Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи

Лан Аньци

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ ЭКСПЕДИЦИИ ЗЕМЛЯ-АСТЕРОИД-ЗЕМЛЯ С УЧЕТОМ ВЫБОРА ОРБИТ ПРЕБЫВАНИЯ У АСТЕРОИДА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ЭКСПЕДИЦИИ К АСТЕРОИДУ АПОФИС

Специальность 01.02.01 – «Теоретическая механика»

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –

Ивашкин Вячеслав Васильевич,

доктор физико-математических наук,

профессор

Москва, 2018 г.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Вводимые обозначения и сокращения

АКО – астероидно-кометная опасность

ГА – генетические алгоритмы

ДСС – давление Солнечного света

ДУ – двигательная установка

ДУБТ – двигательная установка большой тяги

ДУМТ – двигательная установка малой тяги

ДУ2 – вторая двигательная установка большой тяги (для выполнения маневров после отделения разгонного блока)

ИСА – искусственный спутник астероида (Апофиса)

ИСЗ – искусственный спутник Земли

ИСЛ – искусственный спутник Луны

ИСП – искусственный спутник планеты

КА – космический аппарат

РБ – разгонный блок

СК – система координат

ЦМ – центр масс

BFGS – Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Активные исследования малых тел Солнечной системы (астероидов, комет) с помощью автоматических межпланетных станций, которые позволяют изучать эти тела на близком расстоянии, а также контактным методом, начались в 1990-х годах. Малые тела Солнечной системы, как ее реликты, сохраняющие информацию об условиях на ее ранней стадии развития, помогают изучить происхождение и эволюцию всей Солнечной системы. Кроме того, хорошее знание характеристик малых опасных небесных тел, которые могут столкнуться с Землей и тем самым угрожают ее безопасности, позволяет оценить степень этой опасности и принять при необходимости подходящие меры для предотвращения угрозы Земле [4, 8, 9, 32, 34, 63, 67 и др.].

В Таблице 1 представлены некоторые космические миссии, организованные разными странами, для исследования астероидов и комет за последние 20 лет.

Таблица 1.

Космические миссии для исследования астероидов и комет

Название миссии	Время начала миссии	Агентство	Задачи
NEAR	1996 г	NASA	Исследование астероида (253) Mathilde (Мадильт) по пути к (433) Eros (Эросу). Облет астероида Eros, измерение его физических свойств, геологических характеристик и распределения полезных ископаемых.
Deep Space-1	1998 г	NASA	Испытание новейших узлов КА (ионного двигателя, автономной навигации и т.д.), после успешного выполнения начал выполнение дополнительных задач: сближение с астероидом Braille (Брайль) и кометой Borrelly (Борелли).
Stardust	1999 г	NASA	Исследование кометы Wild 2 (Вильда 2) и доставка частиц кометного вещества обратно на Землю.
Hayabusa	2003 г	JAXA	Отработка маршевой ионной ДУ, исследование околоземного астероида

			25143 Itokawa (Итокава) и возвращение образцов с астероида
Rosetta	2004 г	ESA	Исследование кометы 67P/Чурюмова-Герасименко. Облет кометы. Посадка спускаемого аппарата на поверхность кометы.
Deep Impact	2005 г	NASA	Изучение кометы Tempel 1 (Темпеля 1). Сброс зонд на комету, измерение ударного кратера и состава выброшенного вещества. После выполнения миссии аппарат направили к комете Hartley 2 (103P/Хартли).
Dawn	2007 г	NASA	Исследование астероида Vesta (Веста) и карликовой планеты 1 Ceres (Церера).
Чанъэ́-2	2010 г	КНР	После выполнения основной задачи для исследования Луны - дополнительно совершил пролет мимо астероида Toutatis (Таутатис) и на Землю передал снимки поверхности астероида с разрешением 10 метров.
Hayabusa-2	2014 г	JAXA и ESA	Измерение астероида 1999JU3 Ryugu, отработка новых технологий, доставка образцов грунта с астероида.
OSIRIS-REx	2016 г	NASA	Измерение околоземного астероида 1999RQ36 (Bennu), облет вблизи его, приближение к астероиду, взятие грунтов и возвращение на Землю.

Сейчас возрастает роль экспедиций к малым небесным телам с возвращением космического аппарата (КА) от этих тел к Земле, которые позволяют доставить на Землю образцы вещества небесного тела и исследовать их в условиях Земных лабораторий. К данному моменту реально разработаны 4 космические миссии к малым небесным телам с возвращением к Земле. Из них две миссии (“*Stardust”*, NASA, и *“Hayabusa”*, Япония) уже совершили возврат спускаемого аппарата (СА) на Землю. И еще 2 миссии (**“***Hayabusa-2*”, Япония, и “*OSIRIS-REx*”, NASA) осуществляются сейчас. Подробная информация о траекториях этих экспедиций показана в работах [78, 79, 83, 149]. Немного остановимся на последние 3 миссии для полета к астероиду и возврата КА к Земле.

«HAYABUSA», первый космический аппарат, доставивший на Землю образцы грунта астероида, был запущен 9 мая 2003 года японской ракетой-носителем М-5. КА совершил гравитационный маневр у Земли, приблизился к астероиду Itokawa 12 декабря 2005 года. Он провел обширную серию наблюдений дистанционного зондирования астероида, была сделана оценка минерального и химического состава его поверхности. При посадке на астероид, заборе грунта и отлете от астероида были серьезные сложности (потеря связи, отказ в работе двигателя, и др.). Однако грунт удалось забрать. КА отправился на возврат к Земле 4 февраля 2009 года, и капсула с образцами астероида вернулась к Земле 13 июня 2010 года.

Японский КА «HAYABUSA-2» бы запущен 3 декабря 2014 года. 3 декабря 2015 года он совершил гравитационный маневр у Земли, получив дополнительное ускорение, отправился к астероиду 1999 JU3 Ryugu (Рюгу). В июле 2018 «HAYABUSA-2» прибудет к астероиду Рюгу. При подлете планируется обстрелять астероид медным снарядом с зарядом взрывчатки для образования ударного кратера и обнаружения в нем других пород. Небольшой спускаемый аппарат MASCOT, европейского производства, спустится для более детального обследования. По плану КА должен будет доставить на Землю образцы пород с поверхности астероида.

Американская межпланетная станция OSIRIS-REx запущена 8 сентября 2016 года. В сентябре 2018 OSIRIS-REx пребудет к астероиду Bennu (Бенну). После сближения аппарат начнет картографировать астероид и измерять изменение его орбиты в зависимости от нагревания Солнцем. Результаты картографирования будут использованы для выбора места забора грунта, сам забор состоится в 2019 году. После забора вещества, OSIRIS-REx останется на орбите Бенну до весны 2021 года, а возвращение на Землю состоится в 2023.

Отметим, что для этих миссий использовались (или используются) двигатели малой тягой (ДУМТ). Применение ДУМТ уменьшает расход топлива, но, как правило, требует более сложных операций и длительного времени экспедиции. Стремление к уменьшению стоимости космических исследовательских миссий, упрощению и повышению надежности их осуществления определяет важность использования отработанных и надежных ракет-носителей среднего класса и обычных химических двигательных установок большой тяги (ДУБТ). Однако эти ДУ приводят к большому расходу топлива, что делает особенно актуальной оптимизацию межпланетных траекторий экспедиции.

Кроме того, для реализации таких миссий обычно используется схема полета с выходом КА на орбиты искусственного спутника астероида (ИСА), на которых проводятся исследования, облет астероида, измерения, наблюдения поверхности для выбора места забора грунта и т.д. Так как требуется вернуть КА к Земле, время нахождения на орбите ИСА определяется с учетом благоприятной даты возвращения [94]. С этой связана трудная задача обеспечения необходимого времени движения КА у астероида – «времени жизни». К тому же, необходимость высокоточного знания орбиты опасного астероида выявила актуальность задачи создания стабильных орбит спутника астероида со временем жизни спутника до нескольких лет [4, 9]. Реализация таких орбит спутника позволила бы уточнить параметры орбиты опасного астероида и сделать более обоснованные выводы о возможности его столкновения с Землей**.**

Таким образом, **научно-технической задачей**, в рамках которой выполняется диссертационная работа, является осуществление экспедиции КА к опасному астероиду с изучением его характеристик, взятием образцов его грунта, выведением мини-спутника с радиомаяком на долговременную орбиту спутника астероида и с возвращением основного КА к Земле – для решения фундаментальных задач исследования Солнечной системы и уменьшения астероидной опасности. При проектировании траекторий полета КА надо выполнить оптимизацию межпланетных траекторий перелета КА между небесными телами - для уменьшения энергетики полета, а также выбрать рациональные орбиты спутника астероида - для повышения времени жизни его спутника.

