпендикулярных диаметров, а так-

же маховика, врачающегося вокруг нормали к этому плоскому телу. Также приведен анализ безразмерных параметров конструкций, отражающих геометрические и массово-инерционные характеристики, что является важным для выбора параметров реальных роботов. Показано, что при определенных характеристиках маховиков одна из систем может иметь инерционные характеристики однородного шара, в то время как во всех остальных случаях предложенные системы являются шарами Чаплыгина.

Для этих аппаратов выписаны общие теоремы динамики, далее разобраны некоторые частные случаи систем, допускающих три первых интеграла кинетического момента. В качестве примера выбраны неголономная модель, для которой приведены явные виды управлений и предложен алгоритм базовых движений, обеспечивающий движение геометрического центра шара по отрезку и поворот робота относительно вертикали на месте на заданный угол. Дополнительно, приведена методика построения управления для движения по гладкой кривой, в частности, приведен пример для движения по дуге окружности. Для модели вязкого трения также построены управление для этих случаев, причем при вращении на месте вокруг вертикали система ведет себя идентично неголономной.

Во второй главе дано краткое описание модели двухпараметрического трения, в которой предполагается, что зона контакта между сферой и плоскостью представляет собой не точечный контакт, как в модели Кулона, и не плоский диск, как в модели Контенсу-Журавлева, а сферический сегмент, который при определенных значениях параметра вырождается в точку или диск. Приведены зависимости сил и моментов от параметров пятна контакта, а также от угловых переменных на трехмерной сфере, соответствующих относительным значениям скорости скольжения шара и его угловой скорости.

Для одного из базовых движений—поворота шара на месте относительно вертикали верно, что ненулевой оказывается лишь вертикальная компонента момента трения, причем она является величиной, постоянной по времени. Это значение может быть отождествлено с величиной момента трения покоя. Построена зависимость этой компоненты от параметров пятна контакта: оказывается, что существенной является зависимость лишь от жесткости плоскости δ . Таким образом, можно показать, что для реальных электродвигателей, приводящих аппарат в движение, с заданным пусковым моментом (являющимся паспортной характеристикой двигателя, и показывающей максимально достижимый момент на этом двигателе) существует некоторое пороговое значение δ , выше которого старт робота невозможен. Таким образом, сделан вывод, что старт робота возможен лишь на относительно жестких плоскостях. Далее рассмотрен пример поворота на заданный угол, соответствующий т.н. треугольному профилю угловой скорости (разгон-торможение).

Для этого случая проведен анализ управления для поворота на конечный угол в условиях ограниченности ресурсов маховиков.

Для движения по прямой без закручивания и верчения верно, что сила имеет только одну ненулевую составляющую, равно как и момент. Исследованы их зависимости от угловой координаты θ_1 , такой, что $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\omega}{\delta u}$ (u —скорость скольжения шара, ω —угловая скорость). Показано, что сила трения f возрастает на промежутке $[0; \pi]$, в то время как момент убывает на промежутке от $[\pi/2; \pi - \arctg(1/\delta)]$. Кроме того, для старта необходимо условие, что $\theta_1 \in (\theta_f; \pi - \arctg(1/\delta))$, где $f(\theta_f) = 0$. Значит, маховикам необходимо преодолевать момент трения, равный $\mu(\theta_f)$ (который можно отождествить с моментом трения покоя). Аналогично предыдущему пункту приведены графики силы и момента в зависимости от параметров пятна контакта δ и ε , а также показаны области параметров, в которых движение возможно для конкретных электродвигателей.

Также приведены примеры движения геометрического центра шара по заданному отрезку для заданной зависимости скорости $v(t)$ геометрического центра шара, такой что $v(t) \in C^1(t)$. При этом угловая скорость $\omega(t)$ и скорость скольжения $u(t)$ шара являются непрерывными функциями времени. Показано, что комбинация равноускоренных движений ведет к разрыву по этим параметрам в данной модели. Для свободной динамики шара Чаплыгина показано, что скольжение и качение почти всегда имеют место одновременно, что существуют два движения, когда их отношение постоянно (в этом случае центр масс движется равнозамедленно), а также найдено инвариантное соотношение системы и показаны его линии уровня.

Наконец, исследованы силы и моменты для случая движения без верчения в первом приближении (показано, что одна из компонент силы и момента существенно больше двух других). В рамках данного приближения проведено исследование криволинейных траекторий. В качестве примера рассмотрен случай для управления роботом, движущимся по дуге окружности.

Третья глава посвящена исследованию шара со смещенным на некоторый вектор ζ относительно геометрического центра центром масс. Практическая важность такого случая очевидна, так как для двух из трех конструкций добиться совпадения центра масс системы с геометрическим весьма затруднительно.

Для несбалансированного шара на абсолютно шероховатой плоскости рассмотрены четыре базовых движения, формирующих алфавит—удержание конфигурации (если центр масс не находится на вертикальной оси) при неподвижном шаре, поворот относительно вертикали, проходящей через его геометрический центр на некоторый угол, а также движение геометрического центра по заданному отрезку. Весь алфавит сформирован из элементарных

движений — таких движений шара, что в его начале и конце центр масс робота находится в нижнем положении равновесия. В качестве примера движения по прямой приведен единичный оборот сферы (т.е. перевод центра масс из нижнего положения в нижнее), который является единственным движением для кусочного движения такого робота. В некоторых случаях уделено внимание и ограниченности управляющих функций. В частности, указаны условия, при которых возможно некоторое конечное время удерживать центр масс в определенном положении и возможно равномерное движение геометрического центра шара по прямой.

Для движения по криволинейной траектории также предложен алгоритм элементарных движений. В качестве примера приведен анализ движения геометрического центра шара по дуге окружности.

Кроме этого, проведен также анализ управления таким роботом и в случае двухпараметрической модели трения. Поворот робота относительно вертикали возможен в ее рамках только в том случае, если центр масс робота лежит на вертикальной оси. При таком условии задача сводится к анализу поворота на месте для сбалансированного шара. Задача же об удержании центра масс в фиксированном положении сводится к аналогичной задаче для шара на абсолютно шероховатой плоскости с учетом дополнительно возникающего момента.

Для движения по прямой характерной особенностью является то, что сила нормального давления n не совпадает с силой тяжести на всем движении. Этот факт сильно затрудняет аналитическое исследование силы и момента трения (тем не менее, стоит отметить, что и сила, и момент по-прежнему определены лишь одной ненулевой компонентой), поэтому проведено численное моделирование такой системы. Выбор желаемого профиля угловой скорости осуществляется комбинированием элементарных движений. Проведен анализ случая, когда центр масс системы совершает полный оборот на сфере, что практически соответствует и полному обороту шара.

Все численные эксперименты проводились в пакете MATLAB R2013A.

2 Теоретическая механическая модель

Будем рассматривать на неподвижной плоскости Sxy шар радиусом R с центром в точке O . Внутри сферической оболочки робота расположены приводы, а также вспомогательное и дополнительное оборудование—аккумуляторные батареи, видеокамеры, приемники сигналов и т.п. Предположим, что центр масс робота находится в точке O , т.е. совпадает с геометрическим центром шара. Обозначим в абсолютной системе координат радиус-вектор центра масс шара за $\mathbf{r} = (x; y)$ (вдоль вертикальной оси Sz движение предполагается невозможным).

Введем подвижную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с центром в точке O , выбор базисных векторов \mathbf{e}_i для каждой конкретной конструкции различается. Переход к подвижной системе координат осуществляется посредством матрицы перехода $D \in SO(3)$. Конфигурационным многообразием системы является $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$. Затем перейдем к безразмерным координатам $x' = \frac{x}{R}, y' = \frac{y}{R}$, кроме того, введем вектора $\mathbf{r}' = (x'; y')^T$ и $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}'}$ (Далее, везде под физическими характеристиками, такими, как сила, скорость и т.д понимается именно безразмерная величина, если не оговорено противное).

Обозначим массу шара за вычетом массы механизмов, обеспечивающих движение, за M , а всей системы—за \hat{M} . Далее, пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ —управляющие функции, являющиеся угловыми скоростями внутренних механизмов (маховиков).

Для исследования движения системы будем применять общие теоремы динамики, причем обе части уравнения, полученного из теоремы об изменении импульса разделим на $\hat{M}R$, а уравнения, полученного из теоремы об изменении кинетического момента—на некоторый характерный для каждой конкретной конструкции момент инерции \hat{J} . Таким образом, обозначив получившиеся силы и моменты сил за \mathbf{f} и $\boldsymbol{\mu}$ соответственно, получаем следующую систему уравнений :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} = D\boldsymbol{\mu} \quad (2)$$

Теорема об изменении кинетического момента здесь записана в подвижном базисе (здесь и далее под векторами с “крышкой” понимаем вектора в подвижной системе координат, а без неё—в абсолютной системе координат). Вектор кинетического момента в подвижной системе координат представлен в виде

$$\hat{\mathbf{k}} = I\hat{\boldsymbol{\omega}} + C\boldsymbol{\alpha}$$

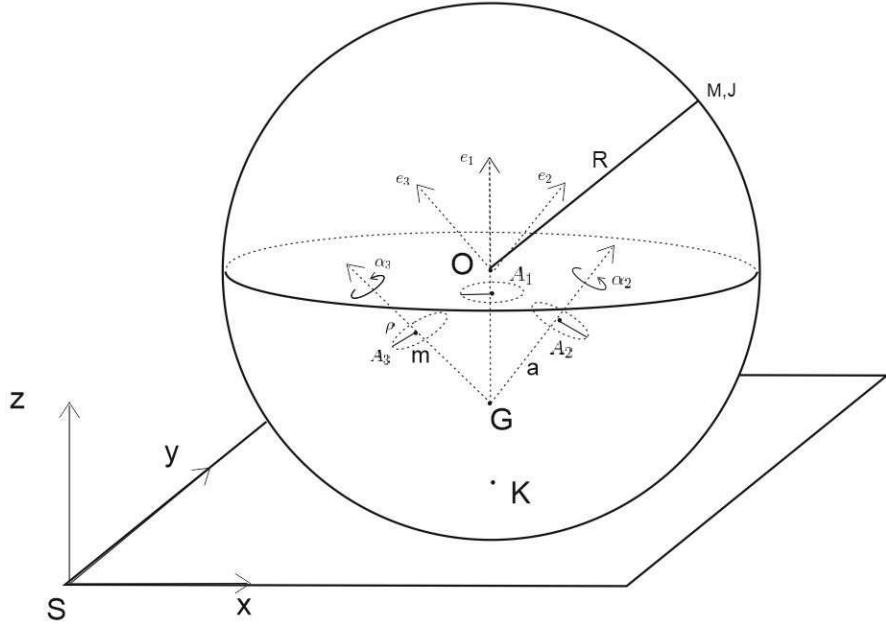


Рис. 3: Модель робота-шара 1

Образмеренный тензор инерции системы “как целого“ обозначен за I . Так как управления α входят только во второе слагаемое вектора кинетического момента, матрица C является образмеренным аналогом тензора инерции “управляющей“ части. Примеры матриц C и I приведены ниже.

2.1 Примеры конструкций

2.1.1 Шар с тремя маховиками на взаимно-ортогональных осях

Пусть конструкция системы такова [рис.3], что внутри сферической оболочки на трех взаимно-ортогональных осях находятся три одинаковых диска-маховика массой m и радиусом ρ . Обозначим B_1 и B_2 —экваториальный и осевой моменты инерции маховика соответственно. Тензор инерции шара (без учета маховиков) относительно центра предполагаем шаровым с собственным значением J . Расстояние от точки пересечения осей G , ортогональных маховикам до центра каждого из маховиков (точек A_i) равно a , а центры маховиков лежат в экваториальной плоскости шара (т.е. точка O лежит в плоскости $A_1A_2A_3$). Векторы подвижной системы координат направлены по нормалям к плоскостям маховиков, а три угловые скорости вращения маховиков α_i есть управления в задаче. Приняв $\hat{J} = \frac{ma^2}{3}$ (в данном случае $\hat{M} = M + 3m$), получаем, что для данной реализации сфероробота, выполнены следующие

условия:

$$I = \begin{pmatrix} \nu & 1 & 1 \\ 1 & \nu & 1 \\ 1 & 1 & \nu \end{pmatrix}$$

$$C = \text{diag}\{c, c, c\}$$

$$c = \frac{3B_2}{ma^2}$$

$$\nu = 4 + 3 \frac{B_2 + J + 2B_1}{ma^2}$$

Наконец, введя параметры $\chi_1 = \frac{a^2}{R^2}$ и $\chi_2 = \frac{\rho^2}{R^2}$, исходя из геометрических соображений, отметим следующие допустимые области параметров: отметим, что маховики не выходят за пределы сферической оболочки, а также не пересекаются друг с другом (в первом случае дальнейшее рассмотрение механической модели является некорректным, а второй случай невозможен конструктивно).

Если построить плоскость, проходящую через точки O, G, A_1 , то можно составить уравнение для нахождения граничных значений a и ρ : предполагая, что в критическом случае маховик касается сферы в точке A' , имеем по теореме косинусов в треугольнике OA_1A' ($\angle OA_1G = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$ исходя из предположений о совпадении центра масс с геометрическим):

$$R^2 = \rho^2 + \frac{2}{3}a^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}a\rho$$

Таким образом, в плоскости $\chi_1; \chi_2$ область допустимых параметров задается следующими соотношениями:

$$\chi_2^2 + \frac{2}{3}\chi_1^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\chi_1\chi_2 \leq 1$$

$$\chi_2 \leq \chi_1$$

$$\chi_1, \chi_2 > 0$$

Данная область ограничена осью абсцисс, биссектрисой первой четверти и дугой эллипса, задаваемого первым уравнением.

Принимая $\sigma = 3 + \frac{M}{m} \geq 3$, маховики однородными дисками, т.е. с моментами инерции $\frac{m\rho^2}{2}$ и $\frac{m\rho^2}{4}$, а $J = \lambda MR^2$, где $\lambda \in [2/5; 2/3]$ (левая граница соответствует однородному шару, правая— сфере, т.е. случаю, когда вся масса вынесена на границу) имеем выражение для безразмерного момента инерции ν :

$$\nu = 4 + 3 \frac{\chi_2}{\chi_1} + 3 \frac{\lambda(\sigma - 3)}{\chi_1}$$

В дальнейшем, для численных экспериментов будут использоваться следующие параметры шара:

$$M = 4, \quad m = 0.612, \quad R = 0.2, \quad \rho = 0.05, \quad a = 0.1 \quad \lambda = 2/3$$

Наконец, отметим, что данная модель с высокой точностью соответствует реальному роботу SpheRob2.

2.1.2 Шар с тремя маховиками на одной оси

Предположим, что на одной оси, проходящей через центр шара, отмечены три точки. Одна из них совпадает с центром шара O , а две другие—удалены на выбранной оси от центра на расстояние l с разных сторон. Эти три точки будут являться центрами трех одинаковых дисков-маховиков массы m радиуса ρ , нормали к плоскостям которых попарно ортогональны, а их единичные векторы образуют подвижный базис. [рис. 4] Обозначим за α_i угловые скорости маховиков.

За \hat{J} в данной конструкции примем величину $2ml^2$. Считая экваториальный и осевой момент инерции каждого маховика за B_1 и B_2 соответственно, а тензор инерции шара без маховиков шаровым с собственным значением J , имеем:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} \nu + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \\ C &= diag\{c + 1/2, c + 1/2, c\} \\ c &= \frac{2}{2ml^2} \\ \nu &= \frac{B_2 + J + 2B_1}{2ml^2} \end{aligned}$$

Если ввести аналогично предыдущей модели безразмерную массу $\sigma = 3 + \frac{M}{m}$ и два безразмерных геометрических параметра $\chi_1 = \frac{l}{R}, \chi_2 = \frac{\rho}{R}$, то для ν имеем:

$$\nu = \frac{1}{2}\chi_1\chi_2 + \frac{\lambda(\sigma - 3)}{2\chi_1}$$

На плоскости $(\chi_1; \chi_2)$ область допустимых параметров задается соотношениями:

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \leq 1$$

$$\chi_2 \leq \chi_1$$

$$\chi_1, \chi_2 > 0$$

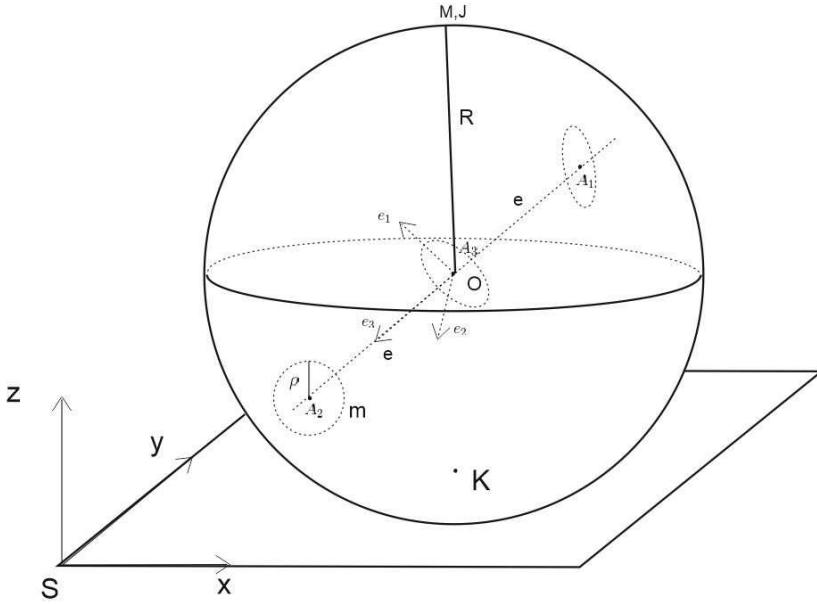


Рис. 4: Модель робота-шара 2

если прямая, содержащая центры маховиков совпадает с осью среднего маховика и

$$\begin{aligned}\chi_1^2 + \chi_2^2 &\leq 1 \\ \chi_2 &\leq \frac{\chi_1}{2} \\ \chi_1, \chi_2 &> 0\end{aligned}$$

если ортогональна ей.

В дальнейшем, в численных расчетах будем полагать

$$M = 4, \quad m = 0.612, \quad R = 0.2, \quad \rho = 0.05, \quad l = 0.1 \quad \lambda = 2/3$$

Для этой конструкции следует сделать одно важное замечание. Если модифицировать систему, отказавшись от использования одинаковых маховиков, то можно привести тензор инерции I к шаровому виду (т.е. тензор инерции будет как у симметричного шара, а не шара Чаплыгина). Покажем это в случае, когда центральный маховик перпендикулярен общей оси. Обозначая моменты инерции центрального маховика за B_2, C_2 , а одинаковых крайних как B_1, C_1 (первый экваториальный, второй–осевой), тогда тензор инерции будет шаровым, если:

$$C_1 + B_2 + 2ml^2 = C_2 + B_1$$

Для однородных маховиков с массами m_i и радиусами ρ_i это соотношение принимает следующий вид:

$$\Delta\rho_2^2 = \rho_1^2 + 8l^2$$

где $\Delta = \frac{m_2}{m_1}$

2.1.3 Шар с маховиком на вращающемся кольце

Пусть внутри шара находится плоское твердое кольцо массы m_1 , центр которого совпадает с центром шара и которое может поворачиваться вокруг своих двух взаимно-перпендикулярных диаметров. Внутри этого кольца расположен диск-маховик, массы m_2 , вращающийся относительно его нормали, совпадающей с нормалью к плоскости кольца. Подвижный базис введем так, что первые две оси будут направлены по тем диаметрам кольца, относительно которых это вращение возможно, третья же ось будет направлена перпендикулярно кольца.

Пусть моменты инерции (экваториальный и осевой) кольца и маховика равны $B_{1,2}$ и $C_{1,2}$ соответственно. Как и в предыдущих пунктах, тензор инерции шара без учета маховиков предполагается шаровым с собственным значением J . Величинами $\alpha_{1,2}$ будут компоненты угловой скорости плоскости относительно тех диаметров, вокруг которых она может вращаться, величина α_3 — угловая скорость маховика. В качестве \hat{J} используем величину C_2 . Тогда для тензора инерции I и вспомогательной матрицы C будем иметь:

$$I = \begin{pmatrix} \nu_1 + c & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 + c & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{B_1}{C_2}$$

$$\nu_1 = \frac{J + B_2}{C_2}$$

$$\nu_2 = \frac{J + C_1}{C_2}$$

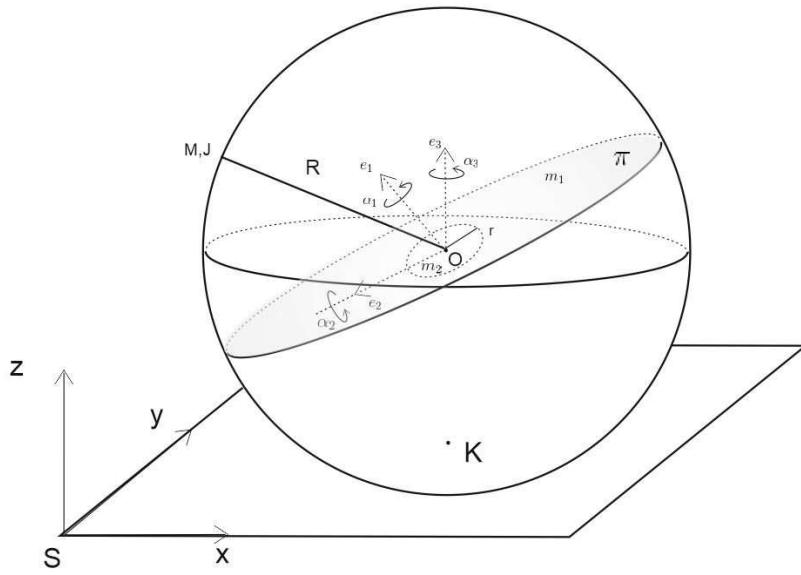


Рис. 5: Шар 3

Если же предположить, что маховик и кольцо являются однородными, причем радиус маховика $r < R$ и внутренний радиус кольца совпадают, то:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2\Delta}(\chi^2 + 1) \\ \nu_1 &= 2\lambda\Delta_0\chi^2 + \frac{1}{2} \\ \nu &= 2\lambda\Delta_0\chi^2 + 2c \\ \Delta &= \frac{m_2}{m_1} \\ \Delta_0 &= \frac{M}{m_2} \\ \chi &= \frac{R}{r} \end{aligned}$$

Приведем параметры робота, которые будут в дальнейшем использоваться для численных экспериментов.

$$M = 4, \quad m_1 = 1.2, \quad m_2 = 0.612, \quad R = 0.2, \quad r = 0.05, \quad \lambda = 2/3$$

В дальнейшем, для удобства, конструкции будут именоваться по номеру главы (шар 2.1.1, шар 2.1.2, шар 2.1.3) или, сокращенно, *первый, второй, третий* шар.

2.2 Интегрируемые случаи

Ясно, что для замыкания системы необходимо задать какие-либо условия на взаимодействие в контакте между сферической оболочкой и неподвижной

плоскостью. Представляют интерес те случаи, для которых существуют первые интегралы уравнений движения.

Представим момент реакций относительно центра шара $\boldsymbol{\mu}$ в виде $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 - b[\mathbf{e}_z; \mathbf{f}]$, где $b = \frac{\hat{M}R^2}{\hat{J}}$, а $\boldsymbol{\mu}^0$ —момент реакций относительно точки контакта сферической оболочки и плоскости.

Утверждение 1.1

Если момент $\boldsymbol{\mu}^0$ можно представить в виде $\boldsymbol{\mu}^0 = \frac{d\varphi^0}{dt}$, где φ^0 —функция, зависящая от обобщенных координат и их скоростей, а $\frac{d}{dt}$ —ее полная производная в силу системы (1),(2), то существует интеграл вида

$$\mathbf{k} + b[\mathbf{e}_z; \mathbf{v}] - \varphi^0 = \text{const} \quad (3)$$

Действительно, в силу системы (1),(2) и условия из утверждения имеем:

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\mu}^0 - b[\mathbf{e}_z; \mathbf{f}] = \frac{d\varphi^0}{dt} - b[\mathbf{e}_z; \frac{d\mathbf{v}}{dt}]$$

откуда и следует существование интеграла (3).

Отметим, что физический смысл этого интеграла—сохранение вектора кинетического момента относительно точки контакта.

Следствия из этого утверждения:

Следствие 1

Уравнения движения сферического робота на гладкой плоскости допускают первый интеграл вида (3)

Следствие 2

Уравнения движения сферического робота на абсолютно шероховатой плоскости допускают первый интеграл вида (3)

Следствие 3

Уравнения движения сферического робота на плоскости с вязким трением допускают первый интеграл вида (3)

Следствие 4

Уравнения движения сферического робота на плоскости с сухим трением Кулона допускают первый интеграл вида (3)

Заметим, что во всех вышеприведенных моделях $\boldsymbol{\mu}^0 = 0$.

2.2.1 Неголономная модель

Остановимся подробнее на идеальной неголономной модели (модели абсолютно шероховатой плоскости, т.е.

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}; \mathbf{e}_z]$$

и момент реакций относительно точки K $\mu^0 = 0$. Интеграл (3) принимает вид:

$$I\hat{\omega} + C\alpha = bD([e_z; [\boldsymbol{\omega}; e_z]] + \mathbf{h}) = bD(\boldsymbol{\omega} - \omega_z e_z + \mathbf{h})$$

здесь \mathbf{h} —вектор констант первых интегралов.

Данное векторное уравнение позволяет получать управления для желаемых профилей угловой скорости, т.е. заданных функций $\boldsymbol{\omega}(t)$. Заметим, что в общем случае необходимо и нахождение в явном виде матрицы $D(t)$. Последнее возможно путем введения некоторых локальных координат \mathbf{q} на многообразии $SO(3)$. Тогда кинематические условия $\boldsymbol{\omega} = \Xi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ позволяют находить \mathbf{q} из векторного дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{q}} = \Xi^{-1}(q)\boldsymbol{\omega}$.

Отметим, что все три конструкции, рассмотренные в работе, являются вполне управляемыми, что доказано в [10] (строго говоря, там это показано только для шара 2.1.1, однако остальные отличаются исключительно массово-инерционными характеристиками). Следует отметить, что управляемость сохраняется при замене условий ортогональности осей на некомпланарность и даже в случае наличия только двух управляющих маховиков на неколлинеарных осях (что также показано в [10]). Однако, очевидно, что в последнем случае не любой закон движения допустим из произвольной конфигурации. В частности, при двух маховиках на неколлинеарных осях, движение с угловой скоростью, направленной по нормали к плоскости, образованной осями этих маховиков, из состояния покоя невозможно. Для реализации подобного движения необходимо сначала изменить конфигурацию сферы в смысле многообразия $SO(3)$.

Остановимся на конкретных примерах траекторий, построив алфавит движения робота. Здесь и далее, если не оговорено противное, под *траекторией шара* понимается траектория его геометрического центра. Пусть в начальный момент времени шар поконится, тогда $\mathbf{h} = 0$. Управления $\boldsymbol{\alpha}$, обеспечивающие вращение шара вокруг вертикальной оси, т.е. $\boldsymbol{\omega} = \omega e_z$, находятся из уравнения

$$C\boldsymbol{\alpha} = -\omega I\mathbf{e}$$

где \mathbf{e} —вектор e_z в подвижной системе координат

Управления $\boldsymbol{\alpha}$, обеспечивающие качение шара вдоль прямой (без ограничения общности, оси Sx), т.е. $\boldsymbol{\omega} = \omega e_y$, находятся из уравнения:

$$C\boldsymbol{\alpha} = -\omega I_*\mathbf{e}$$

Здесь вектор \mathbf{e} —вектор e_y в подвижной системе координат, $I_* = I + bE$, E —единичная 3x3 матрица

Считая $\alpha \gg \omega$, для вращения маховиков используем электродвигатели постоянного тока, для которых принимаем стандартную модель

$$C\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \kappa_1 \mathbf{U} - \kappa_2 \boldsymbol{\alpha}$$

где κ_1, κ_2 —постоянные электродвигателя. Здесь и далее, положим управляющие напряжения U_i размерными величинами. Образмеривание учитывается в значениях коэффициентов κ_i . Так, для всех моделей шаров (2.1.1-2.1.3) в чиленных расчетах использованы одинаковые электродвигатели, но в силу того, что величины \hat{J} различны, значения κ_i также будут отличаться. Для размерных $\kappa_{1,2}$ верно:

$$\begin{aligned}\kappa_1^{\text{разм.}} &= 5.4 \cdot 10^{-3} \text{Н} \cdot \text{м}/\text{В} \\ \kappa_2^{\text{разм.}} &= 6 \cdot 10^{-5} \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}\end{aligned}$$

Построим графики для управляющих напряжений в случае треугольного профиля угловой скорости ($\omega(t) = \mathcal{E}(T - |t - T|)$), где $t \in [0; 2T]$, а $\mathcal{E} = \frac{\pi}{2T^2}$ для поворота на месте и $\mathcal{E} = \frac{2\pi}{T^2}$ для движения по отрезку. Полное время движения будет 4 и 7 секунд соответственно. Таким образом, для поворота шара на месте вокруг вертикали рассматривается поворот на угол $\pi/2$, а для движения по прямой—прохождение отрезка длиной 2π .