Астероид 99942 Apophis (Апофис), обнаруженный в 2004 г., в XXI веке будет иметь несколько сближений с Землей, причем в 2029 году он пролетит от центра Земли на расстоянии лишь около 38 тыс. км — ближе, чем геостационарные спутники [65]. Малые случайные изменения его орбиты могут в дальнейшем привести к столкновению с Землей. Поэтому, с точки зрения проблемы астероидно-кометной опасности (АКО), изучение Апофиса представляет особый интерес и важность, и экспедиция к Апофису изучается в работе.

Американское планетарное общество (Planetary Society) раньше провело международный конкурс по разработке космической миссии в Апофис, чтобы «пометить» астероид Апофис и лучше определить его орбиту и угрозу для Земли. АО «НПО Лавочкина» разрабатывает проект полета к Апофису без возвращения КА к Земле, главной целью которого является выполнение исследований Апофиса и установка радиомаяка на спутнике астероида в пространстве вблизи него с целью проведения более точного измерения его орбиты. Китай также рассматривает Апофис как одну из целей своей будущей программы исследования астероидов, согласно которой планируется осуществить облет астероида Апофис в течение некоторое время для детального наблюдения [147].

Исследование траекторий полета КА к небесным телам и возврата к Земле выполнено в ряде работ [11, 43, 18, 45, 49, 70, 87, 94, 103, 145 и др.], а также в конкретных проектах для полета КА к Луне, Марсу, Фобосу, **“***Stardust”*, “*Hayabusa”*, **“***Hayabusa-2*”, “*OSIRIS-REx*”. В.Ф Гоманн в своей книге [94], исследуя экспедицию на Марс и Венеру, показал, что для оптимизации суммарных расходов с полетом по гоманновским полуэллипсам туда и назад надо выбирать некоторое оптимальное время ожидание у планеты. В начале 1960-х гг. в ОКБ Королева С.П. разрабатывался проект «ТМК» пилотируемой экспедиции к Марсу с возвращением к Земле, в двух вариантах – с ДУБТ и ДУМТ, но он был незавершен. В.А. Ильин и Г.Е. Кузмак в [43] для экспедиции к планете с ДУБТ выполнили анализ и получили условия оптимальности трехимпульсной схемы полета с минимумом суммарной характеристической скорости, с заданием времени ожидания и суммарного времени полета. В.Н. Кубасов и А.А. Дашков в [45] выполнили баллистический анализ экспедиции к Марсу и Венере с ДУБТ – с пассивным облетом планеты, без посадки на нее, и получили численные характеристики скоростей «на бесконечности». В [49] рассматриваются вопросы, связанные со стартом с Земли, с облетом планет-целей, а также с возвращением на Землю. В [18] исследуется проблема построения экстремалей Понтрягина в задачах оптимизации траекторий посещения КА небесным телам с последующим возвращением на Землю. При этом в работах по анализу экспедиций к астероидам обычно используется малая тяга. Нами поставлена актуальная задача анализа экспедиций с помощью ДУБТ с максимизацией полезной массы КА, что более точно, чем обычная минимизация характеристической скорости, отражает энергетическую эффективность траектории и существенно приближает исследование к требованиям реального проекта. Также нами включено в работу исследование орбитального движения спутника астероида с учетом всех важных возмущений - от небесных тел, несферичности астероида, давления солнечного света - для обеспечения оптимального времени возвращения к Земле и стабильной в течение нескольких лет орбиты мини-спутника.

Широкий ряд проблем, связанных с динамикой движения спутника в окрестности небесного тела нерегулярной формой (такого как астероид, комет), представлен в работах [2-4, 7, 25, 27, 28, 50, 57-59, 69, 85, 95-98, 113, 118, 125, 128, 129, 131-138, и др.]. Общая теория орбитального движения спутника представлена в работах [69, 123, 129]. В работах [50, 59] отдельно исследуется движение спутника под действием гравитационных возмущений внешних тел, и солнечного света. Работы [2-4, 7, 13, 14, 27, 28, 61, 85, 118, 125, 128, 131] сфокусированы на исследование движения частицы или спутника около астероида (или комета) при учете только несферичности центрального тела с использованием разных моделей тела. Обсуждены вопросы, связанные с точками либрации около него, периодическим движением, устойчивостью движения, и др. Работы Scheeres D.J. и др. [132, 134, 135] посвящены подробным исследованиям орбит спутника около астероидов 4769 *Castalia*, 4179 *Toutatis* и 433 *Eros*. В работах Поля В.Г., Симонова А.В., Суханова К.Г. [57, 58] исследована стабильность орбит спутника малого тела с учетом возмущений от несферичности тела и притяжения Солнца, применительно к Апофису и Фобосу. В работах [113, 133, 136-138] для анализа проблемы введено и возмущение от давления солнечного света. Однако в выполненных работах отсутствует достаточно полный анализ орбитального движения спутника астероида, в частности, астероида Апофис.

Поэтому построение энергетически оптимальных траекторий для экспедиций Земля-астероид-Земля, с использованием ДУБТ, с учетом выбора орбит пребывания КА у астероида, еще недостаточно изучено и является **актуальной научно-технической задачей.**

Для решения этой проблемы формулируется **цель исследования**: разработка методики построения оптимальных, по максимуму полезной массы аппарата, межпланетных траекторий полета КА к астероиду и возвращения его к Земле с ДУБТ с учетом выбора стабильных, с точки зрения «времени жизни» КА, орбит спутника астероида, и применение этой методики к анализу траекторий экспедиции КА к астероиду Апофис.

Исходя из этого сформулированы следующие **задачи:**

1. Разработка в рамках экспедиции Земля – астероид – Земля методики построения оптимальных по максимуму полезной массы КА межпланетных траекторий для полета КА от Земли к астероиду и возврата КА от астероида к Земле, с помощью ДУБТ.
2. Построение и анализ оптимальных по максимуму полезной массы КА межпланетных траекторий для экспедиции Земля-Апофис-Земля с ДУБТ.
3. Разработка математической модели орбитального движения спутника астероида при учете возмущений от притяжения небесных тел, несферичности астероида и давления солнечного света (ДСС).
4. Анализ орбитального движения спутников Апофиса. Выявление условий, обеспечивающих достаточно стабильные орбиты спутника астероида для длительного (желательно, в течение нескольких лет) пассивного движения спутника вокруг астероида.

Объектом исследования являются экспедиции КА по маршруту Земля-астероид-Земля, с осуществлением межпланетных перелетов от Земли до астероида и от астероида до Земли и полетов по орбитам спутника астероида.

Предметом исследования служат методики определения и исследования оптимальных, по максимуму полезной массы, межпланетных траекторий космической экспедиции для полета КА от Земли к астероиду и возвращения от астероида к Земле, а также параметров орбитального движения космического аппарата около астероида, обеспечивающих максимально длительное «время жизни» спутника астероида.

Используемые методы исследования основываются на применении динамики космического полета, теории оптимизации космического полета, методов оптимизации, небесной механики, численных методов решения систем дифференциальных уравнений.

Научная новизна работы представлена следующими положениями:

1. Разработана методика построения оптимальных, по максимуму полезной массы КА, траекторий экспедиции Земля-астероид-Земля с помощью ДУБТ. Разработаны алгоритмы построения сопряженных функций для этих траекторий, в случае максимизации полезной массы КА.
2. Получены оптимальные траектории полета КА к астероиду Апофис с возвращением к Земле. Выявлено, что для оптимальных траекторий возврат к Земле происходит вблизи восходящего узла орбиты Апофиса относительно эклиптики. Определено оптимальное время ожидания КА у Апофиса. Обоснована реализуемость полученных траекторий при использовании существующих ДУБТ на основе ракет «Союз-ФГ», «Союз-2.1б», «Зенит» и разгонного блока (РБ) «Фрегат», показана принципиальная возможность осуществления космической экспедиции Земля-Апофис-Земля на основе данных ракет при полете в 2019-2022 гг.
3. Разработана математическая модель орбитального движения КА вокруг астероида с учетом важнейших возмущающих факторов, а именно - притяжения нескольких небесных тел (Солнца, Земли, Луны, Венеры, Юпитера и др.), несферичности астероида, как вытянутого эллипсоида вращения, ДСС и с учетом возможного затенения КА несферичным астероидом.
4. Проанализировано влияние возмущающих факторов (по отдельности и совместно) на характеристики пассивного орбитального движения КА вокруг

Апофиса, в частности на «время жизни» КА на орбите спутника астероида. Выявлен «оптимальный выбор» параметров начальной орбиты спутника астероида, при котором «время жизни» КА около Апофиса будет большим. В частности, показана возможность создания стабильных орбит спутника астероида Апофис с временем жизни несколько лет вплоть до тесного сближения с Землей в 2029 г.

Достоверность полученных научных положений, результатов и выводов, приведенных в диссертации, обеспечивается адекватностью полученных моделей и методик решения существующим данным, проверкой разными методами, а также соответствием полученных расчетно-теоретических результатов исследованиям других авторов.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в том, что полученные результаты позволяют:

1. Проводить проектирование и исследование траекторий полета КА для экспедиции Земля - Апофис - Земля.
2. Выбрать орбиты для долговременного движения искусственного спутника в окрестности астероида Апофис.
3. Применить полученные методики к исследованию других околоземных астероидов при учете их характеристик.

На защиту выносятся:

1. Двухэтапная методика определения оптимальных, по максимуму полезной массы, траекторий КА с использованием ДУБТ для экспедиции Земля-астероид-Земля: в центральном ньютоновском поле притяжения Солнца, в импульсной модели – на первом этапе, и при учете возмущений, эфемерид небесных тел и гравитационных потерь от конечности тяги – на втором этапе.
2. Алгоритм построения сопряженных функций для случая максимизации полезной массы экспедиции Земля-астероид-Земля с ДУБТ с учетом различия скоростей истечения газов у двигательных установок и наличия отделения масс.
3. Характеристики энергически оптимальных траекторий для экспедиции Земля-Апофис-Земля в 2019-2022 гг.
4. Математическая модель орбитального движения спутника астероида с учетом

притяжения нескольких небесных тел (Солнца, Земли, Луны, Венеры и Юпитера и др.), несферичности астероида как вытянутого эллипсоида вращения и давления солнечного света, с возможностью затенения КА астероидом.

5. Результаты исследования динамики орбитального движения спутника астероида Апофис с учетом указанных возмущений. Выявление возможности создания стабильных орбит мини-спутника астероида Апофис с временем жизни несколько лет вплоть до тесного сближения с Землей в 2029г.

Апробация результатов работы. Основные положения и результаты диссертационной работы были представлены и обсуждены на следующих международных и всероссийских конференциях:

– 65 и 68 Международные конгрессы астронавтики (Пекин, 2013 г.; Гвадалахара, 2016 г.);
– Second IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems (Рим, 2014 г.);
– XXXIX и XLI Академические чтения по космонавтике (Москва, 2015 г., 2017 г.);
– Международная конференция «Околоземная астрономия» (Терскол, 2015 г., Агой, 2017г.);
– IX Всероссийская конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (Томск, 2016 г.);
– XIII Международная конференция «Забабахинские научные чтения» (Снежинск, 2017 г.);
– Семинар «Механика космического полета» им. В. А. Егорова, МГУ (2017г.);
– 52 Научные чтения памяти К. Э. Циолковского (Калуга, 2017 г.);
– Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (Москва, 2017 г.);
– Конференция ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (ноябрь 2017 г.);
– Расширенный научный семинар «Управление движением естественных небесных тел» (Таруса, 2018 г.).

Публикации. Основные положения и результаты диссертационной работы изложены в 19 научных работах, среди которых 12 статей, из них 10 в изданиях, включенных в перечень рекомендованных ВАК РФ, в частности, 6 - в изданиях, индексируемых Scopus и Web of Science, 1- препринт ИПМ им. М.В. Келдыша.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения, списка литературы. Объем диссертации 150 страниц. Работа включает в себя 64 рисунка и 23 таблицы. Список литературы содержит 151 наименование.

ГЛАВА 1. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЭКСПЕДИЦИИ ДЛЯ ПЕРЕЛЕТА КА ОТ ЗЕМЛИ К АСТЕРОИДУ И ОТ АСТЕРОИДА К ЗЕМЛЕ

В данной главе сначала представлена схема экспедиции, главными целями которой являются исследование астероида, размещение искусственного спутника в его окрестности для долгосрочных измерений, взятие и доставка образцов его грунта обратно на Землю. Разработана двухэтапная методика построения оптимальных межпланетных траекторий полета КА от Земли к астероиду и возврата от астероида к Земле. Разделы 1.2-1.4 посвящены первому этапу – определению оптимальных гелиоцентрических траекторий экспедиции в приближенной модели сфер действия Земли и астероида, в импульсной постановке. В разделе 1.5 изложен второй этап решения задачи – уточнение характеристик оптимальных траекторий в более точной модели с учетом параметров траекторий на геоцентрических и астероидоцентрических участках, возмущений, эфемерид небесных тел и гравитационных потерь.

Точный метод расчета траекторий КА требует больших временных затрат. Для предварительного проектного анализа используются приближенные методы, основанные на сферах действия. Полный метод сфер действия достаточно сложен в вычислительном отношении, он применялся к расчету Лунных траекторий КА в начале космических исследований [22, 23, 123]. Более подходящим для приближенного анализа межпланетных траекторий (и лунных траекторий также [24, 30, 43]) стал его упрощенный вариант – модель точечных сфер действия планет [45, 55]. Для этой модели на гелиоцентрических участках траектории, вне сфер действия планет, учитывается только притяжение Солнца, причем сферы действия планет считаются точечными. На планетоцентрических участках траектории, внутри сфер действия планет, учитывается только притяжение соответствующей планеты. Приближенно эти участки могут соединяться на границе сферы действия. Существуют в небесной механике различные определения понятия «сферы действия, влияния» планеты [55, 56]. В данной диссертационной работе под «сферой действия» планеты относительно Солнца мы понимаем сферу с центром в центре масс планеты, и радиус сферы определяется по формуле

$$\rho_{СД} = D\left(\frac{m}{M_S}\right)^{2/5}. \tag{1.1}$$

Здесь D – среднее расстояние от данной планеты до Солнца, m – масса планеты, M_S – масса Солнца. Радиус сферы действия Земли относительно Солнца равен 925000 км. Радиус сферы действия астероида Апофис относительно Солнца ~ 2 км (масса Апофиса ~ 2.7– $4.3\cdot10^{10}$ кг).

При определении импульсной межпланетной траектории используется задача Эйлера-Ламберта, заключающаяся в определении траектории перелета между двумя заданными положениями за заданное время. На сегодняшний день, основываясь на фундаментальных работах, выполненных, в частности, Эйлером, Ламбертом, Лагранжем и Гауссом, разработано много подходов к решению этой проблемы [62, 76, 77, 80, 92, 102, 111, 112, 121, 142 и др.]. Классический метод ее решения, основанный на определении большой полуоси орбиты, описан в работах [56, 69]. Хороший обзор нескольких методов дан в работе [74]. Все подходы стремятся найти надежные и эффективные алгоритмы, способные функционировать для широкого диапазона условий. Работы Ланкастера (Lancaster E.R.) и его коллеги [111, 112] свели решение проблемы Эйлера-Ламберта к выполнению итераций, каждая из которых требует вычисления только одной обратной тригонометрической или гиперболической функции. Р. Бэттин (R. Battin) [15] разработал метод, основанный на гипергеометрических функциях и цепных дробях. Гудин (Gooding R.H.) на основе работы Ланкастера построил и опубликовал процедуру, позволяющую быстро найти высокоточное решение для всех случаев орбит [92]. Иццо (Izzo D.), основываясь на подходе Гудина, предложил метод с использованием итерационной схемы Householder (Хаусхолдера) и более простых начальных приближений для итераций [102]. Кроме этого, еще предложены многие другие алгоритмы [76, 77, 121, 142 и др.]. Они отличаются друг от друга, по крайней мере, одним из следующих основных компонентов алгоритма: 1) переменная итерационного процесса (непосредственно связанная с уравнением времени полета); 2) алгоритм итераций; 3) начальное приближение для итерационной процедуры; 4) восстановление параметров орбиты по решению уравнения Ламберта. В данной работе мы используем алгоритм, предложенный Иццо [102], его краткое описание представлено в Приложение. А.