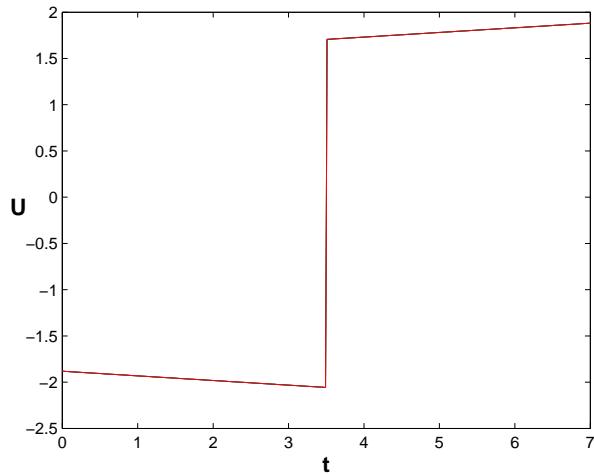


Рис. 6: Управляющие напряжения для поворота на месте шара 2.1.1 и $e = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$

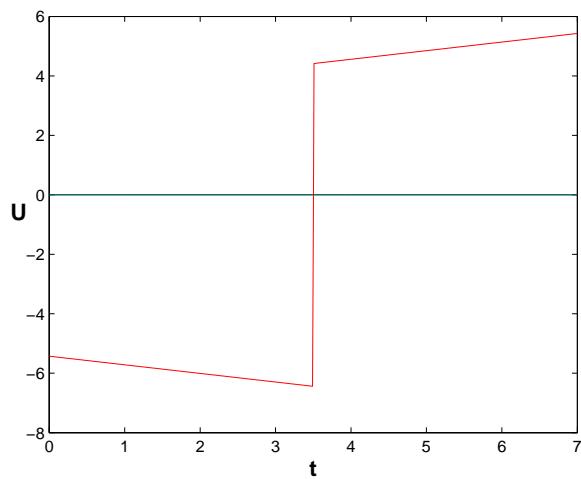


Рис. 7: Управляющие напряжения для поворота на месте шара 2.1.2 и $e = (0; 0; 1)$

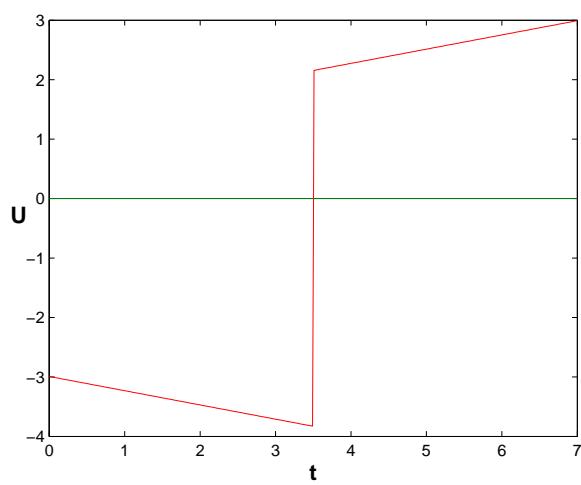


Рис. 8: Управляющие напряжения для поворота на месте шара 2.1.3 и $e = (0; 0; 1)$

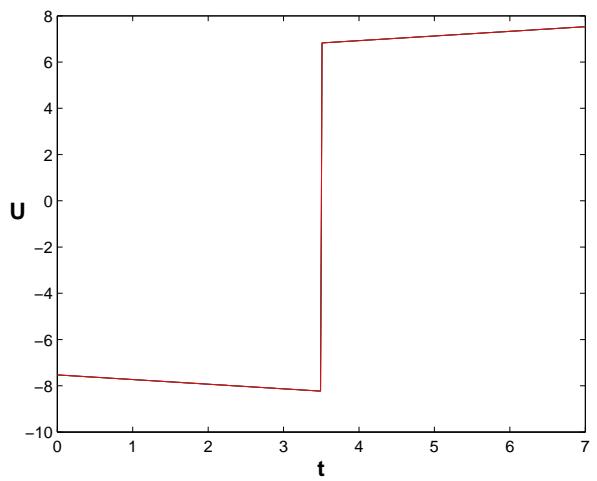


Рис. 9: Управляющие напряжения для движения по отрезку шара 2.1.1 и $e = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$

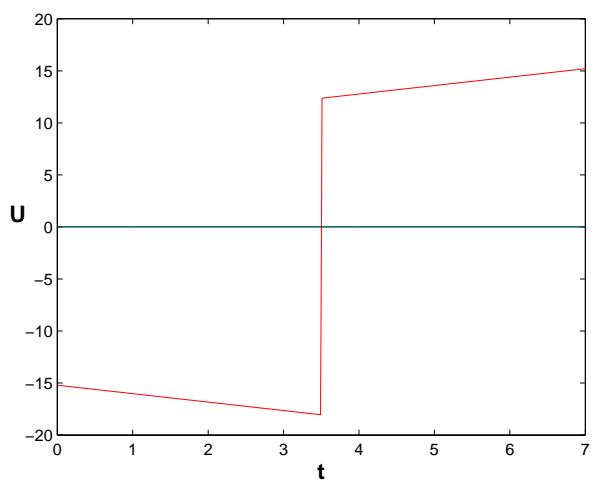


Рис. 10: Управляющие напряжения для движения по отрезку шара 2.1.2 и $e = (0; 0; 1)$

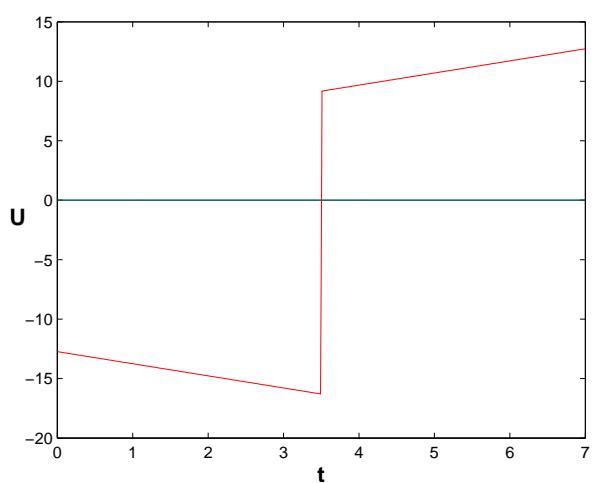


Рис. 11: Управляющие напряжения для движения по отрезку шара 2.1.3 и $e = (0; 0; 1)$

Поставим теперь задачу о прохождении дуги окружности, для того, чтобы дополнить алфавит базовых движений робота гладкой кривой. Рассмотрим движение по окружности

$$x = \rho \cos \psi$$

$$y = \rho \sin \psi$$

$$\dot{\psi}(t) = A \cos \frac{\eta t}{2} \sin \eta t$$

Здесь ρ —безразмерный радиус окружности, а $T = \pi/\eta$ —период движения. Ниже приведены графики для управляющих напряжений для этого случая (параметры таковы: $\rho = 4$; $\eta = \pi/7$):

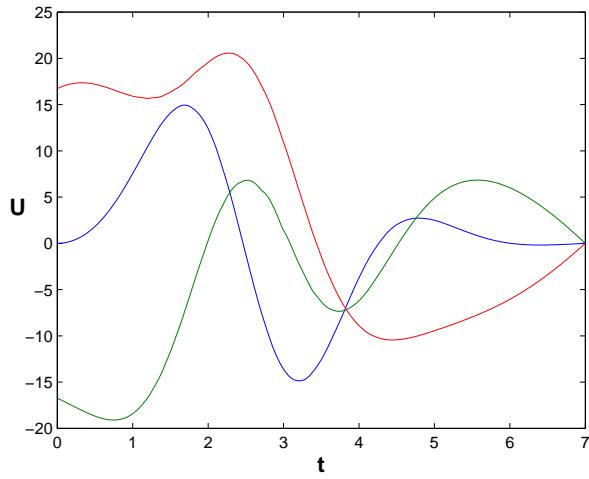


Рис. 12: Управляющие напряжения для движения по окружности шара 2.1.1

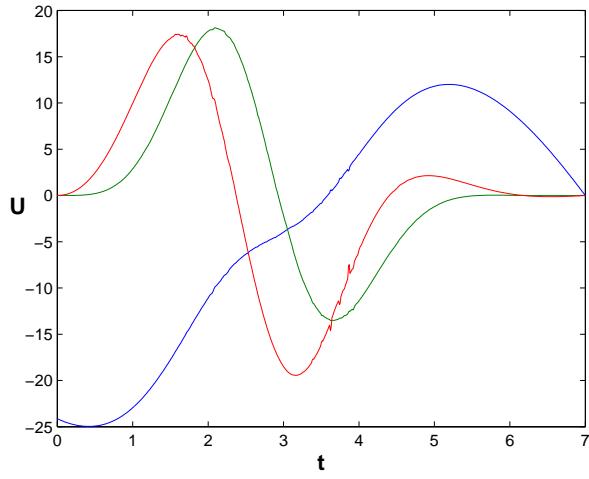


Рис. 13: Управляющие напряжения для движения по окружности шара 2.1.2

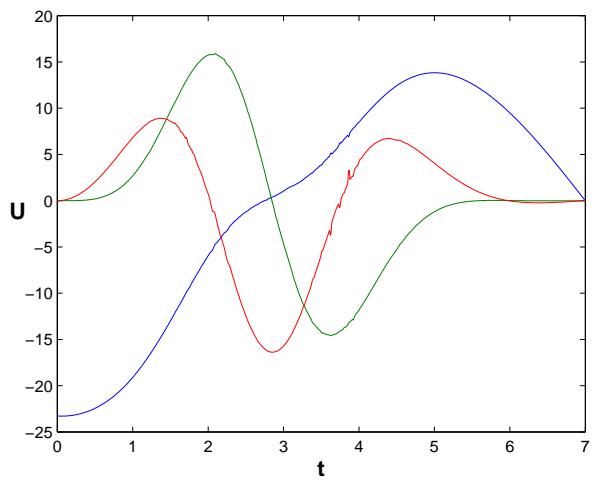


Рис. 14: Управляющие напряжения для движения по окружности шара 2.1.3

Далее отметим следующее утверждение:

Утверждение 2.2

Пусть $\alpha^0(t)$ —вектор управления, реализующий движение $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{v}; \omega_z) = \mathbf{q}^0(t)$, такое, что $\mathbf{v}(0) = 0, \omega_z(0) = 0$. Тогда для вектора $\lambda\mathbf{q}^0(t)$ управлением будет вектор $\lambda\alpha^0(t)$

Его вывод очевиден из структуры интегралов (3). Важным для практических задач является следствие:

Следствие

Пусть для управляющего вектора $\alpha(t)$ верно, что $\Lambda_1\alpha + \Lambda_2\dot{\alpha} \leq \Lambda_0$, где Λ_i некоторые постоянные. Тогда движение возможно вдоль любой траектории, но не с произвольной скоростью.

В частности, если электродвигатели, приводящие маховики в движения подчиняются стандартной модели электродвигателя, это условие выполняется. Поэтому в рамках неголономной постановки вопрос об ограниченности ресурсов для таких движений, когда в начале и конце шар покоится, решается путем выбора нужного профиля скорости. Между тем, для постоянного движения существенной проблемой может являться проблема т.н. “броса момента“ на маховиках. С этой точки зрения, управление проще осуществлять по кусочным траекториям с остановкой в узлах.

В качестве примера для разобранных законов движения для поворота на заданный угол и движения по заданному отрезку найдем максимальное угловое ускорение. Пусть Ψ —угол на который необходимо повернуть шар относительно оси Sy для движения по отрезку или относительно Sz для поворота на месте. Тогда, считая что $\omega(t) = \mathcal{E}(T - |t - T|)$ имеем:

$$\mathcal{E} = \frac{\Psi}{T^2}$$

Обозначим $\|I_0\|_{L\infty} = \nu_*$ ($I_0 = I, I_*$ для каждой из задач), а также минимальное собственное значение матрицы C за c_* (Например, для первого шара $\nu_* = \sqrt{\nu^2 + 2}$, а $c_* = c$). Пусть максимальное напряжение, создаваемое электродвигателем— U_* . Пусть момент инерции относительно оси вращения равен ν_* , а осевой момент инерции единственного управляющего маховика c_* (т.е. рассмотрим критический случай)

$$U(t) = -\frac{\nu_* \mathcal{E}}{\kappa_1} \left(1 + \frac{\kappa_2 t}{c_*}\right)$$

Заключаем, что

$$U_*(t) = -\frac{\nu_*}{\kappa_1} \left(\mathcal{E} + \frac{\kappa_2 \sqrt{\Psi \mathcal{E}}}{c_*}\right)$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{max} = \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + 4\eta}}{4}$$

Где

$$\xi = \frac{\varkappa_2 \sqrt{\Psi}}{c_*}$$

$$\eta = \frac{\varkappa_1 U_*}{\nu_*}$$

2.2.2 Модель вязкого трения

Рассмотрим модель вязкого трения: пусть сила реакции в контакте направлена против скорости точки контакта K и пропорциональна ей с коэффициентом ε , то есть имеет место соотношение:

$$\mathbf{f} = -\varepsilon \mathbf{v}_k = -\varepsilon(\dot{\mathbf{v}} - [\boldsymbol{\omega}; \mathbf{e}_z])$$

Следовательно, система уравнений, с учетом интеграла (3), примет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} + \varepsilon \mathbf{v} &= \varepsilon[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{e}_z] \\ I\hat{\boldsymbol{\omega}} + c\boldsymbol{\alpha} &= -bD([\mathbf{e}_z; \mathbf{v}] + \mathbf{h}) \\ \mathbf{h} &= \text{const}\end{aligned}$$

Из первого уравнения можно выразить две горизонтальные компоненты угловой скорости:

$$\boldsymbol{\omega} - \omega_z \mathbf{e}_z = [\mathbf{e}_z; \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\varepsilon} + \mathbf{v}]$$

В частности, нетрудно заметить, что для режима чистого верчения, уравнения движения полностью совпадут с уравнениями движения для шара на абсолютно шероховатой плоскости.

Кроме того, общим у этих моделей является и наличие однородности по тем же самым параметрам. Следовательно, следствие 2.2 верно и в модели вязкого трения.

Рассмотрим теперь движение шара по отрезку из состояния покоя без верчения, т.е. $\omega_z = 0$. Не ограничивая общности, будем считать что этот отрезок совпадает с частью оси Sx . Кроме того, потребуем условия Первые интегралы перепишутся в виде:

$$C\boldsymbol{\alpha} = [-(v + \frac{\dot{v}}{\varepsilon})I - bvE]\mathbf{e} \quad (4)$$

где \mathbf{e} —вектор \mathbf{e}_y в подвижной системе координат, в которой он будет постоянным. Заметим, что применение треугольного профиля в рамках этой модели

неоправданно, так как это ведет к разрывному решению по угловой скорости, что крайне нежелательно. Поэтому будем искать профиль скорости в виде

$$v(t) = A \cos \frac{\eta t}{2} \sin \eta t$$

Положим $\eta = \pi/7$, $A = \frac{3\pi^2}{14}$

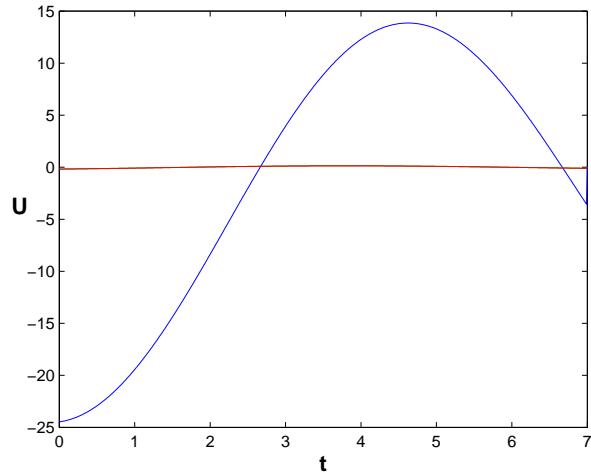


Рис. 15: Управляющие напряжения для движения по отрезку шара 2.1.1

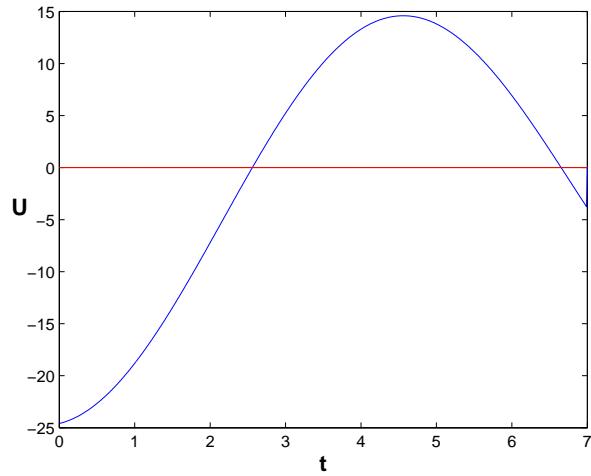


Рис. 16: Управляющие напряжения для движения по отрезку шара 2.1.2

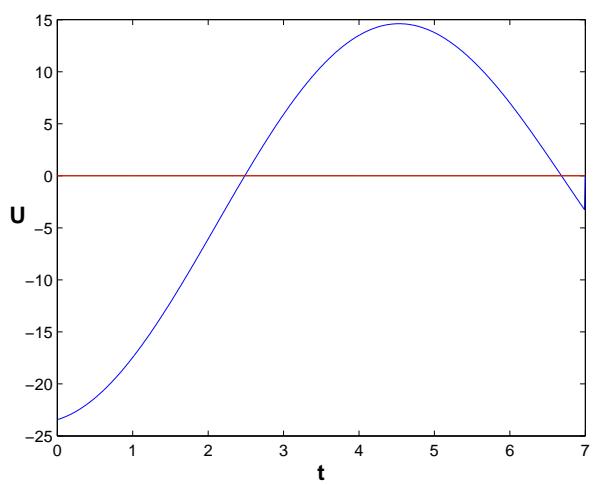


Рис. 17: Управляющие напряжения для движения по отрезку шара 2.1.3

Графики для движения по окружности (закон движения аналогичен 2.2.1):

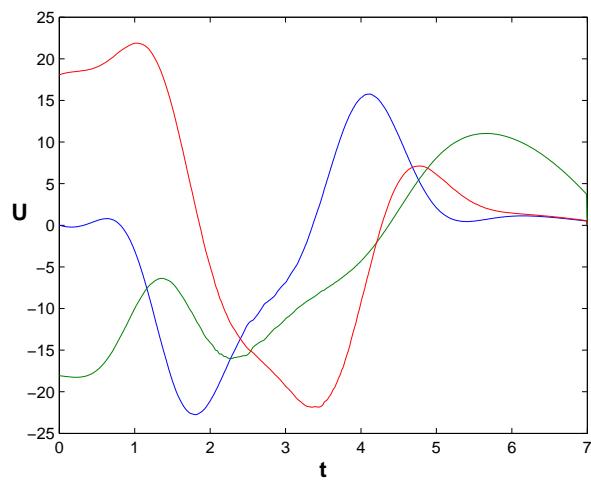


Рис. 18: Управляющие напряжения для движения по окружности шара 2.1.1

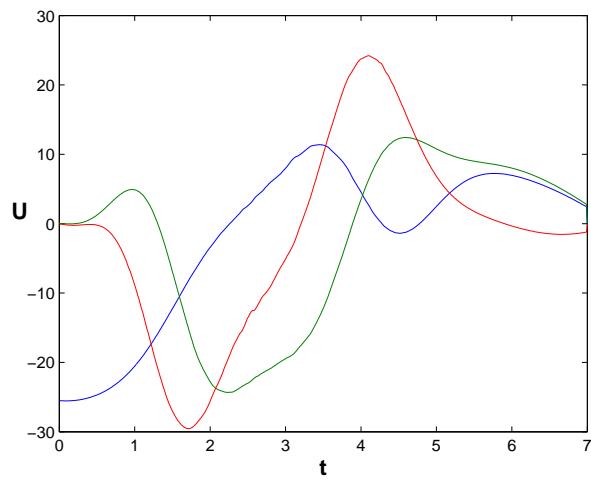


Рис. 19: Управляющие напряжения для движения по окружности шара 2.1.2

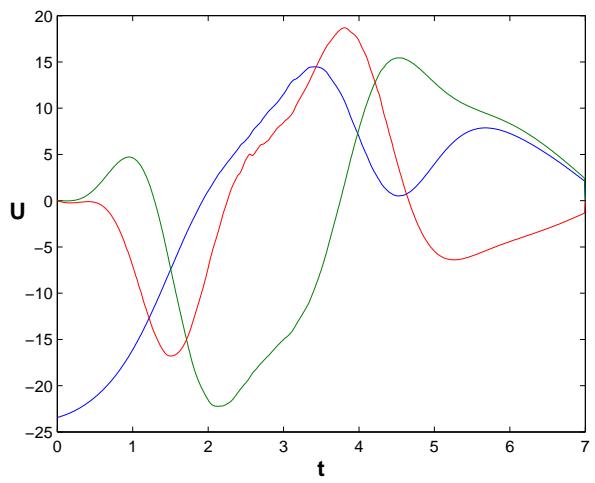


Рис. 20: Управляющие напряжения для движения по окружности шара 2.1.3

3 Шар на плоскости с двухпараметрическим трением

3.1 Описание модели двухпараметрического трения

Реальные эксперименты показывают, что между сферической поверхностью робота и опорной плоскостью контакт происходит не в одной точке, а в некоторой области, называемой пятном контакта. Наиболее точно предположение, что оно представляет собой сферический сегмент, в каждой точке которого выполнен локально закон сухого трения Кулона. Пусть радиус сферы, задающей этот сегмент — R_f , а радиус сегмента — R_s . R — по-прежнему радиус шара. Таким образом, пятно контакта зависит от двух параметров $\delta = \frac{R}{R_f}$ и $\varepsilon = \frac{R_s}{R}$. Полученные в [34], [35] выражения для сил и моментов:

$$f_i = -\frac{3kN}{4\pi(1-\cos\beta_0)^{3/2}\hat{M}R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) I_{u_i} d\beta \quad (5)$$

$$\mu_i^0 = -\frac{3kbN}{4\pi(1-\cos\beta_0)^{3/2}\delta\hat{M}R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) I_{w_i} d\beta \quad (6)$$

$$I_{u_i} = \int_0^{2\pi} \frac{u_i}{\|u\|} d\alpha$$

$$I_{w_i} = \int_0^{2\pi} \frac{w_i}{\|u\|} d\alpha$$

$$B(\beta) = \sqrt{\cos\beta - \cos\beta_0} \sin\beta$$

$$\mu = \mu^0 - b[e_z; f]$$

Здесь

$$u_I = u(1 - \sin^2\beta \cos^2\alpha) + \delta^{-1}(\omega_I \sin^2\beta \sin\alpha \cos\alpha + \omega_{II}(1 - \cos\beta - \sin^2\beta \cos^2\alpha) - \omega_{III} \sin\beta \sin\alpha)$$

$$u_{II} = -u \sin^2\beta \sin\alpha \cos\alpha - \delta^{-1}(\omega_{II} \sin^2\beta \sin\alpha \cos\alpha + \omega_I(1 - \cos\beta - \sin^2\beta \sin^2\alpha) + \omega_{III} \sin\beta \cos\alpha)$$

$$u_{III} = u \sin\beta \cos\beta \cos\alpha + \delta^{-1} \sin\beta(1 - \cos\beta)(\omega_I \sin\alpha - \omega_{II} \cos\alpha)$$

$$w_I = u \sin^2\beta \sin\alpha \cos\alpha + \delta^{-1}(\omega_I(1 - \cos\beta)^2 - \omega_{III}(1 - \cos\beta) \sin\beta \cos\alpha)$$

$$w_{II} = u(1 - \cos\beta - \sin^2\beta \cos^2\alpha) + \delta^{-1}(\omega_{II}(1 - \cos\beta)^2 - \omega_{III}(1 - \cos\beta) \sin\beta \sin\alpha)$$

$$w_{III} = \sin\beta(-u \sin\alpha + \delta^{-1}(-(1 - \cos\beta)(\omega_I \cos\alpha + \omega_{II} \sin\alpha) + \omega_{III} \sin\beta))$$

где ось 1 направлена по скорости скольжения, ось 3 вертикальна, а ось 2 дополняет репер до правой тройки. Этот базис в дальнейшем будем называть *вспомогательным*, а вектора в нем индексировать римскими цифрами во избежание путаницы с СК жестко связанной с роботом. Далее, g —ускорение свободного падения, N —сила нормальной реакции опоры, u —скорость скольжения шара, деленная на его радиус, Ω —вектор угловой скорости во вспомогательном базисе (таким образом, $\omega_{III} \equiv \omega_z$). Наконец, $\sin \beta_0 = \frac{R_s}{R_f}$, k —коэффициент трения.

Полученные функции для сил и моментов являются однородными функциями относительно переменных $u, \boldsymbol{\omega}$. Для дальнейшего их исследования можно, например, согласно В.Ф.Журавлеву[26] перейти к аппроксимациям Паде. Однако, в данной работе будет предложен иной подход, сохраняющий точные выражения для функций, основанный на идеях, предложенных в работе [37]. Перейдем к координатам $r, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ по формулам:

$$\delta u = r \cos \theta_1 \quad (7)$$

$$\omega_I = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad (8)$$

$$\omega_{II} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \quad (9)$$

$$\omega_{III} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \quad (10)$$

здесь $r^2 = \delta^2 u^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|^2$.

Заметим, что функции f_i и μ_i не зависят от r . Угловые переменные θ_k характеризуют соотношение между скольжением, качением, верчением и закручиванием, поэтому в дальнейшем они будут называться *режимными углами*. Таким образом, функции \mathbf{f} и $\boldsymbol{\mu}$ определены на единичной трехмерной сфере \mathcal{S}^3 . Кроме того, отметим, что гладкая зависимость этих функций от параметра δ и негладкая— от ε была доказана в [34].

Для случая $\delta = 0$ выражения примут иной вид и будут соответствовать модели Контенсу-Журавлева[26]. Случай $\varepsilon = 0$ соответствует модели Кулона, что разобрано в [11]. Далее, если не оговорено противное, рассматривается случай, когда $\varepsilon\delta \neq 0$. Теперь приведем алфавит движений робота на плоскости с двухпараметрическим трением.

3.2 Поворот на заданный угол

Для начала, рассмотрим случай, когда центр масс аппарата неподвижен, а шар совершает вращение вокруг вертикали. Таким образом, решается задача о смене курсового угла без сдвига центра масс. Для режимных углов такое предположение соответствует условиям $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/2$. В этом случае возникает режим чистого верчения, где все компоненты сил и моментов, кро-

ме μ_z равны нулю. Момент трения верчения $\mu_z = \mu_z^0 = \text{const} = \mu$, вследствие чего можно выписать проинтегрированное уравнение, полученное из теоремы об изменении кинетического момента:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{c}(\mu t E - \omega(t)I)\boldsymbol{e}$$

где \boldsymbol{e} —неподвижный единичный вектор вертикали в подвижной системе координат.