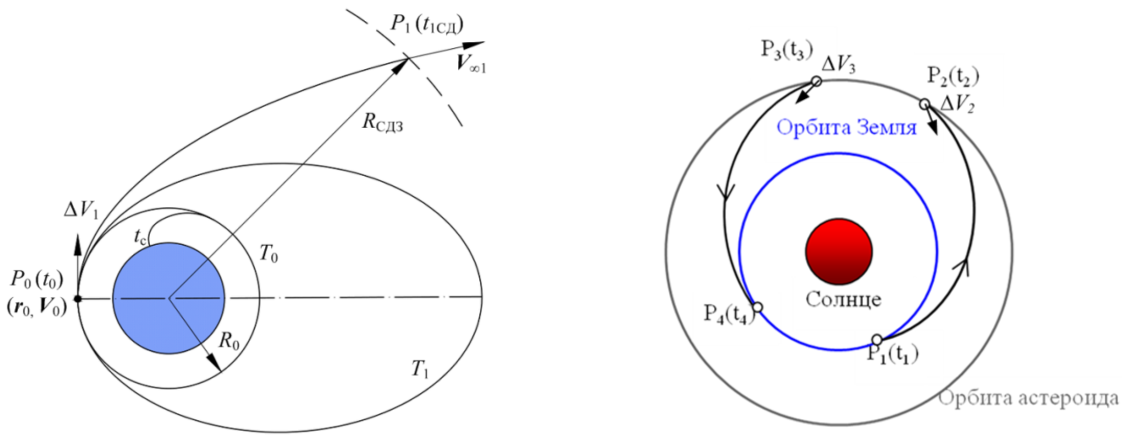
Проблемы оптимизации траекторий и параметров КА рассмотрены в ряде книг и статьей [6, 18, 19, 26, 30, 31, 43, 44, 52, 54, 60, 66, 71-73, 75, 116, 117, 119 и др.]. Качественно, приближенно методы оптимизации траекторий можно разделить на два основных типа: непрямые и прямые [52, 53, 144]. Прямые методы осуществляют варьирование траекторий с улучшением функционала. В частности, задача может быть преобразована к форме параметрической оптимизации и решаться с помощью нелинейного программирования. Непрямые методы обычно основаны на необходимых условиях оптимальности, и задача оптимизации сводится к решению двухточечной краевой задачи на основе, например, принципа максимума Л.С. Понтрягина [51]. Может быть комбинирование обоих методов (например, [35]).

Классическим способом поиска окна запуска для полета КА к другим планетам является построение графика изолиний функционала (например, характеристическая скорость, полезная масса КА, конечная масса КА и т.д.) со временем запуска и временем прибытия в качестве координат [45, 55]. Каждая точка в этом графике получается путем решения задачи Эйлера-Ламберта и определения значения функционала. Этот график дает качественную картину функционала и основные его свойства – число оптимумов, положение и величина глобального оптимума, соответствующие аргументы. Однако, так как основу этого метода составляет обычно прямой перебор, то при увеличении размерности пространства получается низкая эффективность, связанная с большими вычислительными расходами. И. М. Соболь [64] предложил для «зондирования» пространства параметров метод ЛП-поиска с использованием в качестве пробных точек точки $ЛП_{\tau}$ - последовательностей, которые равномерно распределены в исследуемом пространстве. Этот метод оказывается очень эффективным и полезным при поиске оптимума в многомерном пространстве.

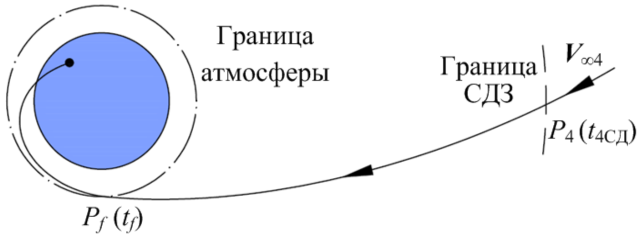
Кроме того, отметим, что в рамках современных методов определения оптимальных траекторий часто используется так называемая интеллектуальная многомерная оптимизация без вычисления производных, и получаются траектории, близкие к глобальному оптимуму. В [86, 101, 127] для проектирования межпланетных траекторий КА используются генетические алгоритмы, нейронные сети и другие методы, сравниваются их достоинства и недостатки. В данной главе дадим краткое описание классического генетического алгоритма, который будет использоваться в следующей главе.

Теория базис-вектора, впервые предложенная Лоуденом (Lawden D.F.) [116], широко используется при анализе, проектировании и оптимизации траекторий перелета КА. Лоуден Д.Ф. в рамках импульсных перелетов вывел необходимые условия оптимальных траекторий с минимумом затрат топлива. Лайон (Lion P.M.) и Хэнделсмен (Handelsman M.) [117], распространившие эту теорию на неоптимальные траектории, предложили метод улучшения неоптимальных траекторий с закрепленным временем полета и доказали, что введение начального, пассивного участка или дополнительного внутреннего импульса часто может улучшить траекторию. Мы будем использовать эту теорию для проверки выполнения условия оптимальности для полученных траекторий.

1.1 Рассмотренная схема экспедиции



(а) (б)



(в)

Рис.1.1. Схема полета для экспедиции «Земля – астероид – Земля»: (а) и (в) - приземные участки, (б) - межпланетные участки.

Рассмотрена следующая схема перелета Земля-астероид-Земля (см. Рис.1.1). Ракета-носитель (РН) выводит КА с РБ на опорную орбиту с радиусом R_0. После пассивного движения по данной орбите в некоторый момент t_0 сообщается импульс скорости $\Delta\mathbf{V}_1$, производится разгон КА, в результате чего КА переводится на орбиту полета к астероиду. Затем РБ отделяется от КА, и в момент $t_{1сд}$ аппарат выходит из сферы действия Земли. Дальнейшие маневры осуществляются с помощью второй двигательной установки большой тяги ДУ2. Далее, в момент t_2 КА подлетает к астероиду. С помощью ДУ2 сообщается импульс скорости $\Delta\mathbf{V}_2$, осуществляется торможение КА, и КА переходит на низкую орбиту спутника астероида. В окрестности астероида КА пребывает некоторое время Δt_{23}, это – «время ожидания». В течение этого времени возможны посадка на поверхность астероида, взятие образцов его грунта и другие исследования. Одной из главных целей экспедиций может быть установка мини-спутника астероида с радиомаяком с целью проведения более точного измерения орбиты астероида. Поэтому предполагаем, что после специальных маневров от основного КА отделяется и оставляется на некоторой орбите спутника астероида мини-аппарат с радиомаяком, который должен летать вокруг астероида в течение нескольких лет. Затем, в момент t_3 сообщается импульс скорости $\Delta\mathbf{V}_3$, КА разгоняется и переходит на траекторию возвращения к Земле. В момент $t_{4сд}$ КА подлетает к сфере действия Земли. От КА отделяется спускаемый аппарат, в момент t_f происходит его гиперболический вход в атмосферу Земли, затем - торможение, посадка.

С учетом сложности силового поля в космическом пространстве разработана двухэтапная методика построения траекторий экспедиции. На первом этапе анализа используется указанный метод точечных сфер действия Земли и астероида. На втором этапе учитываются возмущения.

1.2 Определение гелиоцентрических межпланетных участков траектории перелета КА – этап 1 методики

Очень важно выбрать гелиоцентрические участки всей траектории полета космического аппарата, которые непосредственно определяют время полета и необходимые расходы топлива для отлета от Земли и маневров у астероида. Путем решения задачи импульсных перелетов КА на гелиоцентрических участках можно приближенно определить зависимость между временами запуска от Земли и астероида, прилета к астероиду и Земле и расходом топлива.

На данном первом этапе анализа для определения траекторий перелета КА используется метод точечных сфер действия Земли и астероида в центральном ньютоновском поле притяжения Солнца. Процесс заключается в следующем:

1. Выбрать граничные времена (t_1, t_2, t_3, t_4,), где t_1 – время отлета от орбиты Земли, t_2 – время подлета к астероиду (цели), t_3 – время отлета от цели и t_4 – время подлета к орбите Земли;
2. Определить положения Земли $\mathbf{R}_E$ (t_1), $\mathbf{R}_E$ (t_4), скорости Земли $\mathbf{V}_E$ (t_1), $\mathbf{V}_E$ (t_4) и положения, скорости цели $\mathbf{R}_A$ (t_2), $\mathbf{V}_A$ (t_2), $\mathbf{R}_A$ (t_3), $\mathbf{V}_A$ (t_3) по их элементам орбиты или по эфемеридам;
3. Определить угловые дальности u_{12} (между векторами $\mathbf{R}_E$ (t_1), $\mathbf{R}_A$ (t_2)), u_{34} (между векторами $\mathbf{R}_A$ (t_3), $\mathbf{R}_E$ (t_4)) и задать число полных оборотов по орбите КА на каждом участке перелета N_1, N_2;
4. Двукратно решить задачу Ламберта с помощью известных данных: (t_2- t_1), u_{12}, N_1, $\mathbf{R}_E$ (t_1), $\mathbf{R}_A$ (t_2) и (t_4- t_3), u_{34}, N_2, $\mathbf{R}_A$ (t_3), $\mathbf{R}_E$ (t_4). Определить векторы скорости КА $\mathbf{V}_{KA}$ (t_1), $\mathbf{V}_{KA}$ (t_2), $\mathbf{V}_{KA}$ (t_3), $\mathbf{V}_{KA}$ (t_4) и параметры орбит перелета КА;
5. Определить скорости «на бесконечности» в начале и конце перелетов:

$$\mathbf{V}_{\infty i} = \mathbf{V}_{KA}\left(t_i\right) - \mathbf{V}^*\left(t_i\right), \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{V}^*(t_i)$=$\mathbf{V}_E(t_i)$ при i=1,4; $\mathbf{V}^*(t_i)$=$\mathbf{V}_A(t_i)$ при i=2,3. Данные скорости позволят определить импульсы скорости для маневров:

$$\Delta V_i = \sqrt{V_{\infty i}^2 + \frac{2\mu_i}{r_i}} - \sqrt{\frac{\mu_i}{r_i}}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

где ΔV_1 - для разгона от Земли, ΔV_2 - для торможения у астероида, ΔV_3 - для разгона от астероида; $\mu_i = \mu_E$, r_i -радиус опорной орбиты ИСЗ при i = 1; $\mu_i = \mu_A$, r_i - радиус орбиты искусственного спутника цели-астероида при i = 2, 3. Характеристической скоростью является сумма этих трех импульсов скорости:

$$V_{хар} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3. \tag{1.4}$$

Эта скорость широко используется для оценки затраты топлива при анализе оптимальных перелетов КА.

Если эти импульсы скорости сообщаются одной двигательной установкой и без отделения промежуточных масс, то минимум характеристической скорости приводит к максимуму конечной массы. В более общем случае, когда используются разные двигательные установки для маневров около Земли и около астероида и есть отделение масс, более эффективно применять для оптимизации траектории максимизацию конечной массы m_f. Еще более точно энергетическую эффективность траектории отражает максимизация полезной массы m_P [37, 75]. Конечная и полезная масса КА определяются следующим образом:

1) Масса КА в начале гелиоцентрического полета определяется уравнением:

$$m(t_1) = m(t_0)\exp\left(-\frac{\Delta V_1}{c_1}\right) - m_{1E}, \tag{1.5}$$

где $m(t_0)$ – начальная масса КА на опорной орбите ИСЗ, c_1 - скорость истечения газов из разгонного блока, m_{1E}- масса отделяемого блока.

2) По импульсам ΔV_2 и ΔV_3 вычисляем массы КА после их приложения с помощью ДУ2, в частности, конечную массу КА m_f.

$$m(t_2) = m(t_1)\exp\left(-\frac{\Delta V_2}{c_2}\right), m_f = m(t_2)\exp\left(-\frac{\Delta V_3}{c_2}\right), \tag{1.6}$$

где c_2 - скорость истечения для ДУ2.

3) Для определения полезной массы вычисляем массу ДУ2:

$$m_{2E} = m_{20} + a_{T2} m_{T2},\ m_{T2} = m(t_1) - m_f\,; \qquad (1.7)$$

здесь m_{20} - постоянная составляющая массы, a_{T2} - коэффициент массы топливных баков, m_{T2} - масса топлива на коррекции, торможение и разгон у астероида. Вычитая эту массу ДУ2 из конечной массы, получаем полезную массу m_p:

$$m_p = m_f - m_{2E}\,. \qquad (1.8a)$$

Влияние коррекций и отделений масс у астероида будет учтено далее, на этапе 2.

1.3 Оптимизация гелиоцентрических траекторий перелета КА для экспедиции Земля-астероид-Земля

1.3.1 Постановка задачи

Для основного анализа в качестве величины оптимизации берется полезная масса КА m_p. Оптимальная траектория имеет максимальное значение m_p:

$$m_p \to \max. \qquad (1.8b)$$

Кроме того, рассмотрены и другие критерия оптимизации:

1) максимизации конечной массы КА

$$m_f \to \max; \qquad (1.8c)$$

2) минимизации характеристической скорости

$$V_{\text{хар}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \to \min. \qquad (1.8d)$$

Основная задача оптимизации (1) сформулирована следующим образом: при заданной общей продолжительности экспедиции $\Delta t_\Sigma = t_4 - t_1$, и заданном времени пребывания КА у астероида $\Delta t_{23} = t_3 - t_2$ оптимизируются время старта t_1, и время перелета от Земли до астероида $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$, в заданных множествах, чтобы выполнялись вышеуказанные критерии. Эта постановка близка к [43]. В данной работе рассматриваются и дополнительные задачи оптимизации по вышеуказанным критериям:

2. При заданном времени Δt_{23} и ограничении на общую продолжительность экспедиции Δt_Σ (например, $\Delta t_\Sigma \le 2$ года) оптимизируются t_1, Δt_{12}, и Δt_Σ.
3. При заданном времени Δt_Σ, оптимизируются t_1, Δt_{12}, и Δt_{23}.
4. При ограничении на Δt_Σ, оптимизируются времена Δt_Σ, t_1, Δt_{12}, и Δt_{23}.

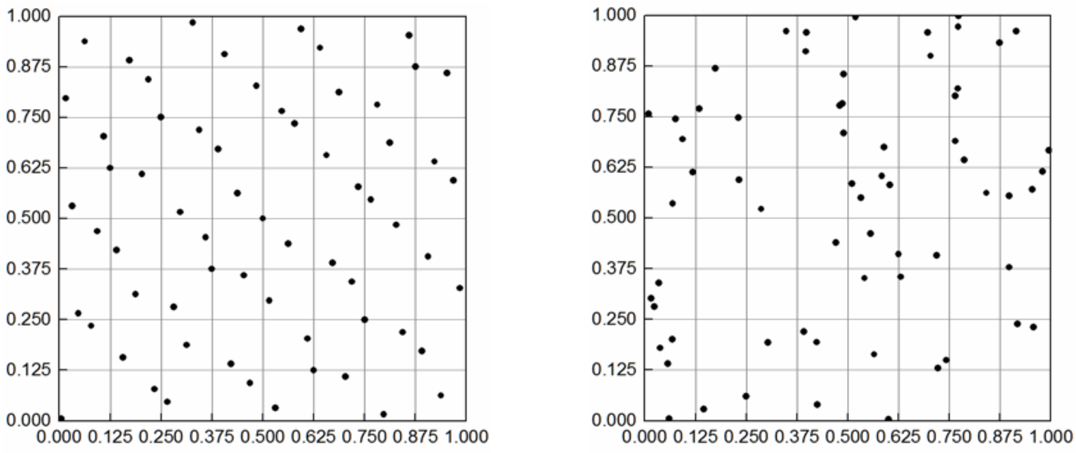
5. Полная четырехпараметрическая оптимизация с учетом ограничения на скорость входа КА в атмосферу Земли $V_{вх}$: $V_{вх} \leq V_{max}$.

1.3.2 Метод Соболя И.М. для «зондирования» пространства параметров

Распространен прямой перебор, он предполагает формирование, обычно с равномерным шагом, пробных точек в пространстве поиска, и вычисление для каждой из них значения функционала. На основе полученных результатов для двухмерного случая построение графиков изолиний функционала позволяет обычно найти соответствующие оптимумы за приемлемое время. Если же размерность задачи оптимизации повышается, то эффективность прямого перебора может быть мала, и его может быть трудно применить. Таким примером могут служить дополнительные задачи. Поэтому нами применяется метод Соболя И.М. [64]. В рамках этого метода используется детерминированный подход для построения точек последовательностей, которые равномерно расположены в области поиска. Чем более равномерное распределение этих точек в области исследования, тем лучше. В [64] было предложено использовать точки $ЛП_{\tau}$-последовательностей в качестве пробных. На Рис.1.2 приведена диаграмма расположения случайных и точек $ЛП_{\tau}$-последовательностей в двумерной области. Данный рисунок наглядно подтверждает большую равномерность покрытия области точками $ЛП_{\tau}$-последовательностей (см. Рис.1.2(а)) по сравнению со случайными (см. Рис.1.2(б)).

Расположение 64 точек в единичном квадрате перебором x_1, x_2 с шагом 0.00625 показано на Рис.1.3. Как и на Рис.1.2(а), здесь, на первый взгляд, так же показалась хорошая равномерность – каждый маленький квадрат содержит одну, и только одну точку. Однако, ситуация может измениться, если функция $f(x_1, x_2)$ только сильно связана с одним из параметров x_1, x_2. Например, если $f(x_1, x_2) \approx f(x_1)$, то после вычисления значения функции f на каждой точке сетки, показанной на Рис.1.3, получается практически только 8 различных решений. Как бы потеряна большая информация о функции и большое вычислительное время потрачено впустую. В этом случае, используя сетку, построенную точками $ЛП_{\tau}$-

последовательностей, можно получить 64 различных решений.



(а) (б)

Рис.1.2. Расположение 64 точек в единичном квадрате: (а) точки ЛП$_\tau$-последовательностей; (б) случайные точки.