Считая, что маховики приводятся в движение электродвигателями постоянного тока (такими же, как и в главе 2), приведем графики управляемых напряжений для поворота на угол $\pi/2$ за время $2T$ в случае треугольного профиля угловой скорости верчения для каждого из роботов (Т.е. $r(t) = \omega(t) = \mathcal{E}(T - |t - T|)$, где \mathcal{E} —постоянное по модулю угловое ускорение равное $\frac{\pi}{2T^2}$). Будем брать начальные условия нулевыми по скоростям.

Приведем в качестве примера графики для управляемых напряжений на электродвигателях для каждого из шаров 2.1.1-2.1.3. Для каждой модели в качестве примеров рассмотрим два случая, когда \boldsymbol{e} —собственный вектор тензора инерции I и один, когда—несобственный

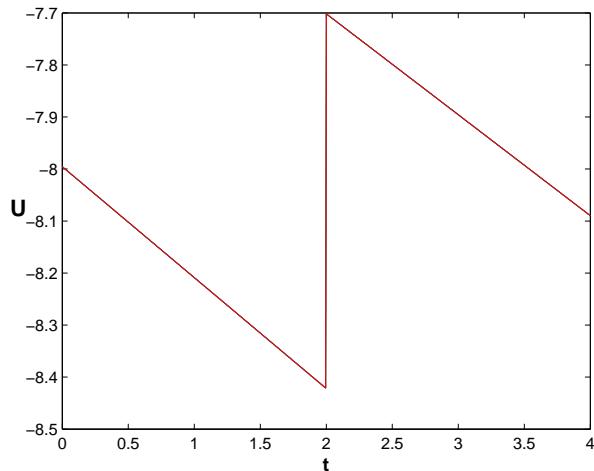


Рис. 21: Управляющие напряжения для $\boldsymbol{e} = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$.

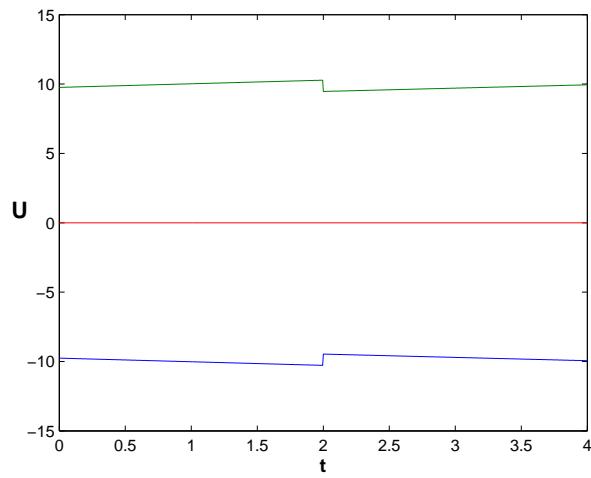


Рис. 22: Управляющие напряжения для шара 2.1.1 и $e = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$.

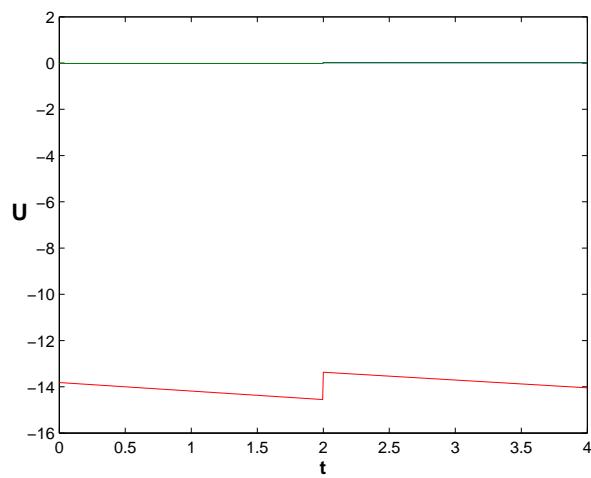


Рис. 23: Управляющие напряжения для шара 2.1.1 и вектора $e = (1; 0; 0)$

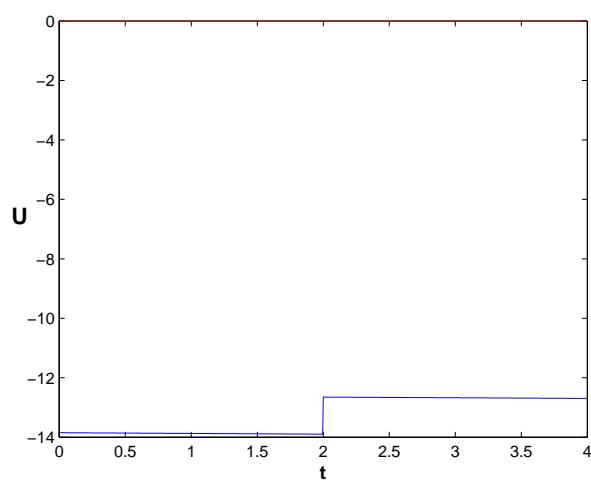


Рис. 24: Управляющие напряжения для шара 2.1.2 и вектора $e = (1; 0; 0)$

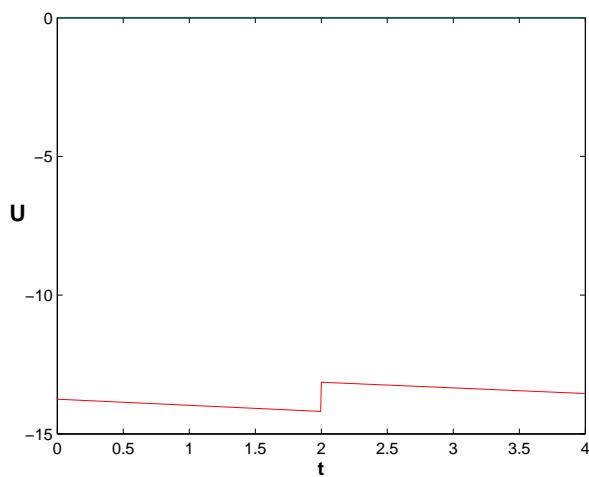


Рис. 25: Управляющие напряжения для шара 2.1.2 и вектора $e = (0; 0; 1)$

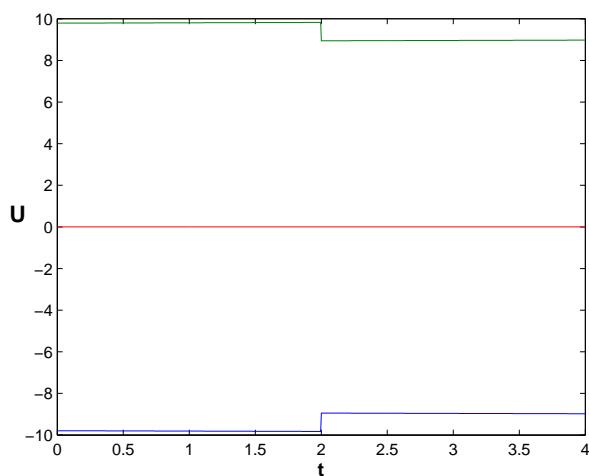


Рис. 26: Управляющие напряжения для шара 2.1.2 и вектора $e = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$.

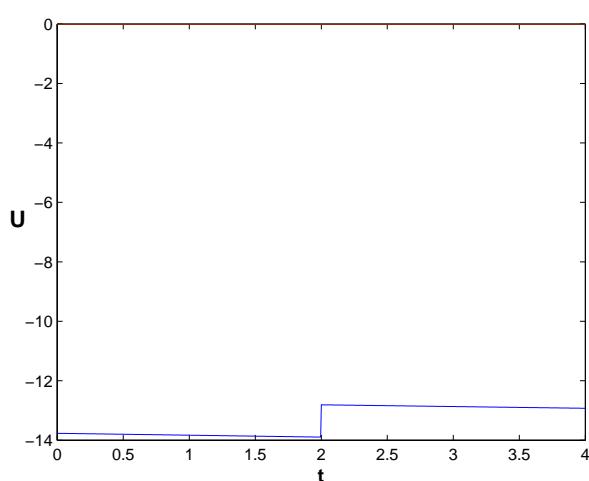


Рис. 27: Управляющие напряжения для шара 2.1.3 и вектора $e = (1; 0; 0)$

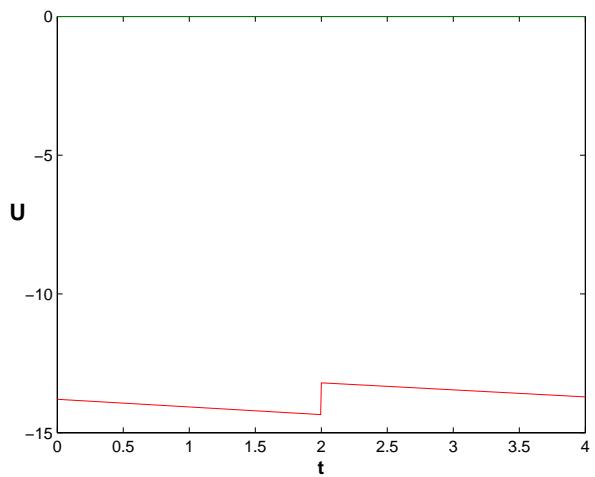


Рис. 28: Управляющие напряжения для шара 2.1.3 и вектора $e = (0; 0; 1)$

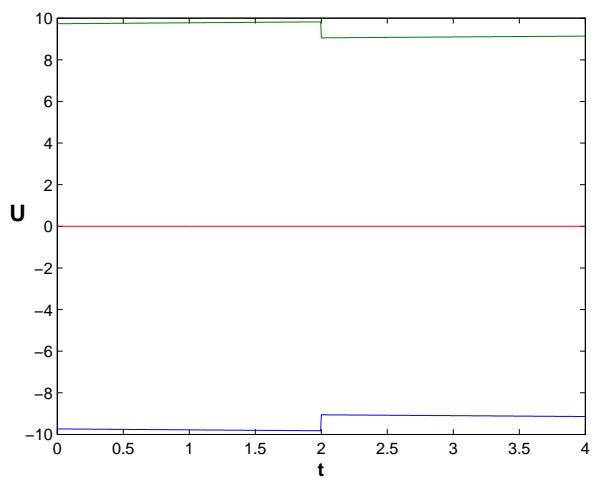


Рис. 29: Управляющие напряжения для шара 2.1.3 и вектора $e = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$.

Отметим, что величину μ в данном случае можно интерпретировать как момент трения покоя, который нужно преодолеть, чтобы начать движение. Поверхность $\mu(\delta, \varepsilon)$, показывающая зависимость этого момента от значений параметров пятна контакта показана на рисунке. Можно сделать вывод, что влияние на эту величину оказывает только параметр δ , характеризующий жесткость плоскости. Определим пороговые значения параметра δ для реально существующих электродвигателей. Так, можно отметить, что если маховики робота приводятся в движение двигателями Maxon-RE-10 ($\kappa_1^{\text{разм}} = 2.7 \cdot 10^{-4} \text{Н}\cdot\text{м}/\text{В}$, $\kappa_2^{\text{разм}} = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$), то шар сможет начать движение по плоскости с $\delta < 0.02$, а для двигателя ДПМ-20-Н2 ($\kappa_1^{\text{разм}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{Н}\cdot\text{м}/\text{В}$, $\kappa_2^{\text{разм}} = 4.7 \cdot 10^{-6} \text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$) пороговое значение $\delta = 0.03$.

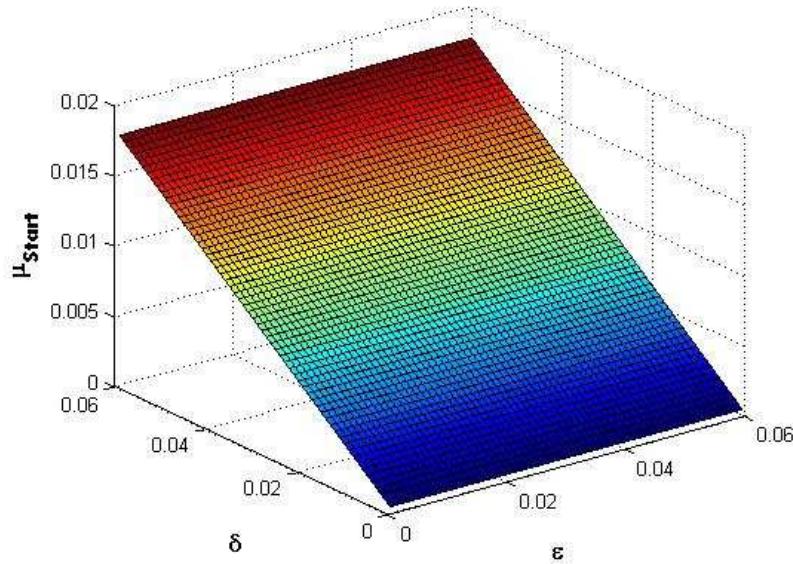


Рис. 30: Момент трения покоя.

Теперь подробнее остановимся на допустимости поворота на некоторый угол при указанном выше треугольном профиле угловой скорости, так как преодоление трения покоя—необходимое, но недостаточное условие осуществления такого движения. Для ограниченных управляемых напряжений U_i верно следующее соотношение (обозначая $X = \mu E - \mathcal{E}I$):

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\kappa_1} \left(X + \frac{\kappa_2 t}{c} X \right) \mathbf{e} \quad (11)$$

Пусть целевой угол ψ , связанный с \mathcal{E} и T соотношением $\psi = \mathcal{E}T^2$. В силу (11) зависимость $\mathbf{U}(t)$ линейна, следовательно поворот на этот угол за некоторое время $2T$ допустим, если в момент времени T напряжение на электродвигателе каждого маховика по модулю не превосходит максимально возможного (здесь мы без ограничения общности положим $\mathcal{E} > 0$). Рассматривая

различные конфигурации сферы, можно увидеть, что для поиска максимально возможного значения напряжения необходимо нахождение нормы оператора X в смысле L_∞ . Эта норма равна $\sqrt{(\mu - \nu\mathcal{E})^2 + 2\mathcal{E}^2}$. С учетом того, что $T = \sqrt{\frac{\psi}{\mathcal{E}}}$ получаем следующее условие:

$$U_{max} \geq (1 + \frac{\kappa_2\sqrt{\psi}}{c\sqrt{\mathcal{E}}})\sqrt{(\mu - \nu\mathcal{E})^2 + 2\mathcal{E}^2}/\kappa_1$$

Обозначая

$$\begin{aligned}s &= -\frac{\mathcal{E}}{\mu}\sqrt{\nu^2 + 2} \\ \mathcal{A} &= \frac{\kappa_2\sqrt{\psi}}{c\sqrt{|\mu|}}\sqrt{\nu^2 + 2} \\ \mathcal{B} &= \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 2}}\end{aligned}$$

Условие выше переписывается в виде

$$\begin{aligned}U_{max} &\geq |\mu|\varphi(s)/\kappa_1 \\ \varphi(s) &= (1 + \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{s}})(\sqrt{s^2 + 2\mathcal{B}s + 1})\end{aligned}$$

Для производной функции $\varphi(s)$ верно следующее равенство:

$$\varphi'(s) = \frac{s + \mathcal{B}}{\sqrt{s^2 + 2\mathcal{B}s + 1}} + \frac{\mathcal{A}}{2\sqrt{s + \frac{1}{s} + 2\mathcal{B}s}}(1 - \frac{1}{s^2})$$

Равенство нулю этой производной достигается при равенстве нулю функции $\theta(\xi)$, где $\xi = \sqrt{s}$:

$$\theta(\xi) = 2\xi^5 + \mathcal{A}\xi^4 + 2\mathcal{B}\xi^3 - a$$

Так как $\theta(0) = -\mathcal{A} < 0$, $\theta(1) = 2 + 2\mathcal{B} > 0$, $\theta(\xi)$ монотонно возрастает при положительных ξ , то $\exists! s_0 \in (0; 1) : \varphi'(s_0) = 0$, причем эта точка—точка минимума функции $\varphi(s)$. Отсюда можно сделать вывод, что поворот на угол ψ возможен для любой начальной ориентации шара, если

$$U_{max} \geq |\mu|\varphi(s_0)/\kappa_1$$

Так как s_0 зависит от \mathcal{A} , а значит и от ψ , причем при $\psi \rightarrow 0$ $\varphi(s_0) \rightarrow |\mu|\sqrt{2}/\nu < |\mu|$, то если маховики позволяют начать движение, существует такой угол ψ , на который поворот допустим (а значит и на любой меньший угол), в то время как на больший угол поворот можно получить комбинированием поворотов на меньшие допустимые углы.

3.3 Движение без верчения по отрезку

Пусть имеет место движение вдоль некоторой прямой линии, без ограничения общности, оси Sx без верчения, т.е. $\omega_z = 0$. В сферических координатах режимных углов это соответствует окружности $\begin{cases} \theta_2 = \pi/2 \\ \theta_3 = 0. \end{cases}$ Т.е. режим движения полностью определяется лишь углом θ_1 , который для удобства будем обозначать просто θ .

При таких условиях $f = f_x$, а $\mu = \mu_y^0 - bf_x$ (Равенство нулю остальных компонент векторов \mathbf{f} и $\boldsymbol{\mu}$ в условии $\omega_I = 0$ показано в [35]). В силу того, что $f_{III} \equiv 0$ имеем для безразмерной силы нормального давления $n = \frac{g}{R}$ (что в размерных переменных соответствует условию $N = \hat{M}g$). Выражения для f_x и μ_y^0 имеют вид (индексы x и y опускаем ради удобства):

$$f_x(\theta) = f(\theta) = -\frac{3kg}{4\pi(1-\cos\beta_0)^{3/2}R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) I_{u_I} d\beta$$

где

$$I_{u_I}(\beta, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta(1-\sin^2\beta\cos^2\alpha) + \sin\theta(1-\cos\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha)}{l(\theta)} d\alpha$$

$$\begin{aligned} l(\theta) = & (\cos^2\theta(1-\sin^2\beta\cos^2\alpha) + \sin^2\theta(1-\cos\beta)^2 + 2\sin\theta\cos\theta \times \\ & \times (1-\cos\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha))^{1/2} \end{aligned}$$

$$\mu_y^0(\theta) = \mu^0(\theta) = -\frac{3kgb}{4\pi(1-\cos\beta_0)^{3/2}\delta R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) I_{w_{II}} d\beta$$

где

$$I_{w_{II}}(\beta, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta(1-\cos\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha) + \sin\theta(1-\cos\beta)^2}{l(\theta)} d\alpha$$

Уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[r \left(\sin\theta + \frac{1}{\delta} \cos\theta \right) \right] &= f(\theta) \\ \frac{d}{dt} [r \sin\theta I \mathbf{e} + C \boldsymbol{\alpha}] &= \mu(\theta) \mathbf{e} \end{aligned}$$

Здесь

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{pmatrix}$$

постоянный вектор \boldsymbol{e}_y в подвижной системе координат. Последнее уравнение, из которого и находятся управлений, представляет собой теорему об изменении кинетического момента, записанную в подвижной СК (здесь $\frac{d}{dt}$ —полная производная).

3.3.1 Анализ силы и момента трения

Для построения управления следует решать обратную задачу динамики. Без ограничения общности, положим $v \geq 0$ на всем движении (т.е. шар не "откатывается" назад, что является вполне естественным с практической точки зрения условием). Теперь подробнее остановимся на анализе сил и моментов, как функций режимного угла θ . Это необходимо как и для решения обратной задачи динамики, так и для исследования свободной (на выключенных приводах) динамики системы (решения прямой задачи). Вместе с тем, отмечая π -антипериодичность этих функций, достаточно ограничиться отрезком $\theta \in [0; \pi]$. Кроме того, стоит заметить, что наиболее реализуемые на практике движения робота будут соответствовать режимам преимущественного качения (т.е. проскальзывание будет существенно меньше качения), что означает нахождение θ в некоторой довольно малой окрестности точки $\pi/2$.

Утверждение 3.1

$f(\theta) \in C(0; \pi)$ и возрастает на этом промежутке.

Первая часть утверждения верна, так как подынтегральные функции непрерывны по θ . Заметим, что знаменатель дроби в функции I_{u_I} может обращаться в ноль при $\theta = \pi/2$. Однако, можно показать, что в этой точке интеграл существует и верно равенство

$$f(\pi/2) = -\frac{k g \varepsilon^2 \delta^2}{5R(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2 \delta^2})}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -\frac{3kg}{4\pi(1 - \cos \beta_0)^{3/2} R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) \frac{\partial I_{u_I}}{\partial \theta} d\beta \\ \frac{\partial I_{u_I}}{\partial \theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin^4 \beta \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \sin \theta}{(l(\theta))^{3/2}} d\alpha \end{aligned}$$

Таким образом, при $\sin \theta > 0$ функция $f(\theta)$ возрастает. Стоит отметить, что производная $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ в точке $\pi/2$ имеет разрыв второго рода, связанный с тем, что интеграл по β расходится (вблизи точки $\beta = 0$ возникает неопределенность вида $1/\beta$). Также заметим, что исходя из того, что $f(\pi/2) < 0$, а $f(\pi) > 0$, существует такой угол θ_f для которого $f = 0$.

Приведем в заключение графики силы f в окрестности точки $\theta = \pi/2$ (здесь и далее в этом подпункте, первый график соответствует случаю $\delta = 0.13, \varepsilon = 0.06$, второй — $\delta = 0.03, \varepsilon = 0.06$):

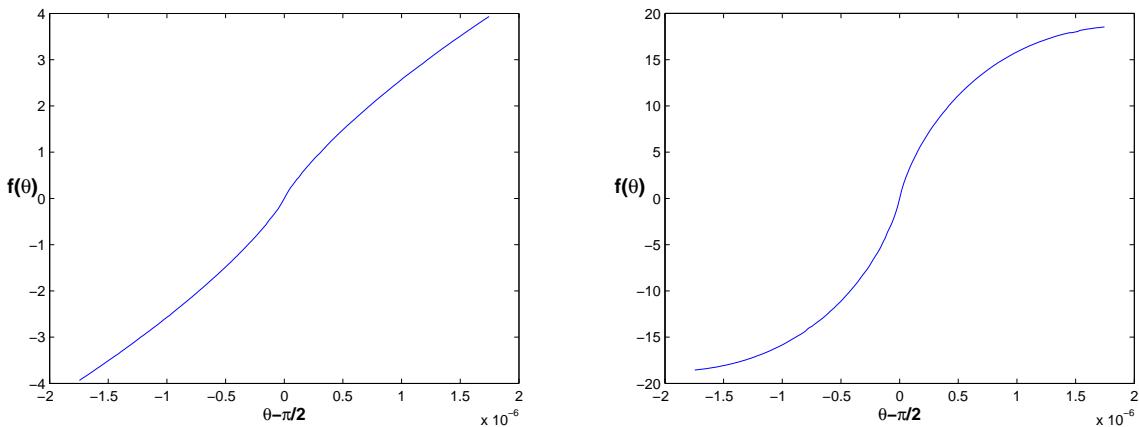


Рис. 31: Графики силы.

Нетрудно заметить, что вследствие возрастания $f(\theta)$ имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.2

Движение из состояния покоя возможно, если $\theta(0+) \in (\theta_f; \theta_)$, где $\theta_* = \pi - \operatorname{arctg} 1/\delta$*

В силу определений (7)-(10)

$$v = r \left(\frac{1}{\delta} \cos \theta + \sin \theta \right)$$

Рассмотрим момент времени сразу после старта $t = \tau$. Так как наложено условие $v > 0$, для разгона шара необходимо условие $f > 0$, а значит режимный угол θ должен удовлетворять соотношениям $\theta > \theta_f$ и $\theta < \theta_*$. Угол θ_* будем называть углом полной пробуксовки, в этом случае $v = 0$ и центр шара неподвижен, а угловая скорость равна скорости скольжения с обратным знаком. Можно показать (см. Приложение 1), что $f(\theta_*) > 0$ для любых значениях параметров плоскости (т.е. $\theta_* > \theta_f$). Таким образом, старт робота возможен, только с режимов $\theta \in (\theta_f; \theta_*)$, так как на этом интервале и скорость, и сила положительны. Кроме того, стоит заметить, что равноускоренное движение системы эквивалентно условию $\theta = \text{const}$, т.е. постоянству отношения угловой скорости к скорости скольжения шара.

Теперь перейдем к анализу моментов трения, как функций угла θ .

Утверждение 3.3

Функция $\mu^0(\theta_0) \in C(\pi/2; \pi)$ и возрастает на этом промежутке

Непрерывность показывается также, как и для силы f . Производная функции $\mu^0(\theta)$ равна

$$\frac{\partial \mu^0}{\partial \theta} = -\frac{3kb g}{4\pi(1-\cos\beta_0)^{3/2}\delta R} \int_0^{\beta_0} B(\beta) \frac{\partial I_{wII}}{\partial \theta} d\beta$$

$$\frac{\partial I_{wII}}{\partial \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \beta \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \cos \theta}{(l(\theta))^{3/2}} d\alpha$$

Очевидно, что при θ , лежащим на данном промежутке, эта производная отрицательна, а значит производная самой функции μ^0 положительна. Также можно отметить наличие разрыва второго рода у производной в точке $\pi/2$ и то, что выполняется соотношение:

$$\frac{\delta}{b} \frac{\partial \mu^0}{\partial \theta} \sin \theta = -\frac{\partial f}{\partial \theta} \cos \theta$$

Исходя из утверждений 3.1, 3.3, а также из явного вида производных, следует важный факт:

Утверждение 3.4

Функция $\mu(\theta_0) \in C(0; \pi)$ и убывает на промежутке $\theta \in [0; \theta_]$*

Действительно, исходя из явного вида $\mu = \mu^0 - bf$ следует непрерывность.

Производная функции $\mu(\theta)$ имеет вид:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \theta} = b \frac{\partial(\delta \mu^0 - f)}{\partial \theta} = -b \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\delta} \cos \theta + \sin \theta \right)$$

Ниже (рис. 32) приведем графики момента в окрестности точки $\theta = \pi/2$ (параметры плоскости такие же, что задавались для силы).

Далее, в Приложении показано, что $\mu(\pi) = -\mu(0) < 0$, а значит существует угол $\theta_\mu \in (0; \pi/2)$, для которого $\mu = 0$. Величину $\mu(\theta_f)$ можно в некотором смысле отождествить с моментом трения покоя, который нужно преодолеть для того, чтобы начать движение. Величина этого момента в зависимости от параметров контакта показана на рис. 33.

Кривые, ограничивающие области параметров, для которых движение возможно в случае двух моделей маховиков (движение допустимо, если параметры δ, ε лежат внутри кривой) приведены на рис. 34

Так как сила и момент есть лишь функции θ , то поиск программных движений с кусочно-постоянным ускорением \dot{v} будет давать решения, в которых

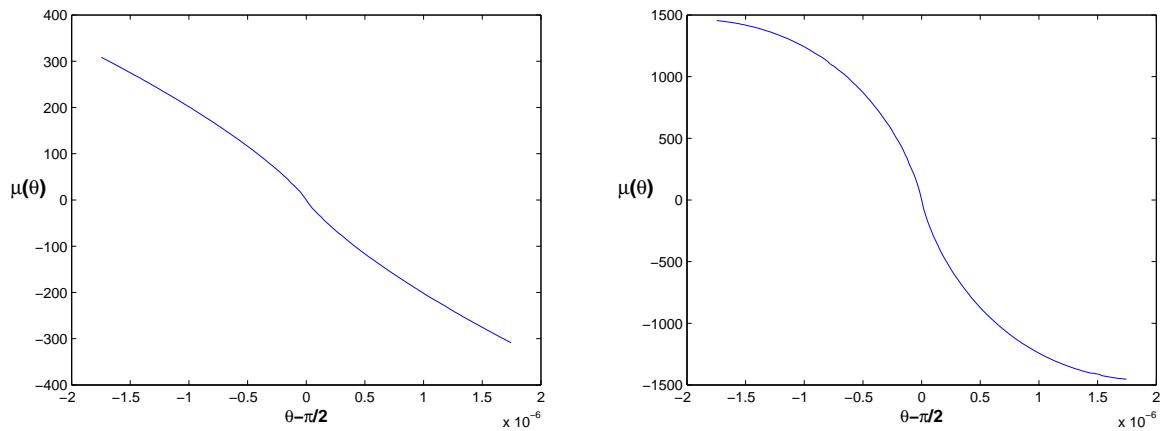


Рис. 32: Графики моментов.

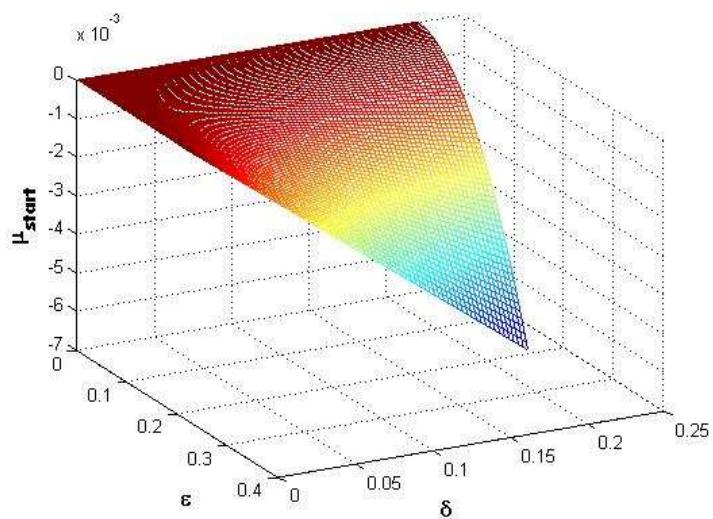


Рис. 33: Момент трения покоя при начале движения.

θ разрывно, а значит терпит разрыв либо угловая скорость, либо скорость скольжения. Таким образом, треугольный профиль скорости, аналогичный тому, что был рассмотрен для поворота на месте не подходит с точки зрения непрерывности решения по скоростям. Значит, желаемый профиль скорости центра шара, т.е. функцию $v(t)$ нужно задавать в классе C^1 .

Меняя профиль угловой скорости, можно добиваться движения по отрезкам различной длины. Если же ресурса маховиков будет не хватать, то движение по отрезку можно составить как комбинацию движений по нескольким отрезкам меньшей длины.

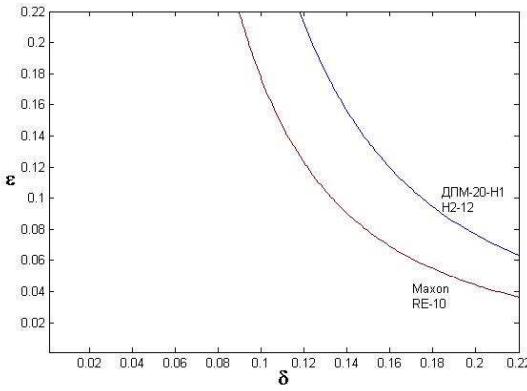


Рис. 34: Область возможности движения.

3.3.2 Примеры построения управлений для различных конфигураций

Теперь поставим задачу, чтобы робот прошел расстояние Δx и остановился в конце этого отрезка. Будем искать профиль скорости $v(t)$ согласно следующим условиям:

- $v(0) = 0$
- $\dot{v}(0) \neq 0$
- $v|_{x=\Delta x} = 0$
- $\dot{v}|_{x=\Delta x} = 0$
- $v(t) \in C^1$

В качестве примера можно взять такую функцию:

$$v(t) = A \cos \frac{\eta t}{2} \sin \eta t \quad t \in [0; \pi/\eta]$$

где A и η —некоторые коэффициенты. Тогда для перемещения верно, что $\Delta x = \frac{4A}{3\eta}$. Для ускорения верно следующее равенство:

$$\dot{v}(t) = \frac{A\eta}{4} \left(3 \cos \frac{3\eta t}{2} + \cos \frac{\eta t}{2} \right)$$

В силу утверждения 3.1 заметим, что θ возрастает и убывает на тех же промежутках, что и ускорение \dot{v} . Обозначая угол $\varphi = \frac{\eta t}{2} \in [0; \pi/2]$, имеем,

что минимальное значение f соответствует значению $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{7}}{3}$ и равно $-\frac{4\sqrt{2}}{9}A\eta$, а максимальное соответствует $\varphi = 0$ и равно $A\eta$. Так как $v(t) > 0$,

то θ все время должна следующему неравенству: $0 < \theta < \theta_*$. Следовательно, заключаем, что для параметров A и η верны соотношения (учитывая, что максимальное ускорение достигается в начальный момент времени):

$$\begin{aligned}\frac{4\sqrt{2}}{9}A\eta &\leq -f(0) \\ A\eta &\leq f(\theta_*)\end{aligned}$$

Обозначая $f_{max} = \min\{f(\theta_*), -\frac{9}{4\sqrt{2}}f(0)\}$, получаем, что, эти параметры ограничены сверху выражениями:

$$\begin{aligned}\eta_{max} &= 2\sqrt{\frac{f_{max}}{3\Delta x}} \\ A_{max} &= \frac{1}{2}\sqrt{3\Delta x f_{max}}\end{aligned}$$

Отметим, что максимальная скорость на отрезке достигается при $\varphi = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ и равна $v_{max} = \frac{4A}{3\sqrt{3}}$. Время движения по заданному отрезку согласно вышеописанному закону ограничено снизу величиной

$$t = \frac{\pi}{\eta} < \frac{\pi}{\eta_{max}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3\Delta x}{f(\theta_*)}}$$

Заметим, что если направление вектора \mathbf{e}_y совпадает с направлением какой-либо из главных осей инерции, то управляющий вектор $\boldsymbol{\beta} = C\boldsymbol{\alpha}$ можно искать в виде $\boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{e}$. В силу уравнений такое решение найдется, и будет единственным. Таким образом, в этом случае имеем:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = C^{-1}(\mu(\theta) - \dot{\omega}\lambda_e)\mathbf{e}$$

Где λ_e – собственное значение, соответствующее вектору \mathbf{e} , а матрица

$$\Omega_e = \begin{pmatrix} 0 & d_{32} & -d_{22} \\ -d_{32} & 0 & d_{12} \\ d_{22} & -d_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Если же вектор \mathbf{e} не является собственным для оператора инерции I , находим управляющие угловые скорости исходя из следующей системы:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = C^{-1}[(\mu(\theta) - \dot{\omega}I - \omega^2\Omega_e I)\mathbf{e} - \omega\Omega_e C\boldsymbol{\alpha}]$$

Теперь приведем графики основных параметров движения ($\delta = 0.03, \varepsilon = 0.06$), u, ω, x, θ . Взяты значения $\Delta x = 2\pi, \eta = \pi/7$.

Для этих параметров приведем несколько примеров графиков управляющих напряжений \mathbf{U} . Будем для каждой конструкции рассматривать два собственных и один несобственный вектор тензора инерции I .

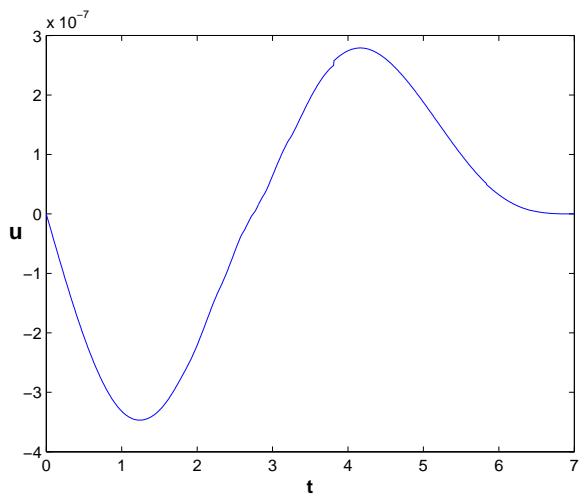


Рис. 35: Основные параметры движения u .

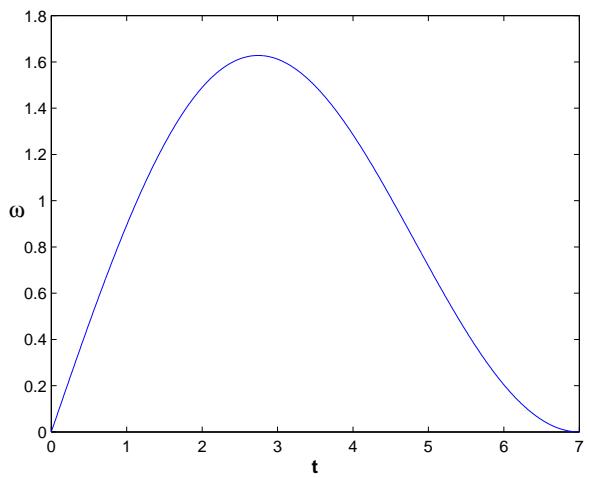


Рис. 36: Основные параметры движения ω .

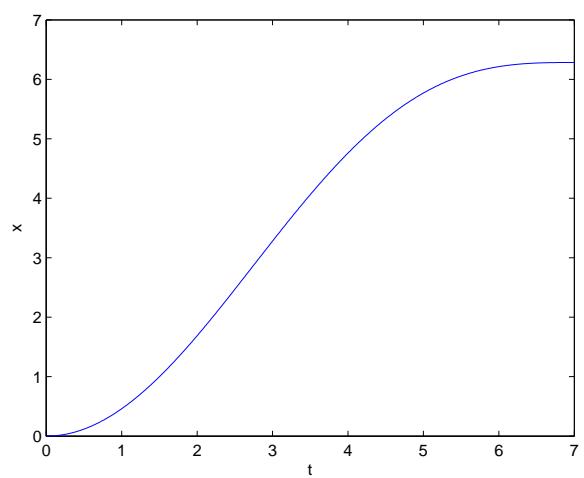


Рис. 37: Основные параметры движения x .

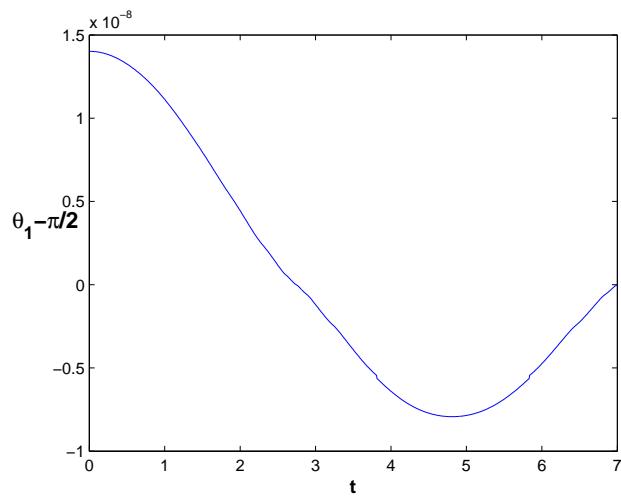


Рис. 38: Основные параметры движения θ .

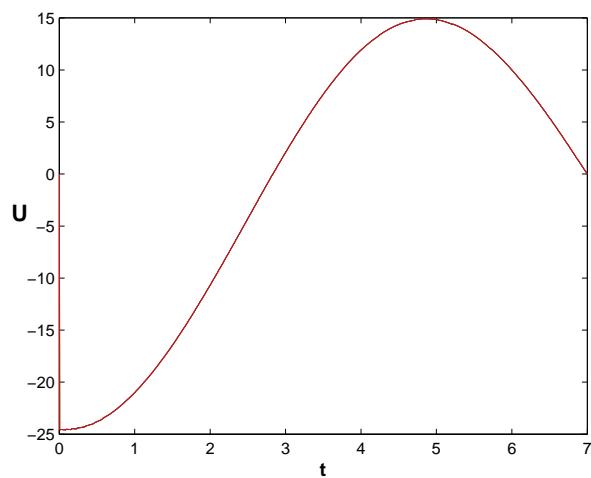


Рис. 39: Управляющее напряжение U для шара 2.1.1 и вектора $e = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$

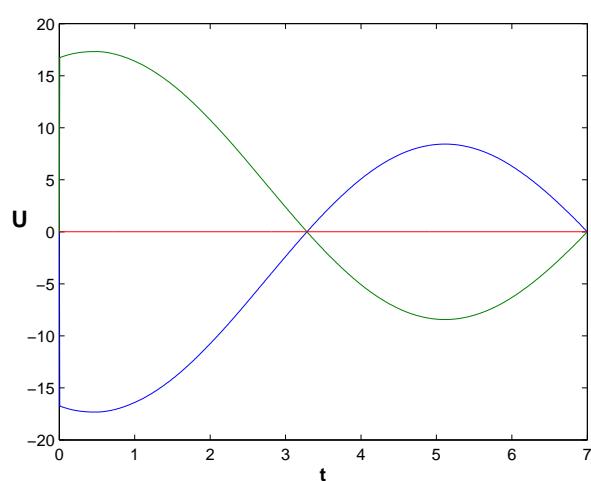


Рис. 40: Управляющее напряжение U для шара 2.1.1 и вектора $e = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$

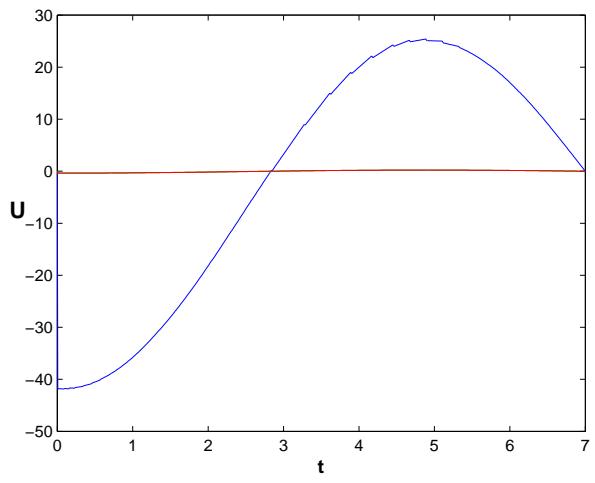


Рис. 41: Управляющее напряжение U для шара 2.1.1 и вектора $e = (1; 0; 0)$

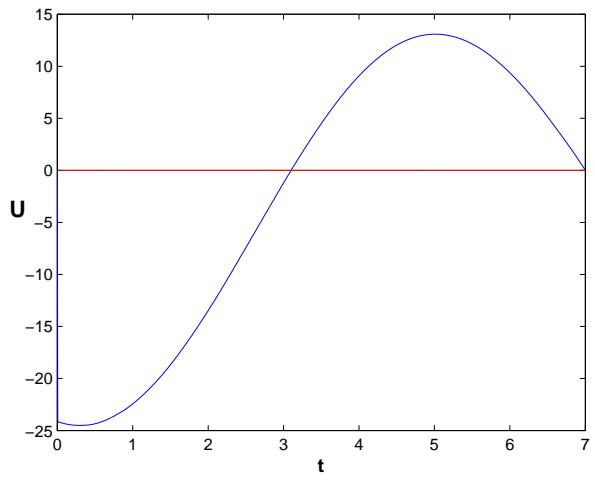


Рис. 42: Управляющее напряжение U для шара 2.1.2 и вектора $e = (1; 0; 0)$

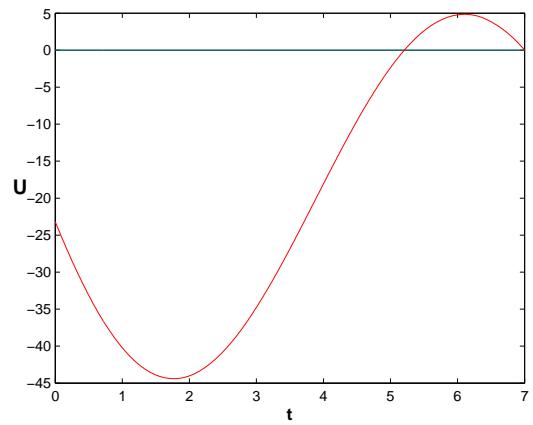


Рис. 43: Управляющее напряжение U для шара 2.1.2 и вектора $e = (0; 0; 1)$

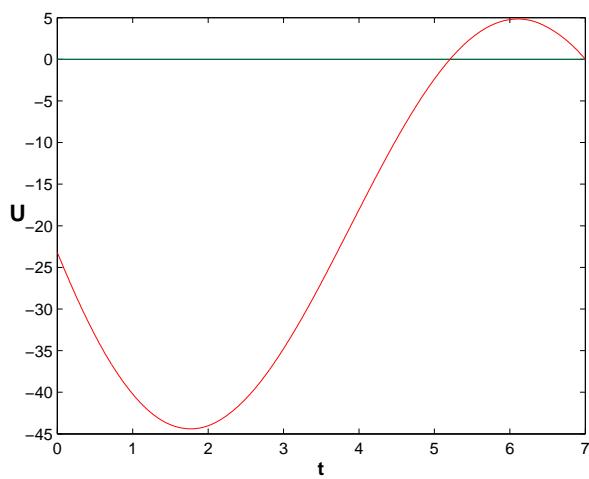


Рис. 44: Управляющее напряжение U для шара 2.1.2 и вектора $e = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$

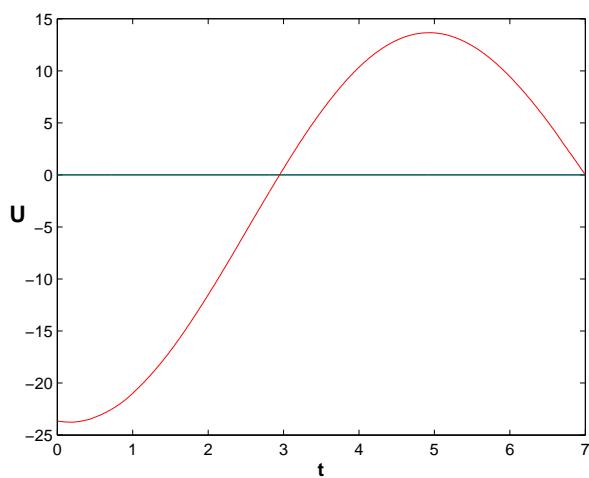


Рис. 45: Управляющее напряжение U для шара 2.1.3 и вектора $e = (1; 0; 0)$

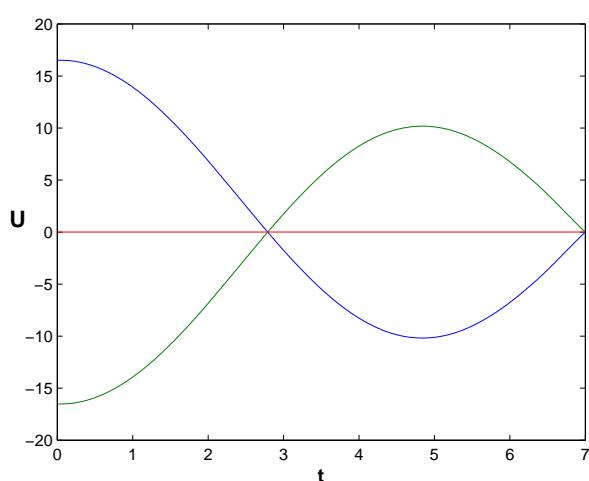


Рис. 46: Управляющее напряжение U для шара 2.1.3 и вектора $e = (0; 0; 1)$

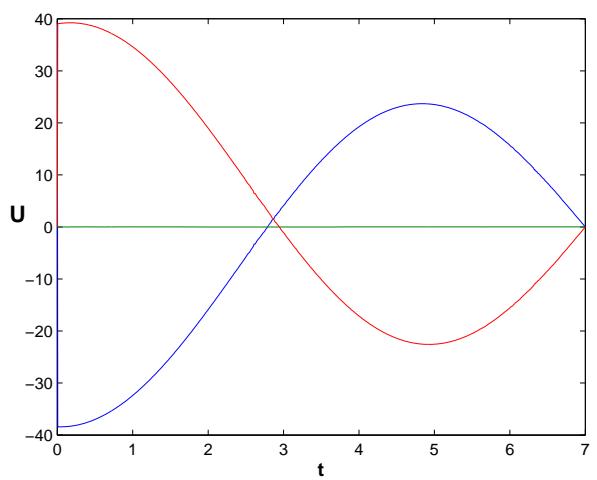


Рис. 47: Управляющее напряжение U для шара 2.1.3 и вектора $e = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$

3.3.3 Некоторые аспекты свободной динамики аппарата при прямолинейном движении

Решение обратной задачи динамики позволяет для представленных аппаратов найти необходимые управлении, для которых движение будет совершаться по заданному отрезку. Для предложенных конструкций управления реализуются путем создания моментов на маховиках. Вместе с тем, представляет интерес задача о движении шара с "выключенными" приводами, т.е. свободная динамика системы. В частности, такое движение помогает частично решить проблему "броса" моментов на маховиках, что важно, во-первых, для плавного движения (без полных остановок и переходов в новый режим), а, во-вторых, для поддержания резерва движущего момента. Задача, таким образом, переходит в классическую задачу механики о движении шара Чаплыгина по горизонтальной плоскости. Такая задача для обычного биллиардного шара была в достаточно полной мере исследована в [36]. Здесь будут приведены некоторые факты, имеющие отношение к динамике шара Чаплыгина на плоскости с двухпараметрическим трением в случае прямолинейного движения. Без ограничения общности положим, что движение происходит вдоль оси Sx . В таком случае, на всем движении совпадают вектора e_x и e_I , а также e_y и e_{II} . Для векторов v и ω выполнены условия $v = ve_I$ и $\omega = \omega e_{II}$ соответственно. Наконец, как и в предыдущих подпунктах, режимный угол θ_1 обозначим за θ . Отметим, что полученные ниже свойства для идеального шара либо доказаны в [36], либо следуют оттуда, однако в данной работе, помимо рассмотрения шара Чалыгина вместо однородного шара, предлагается несколько иной подход. В частности, в [36] предполагалось разложение в ряд Тейлора по параметру $\varepsilon\delta$, предполагаемому малым, а здесь мы оставим исходные выражения для сил и моментов. Наконец, отметим, что все результаты получены только при $\theta \in [0; \pi]$. При желании с учетом π -антипериодичности функций f и μ по θ , их можно обобщить и на оставшиеся значения.

В первую очередь необходимо отметить, что для динамики шара Чаплыгина при выключенных маховиках справедливо следующее утверждение:

Утверждение 3.5

Свободное качение шара Чаплыгина вдоль прямой Sx возможно только в том случае, если оно будет происходить вдоль собственного вектора оператора инерции I .

Это следует из того, что как показано выше, $\mu \equiv \mu_y e_y$, вектор угловой скорости также направлен вдоль этой оси, вектора $k = I\omega$ и \dot{k} сонаправлены. Но $\dot{k} + [\omega; k] = \mu = \lambda\omega$. Последнее говорит о компланарности векторов k , ω и их векторного произведения, что возможно только при коллинеарных векторах кинетического момента и угловой скорости, откуда и следует, что угловая скорость направлена вдоль одной из главных осей инерции.

Как уже говорилось выше, в случае постоянного θ и сила и момент будут постоянными функциями времени, и, следовательно, в этом случае реализуется режим торможения с постоянным ускорением. Заметим, что для свободной динамики шара (на выключенных маховиках) шар Чаплыгина ведет себя также, как динамически симметричный шар, а именно верно следующее утверждение:

Утверждение 3.6

Свободное качение шара Чаплыгина без скольжения невозможно

Действительно, система уравнений для свободной динамики шара Чаплыгина, с учетом того, что $\theta \equiv \pi/2$:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= f \\ \frac{d}{dt}(\omega I e) &= \mu e\end{aligned}$$

e —неподвижный вектор, такой, что $\omega = \omega e$. Как доказано выше (утверждение 3.5) этот вектор—собственный для тензора инерции I , а значит, дифференцируя левую часть второго уравнения, получаем:

$$(\dot{\omega}I - \mu E)e = (fI - \mu E)e = 0$$

Считая, что тензор инерции I записан в главных осях, имеем условия движений, соответствующих вращению вокруг k -й оси инерции:

$$f(\pi/2)i_k = \mu(\pi/2)$$

А значит,

$$i_k = \frac{\mu(\pi/2)}{f(\pi/2)} \iff i_k = b\left(\frac{2}{\delta} - 1\right) \iff \frac{i_k}{b} = \frac{2}{\delta} - 1 \geq 1$$

Последнее невозможно, так как для размерных моментов инерции относительно центральной оси верно, что $I_k < \hat{M}R^2$. Для поддержания же такого движения с помощью внутренних маховиков, нужно создавать управляющий кинетический момент, пропорциональный времени t , и, с учетом ограниченности ресурсов маховиков, такое решение допустимо только конечное время.

Для свободной динамики верно и следующее утверждение:

Утверждение 3.7

Свободное скольжение шара без качения невозможно

Действительно, при $\theta \equiv \pi$ имеем, что $\mu \equiv 0$, что неверно. (см.Приложение)

Следствие

Скольжение и качение имеют место одновременно почти всюду, причем их окончание происходит одновременно.

Кроме того, верно утверждение:

Утверждение 3.8

Для свободной динамики шара (т.е на выключенных маховиках) система допускает инвариантное соотношение вида

$$r = r_0 e^{\int \Lambda(\theta) d\theta}$$

Действительно, если угловая скорость направлена по одной из главной осей инерции (из утверждения 3.5 это является необходимым условия рассматриваемого движения по прямой), то систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \xi(\theta) \cos \theta + \eta(\theta) \sin \theta \\ r\dot{\theta} &= -\xi(\theta) \sin \theta + \eta(\theta) \cos \theta \\ \xi(\theta) &= \delta(f - \frac{\mu}{i}) \\ \eta(\theta) &= \frac{\mu}{i}\end{aligned}$$

где i —главный момент инерции, соответствующий оси \mathbf{e}_y . Разделив одно уравнение на другое имеем:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{r} &= \Lambda(\theta) d\theta \\ \Lambda(\theta) &= \frac{\xi(\theta) \cos \theta + \eta(\theta) \sin \theta}{-\xi(\theta) \sin \theta + \eta(\theta) \cos \theta}\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. Стоит также отметить, что в [36] было показано наличие аналогичного соотношения в случае, если раскладывать в ряд по параметру $\varkappa = \varepsilon\delta$ выражения для сил и моментов. Вышесказанное утверждение показывает, что наличие этого соотношения сохраняется и для точных выражений f и μ . Можно отметить, что нулю в знаменателе функции $\Lambda(\theta)$ соответствует решение $\theta \equiv \hat{\theta} \equiv \text{const}$ (что представляет собой равнозамедленное движение шара). На плоскости (r, θ) этому решению соответствует вертикальная линия. Кроме того, вычисление показывает, что на всех движениях при $r \mapsto 0, \theta \mapsto \hat{\theta}$, что означает, в свою очередь не только одновременное обращение угловой скорости и скорости скольжения в нуль, но и то, что в конце движения для любых стартовых условий их отношение постоянно и равно $\tan \hat{\theta}$. Вместе с тем, такое решение не единственное, и можно показать (см. Приложение 1) существование по крайней мере двух таких режимов $\hat{\theta}_{st} \in (\theta_\mu; \pi/2)$ и $\hat{\theta}_{unst} \in (\theta_*; \pi)$. Численное моделирование показывает, что таких режимов ровно два, причём если первый является предельным для почти всех начальных условий, то второй возможен лишь в виде решения $\theta = \text{const}$, а траектории, начинающиеся в сколь угодной близости от него, сведутся к первому режиму. Именно с этим связывается выбор индексов *st* и *unst* в определении этих режимов. В заключении приведем графики $r(\theta)$ вблизи точек $\hat{\theta}_{st}$ и $\hat{\theta}_{unst}$.