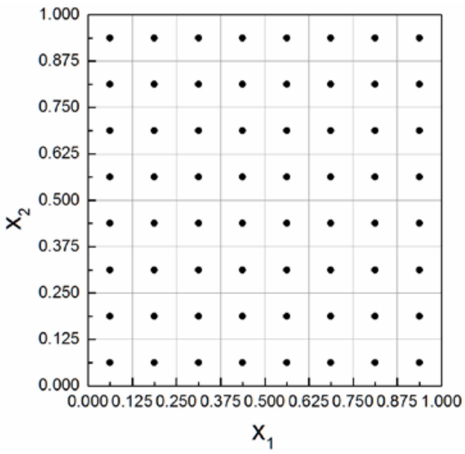


Рис.1.3. Расположение 64 точек в единичном квадрате перебором x_1,x_2 с шагом 0.00625.

Кроме того, можно одновременно оценить максимумы и (или) минимумы нескольких функций по одним и тем же пробным точкам. В итоге, точки ЛП$_\tau$-последовательностей позволяют дать хорошее представление о значении функционала со сравнительно меньшим количеством вычислений.

На подробных сведениях о методе построения и свойстве точек ЛП$_\tau$-последовательностей мы здесь не останавливаемся. Детальное описание можно найти в работах [64, 122, 143]. Ниже приведена общая схема вычисления точек ЛП$_\tau$-последовательностей, которые будут использоваться нами. Согласно работе Соболя И.М. [64], обозначим номер точки i, который в двоичной системе записывается в виде

$$i = e_m e_{m-1} \cdots e_2 e_1,$$

где e = 0 или 1, m - количество бит в двоичном числе. Тогда координаты i-ой точки ЛП$_\tau$- последовательностей $Q_i = (q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,n})$ определяются следующим образом

$$m = 1 + \left[\ln i / \ln 2\right], \tag{1.9}$$

$$q_{i,j} = \sum_{k==1}^{m} 2^{-k+1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=k}^{m} \left[2\left\{ i2^{-l} \right\} \right] \left[2\left\{ r_j^{(l)} 2^{k-1-l} \right\} \right] \right\}, \tag{1.10}$$

где n - количество оптимизируемых переменных (размерность области исследования), j=1,2…, n. В формулах (1.9), (1.10) [z] – целая часть, {z}- дробная часть числа z. $r_j^{(l)}$ – числители направляющих чисел, в Таблице 2 приведены значения $r_j^{(l)}$ до l =20, j=4 [64].

Таблица 2.

Таблица числителей $r_j^{(l)}$

j	l=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	5	15	17	51	85	255	257	771	1285	3855
3	1	1	7	11	13	61	67	79	465	721	823	4091
4	1	3	7	5	7	43	49	147	439	1013	727	987

j	l=13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4369	13107	21845	65535	65537	196611	327685	983055
3	4125	4141	28723	45311	53505	250113	276231	326411
4	5889	6915	16647	49925	116487	83243	116529	715667

В последнее время разработаны некоторые алгоритмы для вычисления точки ЛП$_\tau$-последовательностей [105, 106], которые позволяют ускорять процесс расчета и применять метод для сложных задач с большей размерностью.

При заданном нижнем пределе L_b и верхнем пределе U_b области исследования координаты пробных точек P_i в данной области определяются формулами:

$$\alpha_{i,j} = L_b(j) + \left[U_b(j) - L_b(j)\right] \cdot q_{i,j}, \quad P_i = \left[\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n}\right]. \qquad (1.11)$$

Эти точки дают лучшее представление информации в области исследования. Проведение поиска по ним позволяет быстро найти области, где расположены локальные оптимумы и глобальный оптимум.

1.3.3 Простой генетический алгоритм

Нахождение глобального оптимума всегда является проблемой для любого метода оптимизации. Поэтому для получения лучшего решения часто рекомендуется сочетание нескольких методов. В данной работе для решения задачи оптимизация кроме метода Соболя применяем простой генетический алгоритм (ГА). Главные особенности ГА заключаются в следующем:

1. Стратегия группового поиска. Поиск решения осуществляется не из одной точки, а из некоторого множества решений (популяции).
2. Генетические алгоритмы не требуют производных целевой функции и других дополнительных информаций.
3. Используются вероятностные правила выбора.
4. Генетические алгоритмы пригодны для решения сложных нелинейных задач оптимизации.

ГА используют принципы и терминологию, заимствованные у биологической науки – генетики. В ГА каждая особь представляет потенциальное решение некоторой задачи. Каждой особи предоставляется определенная пригодность путем вычисления значения фитнесс-функции. Множество этих особей называется популяцией. В процессе эволюции популяции с помощью генетических операторов - репродукции, кроссинговера и мутации, генерируют новые популяции. При этом особи с лучшими значениями целевой функции (пригодности) с большей вероятностью переходят в следующее поколение, т.е. в следующую итерацию. Таким образом, после нескольких поколений (итераций) решения сходятся к оптимальному.

Основная схема работы ГА заключены в следующем:

1. Генерируем начальную популяцию из N особей (пробных решений).

2. Вычисляем для каждой особи ее пригодность.
3. Выбираем пару особей-родителей с помощью одного из способов отбора.
4. Проводим кроссинговер двух родителей с вероятностью p_c, производя двух потомков.
5. Проводим мутацию потомков с вероятностью p_m.
6. Повторяем шаги 3-5, пока не будет сгенерировано новое поколение популяции, содержащее N особей.
7. Повторяем шаги 2-6, пока не будет достигнут критерий окончания процесса.

В настоящее время ГА - это целый класс алгоритмов, направленный на решение разнообразных задач. Каждый из пунктов 1-5 может быть реализован различными способами. Дальше посмотрим основные моменты классического (простого) ГА.

Особи начальной популяции сгенерированы случайным образом и представлены в виде двоичного вектора (хромосом). Длина этого вектора зависит от требуемой точности решения. Например, переменная x находится на отрезке [-10, 10], точности требуется до 3 знаков после запятой, тогда длина кода будет наименьшим целым числом, которое больше чем log2{[10-(-10)]/0.001}, т.е. 15.

Принцип естественного отбора заключает в том, что в конкурентной борьбе выживает наиболее приспособленный. Приспособленность особи определяется фитнесс-функцией. Фитнесс-функция служит, прежде всего, для отбора особей для дальнейшей репродукции. При выборе фитнесс-функции важно различать характеристики одной особи от других. В наших задачах фитнесс-функция может быть самой целевой функцией для оптимизации полезной массы: чем больше значение m_p, тем более приспособленной является особь. При минимизации характеристической скорости $V_{хар}$, фитнесс-функция может быть в виде $f = 1/V_{хар}$ или $f = -V_{хар}$. Тогда чем меньше значение $V_{хар}$, тем больше значение фитнисс-функции и более приспособленной является особь.

Существует несколько подходов к выбору родительской пары. Самой простой и популярный метод реализации оператора выбора родителей является рулеточным отбором. Колесо рулетки содержит по одному сектору для каждого члена популяции. Размер i-го сектора пропорционален вероятности попадания в новую популяцию $P(i)$, вычисляемой по формуле:

$$P(i)=\frac{f(i)}{\sum_{i=1}^{N} f(i)}$$

где $f(i)$ –пригодность i-ой особи, N- размер популяции. Обозначим накопленную вероятность

$$PP(i)=\sum_{j=1}^{i} P(i), \quad PP(0)=0.$$

В методе рулетки особи отбираются с помощью N «запусков» рулетки. Каждый раз вращая колесо рулетки, генерируется число r на отрезке [0, 1] случайным образом. Если удовлетворяется условие

$$PP(i\text{-}1) \le \mathrm{r} < PP(i),$$

то i-ая особь копируется в промежуточную популяцию для дальнейшего "размножения". Ожидаемое число копий i-ой особи после оператора рулетки определяются по формуле $N(i)=P(i)N$.

В простом ГА используется одноточечный кроссинговер для рекомбинации бинарных строк. Пусть имеются две особи (родители), выбранные случайно из промежуточной популяции, сформированной после выполнения оператора выбора родителей, $A=\{a_i,\ i\in[1,\ L]\}$ и $B=\{b_i,\ i\in[1,\ L]\}$. Случайно выбирается точка кроссинговера (точка разрыва) – число k из диапазона $[1, L\text{-}1]$. Две новых особи A', B' (потомки) формируются из A и B путем обмена подстрок после точки кроссинговера (см. Рис.1.4).

$$\begin{array}{l} A=a_1a_2\ldots a_k \mid a_{k+1}\ldots a_L \\ B=b_1b_2\ldots b_k \mid b_{k+1}\ldots b_L \\ \text{Родители} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} A'=a_1a_2\ldots a_k\ \ b_{k+1}\ldots b_L \\ B'=b_1b_2\ldots b_k\ \ a_{k+1}\ldots a_L \\ \text{Потомки} \end{array}$$

Рис.1.4 Одноточечный кроссинговер

Следует отметить, что оператор кроссинговера выполняется с заданной вероятностью p_c, т.е. отобранные два родителя не обязательно производят потомков, а просто передаются в новую популяцию.