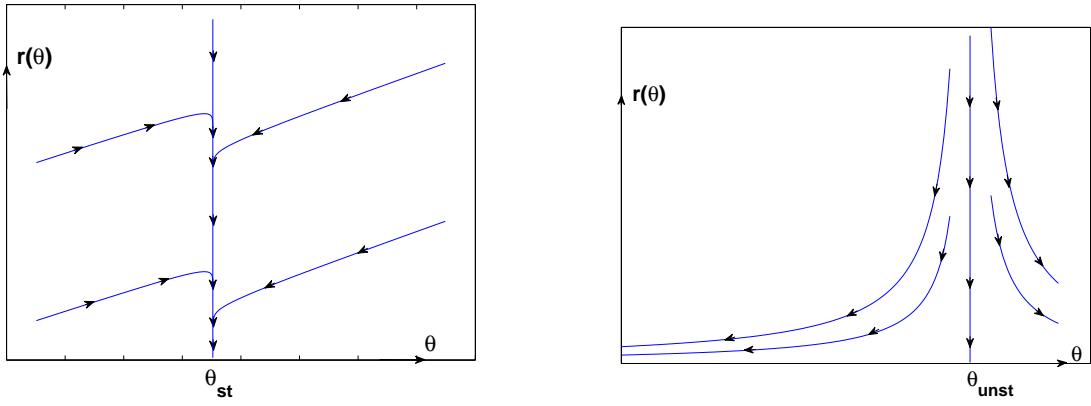


Рис. 48: Зависимость $r(\theta)$.

3.4 Обход препятствий. Криволинейное движение

3.4.1 Основные замечания

Базовые движения робота—поворот на месте на заданный угол, а также прохождение отрезка заданной длины позволяют решить задачу и о прохождении ломаной. Как уже говорилось выше, если траекторией является спрямляемая кривая, то аппроксимируя её ломаными, и комбинируя алфавитные движения, возможно прохождение такой траектории с некоторой точностью. Причём, так как теоретически ограничения снизу на длину отрезка нет, можно сказать, что эта точность будет сколь угодно большой. Вместе с тем, с практической точки зрения, движение “рывками” не всегда является хорошим способом прохождения вдоль заданной траектории, а в случае, если закон движения включает поворот на малые углы или движения по малым отрезкам, то он и вовсе представляется нереализуемым на практике. Поэтому для более эффективного маневрирования необходимо решить задачу о прохождении аппаратом криволинейной траектории.

Пусть кривая γ , по которой движется центр масс робота O , параметризована своим натуральным параметром s , т.е. $x = x(s), y = y(s)$. Свяжем с кривой естественный трехгранник Френе e_τ, e_n, e_β . Положение вспомогательного базиса относительно естественного трехгранника характеризуется углом φ между векторами e_I и e_τ . Для скорости центра шара будет выполнено векторное соотношение:

$$\dot{s}e_\tau = (u + \Omega_{II})e_I - \Omega_I e_{II}$$

Имеет место следующее утверждение:

Утверждение 3.9

Для движения по криволинейной траектории верно, что $\Omega_I \neq 0$ на любом интервале времени

Действительно, пусть на интервале времени T верно противное, и $\Omega_I \equiv 0$. Но

тогда, как сказано выше, $f_{II} \equiv 0$. Кроме того, из соотношения на скорость легко заключить, что вектора \mathbf{e}_I и \mathbf{e}_τ совпадают на этом промежутке. Проецируя на главную нормаль уравнение, полученное из теоремы об изменении импульса, получаем:

$$k(s)\dot{s}^2 = 0$$

Откуда следует что траектория – прямая линия. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Таким образом, для вычисления сил и моментов необходимо учесть еще тот факт, что

$$n = \frac{g}{R(1 + f_{III}(\theta_1, \theta_2, \theta_3))}$$

В общем случае получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= f_I \cos \varphi - f_{II} \sin \varphi \\ k(s)\dot{s}^2 &= f_I \sin \varphi + f_{II} \cos \varphi \\ \frac{d}{dt}(I\hat{\boldsymbol{\omega}} + C\boldsymbol{\alpha}) &= \hat{D}\boldsymbol{\mu}\end{aligned}$$

Первые два уравнения записаны в проекции на оси Френе, а уравнение, полученное из теоремы об изменении кинетического момента, по-прежнему записано в системе координат, жестко связанной с шаром, а матрица \hat{D} матрица перехода от вспомогательной СК к системе координат, связанной с шаром. Кроме того, в проекции на оси естественного трехгранника выполняются два следующих кинематических соотношения:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= (u + \Omega_{II}) \cos \varphi - \Omega_I \sin \varphi \\ 0 &= (u + \Omega_{II}) \sin \varphi + \Omega_I \cos \varphi\end{aligned}$$

Переходя к переменным r, θ_k , последние два условия переписываются в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi &= -\frac{\delta \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\delta \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1} \\ r &= \frac{\dot{s}}{(\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1) \cos \varphi - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \varphi}\end{aligned}$$

Теперь, задавая кривую $\gamma(s)$, закон движения $s(t)$, а также желаемое верчение $\omega_z(t)$ можно найти оставшиеся компоненты вектора угловой скорости, после чего управления. Вообще говоря, произвольным образом задавать закон движения нельзя, так как верно следующее:

Утверждение 3.10

Функции $k(s)$ и $s(t)$ должны в каждый момент времени удовлетворять неравенству

$$\ddot{s}^2 + k^2(s)\dot{s}^4 \leq F^2$$

$$F = \max_{\theta_{1,2,3}} f_I(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^2 + \max_{\theta_{1,2,3}} f_{II}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^2$$

Исходя из явного вида интегралов (5), (6) получается ограниченность функций f_i . Наконец, если возвести в квадрат а затем сложить уравнения, полученные из теоремы об изменении импульса и воспользоваться доказанной ограниченностью, то показывается истинность утверждения.

Для алфавитных движений по криволинейным отрезкам естественным образом можно рассмотреть только те траектории, для которых $\dot{s}(0) = \dot{s}(T) = 0, sgn(\dot{s}) = const \quad \forall t \in (0; T)$, где T – время движения. Предполагая $\dot{s} \geq 0$, имеем:

$$r = \frac{\dot{s}\delta}{\sqrt{\cos^2 \theta_1 + \delta^2 \sin^2 \theta_1 + 2\delta \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2}}$$

θ_2 выражается через φ, θ_1 следующим образом (с точностью до выбора ветви арккосинуса):

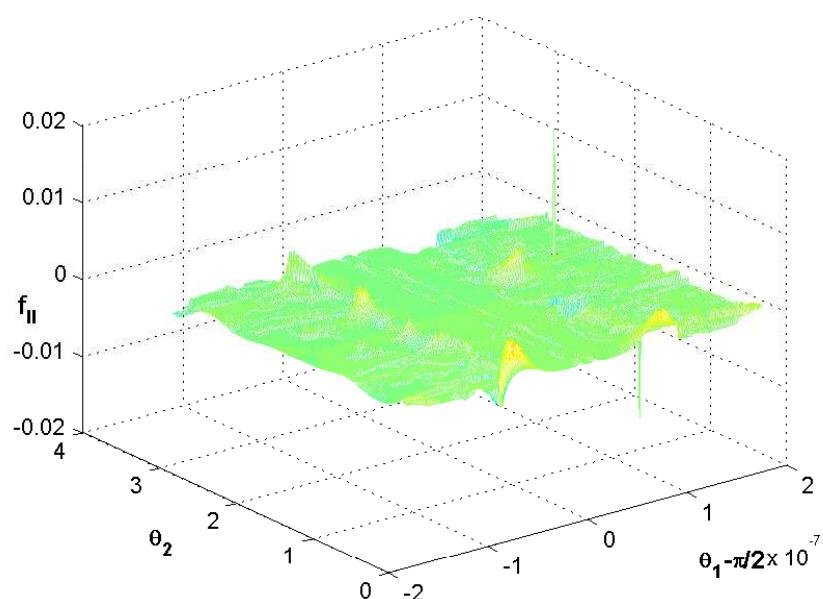
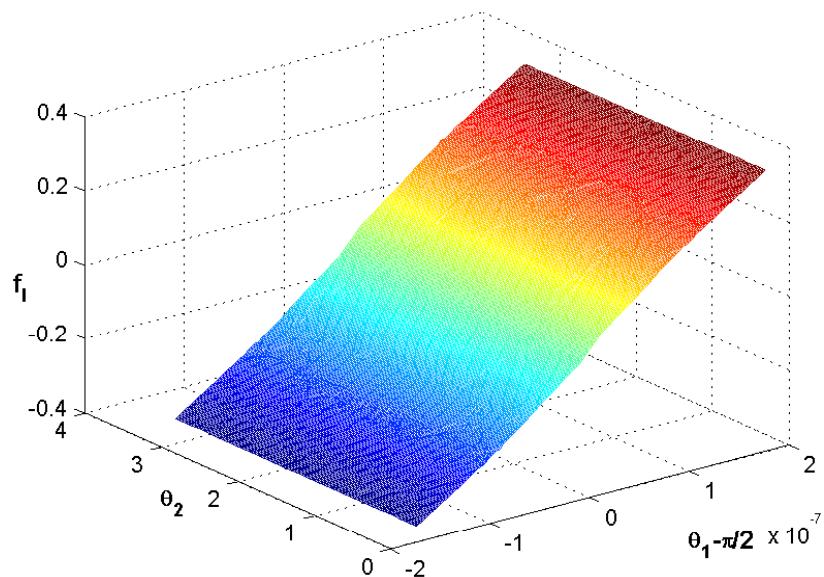
$$\theta_2 = -\varphi + \arccos\left(\frac{\sin \varphi \operatorname{ctg} \theta_1}{\delta}\right)$$

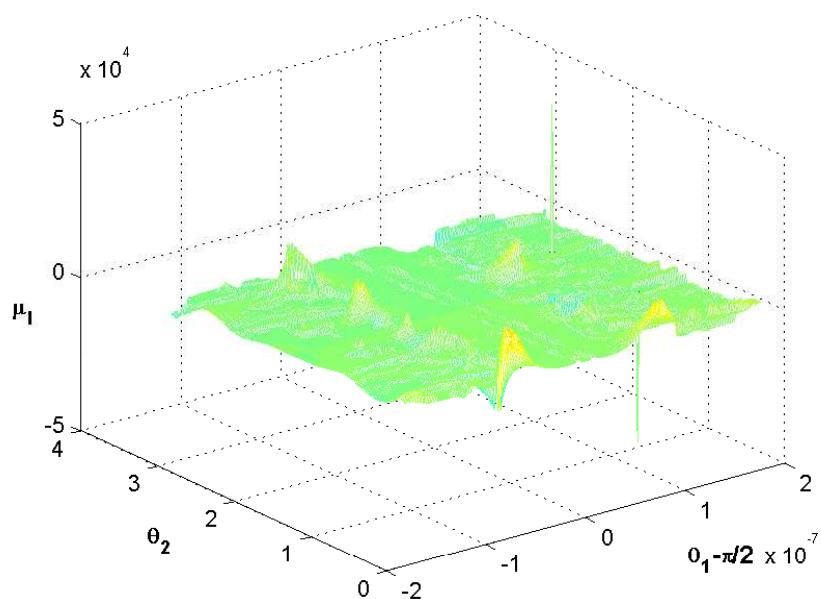
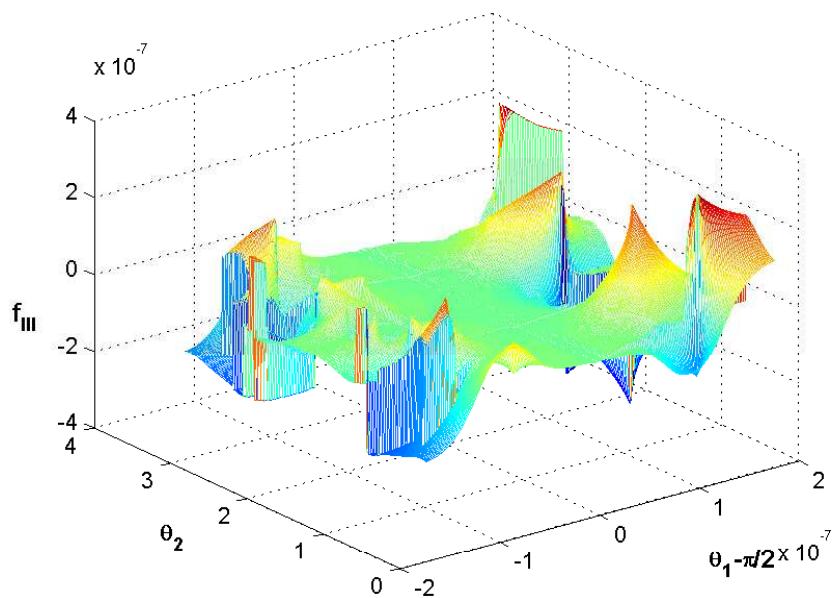
Далее, из теоремы об изменении импульса, а также исходя из выбора желаемого профиля верчения находятся сферические переменные $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Наконец, управляющий вектор $\boldsymbol{\alpha}$ можно найти из векторного дифференциального уравнения, полученного из теоремы об изменении кинетического момента.

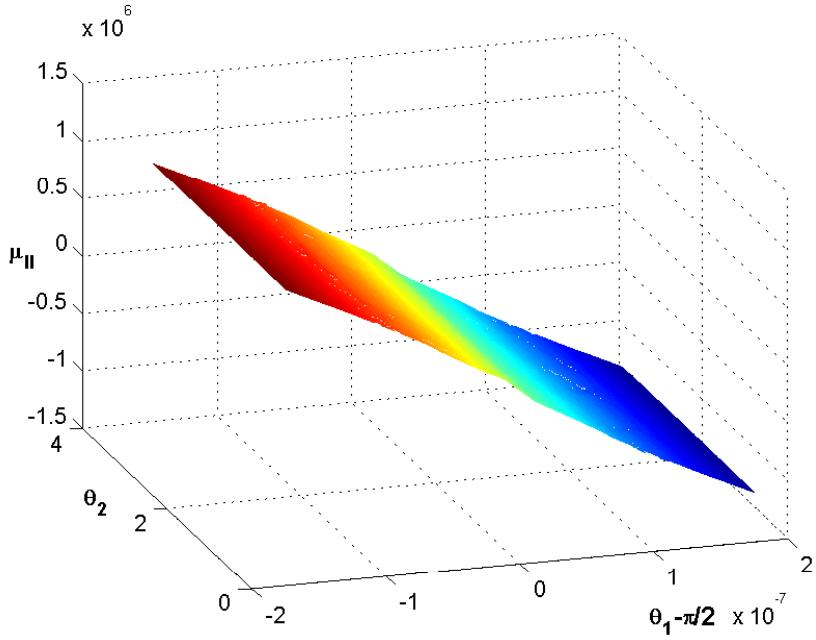
3.4.2 Анализ сил и моментов для движения без верчения

Как было доказано выше, для криволинейного движения необходимо учитывать уже обе горизонтальные компоненты вектора угловой скорости. Помимо этого, для тех движений, где $\omega_I \neq 0$ сила реакции опоры не равна по модулю силе тяжести (так как компонента f_{III} отлична от нуля) и вычисляется как $n = \frac{g}{R(1 + f_{III})}$.

Сузим класс изучаемых программных движений на движения без верчения, т.е. $\theta_3 \equiv 0$. Это не ограничивает выбор функций $x(s), y(s)$. Проведем теперь численный анализ функций \boldsymbol{f} и $\boldsymbol{\mu}$ в предположении что $\theta_3 \equiv 0$. Будем считать скольжение достаточно малым в сравнении с угловой скоростью, что соответствует нахождению вблизи ($\theta_1 = \pi/2$). Графики поверхностей $f_I, f_{II}, f_z, \mu_I^0, \mu_{II}^0$ в таком случае примут вид:







В частности, из графиков видно, что, во-первых, f_{III} мало сравнительно с горизонтальными компонентами, поэтому далее пренебрегаем зависимостью остальных компонент от f_{III} . В данном предположении верно, что $f_I(\theta_1)$ возрастает по θ_1 на любом значении θ_2 так как $sgn\left(\frac{\partial I_{u_1}}{\partial \theta_1}\right) = -sgn(\sin \theta_1) \forall \theta_2$.

Действительно,

$$\frac{\partial I_{u_1}}{\partial \theta_1} = \int_0^{2\pi} \frac{X(\theta_2)^2 - A}{\|u\|^3} d\alpha$$

$$X = \sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta_2 + (1 - \cos \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha) \sin \theta_2$$

$$A = (1 - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha)(1 - \cos \beta)^2$$

При этом $X^2 - A \leq 0$, что верно для любого θ_2 .

Наконец, исходя из явного вида графиков, можно в дальнейшем положить, что $\mathbf{f} = f_I \mathbf{e}_I$, $\boldsymbol{\mu} = \mu_{II} \mathbf{e}_{II}$. Действительно, отношение между f_I/f_{II} составляет не менее 10^2 (а вообще говоря, почти всюду $10^4 - 10^5$), для моментов аналогично). Такое предположение позволяет существенно облегчить дальнейшее разрешение обратной задачи динамики, так как анализ и тем более обращение оставшихся компонент сил и моментов—крайне трудоемкая задача. При этом, можно заметить, сохраняется достаточно высокая точность результатов. В таком случае, теорема об изменении импульса дает следующие два уравнения:

$$\ddot{s} = f \cos \varphi$$

$$k(s)\dot{s}^2 = f \sin \varphi$$

Заметим, что в абсолютной системе координат компоненты момента μ выражаются формулами (угол ψ —угол между векторами e_x и e_τ):

$$\begin{aligned}\mu_x &= -\mu \sin(\varphi + \psi) \\ \mu_y &= \mu \cos(\varphi + \psi)\end{aligned}$$

3.4.3 Примеры траекторий

Предполагая, что задана траектория с желаемым законом движения по ней, т.е. $k(s)$ и $s(t)$, на первом этапе необходимо разрешить систему относительно $\theta_1, \theta_2, \varphi$:

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= f_I \cos \varphi \\ k(s)\dot{s}^2 &= f_I \sin \varphi \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{\delta \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\delta \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1}\end{aligned}$$

Исходя из явного вида уравнений верно следующее очевидное утверждение:

Утверждение 3.11

Пусть для некоторого отрезка времени траектория движения—гладкая кривая, такая, что $k(s) \neq 0$ в каждой точке, причем движение начинается из состояния покоя. Тогда на всем движении $f(t) \geq 0$, причем равенство нулю достигаться может только на концах этого отрезка.

Действительно, в силу рассматриваемых траекторий, знак \dot{s} положителен и не меняется на всем отрезке. В силу начальных условий, нетрудно заметить, что $\varphi(0) = 0$ (случай $\varphi = \pi$ опускается, для него верно аналогичное утверждение с точностью до знака f). Но тогда $f(0) > 0$, в силу положительности \ddot{s} в некоторой окрестности начального момента времени. Далее, если в какой-либо точке f обратится в нуль, это повлечет за собой либо равенство нулю $k(s)$, либо \dot{s} , что не подходит под сделанные выше предположения.

Теперь рассмотрим частный случай, а именно движение по дуге окружности радиуса ρ . Для угла ψ , отвечающего за угол между касательным вектором и осью Sx верно, что $\psi = \rho s$ (здесь предполагается, что все начальные условия—нулевые). В качестве закона движения выберем для обеспечения достаточной гладкости такую же функцию, как в 3.2, а именно

$$\dot{s}(t) = A \cos \frac{\eta t}{2} \sin \eta t \quad t \in [0; \pi/\eta]$$

Для кривизны $k(s)$ верно равенство $k(s) = 1/\rho$.

Приведем результаты численного решения системы уравнений для случая

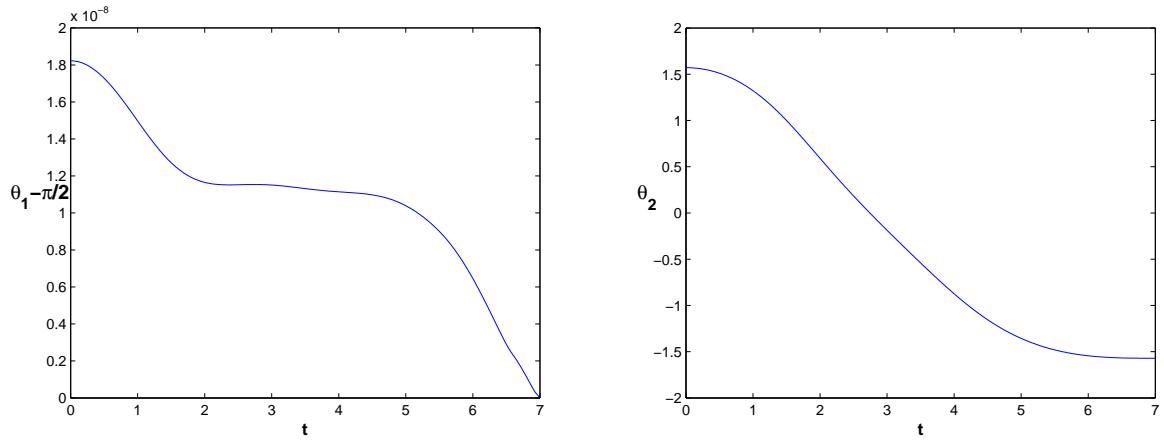


Рис. 49: Переменные θ_1, θ_2

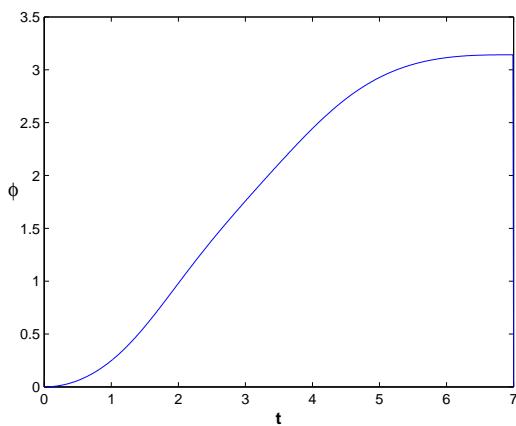


Рис. 50: Переменная φ

$\Delta\psi - \pi/2, \rho = 4, \eta = \pi/7$ (первое значение отвечает за величину пройденной дуги):

Далее, в отличие от движения по прямой, где все уравнения, полученные из теоремы об изменении кинетического момента, сводились к одному в проекции на неподвижную ось, для нахождения управлений в этом случае необходимо знать зависимость $D(t)$. Как и в [2], в качестве локальных координат на многообразии $SO(3)$ будут взяты углы Эйлера Θ, Ψ, Φ . (Большие буквы использованы во избежание путаницы с уже используемыми углами).

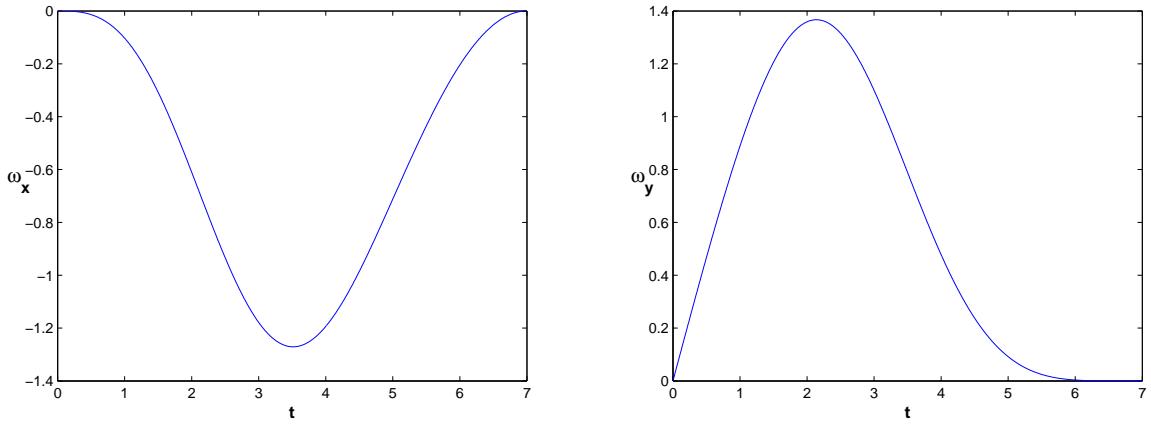


Рис. 51: Переменные ω_x, ω_y

Для первого шара эволюция углов Эйлера для описанного движения приведена ниже на левом графике.

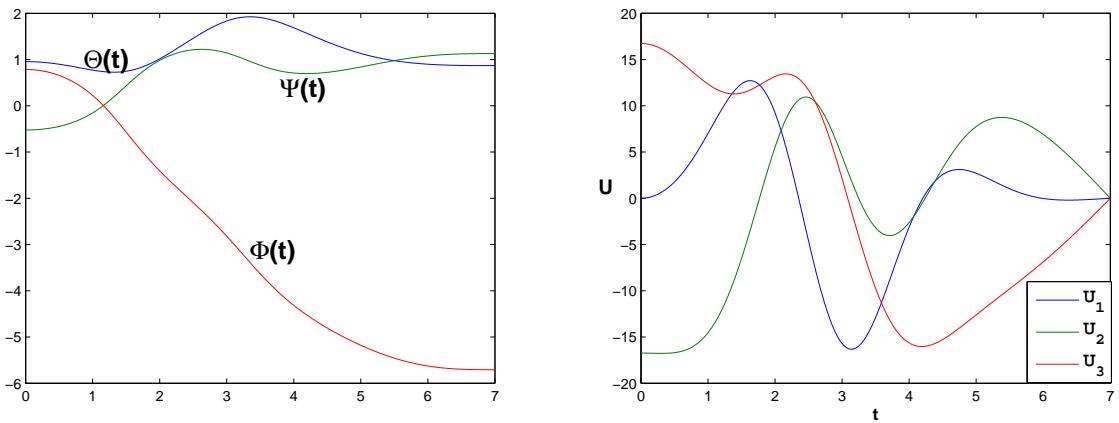


Рис. 52: Эволюция углов Эйлера и управляющие напряжения.

Начальные условия таковы: $\Theta(0) = \arctg \sqrt{2}$, $\Psi(0) = -\pi/6$, $\Phi(0) = \pi/4$. Они взяты в качестве примера и соответствуют в начальный момент времени конфигурации, когда плоскость, проходящая через центры маховиков, горизонтальна. Такая конфигурация соответствует совпадению в начальный момент времени неподвижного базиса с подвижным с точностью до перестановки векторов (случай, когда совпадение полное, неудобен по причине того, что $\Theta = 0$, и необходимо брать иные локальные координаты). Также, аналогично 3.2, приведем в этом случае графики управляющих размерных напряжений, они приведены на правом графике.

Для шаров 2.1.2 и 2.1.3 начальные условия взяты иными: $\Theta(0) = \Psi(0) = \pi/2$, $\Phi(0) = 0$.

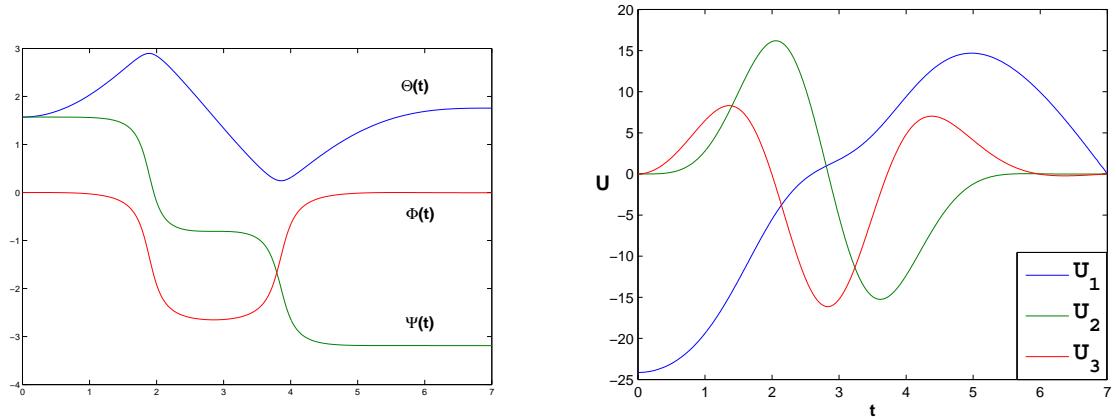


Рис. 53: Эволюция углов Эйлера и управляющие напряжения для второго шара

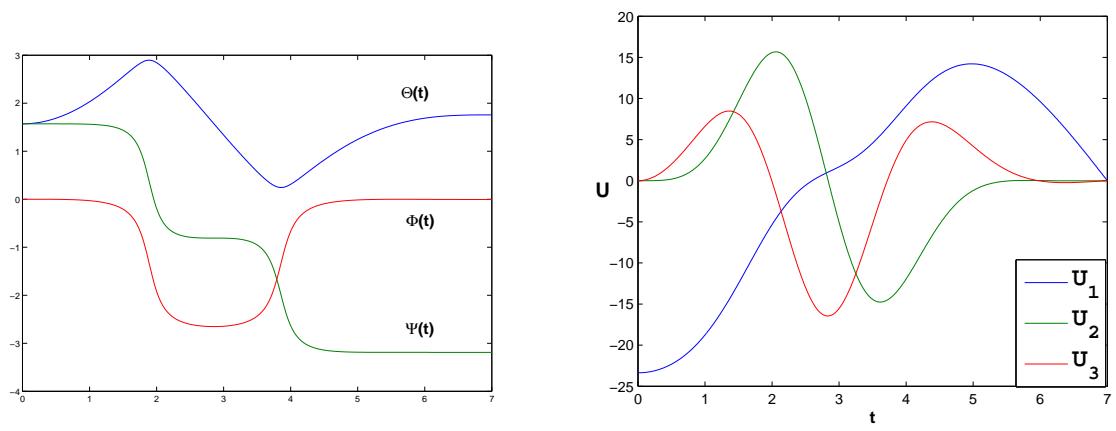


Рис. 54: Эволюция углов Эйлера и управляющие напряжения для третьего шара

4 Шар со смещенным центром масс

В реальных системах добиться условия совпадения центра масс с геометрическим центром шара зачастую представляется затруднительным. Если для модели 2.1.1 это вполне достижимо, то для моделей 2.1.3 и особенно 2.1.2 добиться выполнения подобного условия существенно сложнее. Таким образом, для понимания движения реального аппарата и правильного построения управления им, необходимо изменить модель, предложенную в главе 2. (В дальнейшем, шар, у которого центр масс совпадает с геометрическим центром будем называть *сбалансированным*, а у которого нет — *несбалансированным*).

Итак, пусть центр масс всей системы находится в точке O' . Вектор OO'/R обозначим за ζ . Подвижные системы координат будем выбирать с центром в точке O' , направления осей оставим такими же, как и в предыдущих главах. Одним из существенных отличий от модели с несмещенным центром масс будет, в случае такого выбора систем координат то, что скорость центра масс шара может иметь ненулевые компоненты по всем трем координатным осям. Вместе с тем, остается соотношение, обеспечивающее то, что скорость геометрического центра шара O строго горизонтальна, иными словами:

$$(\mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}; \zeta]; \mathbf{e}_z) = 0$$

Далее, так же как и для сбалансированного шара, $\hat{\mathbf{k}} = I\hat{\boldsymbol{\omega}} + C\boldsymbol{\alpha}$, причем для численных расчетов вид операторов I и C будет точно такой же (с точностью до значений), что и в главе 2 для каждой из описанных конфигураций (что соответствует в каждом случае сдвигу на особый вектор ζ . Вместе с тем, уравнения остаются верными для произвольного случая). Учитывая уравнения связи и общие теоремы динамики, можно получить следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f} - \frac{g}{R} \mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{k}} &= \boldsymbol{\mu}^0 - b[\zeta + \mathbf{e}_z; \mathbf{f}] \\ (\mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}; \zeta]; \mathbf{e}_z) &= 0\end{aligned}$$

Покоординатно имеем 7 уравнений на 12 неизвестных — компоненты векторов \mathbf{f} , $\boldsymbol{\mu}^0$, $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v} . Таким образом, для замыкания модели необходимо еще 5 скалярных соотношений (уравнений связи, модели внешних сил и моментов).

4.1 Неголономная модель

Предположим, что робот движется по абсолютно шероховатой плоскости, т.е. скорость точки K контакта шара с плоскостью равна нулю. Тогда получаем следующее соотношение:

$$\mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}; \zeta + \mathbf{e}_z] = 0$$

Кроме этого, положим, что на систему не действуют никакие внешние моменты, что означает $\boldsymbol{\mu}^0 = 0$. Вообще говоря, таким образом добавлено 6 уравнений, но из условия равенства нулю скорости точки контакта следует и равенство нулю вертикальной компоненты скорости геометрического центра шара O . В результате, получаем замкнутую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{f} - \frac{g}{R} \boldsymbol{e}_z \\ \dot{\boldsymbol{k}} &= -b[\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z; \boldsymbol{f}] \\ \boldsymbol{v} &= [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z]\end{aligned}$$

Распишем подробнее теорему об изменении кинетического момента:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{k}} &= -b[\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z; \dot{\boldsymbol{v}} + \frac{g}{R} \boldsymbol{e}_z] = -b\left(\frac{d}{dt}[\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z \boldsymbol{v}] + ([\dot{\boldsymbol{\zeta}}; \boldsymbol{v}] + \frac{g}{R}[\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{e}_z])\right) = -b\left(\frac{d}{dt}[\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z; [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{e}_z]] + \right. \\ &\quad \left. + [[\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta}]; [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{e}_z]] + \frac{g}{R}[\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{e}_z]\right)\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{k} + b\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z||^2 - b(\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z)(\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z)) = -b(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\zeta}; [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{e}_z]) + \frac{g}{R}[\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{e}_z])$$

Заметим, что при $\boldsymbol{\zeta} = 0$ уравнение совпадает с симметричным аналогом. Далее, в зависимости от задачи, это уравнение можно интерпретировать либо как уравнения на угловую скорость при фиксированных управлениях (прямая задача динамики), или же наоборот, как уравнения на управление $\boldsymbol{\alpha}$ при заданном векторе $\boldsymbol{\omega}$ (обратная задача динамики). Остановимся на обратной задаче, рассмотрев некоторые базовые движения робота.

4.1.1 Случай неподвижного центра масс

Предположим, что центр масс системы неподвижен, т.е. \boldsymbol{r}' —постоянный по времени вектор. Тогда из уравнения связи имеем:

$$[\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z] = 0$$

Равенство векторного произведения нулю означает либо обращение в ноль одного из векторов-множителей, либо коллинеарность векторов. В случае $\boldsymbol{\omega} = 0$ получаем покоящийся шар со смещенным центром масс. В случае $\boldsymbol{\omega} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z$ будет наблюдаться вращение вдоль оси KO' . Наконец, случай $\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z = 0$ соответствует совпадению точки контакта с центром масс системы в каждый момент времени. Последнее является нереализуемым с конструктивной точки зрения (центр масс системы в этом случае должен находиться на сфере), поэтому такой случай рассмотрен не будет.

Остановимся на случае $\omega = 0$, т.е. шар покоится. Исходя из равенства нулю угловой скорости, уравнения связи и уравнения, полученные из теоремы об изменении импульса примут тривиальный вид $0 = 0$. Теорема об изменении кинетического момента дает следующее:

$$\dot{\boldsymbol{k}} = b[\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{e}_z; \frac{g}{R}\boldsymbol{e}_z] = \frac{g}{R}b[\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{e}_z]$$

Вектор $\boldsymbol{\zeta}$ в правой части уравнения постоянен в абсолютной СК вследствие того, что шар покоится, а значит, постоянной является и вся правая часть. Таким образом, уравнение преобразуется в следующее (матрица D также будет постоянной по времени):

$$c\boldsymbol{\alpha} = \frac{g}{R}btD[\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{e}_z] + \hat{\boldsymbol{k}}_0$$

где $\hat{\boldsymbol{k}}_0$ — некоторый постоянный вектор. Как можно заметить, имеем линейный разгон по угловым скоростям. Принимая во внимание уравнение стандартного электродвигателя (здесь, как и ранее, для удобства, напряжения полагаем размерными), получаем, что подобный режим реализуем только конечное время и достичим не для всех маховиков. Очевидно, что как только на одном маховике ограниченное напряжение достигнет максимального (по модулю) значения, то удержание центра масс в фиксированном положении перестанет быть возможным. Оценим время, которое система может проводить в состоянии покоя при равенстве нулю начальных условий. Введем параметр $A = \|\boldsymbol{\zeta}\|$ и вектор $\gamma = A^{-1}D[\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{e}_z]$ (единичный вектор векторного произведения). Пусть U_* —максимально допустимое управляющее напряжение (оно, очевидно, соответствует значению γ_* —максимальной из проекций вектора γ на оси ПСК). Тогда из условия $U_i = U_*$ (i —номер маховика, для которого значение напряжения первым выйдет на границу допустимых значений) получаем:

$$t = \frac{c}{\varkappa_2} \left(\frac{RU_*\varkappa_1}{gbA\gamma_*} - 1 \right)$$

Для размерного пускового момента $\mu_{max} = \hat{J}U_*\varkappa_1$ (принимая во внимание то, что значение γ_* принимает значения на промежутке $[1/\sqrt{3}; 1]$ и обозначая $\mathcal{A} = AR$), получаем, что для любой начальной конфигурации удержание центра масс возможно, если

$$\mu_{max} \geq (M + 3m)g\mathcal{A}$$

а если

$$\mu_{max} \leq \frac{(M + 3m)g\mathcal{A}}{\sqrt{3}}$$

то для любой начальной конфигурации удержание центра масс в неподвижном состоянии невозможно.

Последние соотношения можно интерпретировать несколько иначе, а именно, для заданного электродвигателя (т.е. пускового момента) определить максимальное отклонение центра масс от центра шара для возможности движения. Очевидно, что эта величина равна $\mathcal{A}_{max} = \frac{\mu_{max}}{(M+3m)g}$. В частности, при пусковом моменте равном 0.01 Нм, массах $M = 4$, $m = 0.6$ имеем \mathcal{A}_{max} порядка 0.17 мм.

Разберем теперь другой случай—когда векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z$ коллинеарны. Пусть $\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z = \lambda\boldsymbol{\omega}$, где $\lambda = \lambda(t)$ —некоторая функция. Понятно, что шар совершает вращение вокруг оси KO' . Остановимся, для начала, на его кинематике. Проследим за траекторией геометрического центра шара O (точно таким же будет след на плоскости точки K). Верно следующее утверждение:

Утверждение 4.1

При условии $\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z = \lambda\boldsymbol{\omega}$ точка O описывает окружность радиусом $\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2}$

Докажем это. Так как $\|\boldsymbol{\zeta}\| = const$ имеем, что $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta}]$. Скорость точки O по формуле Эйлера равна $-[\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta}]$. Учитывая коллинеарность, можно переписать это соотношение в виде $-\lambda[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{e}_z] = -\lambda\dot{\boldsymbol{\zeta}}$. Проекция векторного произведения на ось Sz равна нулю, что влечет за собой условие $\zeta_z = const$, а значит $\zeta_x^2 + \zeta_y^2 = B^2 = \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 - \zeta_z^2 = const$. Теперь разберем два оставшихся уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_x &= -\frac{\zeta_y}{\lambda} \\ \dot{\zeta}_y &= \frac{\zeta_x}{\lambda}\end{aligned}$$

Учитывая вышеописанное соотношение ($\zeta_x^2 + \zeta_y^2 = B^2$) и обозначая $\zeta_x = B \cos \theta$, $\zeta_y = B \sin \theta$, получаем, что

$$\dot{\theta} = 1/\lambda \Rightarrow \theta = \int_0^t \frac{1}{\lambda(\tau)} d\tau$$

Теперь несложно заметить, что скорость точки O есть ни что иное, как $\frac{1}{\lambda}(\zeta_y; -\zeta_x)^T$. Имеем:

$$\begin{aligned}\dot{x}_O &= -\frac{1}{\lambda}B \sin \theta \\ \dot{y}_O &= -\frac{1}{\lambda}B \cos \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

Интегрируя, получаем траекторию:

$$\begin{aligned}x_O &= x_O^0 - B \cos \theta \\y_O &= y_O^0 - B \sin \theta \\\theta &= \int_0^t \frac{1}{\lambda(\tau)} d\tau \\(x_O - x_O^0)^2 + (y_O - y_O^0)^2 &= B^2\end{aligned}$$

Последнее утверждение доказывает утверждение. Рассчитаем теперь необходимые управление для этого случая. Имеем для производной кинетического момента:

$$\dot{\boldsymbol{k}} = -b \frac{g}{R} [\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{e}_z]$$

Из этой системы дифференциальных уравнений можно найти управляющие функции. Остановимся поподробнее на случае, если $\lambda = const$, что означает равномерное вращение конца вектора $\boldsymbol{\zeta}$ по окружности радиусом B . В таком случае

$$\begin{aligned}\zeta_x &= B \cos(t/\lambda + \Theta_0) \\\zeta_y &= B \sin(t/\lambda + \Theta_0)\end{aligned}$$

После чего получаем:

$$I \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = b \frac{g}{R} BD \begin{pmatrix} -\sin \Theta \\ \cos \Theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1.2 Вращение вокруг вертикали

Рассмотрим теперь аналог поворота на месте сбалансированного шара—вращение относительно вертикальной оси симметрии шара. Такое движение использовалось в качестве одного из составляющих алфавита базовых движений (с помощью него можно добиться поворота на заданный угол, не меняя положение шара). В случае несбалансированного шара далее считаем под “траекторией шара” след его центра O (или, что тоже самое, точки контакта K). В случае вращения вокруг вертикали вышеопределенная траектория вырождается в точку.

Таким образом, $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$. В силу соотношения $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta}]$ получаем эволюцию вектора $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\begin{aligned}\zeta_x &= B \cos \Theta \\\zeta_y &= B \sin \Theta \\\zeta_z &= const \\\dot{\Theta} &= \omega\end{aligned}$$

Для уравнения, полученного из теоремы об изменении кинетического момента (в абсолютной системе координат), которое и определяет управления, можно получить следующий результат:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{k} + \omega \begin{pmatrix} -\zeta_x(1 + \zeta_z) \\ -\zeta_y(1 + \zeta_z) \\ A^2 - \zeta_z^2 \end{pmatrix}] = -\frac{bg}{R}[\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{e}_z]$$

Теперь следует отметить, что если $\zeta_z = \pm A$, что соответствует нахождению центра масс в верхнем или нижнем положении равновесия (с практической точки зрения, разумеется, важнее второе), то полученная система полностью редуцируется к аналогичной задаче для сбалансированного шара. Именно такой способ поворота на месте и предлагается взять в дальнейшем за алфавитный. В противном же случае, центр масс не придет в нижнее положение равновесия в конце движения, а значит робот не сможет в результате оказаться в состоянии покоя. Тем не менее, подобное движение может быть использовано в качестве составной части более сложного движения, реализующего какую-либо конкретную составную траекторию. Поэтому ниже разберем и случай $\zeta_z \neq \pm A$.

Обозначим

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} -\zeta_x(1 + \zeta_z) \\ -\zeta_y(1 + \zeta_z) \\ A^2 - \zeta_z^2 \end{pmatrix}$$

И

$$\boldsymbol{\varphi}_* = \frac{bg}{R} \int_0^t [\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{e}_z] d\tau$$

Заметим, что эти функции являются известными функциями времени при фиксированном профиле угловой скорости $\omega(t)$. Таким образом, можно выписать проинтегрированное уравнение на кинетический момент, обозначив $\Phi(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}_*(t) + \boldsymbol{\varphi}_0(t)$, где последнее слагаемое—вектор констант.

$$C\boldsymbol{\alpha} = -D\Phi(t) - \omega I\mathbf{e}$$

Здесь вектор \mathbf{e} , как и ранее,—вектор, \mathbf{e}_z в подвижной системе координат. Для нахождения $\boldsymbol{\alpha}$ и, далее, управляющих напряжений, необходимо еще найти явно зависимость $D(t)$. Как и в главах 1 и 2 для этого можно использовать углы Эйлера. Приведем пример управления для шара 2.1.1 взяв следующие начальные данные: $\boldsymbol{\zeta}(0) = (1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$ и $\boldsymbol{\varphi}_0 = (12; 0; -12)$, $\omega = \pi/4 = const$:

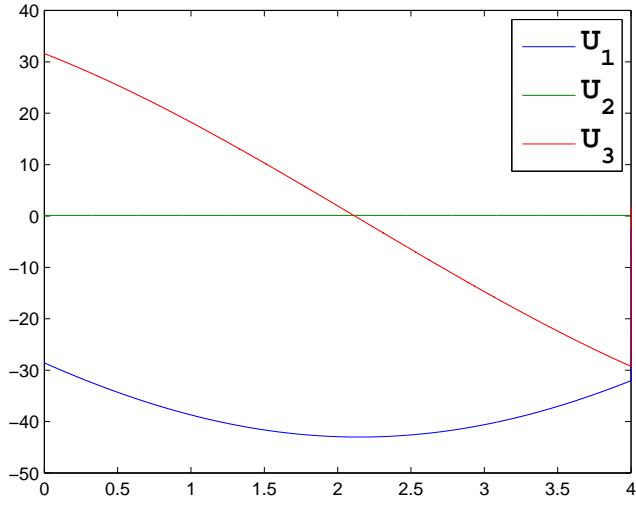


Рис. 55: Управляющее напряжение для поворота на месте несбалансированного шара

4.1.3 Движение по прямой

Теперь предположим, что траектория центра шара совпадает с частью оси Sx. В этом случае, из равенств $\mathbf{v}_O = v_{O_x} \mathbf{e}_x$ и $v_O = [\boldsymbol{\omega}; \mathbf{e}_z]$ получаем соотношение $\omega = \omega(t) \mathbf{e}_y$. Далее, согласно определению вектора $\boldsymbol{\zeta}$ и формулам Пуассона, получаем, что $\zeta_y = \text{const}$. Для построения алфавитного движения будем считать, что $\zeta_y = 0$. Если же это не так, то для начала необходимо повернуть шар на месте до достижения данного условия, в противном случае, все сказанное для предыдущего пункта перенесется и на этот случай. Иными словами, по окончании "управляемого" движения перевод центра масс в нижнее положение равновесия достигнут не будет. В частности, при таких условиях алфавитное движение—движение по отрезку не представляется возможным. В то же время, также можно использовать такое движение как часть составного. Стоит, наконец, отметить, что при движении из состояния покоя (которое соответствует положению равновесия) условие $\zeta_y = 0$ выполняется, а значит использование такого движения как алфавитного оправданно. Аналогично предыдущим пунктам, можно вывести, что:

$$\begin{aligned}\zeta_x &= A \sin \Theta \\ \zeta_z &= A \cos \Theta \\ \dot{\Theta} &= \omega(t) \\ A &= \|\boldsymbol{\zeta}\|\end{aligned}$$

Где Θ – угол между вектором $\boldsymbol{\zeta}$ и вертикалью. Уравнение на кинетический момент в абсолютной системе координат может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{k} + ((A^2 + 1)\omega + 2\omega\zeta_z) \mathbf{e}_y] = -b(\omega^2 + \frac{g}{R})\zeta_x \mathbf{e}_y$$

При этом, очевидно, имеет смысл рассматривать уравнение в проекции на ось Sy . Если рассматривать движение из состояния покоя, то его можно переписать в таком виде:

$$\frac{dk_y}{dt} = -b[(A^2 + 1)\dot{\omega} + 2\dot{\omega}\zeta_z - \zeta_x(\omega^2 + \frac{g}{R})]$$

Снова заметим, что выражение в правой части—известная функция времени $\mu(t)$ при заданном $\omega(t)$ или $\Theta(t)$. Тогда можно определить функцию

$$\varphi(t) = \int_0^t \mu(\tau) d\tau$$

Явный вид для этой функции:

$$\varphi(\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}) = \varphi_0 - b \left[\dot{\Theta}(A^2 + 1) + A\dot{\Theta} \cos \Theta + A \int_0^t \ddot{\Theta} \cos \Theta - \frac{g}{R} \sin \Theta d\tau \right]$$

Теперь, вводя вектор e -вектор e_y в подвижной системе координат, можно написать векторное уравнение для нахождения α :

$$C\alpha = (\varphi E - \omega I)e$$

Стоит сделать здесь одну важную замечание: из условия $(\zeta; e_y) = 0$ и ортогональности оператора D следует то, что $(e; \hat{\zeta}) = 0$ (т.е. вращение несбалансированного шара всегда происходит вокруг оси, ортогональной смещению центра масс)

Как и в предыдущей главе будем рассматривать треугольный профиль угловой скорости с угловым ускорением, равным по модулю \mathcal{E} , т.е. $\omega(t) = \mathcal{E}(T - |t - T|)$. Время движения будет $2T$, первая половина представляет собой разгон, вторая—торможение. Дополнительно будем предполагать, что $\theta(0) = -\pi/2$, что соответствует нахождению центра масс робота в нижнем положении равновесия в начальный момент времени. Именно такое движение является наиболее важным с практической точки зрения. Исходя из практических соображений, потребуем, чтобы целевой угол поворота был 2π , что соответствует полному обороту центра масс в плоскости движения, а значит шар пройдет расстояние равное длине экваториальной окружности. Очевидно, что движение по большим отрезкам можно получить как комбинацию нескольких таких движений. (Конечно, теоретически, достаточно перевести центр масс в верхнее положение равновесия, которое, очевидно, неустойчиво. Но с учетом ошибок при управлении и измерении, это приведет к тому, что в

реальных экспериментах такое движение будет невозможно и в дальнейшем рассматриваться не будет). В этом случае для угла θ верно:

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\mathcal{E}t^2}{2} - \pi/2, & \text{при } t \leq T \\ -\pi/2 - \mathcal{E}T^2 + 2\mathcal{E}Tt - \frac{\mathcal{E}t^2}{2}, & \text{при } t \in [t; 2T] \end{cases}$$

Приведем графики для необходимых управляемых напряжений для каждого шара:

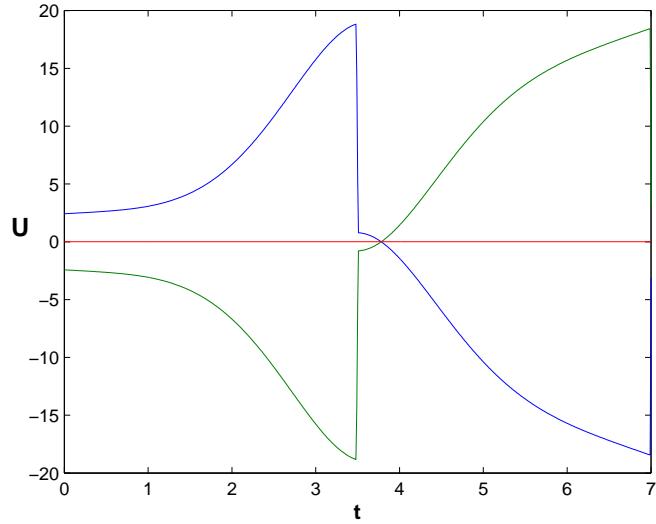


Рис. 56: Управляющее напряжение U для шара 2.1.1 и вектора $e = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$

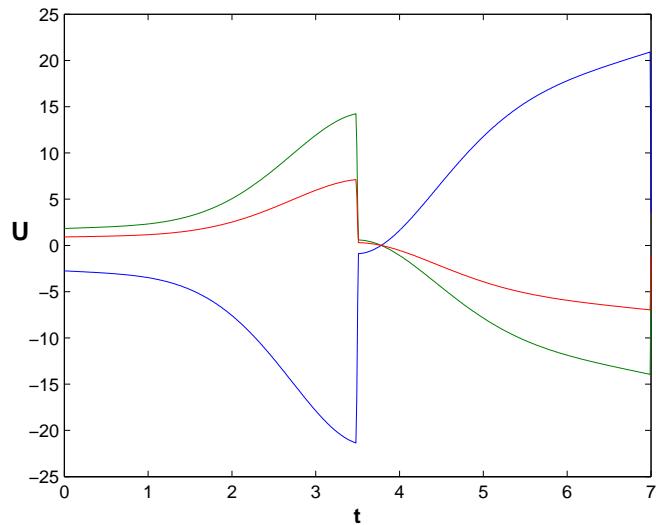


Рис. 57: Управляющее напряжение U для шара 2.1.1 и вектора $e = (3/\sqrt{14}; -2/\sqrt{14}; -1/\sqrt{14})$

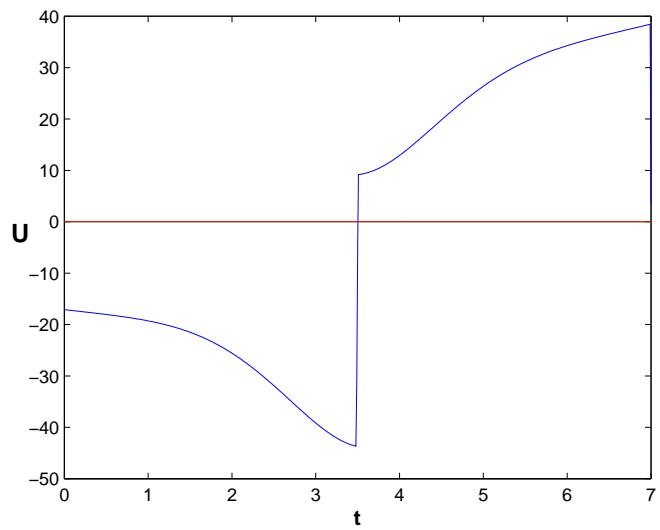


Рис. 58: Управляющее напряжение U для шара 2.1.2 и вектора $e = (1; 0; 0)$

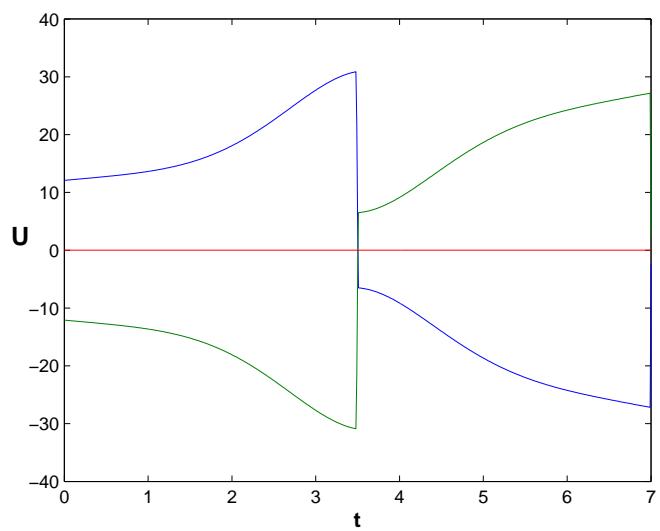


Рис. 59: Управляющее напряжение U для шара 2.1.1 и вектора $e = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$

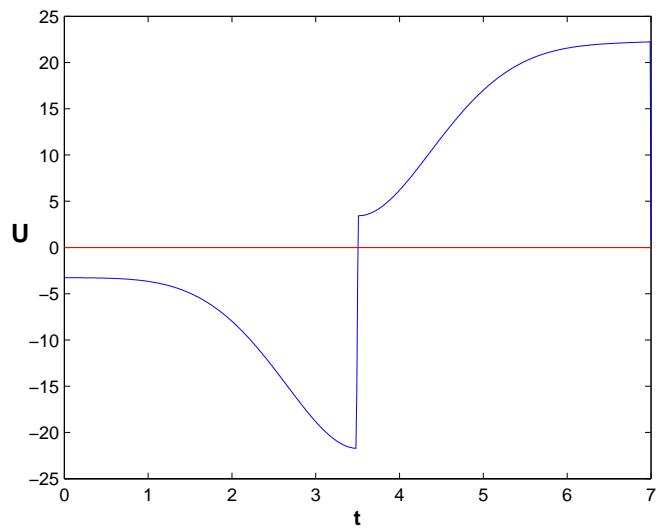


Рис. 60: Управляющее напряжение U для шара 2.1.3 и вектора $e = (1; 0; 0)$

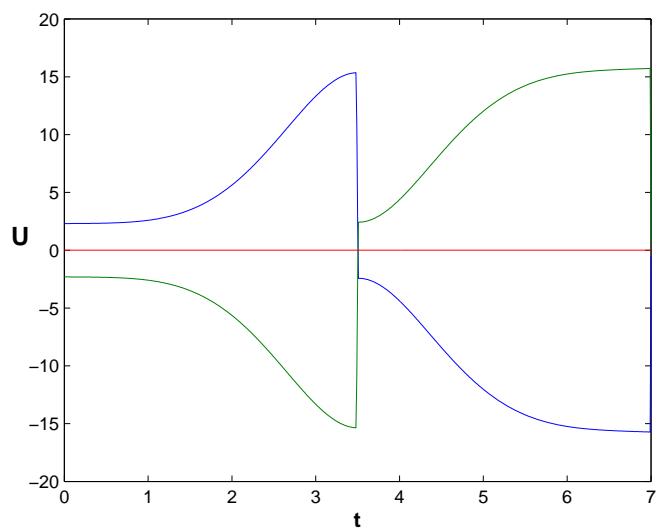


Рис. 61: Управляющее напряжение U для шара 2.1.3 и вектора $e = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$