После процесса воспроизводства происходят мутации – случайное изменение гена в хромосоме с вероятностью p_m. Для особей, кодированных двоичным кодом, мутация заключается в случайном инвертировании гена (0 заменяется на 1 или наоборот). Вероятность мутации p_{m} (как правило, $p_m << 1$) может являться или фиксированным случайным числом на отрезке [0, 1], или функцией от какой – либо характеристики решаемой задачи.

Дальше мутировавшие потомки занимают места своих родителей, и образуется новая популяция. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнут критерий окончания алгоритма.

Обычно, ГА относительно стойки к попаданию в локальные оптимумы. Однако, из-за случайности при реализации основных операторов (выбор родителей, рекомбинация, мутация), для многоэкстремальных функций, особенно, на поверхности которых большие плоские участки (т.е. значения функция для многих пробных точек одинаковы), эффективность простого ГА значительно уменьшается. В этом случае, чтобы избежать нежелательных ситуаций, когда все точки попадают в окрестность локального оптимума или в плоские участки, при выборе начальной популяции целесообразно можно использовать точки $ЛП_\tau$-последовательностей.

1.3.4 Квазиньютоновский метод – BFGS метод

Квазиньютоновские методы объединяют метод Ньютона и метод наискорейшего спуска на k-й итерации с заменой матрицы Гессе G_k целевой функции f на A_k – аппроксимацию матрицы G_k с учетом информации о градиенте функции f [10]. При их применении упрощается процедура нахождения направления спуска на k-й итерации, и в то же время удается сохранить высокую скорость сходимости метода Ньютона. Разные квазиньютоновские методы отличаются способами построения последовательности $\{A_k\}$ матриц.

Для контроля процесса в случае многомерной оптимизации в диссертационной работе применяется один из квазиньютоновских методов –

популярный BFGS метод, предложенный Broyden C.G., Fletcher R., Goldfarb D. и Shanno D.F. [84, 88, 91, 141]. Ниже опишем алгоритм BFGS метода для минимизации функции $f(\boldsymbol{x})$. На предварительном этапе задаем точность $0< \varepsilon <<1$ в условии прекращения итераций и начальную точку $\boldsymbol{x}_0$. В качестве A_0 берут единичную матрицу I_n порядка n (размерность $\boldsymbol{x}_0$). Полагаем $k = 0$.

1. Вычисляем градиент $\boldsymbol{g}_k = \text{grad } f(\boldsymbol{x}_k)$ и проверяем выполнение неравенства $|\boldsymbol{g}_k| < \varepsilon$. Если оно выполнено, то итерации прекращаем и полагаем $\boldsymbol{x}_k$- решение задачи оптимизации и $f(\boldsymbol{x}_k)$ - оптимальное значение функционала. В противном случае переходим к п. 2.

2. Определяем направление спуска из точки $\boldsymbol{x}_k$ по формуле

$$\boldsymbol{d}_k = -A_k^{-1}\boldsymbol{g}_k . \tag{1.12}$$

3. Минимизируя функцию $\psi_k(\alpha)= f(\boldsymbol{x}_k + \alpha\boldsymbol{d}_k)$, находим значение α_k и точку $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k\boldsymbol{d}_k$. При этом используется нечеткий линейный поиск, а именно - правило Армихо (*Armijo rule*) [108], также известный как метод дробления шага [10]. Алгоритм этого метода представлен в следующем:

а) Задаем $\delta\in(0,1)$, $\sigma\in(0,0.5)$. Полагаем m=0.

б) Проверяем выполнение неравенства

$$f(\boldsymbol{x}_k + \delta^m \boldsymbol{d}_k) \le f(\boldsymbol{x}_k) + \sigma\delta^m \boldsymbol{g}_k^T \boldsymbol{d}_k . \tag{1.13}$$

Если оно не выполнено, то $m=m+1$, переходим к п. (а), а в противном случае полагаем $m_k=m$, $\alpha_k=\delta^{mk}$, $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k\boldsymbol{d}_k$.

4. Вычисляем матрицу A_{k+1} по поправочной формуле BFGS

$$A_{k+1} = A_k - \frac{A_k s_k s_k^T A_k}{A_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k},$$

где $s_k= \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k$, $y_k= \boldsymbol{g}_{k+1} - \boldsymbol{g}_k$. Чтобы обеспечить условие, что последовательность $\{A_k\}$ матриц будет положительно определена с использованием правила Армихо, применяется следующая формула

$$A_{k+1} = \begin{cases} A_k, & \text{если } y_k^T s_k \le 0, \\ A_k - \dfrac{A_k s_k s_k^T A_k}{A_k s_k} + \dfrac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}, & \text{если } y_k^T s_k > 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

5. Полагаем $k = k + 1$ и возвращаемся к п.1.

1.3.5 Схема принятого комплексного метода оптимизации

Для поиска решений, как можно более близких к глобальному оптимуму, в данной работе используется комбинированный метод оптимизации на основе методов, представленных в разделах 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4. Блок-схема этого метода для максимизации полезной массы экспедиции показана на Рис. 1.5.

Сначала для глобальной оптимизации применяется метод Соболя И.М., получаем множество решений *P*, удовлетворяющее условию $m_p>0$. При этом число пробных точек должно быть выбрано таким образом, чтобы уменьшить количество итераций, и чтобы обеспечить немалое количество решений в множестве *P*. На этапе локальной оптимизации можно напрямую использовать и ГА, и BFGS метод. Благодаря той особенности ГА, что он оперирует всем множеством решений, переход от глобальной оптимизации к локальной легко может быть полностью автоматизирован без вмешательства человека. А автоматическая идентификация всех локальных оптимумов, как требуется при использовании BFGS метода, является сложной задачей. Поэтому в качестве основного метода локальной оптимизации применяется ГА. С другой стороны, ввиду вероятного характера при реализации основных операторов (выбор родителей, рекомбинация, мутация) ГА, для получения надежного решения только методом ГА придется повторить запуск ГА много раз. Для компенсации этого недостатка, после запуска ГА 1 - 3 раза, на основе лучшего из них результата выполняется дальнейшая оптимизация с помощью BFGS метода (для основной задачи 1 и дополнительных задач 2, 3, 4).

В конце процесса получим не только предполагаемую глобальную оптимальную траекторию, но и множество других траекторий, распределенных в тех областях поискового пространства, где могут быть найдены хорошие решения. Таким образом, получается полное представление о пространстве решений, которое необходимо на предварительных этапах процесса проектирования траектории, когда требования меняются довольно часто (например, границы и ограничения), и когда трудно каждый раз запустить новую оптимизацию.