Наконец, приведем пример для определения возможности реализации движения, когда $\omega(t) = const$, т.е. на движения с постоянной угловой скоростью в условиях ограниченности величин управляющих напряжений. Для таких движений $\Theta = \Theta_0 + \omega t$, где Θ_0 находится исходя из условий начальной конфигурации. Выпишем явно и функцию φ :

$$\varphi(t) = \varphi_0 - b \left((A^2 + 1)\omega + A(\omega + \frac{g}{R\omega}) \cos(\Theta_0 + \omega t) \right)$$

В качестве примера, остановимся на конструкции шара 2.1.1. и случае, когда $\hat{\zeta} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Ограничные управляющие напряжения вычисляем из уравнения

$$C\dot{\alpha}_i = \kappa_1 U_i - \kappa_2 \alpha_i$$

Обозначим $X = \varphi E - \omega I$. В силу уравнения $C\dot{\alpha} = X(t)e$ и явного вида матрицы C , получаем следующее условие:

$$\kappa_1 U_i = (\dot{X} + \frac{\kappa_2}{c} X) e$$

Без ограничения общности рассмотрим первый маховик, предполагая, что напряжение на нем максимально. Тогда имеем,

$$X_1(t) = X_1(0) - b \left((A^2 + 1)\omega + A(\omega + \frac{g}{R\omega}) \cos \Theta(t) - \omega \nu_{11} \right) d_{12} + \omega(\nu_{12}d_{22} + \nu_{13}d_{32})$$

Здесь ν_{1k} -компоненты первой строки тензора инерции I . С учетом того, что

$$X_1(t) = -b \left((A^2 + 1)\omega + A(\omega + \frac{g}{R\omega}) \cos \Theta_0 - \omega \nu_{11} \right) d_{12} + \omega(\nu_{12}d_{22} + \nu_{13}d_{32})$$

Перепишем условие в виде:

$$X_1 = X_0 - Ab(\omega + \frac{g}{R\omega})(\cos(\Theta_0 + \omega t) - \cos \Theta_0)d_{12}$$

Таким образом:

$$\kappa_1 U_1 = -Abd_{12} \left((\omega + \frac{g}{R\omega}) \cos(\Theta_0 + \omega t) - \cos \Theta_0 - \frac{\kappa_2}{c} (\omega^2 + \frac{g}{R}) \sin \Theta_0 \right) + \frac{\kappa_2}{c} X_1(0)$$

Для удобства положим, что $X_1(0) > 0, \omega \geq 0$. Чтобы возможным было существование конфигурации, из которой такое движение было бы возможно необходимо выполнение условия

$$U_* \geq \frac{Abd_{12}^{min}}{\kappa_1} \min_{\omega} \left\{ \min_{\Theta_0} \left\{ \max_t \{ |\mathcal{U}(\omega, \Theta_0, t)| \} \right\} \right\} + \frac{\kappa_2}{c} X_1(0)$$

в то время как для возможности такого движения из произвольной конфигурации должно быть выполнено условие

$$U_* \geq \frac{Abd_{12}^{max}}{\kappa_1} \min_{\omega} \left\{ \max_{\Theta_0} \left\{ \max_t \{ |\mathcal{U}(\omega, \Theta_0, t)| \} \right\} \right\} + \frac{\kappa_2}{c} X_1(0)$$

где U_* -максимально допустимое (по модулю) напряжение на электродвигателе

$$\mathcal{U}(t) = \left(\omega + \frac{g}{\omega R} \right) \left[\cos(\Theta_0 + \omega t) - \frac{\kappa_2^2 \omega}{c} \sin(\Theta_0 + \omega t) - \cos \Theta_0 \right]$$

Очевидно, что

$$\max_t |\mathcal{U}(t)| = \left(\omega + \frac{g}{\omega R} \right) \left| \left[\pm \sqrt{1 + \frac{\kappa_2^2 \omega^2}{c^2}} - \cos \Theta_0 \right] \right|$$

Далее примем, что $\cos \Theta_0 \geq 0$. Теперь рассмотрим максимальное значение этой функции в зависимости от параметров Θ_0 и ω . Минимальное значение по $\Theta_0 \in [-\pi/2; \pi/2]$ достигается, очевидно при $\Theta_0 = \pm\pi/2$, максимальное—при $\Theta_0 = 0$.

При $\Theta_0 = \pm\pi/2$, таким образом, нужно отыскать

$$\min_{\omega} \mathcal{H}_-(\omega) = \left(\omega + \frac{g}{\omega R} \right) \sqrt{1 + \frac{\kappa_2^2 \omega^2}{c^2}}$$

Этот минимум достигается при

$$\omega_-^0 = \sqrt{\frac{2g}{R^2 + R\sqrt{R^2 + 8g\frac{\kappa_2^2}{c^2}R}}}$$

Для случая $\Theta_0 = \pm\pi/2$:

$$\min_{\omega} \mathcal{H}_+(\omega) = \left(\omega + \frac{g}{\omega R} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{\kappa_2^2 \omega^2}{c^2}} + 1 \right)$$

минимальное значение достигается при

$$\omega_0^+ = \sqrt{\frac{g}{R}} \frac{1}{\sqrt{2\gamma_0 - 1}}$$

где γ_0 —единственный корень уравнения

$$2\gamma^3 - \gamma^2 - 2\gamma + 1 - \frac{\kappa_2^2 g}{c^2 R} = 0$$

больший единицы.

Наконец, величина $d_{12} \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right]$ (по предположению $d_{12} = \max d_{i2}$). Отсюда следует, что при

$$U_* \geq \frac{Ab}{\kappa_1 \sqrt{2}} \mathcal{H}_-(\omega_0^-) + \frac{\kappa_2}{c \kappa_1} X_1(0)$$

то существуют ω и некоторая конфигурация, что движение допустимо. Если же

$$U_* \geq \frac{2Ab}{\kappa_1 \sqrt{6}} \mathcal{H}_+(\omega_0^+) + \frac{\kappa_2}{c\kappa_1} X_1(0)$$

то такое движение возможно с некоторой угловой скоростью ω из любой начальной конфигурации.

4.1.4 Криволинейное движение

Сказанное для алфавита движения для сбалансированного робота верно и для аппарата со смещенным центром масс: с практической точки зрения желательно иметь в качестве базовых движений и криволинейные траектории. Уравнения для построения движения по любой кривой могут быть получены, если принять во внимание, что $x = x(s), y = y(s), s = s(t)$ (s —натуральный параметр). Таким образом, чтобы полностью определить закон движения нужно задать $k(s), s(t)$ и $\omega_z(t)$, где $k(s)$ —кривизна кривой

Итак, пусть задан закон движения центра шара (напомним, под траекторией понимается именно траектория этой точки). Пользуясь тем, что $\mathbf{v}_o = [\boldsymbol{\omega}; \mathbf{e}_z]$ легко найти горизонтальные компоненты вектора угловой скорости. Наконец, задавая желаемый закон верчения $\omega_z(t)$ в качестве входных параметров можем получить все три компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$. Следующий этап—разрешение уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta}]$$

относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{\zeta}$. Далее, из кинематического соотношения $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z]$ находим и зависимость $\mathbf{v}(t)$, после чего, подставляя ее в уравнение, полученное из теоремы об изменении кинетического момента и находим искомые управление.

Поясним здесь следующее. У такого подхода есть один существенный недостаток. Задавая $\boldsymbol{\omega}$ зависимость $\boldsymbol{\zeta}(t)$ можно найти, разрешив соответствующее дифференциальное уравнение. Однако, при произвольном выборе угловой скорости в конце движения по траектории центр масс системы может не прийти в одно из положений равновесия (причем, как упоминалось в предыдущем параграфе, с практической точки зрения желательным является перевод центра масс в нижнее, устойчивое положение). Поэтому рассмотрим иной подход.

Назовем *элементарной траекторией* такую траекторию геометрического центра шара, которая получается при переводе центра масс из нижнего положения равновесия в нижнее. Заметим, что если в конце движения центр масс будет в нижнем положении равновесия, а его скорость будет нулевой, то и скорость геометрического центра тоже окажется равной нулю.

Пусть на всем движении $\omega_z \equiv 0$, тогда система уравнений на компоненты вектора ζ примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_x &= \dot{s} \frac{\partial x}{\partial s} \zeta_z \\ \dot{\zeta}_y &= \dot{s} \frac{\partial y}{\partial s} \zeta_z \\ \dot{\zeta}_z &= -\dot{s} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \zeta_y + \frac{\partial x}{\partial s} \zeta_x \right)\end{aligned}$$

Введем угол ψ так, что $\cos \psi = \frac{\partial x}{\partial s}$, $\sin \psi = \frac{\partial y}{\partial s}$. Так как $\|\zeta\| = A$, перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{aligned}\zeta_x &= A \cos \beta \cos \gamma \\ \zeta_y &= A \cos \beta \sin \gamma \\ \zeta_z &= A \sin \beta\end{aligned}$$

Перепишем исходную систему в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \dot{s} \cos(\psi(s) - \gamma) \\ \dot{\gamma} \cos \beta &= \dot{s} \sin \beta \sin(\psi(s) - \gamma)\end{aligned}$$

Далее, производя замену $\xi = \psi - \gamma$ имеем:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \dot{s} \cos \xi \\ \dot{s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \cos \beta - \sin \xi \sin \beta \right) - \dot{\xi} \cos \beta &= 0\end{aligned}$$

Наконец, заметим, что $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ есть не что иное, как кривизна $k(s)$ заданной кривой (возможно, со знаком минус).

Как говорилось выше, задание функций $s(t)$ и $k(s)$ не гарантирует прихода центра масс в конце движения в нижнее положение равновесия. Задание кривой, по которой планируется движение, определяется функцией $k(s)$. Дальнейшая идея состоит в том, чтобы задать либо функцию $\xi(t)$, либо $\beta(t)$, чтобы траектория стала элементарной, а после чего уже найти и $s(t)$.

Приведем пример для окружности. Кривизна $k(s) = 1/\rho = const$, а значит, что

$$\frac{d\beta}{d\xi} = -\frac{\rho \cos \xi \cos \beta}{\cos \beta - \rho \sin \beta \sin \xi}$$

Теперь, если переписать это уравнение в виде

$$(\cos \beta - \rho \sin \beta \sin \xi) d\beta + \rho \cos \xi \cos \beta d\xi = 0$$

можно заметить что оно допускает следующий интеграл:

$$\sin \beta + \rho \sin \xi \cos \beta = const = -1$$

Последнее равенство верно, так как в начальный момент времени выполнено условие нахождения центра масс в нижнем положении равновесия ($\beta(0) = -\pi/2$). Кроме того, из этого соотношения следуют сразу несколько важных фактов.

В частности, легко заметить, что $\sin \xi(0) = 0$. Так же интересно то, что угол β может отклониться от значения $-\pi/2$ на величину не более чем $2 \operatorname{arctg} \rho$, а значит, при таком движении по окружности перевод центра масс шара в верхнее положение равновесия невозможен в принципе. Далее, из этого интеграла можно получить

$$\begin{aligned}\rho \sin \xi &= -\operatorname{tg} \chi \\ \chi &= \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Отсюда легко составить удобное уравнение для определения угла χ (а значит и β) при заданном $\xi(t)$:

$$\chi = -\operatorname{arctg}(\rho \sin \xi).$$

При этом нахождение $\xi(t)$ при заданном $\chi(t)$ гораздо менее удобно.

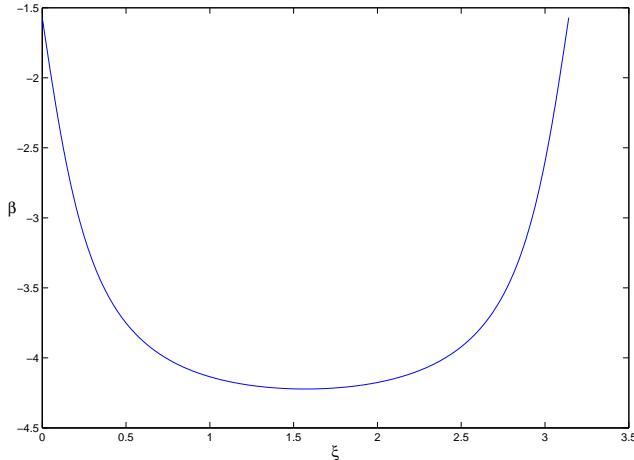


Рис. 62: $\beta(\xi)$

Далее же, принимая во внимание вышеописанное, можно заметить, что угол ψ также всецело определяется углом ξ . Действительно,

$$\dot{\psi} = \frac{2\dot{\xi}}{1 + \rho^2 \sin^2 \xi}$$

А значит

$$\psi(\xi) = \psi(0) + \frac{2}{\rho^2} \operatorname{arctg}(\sqrt{1 + \rho^2} \operatorname{tg} \xi)$$

С учетом последнего факта имеет смысл искать такое $\xi(t)$, что $\xi(0) = 0$, а

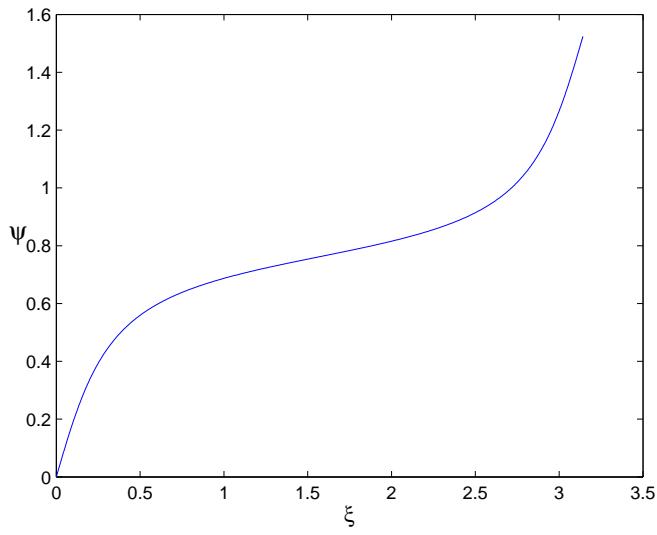


Рис. 63: $\psi(\xi)$

$\xi(T) = \pi$ (T -полное время движения), а также требовать монотонного возрастания этой функции. Это обеспечит с одной стороны то, что движение будет элементарным, а с другой шар будет катиться по дуге в одном направлении, что и является желаемым результатом. Заметим, что в таком случае, пройденная дуга однозначно определяется параметром ρ , т.е.

$$\begin{aligned}\psi_{\text{полн.}} &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \rho^2}} \\ s &= \frac{2\pi\rho}{\sqrt{\rho^2 + 1}}\end{aligned}$$

Теперь приступим к построению графиков. Выберем

$$\xi(t) = \frac{\pi}{2}(1 - \cos \eta t), \quad t \in [0; \pi/\eta]$$

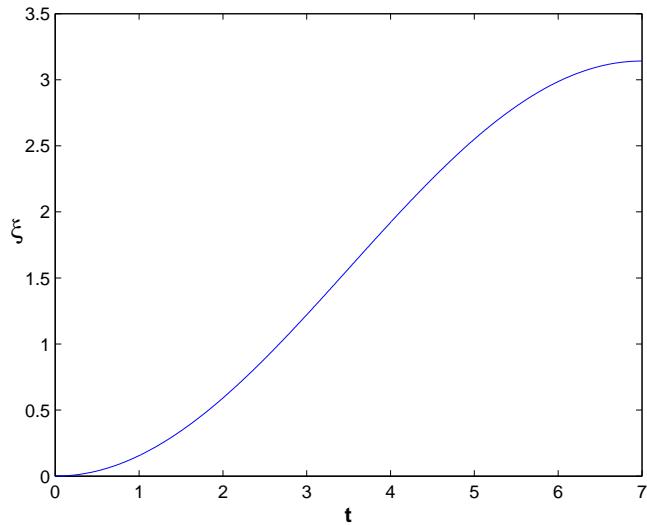


Рис. 64: $\xi(t)$

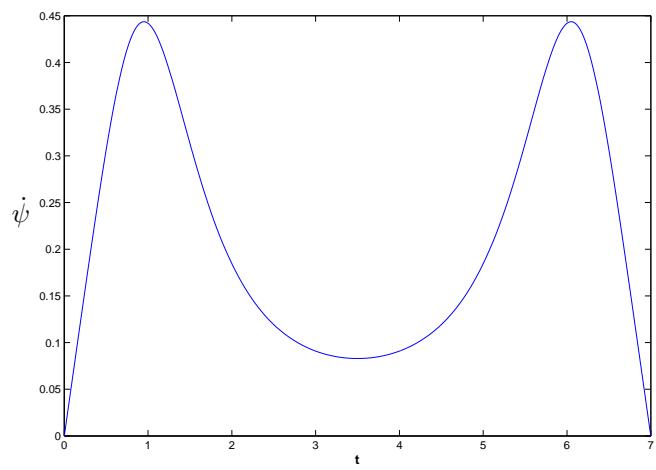


Рис. 65: $\dot{\psi}(t)$

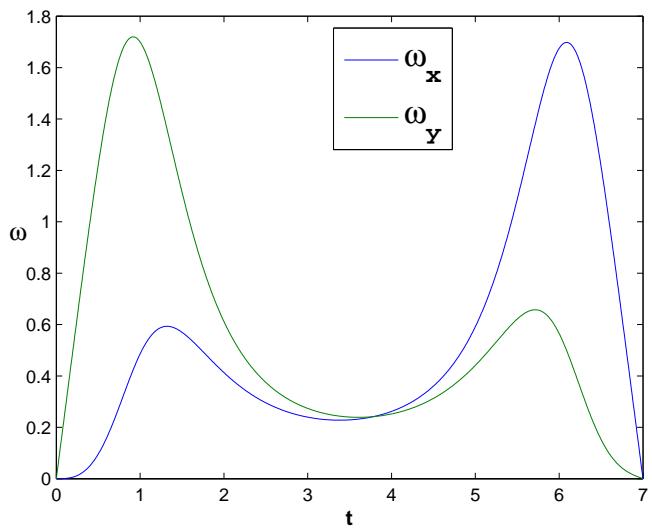


Рис. 66: $\omega(t)$

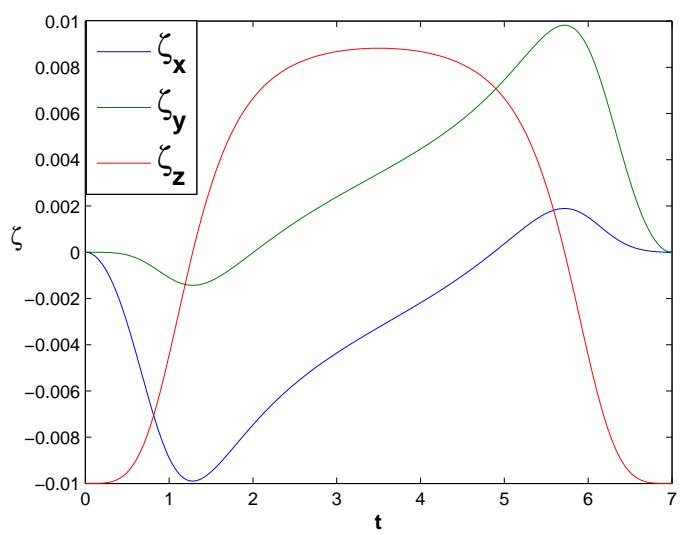


Рис. 67: $\zeta(t)$

Для вычисления управлений, как и в 3.4, необходимо искать зависимость $D(t)$. (Вектора $\zeta_{\text{подв.}}$ принимаются, как в предыдущих разделах. Электордвигатели приняты такими же ранее, значение $\eta = \pi/7$.) Ниже—графики углов Эйлера и управляющих напряжений.

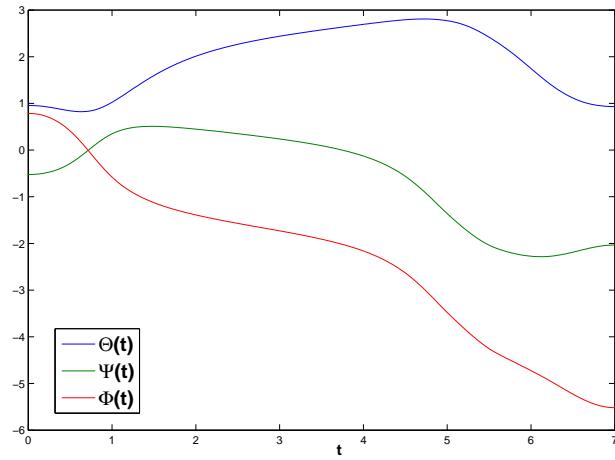


Рис. 68: Углы Эйлера для шара 2.1.1

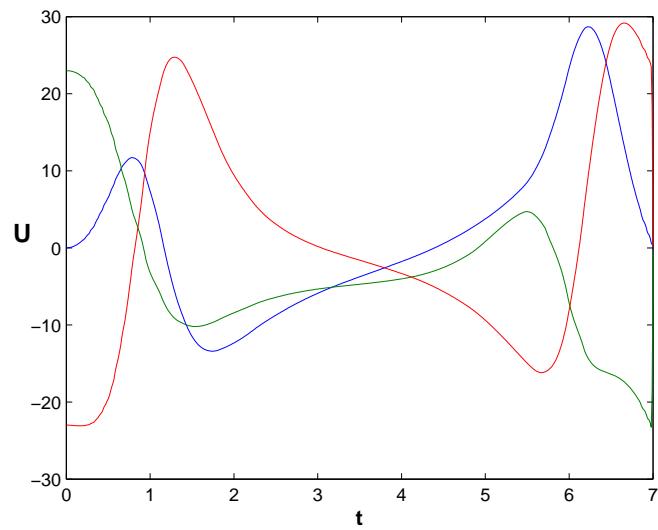


Рис. 69: Управляющие напряжения для шара 2.1.1

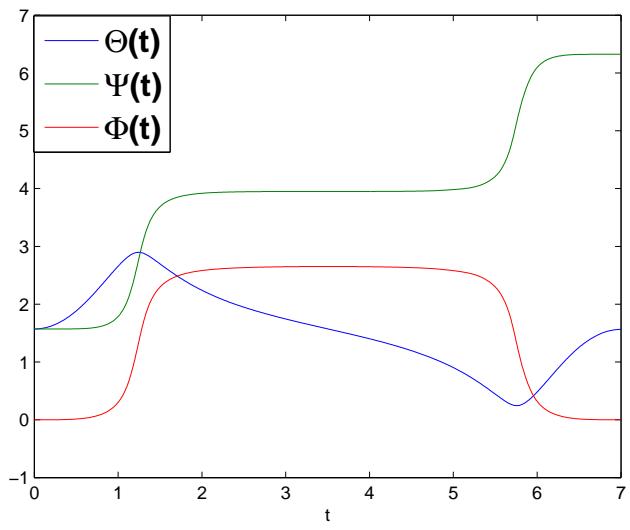


Рис. 70: Углы Эйлера для шаров 2.1.2 и 2.1.3

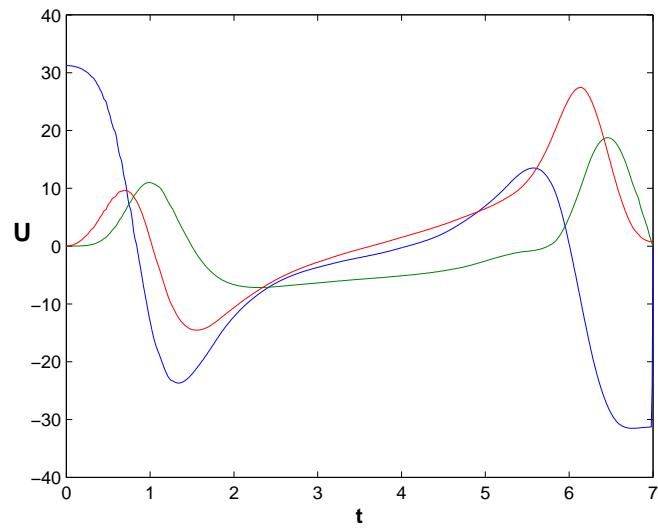


Рис. 71: Управляющие напряжения для шара 2.1.2

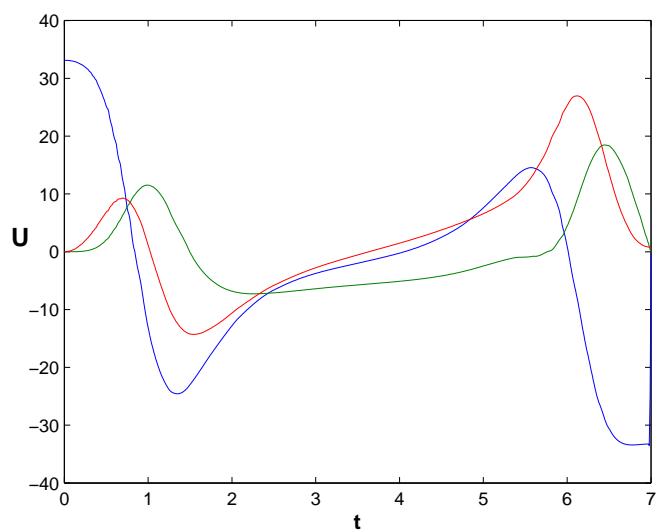


Рис. 72: Управляющие напряжения для шара 2.1.2

4.2 Управление для двупараметрической модели трения

Предположим теперь, что модель контактного взаимодействия такая, как описана в главе 2. Таким образом, все силы и моменты являются функциями режимных углов θ_k (или же, что равнозначно, угловой скорости и скорости скольжения шара). В проекции на оси Френе теорема об изменении импульса дает следующие уравнения: ($\boldsymbol{\theta} = (\theta_1; \theta_2; \theta_3)$):

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= n(\boldsymbol{\theta})(\tilde{f}_I(\boldsymbol{\theta}) \cos \varphi + \tilde{f}_{II}(\boldsymbol{\theta}) \sin \varphi) \\ k(s)\dot{s}^2 &= n(\boldsymbol{\theta})(\tilde{f}_I(\boldsymbol{\theta}) \sin \varphi + \tilde{f}_{II}(\boldsymbol{\theta}) \cos \varphi) \\ \dot{v}_z &= n(\boldsymbol{\theta})(1 + \tilde{f}_{III}(\boldsymbol{\theta})) - \frac{g}{R}\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{f}_i = \frac{R}{g} f_i$. Последнее уравнение, в частности, показывает то, что для несбалансированного шара сила реакции опоры не только не равна g/R , но уже неверно и уточнение что $n = \frac{g}{R(1 + \tilde{f}_{III})}$. Для моментов имеем следующее:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 - b[\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z; \mathbf{f}] = n(\boldsymbol{\theta})((\tilde{\boldsymbol{\mu}}^0 - b[\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z; \tilde{\mathbf{f}}]))$$

Таким образом, теорема об изменении кинетического момента примет вид:

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} + C\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \Omega_* \hat{D}^T(C\boldsymbol{\alpha} + I\boldsymbol{\omega}) = \hat{D}\boldsymbol{\mu}$$

Как можно заметить, полученная система сложна для полного исследования, поэтому далее будут разобраны лишь некоторые частные случаи.

4.2.1 Удержание конфигурации и поворот на месте

Для начала рассмотрим поворот шара относительно вертикали, проходящей через его геометрический центр. Таким образом, $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, а значит, верно, что все силы будут нулевыми. У момента же будет только одна ненулевая компонента—вертикальная. В этом случае система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}n &= \frac{g}{R} \\ \dot{\mathbf{v}} &= 0 \\ \dot{\mathbf{k}} &= \mu_z^0 - b \frac{g}{R} [\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{e}_z] \\ v_z &= 0;\end{aligned}$$

Но, вместе с тем, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta}]$, что приводит либо к тому, что скорость постоянна (и ненулевая), либо к тому, что центр масс находится на оси вращения. Первый случай неприменим при нулевых начальных условиях, второй

же полностью соответствует уже рассмотренному в 3.3 случаю.

Что касается удержания робота в неподвижном состоянии, то, очевидно, все силы и моменты в таком случае должны обращаться в нуль. В этом случае задача полностью редуцируется к рассмотренной в 4.1.1 неголономной задаче. Однако, учитывая феномен трения покоя, этот случай должен быть рассмотрен для момента $\mu^0(\theta_f) + \frac{gb\zeta_x}{R}$

4.2.2 Движение по прямой

Предположим, как и в 3.2, что движение происходит по прямой линии, причем отсутствуют как закручивание так и верчение. (т.е. $\omega_I = \omega_z = 0$). Без ограничения общности, примем $\mathbf{v}_O = v\mathbf{e}_x$, тогда $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_y$. Справедливо, в таком случае, что

$$\mathbf{f} = n\tilde{f}\mathbf{e}_x$$

Кроме того, как и для неголономной задачи положим $\zeta_y \equiv 0$, а значит сохраняются найденные в 4.1.2 кинематические соотношения, а именно:

$$\begin{aligned}\zeta_x &= A \sin \psi \\ \zeta_z &= A \cos \psi \\ \dot{\psi} &= \omega\end{aligned}$$

С учетом того, что

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x + \omega[\mathbf{e}_y; \zeta]$$

продифференцировав, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}n &= \frac{g}{R} - (\dot{\omega}\zeta_x + \omega^2\zeta_z) \\ \dot{v} + \dot{\omega}\zeta_z - \omega^2\zeta_x &= n\tilde{f}\end{aligned}$$

Суммарный момент будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\mu} = n(\tilde{\boldsymbol{\mu}} - b[\zeta; \tilde{\mathbf{f}}])$$

Теорема об изменении кинетического момента в проекции на ось Sy будет иметь следующий вид (:

$$\frac{d}{dt}(k_y + b\omega(A^2 + 1 + 2A\zeta_z)) = n\tilde{\mu} - bA\zeta_x(\omega^2 - \frac{g}{R})$$

Это уравнение служит для нахождения управлений, поэтому для начала остановимся подробнее на анализе уравнений, полученных из теоремы об

изменении импульса и выборе желаемого профиля угловой скорости. Будем также, как и в предыдущем пункте, полагать, что в начальный момент центр масс находится в нижнем положении равновесия, и за элементарное движение требуется переместить его в ту же точку, пройдя путь равный длине экватора сферической поверхности робота.

Задав явным образом зависимость $\psi(t)$, перепишем исходную систему в виде (для удобства обозначив $\theta = \theta_1$):

$$\begin{aligned} n &= \frac{g}{R} - A(\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi) \\ \dot{v} + A(\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi) &= n\tilde{f}(\theta) \\ \dot{\psi} &= r \sin \theta \end{aligned}$$

В силу последнего уравнения нетрудно получить, что

$$u = \frac{\dot{\psi}}{\delta} \operatorname{ctg} \theta \implies \dot{u} = \frac{\ddot{\psi}}{\delta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\dot{\psi} \dot{\theta}}{\delta \sin^2 \theta}$$

Теперь, приняв

$$H_\psi(t) = \ddot{\psi}(1 + A \cos \psi) - A \dot{\psi}^2 \sin \psi$$

Второе уравнение перепишется в виде:

$$\dot{\theta} = -\frac{\delta(n_\psi \tilde{f}(\theta) - H_\psi) \sin^2 \theta - \ddot{\psi} \cos \theta \sin \theta}{\dot{\psi}}$$

Чтобы решить задачу Коши необходимо знать начальное условие для угла θ . С учетом того, что в начальный момент времени знаменатель обращается в ноль, для θ_0 имеем следующее уравнение, полученное путем приравнивания нулю числителя этой дроби:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\ddot{\psi}(0)}{\delta(n_\psi(0)\tilde{f}(\theta_0) - H_\psi(0))}$$

Учитывая, что $\psi(0) = -\pi/2$, можно получить выражения для n_ψ и H_ψ :

$$\begin{aligned} n_\psi(0) &= \frac{g}{R} + A\ddot{\psi}(0) \\ H_\psi(0) &= \ddot{\psi}(0) \end{aligned}$$

Аналогично предыдущим пунктом, положим

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{A}{\eta} \left(\frac{1}{3} \cos \frac{3\eta t}{2} + \cos \frac{\eta t}{2} \right) - \frac{3\pi}{2} \\ A &= \frac{3\pi\eta}{2} \end{aligned}$$

Откуда

$$\ddot{\psi}(0) = \frac{3\pi\eta^2}{2}$$

Окончательно, уравнение на θ принимает вид:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{\delta \left(\left(\frac{2g}{3\pi\eta^2 R} + A \right) \tilde{f}(\theta_0) - 1 \right)}$$

Для удобства положим

$$\lambda = \frac{2g}{3\pi\eta^2 R} + A$$

Функция

$$F(\theta) = \frac{1}{\lambda \tilde{f}(\theta) - 1}$$

является монотонно убывающей по θ в силу возрастания функции \tilde{f} (см. 3.2) и положительности λ . Таким образом, на интервале $(\pi/2; \pi/2 + \tilde{f}^{-1}(\frac{1}{\lambda}))$ уравнение имеет единственный корень.

Далее, решив задачу Коши, найдем $\theta(t)$, после чего и $u(t)$ и $v(t)$. Графики функций для случая $\eta = \pi/7$:

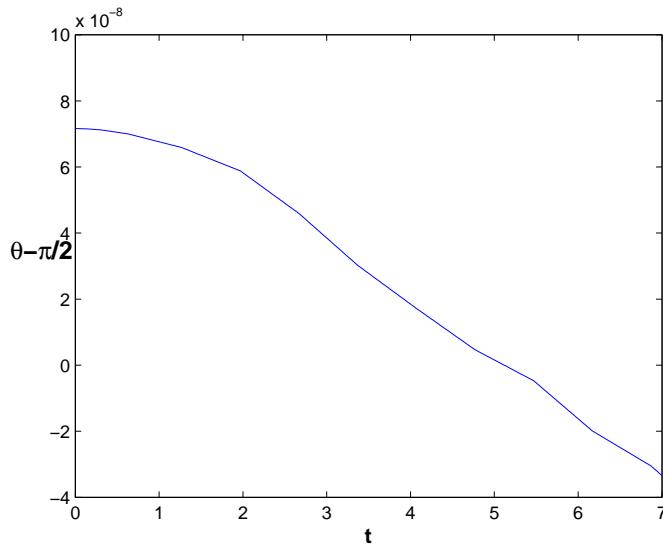


Рис. 73: $\theta(t) - \pi/2$

Для первого шара управляющие напряжения примут следующий вид:

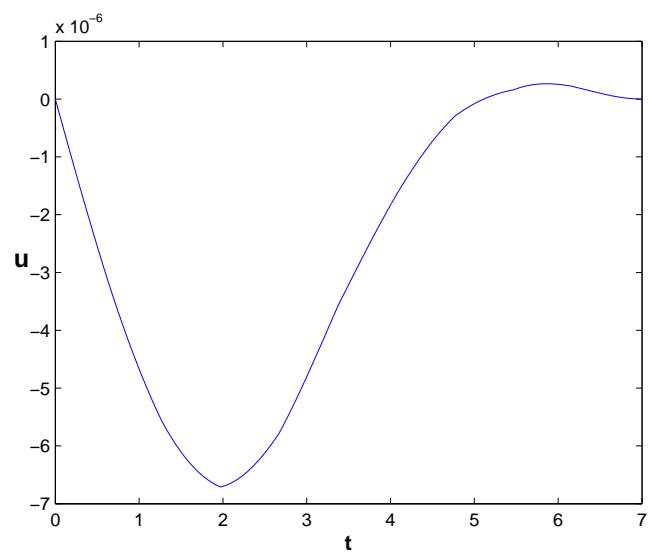


Рис. 74: $u(t)$

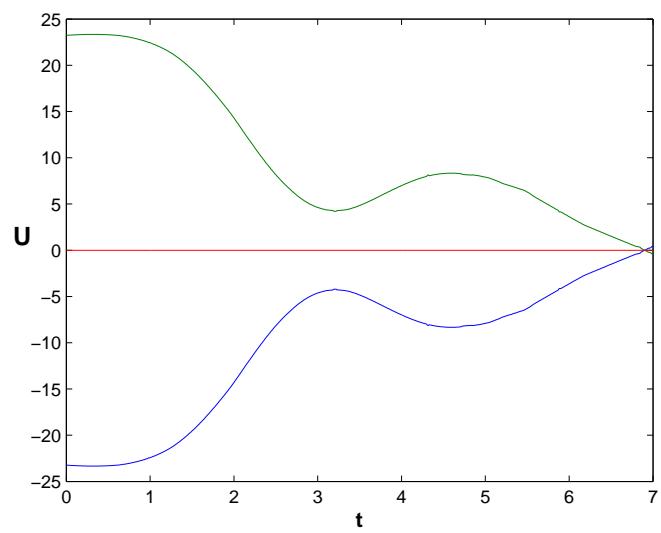


Рис. 75: $U(t)$

5 Заключение

Во второй главе построена теоретико-механическая модель роботов-шаров, приводимых в движение по принципу гиростата. Предложены три варианта различных конструкций. Далее разобраны модели контактного взаимодействия, допускающие первые интегралы кинетического момента—шар на абсолютно шероховатой плоскости и шар на плоскости с вязким трением. Для каждой модели предложен алфавит базовых движений, состоящий из движения по отрезку, поворота на месте и движения по дуге окружности.

В третьей главе рассмотрена иная модель контактного взаимодействия шара и плоскости—модель двухпараметрического трения. Показано, что силы и моменты можно рассматривать как функции особых переменных—режимных углов θ_k . Для некоторых движений такая зависимость исследована явным образом. Важным фактом является наличие в данной модели трения покоя, в результате чего движение при ограниченных напряжениях на электродвигателях не всегда возможно. Для реальных электродвигателей показаны значения параметров контактного взаимодействия, при которых движение допустимо. Предложен тот же набор алфавитных движений, что и в предыдущем пункте. Дополнительно показано, что при свободной динамике шара Чаплыгина по прямой, существуют два предельных режима движения—устойчивый и неустойчивый.

В четвертой главе проведено исследование аналогичных аппаратов, но со смещенным центром масс. Рассмотрены две модели—абсолютно шероховатой плоскости и двухпараметрического трения. Кроме того, в этом случае в алфавит движений добавляется удержание робота в состоянии покоя, в случае, если центр масс выведен из нижнего положения равновесия. Для поворота на заданный угол задача сведена к аналогичной для сбалансированного шара. Предложен алгоритм использования элементарных траекторий в результате прохождения по которым центр масс переходит из нижнего положения равновесия обратно в нижнее. Приведены примеры для движения по отрезку (в рамках обеих моделей) и движения по дуге окружности (в рамках неголономной модели).

Наконец, анализируя результаты численного моделирования (см. примеры графиков управляющих напряжений), необходимо отметить, что для практического применения таких аппаратов нужны достаточно мощные электродвигатели.

Теперь тезисно сформулируем основные результаты исследований:

- Решена обратная задача динамики для сбалансированного шара-гиростата для различных моделей контактного взаимодействия шара с плоскостью.

Пример методики продемонстрирован на модели шара SpheRob2

- Решена обратная задача динамики для несбалансированного шара (центр масс которого не совпадает с геометрическим центром). Пример методики продемонстрирован на модели шара SpheRob2
- Для несбалансированного шара выделены классы движений (названных элементарными), во множестве которых построен расширяемый алфавит базовых движений робота. Для сбалансированного шара эти условия несущественны.
- Найдены условия возможности движения шара по плоскости в модели двухпараметрического трения. Построены области параметров, при которых движение возможно для модели реальных электродвигателей. Показано, что при движении вдоль прямой на выключенных приводах существуют два предельных режима (в смысле отношения угловой скорости к скорости скольжения)

6 Список используемой литературы

1. Электронный ресурс <http://www.rotundus.se/>
2. *P.Армур, Дж.Винсент* Качение в природе и робототехнике: обзор// Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар сб.работ.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013, стр. 3-28
3. Электронный ресурс <http://www.robotliving.com/robot-news/solar-robot-ball/>
- 4 .Электронный ресурс <http://vimeo.com/>
5. *Т.Иликорпи, Ю.Суомела* Сферические роботы.// Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар сб.работ.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013, стр. 29-50
6. *А.Мариго, А.Биччи* Качение тел с регулярной поверхностью: теория управляемости и приложения.// Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар сб.работ.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013, стр. 487-420
7. *В.Е.Павловский ,Г.П. Терехов* Управление мобильным сферическим информационным роботом с тремя ортогональными маховиками.// Спецтехника и связь, №3/2012 стр.19-25
8. *В.Е.Павловский ,Г.П. Терехов* Управление Роботом-Шаром С Тремя Маховиками. // Труды X Международной Четаевской конференции, 12 – 16 июня 2012 г., Казань, КНИТУ-КАИ. Том 3, Секция 3. Управление, Часть II, с.215-225.
9. *Г.П. Терехов.* Управление шаром с тремя маховиками на ортогональных осях.// Современная мехатроника. Сборник научных трудов Всероссийской научной школы г.Орехово-Зуево, 22-23 сентября 2011.
10. *А.В.Борисов, А.А.Килин, И.С.Мамаев* Как управлять шаром Чаплыгина с помощью роторов.// Нелинейная динамика, 2012. Т8, №2 стр. 289-307
11. *А.В.Борисов, А.А.Килин, И.С.Мамаев* Как управлять шаром Чаплыгина с помощью роторов// Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар сб.работ.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013, стр. 131-168
12. *R.Mukherjee, T.Das* Reconfiguration of a rolling sphere: a problem in evolute-involute geometry// Journal of Applied mechanics, July 2006 vol.73 p.590-597
13. *R.Mukherjee, T.Das* Exponential stabilization of the rolling sphere// Automatica 40 (2004) p.1877 – 1889

14. *R.Mukherjee, M.Minor, J.Pukrushpan* Motion Planning for a Spherical Mobile Robot: Revisiting the Classical Ball-Plate Problem// Transaction of the ASME dec.2002, vol.124 pp.502-511
15. *М.Свинин, С.Хосоэ.* Алгоритмы планирования движения для катящейся сферы с ограниченной контактной площадью.// Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар сб.работ.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013, стр. 51-80
16. *Mikhail Svinin, Shigeyuki Hosoe* Motion Planing Algorithms for a Rolling Sphere With Limited Contact Area.// IEEE Transactions on Robotics, vol. 24, no.3, June 2008.
17. *Murray R.M, Sastry* Nonholonomic motion planing: Steering using sinusoids.// IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, vol 38, no. 5, pp. 700-716
18. *Euler L.* De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexililium methods nova et facilis.// Commentarii Academiae scientiarum imperiales Petropolitanae. 1734.-1735.-1740 Т.7 Р.99-122
19. *Даламбер Ж.* Динамика. М., Л.: Гостехиздат, 1950 343с.
20. *Аппель П.* Теоретическая механика Т.2 М.: Физматгиз, 1960 487 стр.
21. *Appel P.* Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement de roulement.// Amer. J. Math. 1911 Ser.6, T.7. P. 85-96. 22. *Г. Кориолис* Математическая теория биллиардной игры.// М.: Гостехиздат, 325 стр.
23. *Чаплыгин С.А.* О катании шара по горизонтальной плоскости.// Чаплыгин С.А. Исследование по динамике неголономных систем М.: Гостехиздат, 1949 112 стр.
24. *А.В.Борисов, И.С.Мамаев* О движении шара Чаплыгина по наклонной плоскости.// Доклады РАН, 2006. Т406, №5 стр. 262-267
25. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка// Проблемы гирроскопии М.: Мир стр. 60-77
26. *В.Ф, Журавлев А.А Андронов* Сухое трение в задачах механики// Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований , 2010 184 с.
27. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел.// ПММ, 1998. Т. 62 вып. 5 стр. 762-767
28. *А.П.Иванов* Основы теории систем с трением.// М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Ижевский институт компьютерных исследо-

ваний, 2011.-304стр.

29. *А.П.Иванов* Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела.// ПММ, 2009. №2 с.189-203
30. *Киреенков А.А.* О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения.// Изв. РАН МТТ 2002 №1 стр.60-67
31. *Киреенков А.А.* Метод вычисления силы трения и момента сил трения в комбинированной модели сухого трения для круговых площадок контакта// Изв. РАН МТТ 2003 №3 стр. 48-53
32. *Киреенков А.А.* Связанные модели трения скольжения и качения// ДАН 2008 т.419 №6 стр.759-762
33. *Киреенков А.А.* Связанная модель скольжения и качения в динамике тел на шероховатой плоскости// Изв. РАН МТТ 2008 №3 стр.116-131
34. *А.В.Карапетян* Двухпараметрическая модель трения.// ПММ т.73 вып.4 2009 стр.515-519
35. *А.В.Карапетян* О моделировании сил трения в динамике шара на плоскости.// ПММ т.74 вып.4 2010, стр.531-535
36. *М.В.Ишханян.* Динамика однородного шара на горизонтальной плоскости с трением скольжения, верчения и качения. // Дис. канд. физ.-мат. наук, 01.02.01, 2010. МГУ им.М.В. Ломоносова, механико-математический факультет.
37. *Т.В.Сальникова, Д.В.Трещев, С.Р.Галлямов* Движение свободной шайбы по горизонтальной шероховатой плоскости. Нелинейная динамика, 2012. Т8, №1 стр. 83-101
- 38.*А.В.Борисов, А.А.Килин, И.С.Мамаев* Две неголономные интегрируемые связки твердых тел. Нелинейная динамика, 2011. Т7, №3 стр. 559-568
39. *M.Zheng, Q.ZhanJ, J.Liu, Y.Cai* Control of a Spherical Robot: Path Following Based on Nonholonomic Kinematics and Dynamics.// Chinese Journal of Aeronautics 24 (2011) p.337-345
40. *Терехов Г.П., Павловский В.Е.* Управление роботом-шаром с помощью маховиков.// Препринты ИПМ им.Келдыша, вып.16 2017 31с.
41. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем.// М.: Наука, 1967 520с.
42. *Маркеев А. П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью.

- стю.// М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. — 336 с.
43. *B.-C.-Чэнъ, Ч.-П.-Чэнъ, В.-Ш.-Юй, Ч.-Х.-Линъ П.-Ч.-Линъ* Конструкция и реализация омнинаправленного сферического робота Omnicorn.// Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар сб.работ.-М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013, стр. 81-94
44. Электронный ресурс <http://www.agritimes.ru>
45. Электронный ресурс <http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/1898342.stm>
46. *Терехов Г.П., Павловский В.Е.* Управление несбалансированным сферическим роботом.// Препринты ИПМ им.Келдыша, вып.90 2017 23с.
47. *Georgy Terekhov and Vladimir Pavlovsky* Controlling spherical mobile robot in a two-parametric friction model. 12th International Scientific-Technical Conference on Electromechanics and Robotics “Zavalishin’s Readings” - 2017. № 113/2017. 02007. 5р.

7 Приложение 1. Доказательства некоторых фактов из главы 2

Утверждение 7.1

Для любых значений параметров контакта ε, δ верно, что $f(\theta_*) \geq 0$

Рассмотрим интеграл $I_{u_I}(\theta)$. Знак этого интеграла противоположен знаку f . Остановимся на числите $W(\theta)$ дроби, находящейся под знаком интеграла, так как в знаменателе стоит положительная функция.

$$W(\theta_*) = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + 1}} ((1 - \delta)(1 - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha) - \cos \beta)$$

Перепишем выражение в скобках, как функцию переменной $z = \cos \beta$:

$$F(z) = z^2(1 - \delta) \cos^2 \alpha - z + (1 - \delta) \sin^2 \alpha$$

Функция $F(z)$ представляет собой параболу с ветвями вверх. Таким образом, максимальное значение на любом отрезке достигается на какой-то из границ этого отрезка. Заметим, что

$$z \in [\sqrt{1 - \varepsilon^2 \delta^2}; 1]$$

Нетрудно вычислить $F(1) = -\delta \leq 0$. Теперь найдем и $F(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \delta^2})$:

$$\begin{aligned} F(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \delta^2}) &= (1 - \varepsilon^2 \delta^2) \cos^2 \alpha (1 - \delta) + (1 - \delta) \sin^2 \alpha - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \delta^2} = \\ &= (1 - \delta)(1 - \varepsilon^2 \delta^2 \cos^2 \alpha) - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \delta^2} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\max_{\alpha} F(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \delta^2}) = 1 - \delta - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \delta^2} = \frac{\delta(\varepsilon^2 \delta - 1)}{1 - \delta + \sqrt{1 - \varepsilon^2 \delta^2}} \leq 0$$

После чего делаем вывод, что величина $I_{u_I}(\theta) \leq 0$, что и доказывает утверждение.

Утверждение 7.2

Для любых значений параметров контакта ε, δ верно, что $\mu(0) \geq 0$

Действительно,

$$\mu(0) = \frac{b\sqrt{\delta^2 + 1}}{\delta} f(\theta_*) \geq 0$$

согласно предыдущему утверждению.

Утверждение 7.3

Существуют два предельных режима для движений З.З.З на промежутках $(\theta_\mu; \pi/2)$ и $(\theta_*; \pi)$.

Для системы

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \xi(\theta) \cos \theta + \eta(\theta) \sin \theta \\ r\dot{\theta} &= -\xi(\theta) \sin \theta + \eta(\theta) \cos \theta \end{aligned}$$

предельное решение $\theta = \hat{\theta}$ соответствует нулю в правой части второго уравнения. Покажем, что у функции

$$G(\theta) = -\xi(\theta) \sin \theta + \eta(\theta) \cos \theta$$

есть по одному корню на указанных промежутках. Действительно, перепишем эту функцию в виде

$$G(\theta) = -f(\theta) \sin \theta + \frac{\mu(\theta)}{i} \left(\sin \theta + \frac{1}{\delta} \cos \theta \right)$$

Заметим, что при $\theta \in [0; \theta_\mu]$ в силу положительности всех своих слагаемых $G(\theta) > 0$. Далее,

$$G(\pi/2) = -f(\pi/2) + \frac{\mu(\pi/2)}{i} = \frac{f(\pi/2)}{i} (b - i) < 0$$

так как $b > i$ (в размерных переменных это соответствует условию $\hat{M}R^2 > I_k$, где I_k – размерный момент инерции относительно той главной оси, вокруг которой и совершается вращение). Таким образом, уравнение $G(\theta) = 0$ имеет хотя бы один корень $\hat{\theta}_1 \in (\theta_\mu; \pi/2)$. Заметим, что на промежутке $\theta \in (\theta_f; \theta_*)$ функция $G(\theta) < 0$, а $G(\pi) = G(0) > 0$. Значит, существует хотя бы один корень $\hat{\theta}_2 \in (\theta_*; \pi)$.

Еще раз отметим, что доказано существование хотя бы двух предельных решений. То, что их ровно два следует из численных экспериментов.

8 Приложение 2. Верификация модели и решение прямой задачи динамики

Для отыскания законов управления по произвольной траектории в рамках двухпараметрической модели использовались некоторые допущения. Представляет интерес верификация получившихся законов управления в рамках общей системы.

Итак, для прямой задачи динамики в рамках двухпараметрической модели имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} I\hat{D}(\dot{\tilde{\omega}} + \dot{\psi}S\tilde{\omega}) + C\dot{\alpha} + [\hat{D}\tilde{\omega}; I\hat{D}\tilde{\omega} + C\alpha] &= \hat{D}\mu \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}_O^2}{2}\right) &= (\mathbf{f}; \mathbf{v}_O) \\ (u + \omega_{II})\dot{\psi} - \dot{\omega}_I &= f_{II} \\ S &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\omega} = (\omega_I; \omega_{II}; \omega_{III})^T$ – вектор угловой скорости во вспомогательной системе координат, \hat{D} – матрица перехода к СК, связанной с шаром, от вспомогательной СК. Эта матрица равна

$$\hat{D} = D \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

угол ψ – угол между векторами \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_I .

Пусть на многообразии $SO(3)$ введены локальные координаты – углы Эйдера $\mathbf{Q} = (\Theta; \Psi; \Phi)^T$. Тогда $\hat{D} = \hat{D}(\mathbf{Q}, \psi)$. Из главы 2 следует, что $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$, $\mu = \mu(\boldsymbol{\theta})$, где $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1; \theta_2; \theta_3)^T$. Наконец u и $\tilde{\omega}$ есть функции вектора $\mathbf{q} = (r; \boldsymbol{\theta})^T$. Таким образом, получается система ДУ восьмого порядка на неизвестные компоненты вектора $\xi = (\mathbf{Q}; \mathbf{q}; \psi)^T$.

Вместе с тем, при предложенном подходе придется вычислять вектор $\dot{\mathbf{q}}$ из уравнения:

$$\dot{\mathbf{q}} = J^{-1}(q) \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\omega}} \\ \mathbf{v}_O^2 \end{pmatrix}$$

где $J(q) = \frac{\partial(\tilde{\omega}; \mathbf{v}_O^2)}{\partial q}$ – матрица Якоби соответствующего отображения.

Кроме того, остается нерешенной еще проблема в начальный момент времени, когда $r = 0$ и $\boldsymbol{\theta}$, а значит и \mathbf{f}, μ неопределены. Имеем следующую

систему уравнений на неизвестные начальные $\boldsymbol{\theta}^0; \psi^0$:

$$\begin{aligned}\dot{r}(0) \begin{pmatrix} \sin \theta_1^0 \cos \theta_2^0 \\ \sin \theta_1^0 \sin \theta_2^0 \cos \theta_3^0 \\ \sin \theta_1^0 \sin \theta_2^0 \sin \theta_3^0 \end{pmatrix} &= \hat{D}^T(\mathbf{Q}^0, \psi^0) I^{-1} \left(\hat{D}(\mathbf{Q}^0, \psi^0) \mu(\boldsymbol{\theta}^0) - C \dot{\boldsymbol{\alpha}}^0 \right) \\ \dot{r}(0) \left(\frac{\cos \theta_1^0}{\delta} + \sin \theta_1^0 \sin \theta_2^0 \cos \theta_3^0 \right) &= f_I(\boldsymbol{\theta}^0) \\ \dot{r}(0) \sin \theta_1^0 \cos \theta_2^0 &= f_{II}(\boldsymbol{\theta}^0)\end{aligned}$$

Заметим, что в эту же систему в качестве неизвестной входит еще и $\dot{r}(0)$.

Замечание

При значениях якобиана, близких к нулю (что соответствует некоторым вырожденным значениям \mathbf{q}), удобнее работать с уравнением на вектор $\xi' = (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, u, \psi)$

На рисунке ниже приведено решения прямой задачи динамики для найденных управлений, реализующих движение по дуге окружности для шара 2.1.1. Как можно видеть, реальная траектория достаточно близка к желаемой.

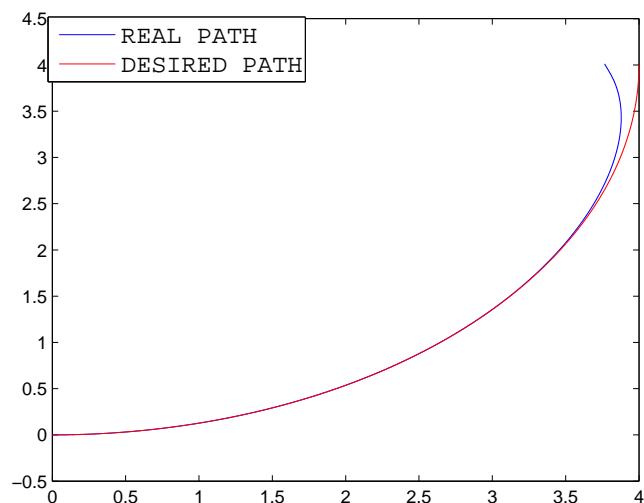


Рис. 76: Верификация модели для движения по окружности