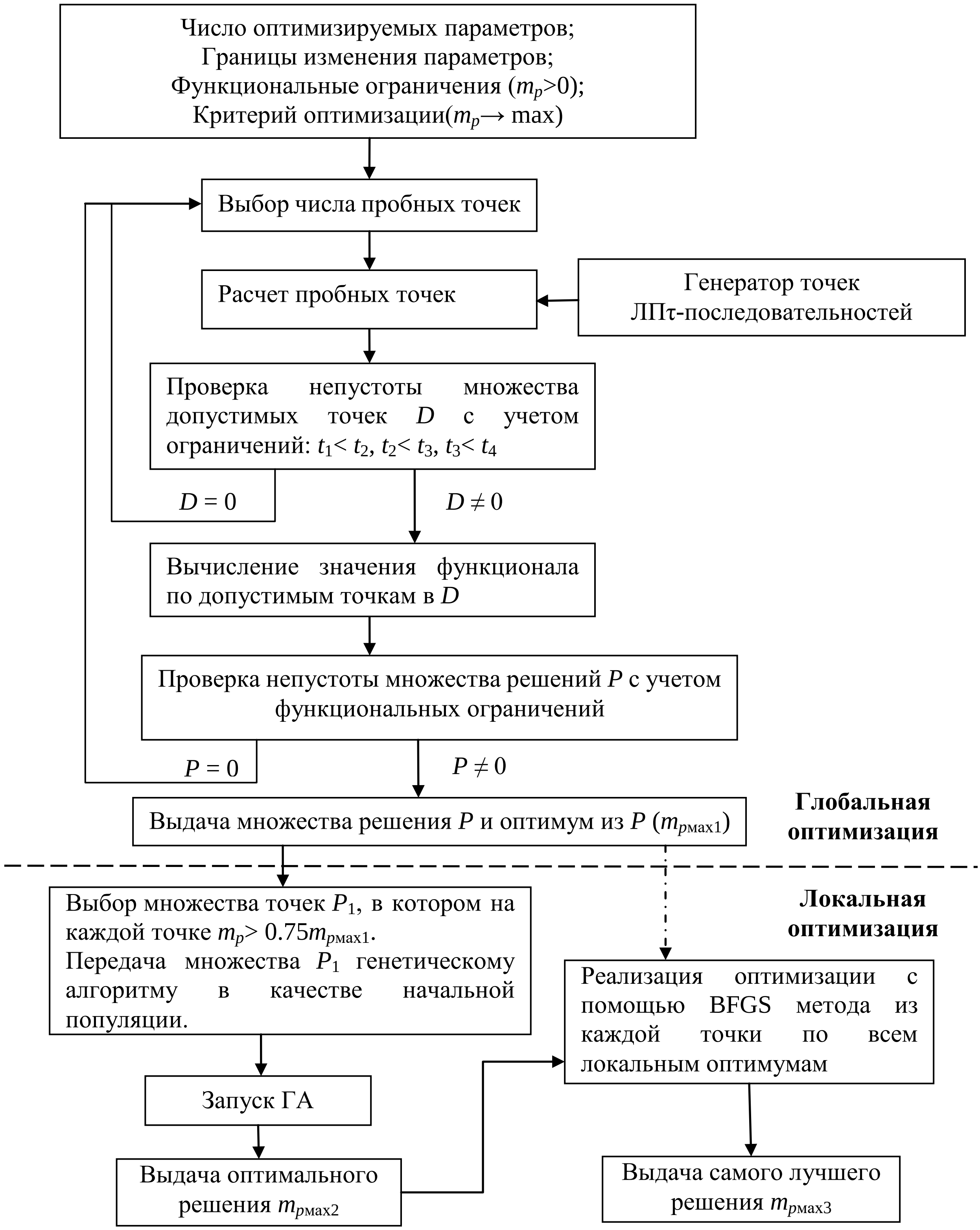


Рис.1.5 Блок - схема комбинированного метода оптимизации

1.4 Проверка необходимых условий оптимальности с помощью сопряженных функций для функционала $m_p \to max$

После того, как определены оптимальные гелиоцентрические траектории перелета КА в упрощенной модели точечных сфер действия и движения в центральном ньютоновском гелиоцентрическом гравитационном поле, - эти траектории проверяем на выполнение необходимых условий оптимальности с помощью сопряженных функций для функционала максимума полезной массы КА. На пассивных участках перелета $t_1 < t < t_2$ и $t_3 < t < t_4$, уравнения гелиоцентрического движения КА и соответствующая функция Гамильтона показаны ниже:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\mu_{\mathrm{s}} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \tag{1.15}$$

$$H = (\boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{V}) + (\boldsymbol{\lambda}_v, \mathbf{g}(\mathbf{r})), \tag{1.16}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_r$, $\boldsymbol{\lambda}_v$ - сопряженные векторы к **r** и **V**, μ_s – гравитационный параметр Солнца, знак (**a**, **b**) обозначает скалярное произведение векторов **a** и **b**, **g –** гравитационное ускорение. Сопряженная система уравнений к (1.15) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \mu_{\mathrm{s}} \frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{r^3} - \left(\boldsymbol{\lambda}_v, \mathbf{r}\right) \cdot \frac{3\mu_{\mathrm{s}} \mathbf{r}}{r^5} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{V}} = -\boldsymbol{\lambda}_r \end{aligned} . \tag{1.17}$$

Ниже будем обозначать $\boldsymbol{\lambda}_v$ базис-вектором Лоудена **p**. В граничных точках траектории должны выполняться краевые условия:

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{R}_E(t_1), \quad \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{R}_A(t_2), \quad \mathbf{r}(t_3) = \mathbf{R}_A(t_3), \quad \mathbf{r}(t_4) = \mathbf{R}_E(t_4). \tag{1.18}$$

1.4.1 Выражения для базис-вектора p в граничных точках траектории экспедиции Земля-астероид-Земля

Сначала приведем выражения для базис-вектора в граничных точках траектории экспедиции Земля-астероид-Земля (на гелиоцентрических участках). Они могут быть получены применением вариационного метода, как к оптимальной, так и к неоптимальной траектории. В [37] проварьирована произвольная, в том числе и неоптимальная траектория. Здесь за начальную траекторию берем оптимальную траекторию. Результаты обоих анализов совпадают.

Начнем со случая минимизации характеристической скорости (суммы величин импульсов скорости), здесь функционал $G_1 = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$ (1.4). Если траектория является оптимальной, то значение функционала G_1 не может быть дополнительно уменьшено, и должно быть

$$\delta G_1 = \delta\Delta V_1 + \delta\Delta V_2 + \delta\Delta V_3 = 0. \qquad (1.19)$$

Основные импульсы скорости $\Delta\mathbf{V}_i$ и их величины определяются скоростями «на бесконечности» $\mathbf{V}_{\infty i}$, i =1, 2, 3. Из (1.3), (1.2) имеем

$$\begin{aligned}\delta\Delta V_1 &= \frac{\partial \Delta V_1}{\partial \mathbf{V}_{\infty 1}} \delta \mathbf{V}_{\infty 1} = \frac{\partial \Delta V_1}{\partial \mathbf{V}_{\infty 1}} \left(\delta \mathbf{V}_1 - \delta \mathbf{V}_E(t_1) \right) \\ &= \frac{\partial \Delta V_1}{\partial \mathbf{V}_{\infty 1}} \left(\delta \mathbf{V}_1 + \mu_S \frac{\mathbf{R}_E(t_1)}{\left|\mathbf{R}_E(t_1)\right|^3} \delta t_1 \right).\end{aligned} \qquad (1.20)$$

Учитывая, что

$$\delta t_1 = \delta t_2 = \delta t_3 = \delta t_4 = 0 \text{ (времена } t_1, t_2, t_3, t_4 \text{ заданы)}, \qquad (1.21)$$

и (1.18), будет:

$$\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{V}^*(t_i)\delta t_i = 0, \quad i = 1,2,3,4 \qquad (1.22)$$

где $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}_E$ при i=1,4; $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}_A$ при i=2,3. Подставляя (1.21) в (1.20), и с учетом:

$$V_{p1} = \sqrt{V_{\infty 1}{}^2 + \frac{2\mu_E}{R_0}} \qquad (1.23)$$

получим

$$\delta\Delta V_1 = \left(\frac{\partial \Delta V_1}{\partial \mathbf{V}_{\infty 1}}, \delta \mathbf{V}_1 \right) = \left(\left(\frac{\partial \Delta V_1}{\partial V_{\infty 1x}}, \frac{\partial \Delta V_1}{\partial V_{\infty 1y}}, \frac{\partial \Delta V_1}{\partial V_{\infty 1z}} \right), \delta \mathbf{V}_1 \right) = \left(\frac{\mathbf{V}_{\infty 1}}{V_{p1}}, \delta \mathbf{V}_1 \right). \qquad (1.24)$$

Здесь V_{p1} – величина скорости в перигее гиперболической отлетной траектории на приземном участке, $V_{\infty 1} = |\mathbf{V}_{\infty 1}|$, R_0 – радиус опорной орбиты ИСЗ. При этом считается по умолчанию на основании результатов оптимизации задачи разгона [25, 43, 78, 94], что опорная орбита ИСЗ и гиперболическая орбита для полета к астероиду компланарны, сход КА с опорной орбиты ИСЗ происходит в перицентре гиперболы.

В моменты t_2, t_3, аналогично, имеем

$$\delta\Delta V_2=\left(\frac{\partial\Delta V_2}{\partial\mathbf{V}_{\infty2}},\delta\mathbf{V}_2\right)=\left(\frac{\mathbf{V}_{\infty2}}{V_{p2}},\delta\mathbf{V}_2\right),\quad \delta\Delta V_3=\left(\frac{\partial\Delta V_3}{\partial\mathbf{V}_{\infty3}},\delta\mathbf{V}_3\right)=\left(\frac{\mathbf{V}_{\infty3}}{V_{p3}},\delta\mathbf{V}_3\right).\quad (1.25)$$

Здесь

$$V_{p2}=\sqrt{V_{\infty2}{}^2+\frac{2\mu_A}{R_2}},\quad V_{p3}=\sqrt{V_{\infty3}{}^2+\frac{2\mu_A}{R_3}}\qquad (1.26)$$

R_2, R_3 – радиусы круговых орбит ИС астероида.

Используя свойство сопряженных систем (1.17), можно получить [43]

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\lambda}_r(t_1),\delta\mathbf{r}_1\right)+\left(\boldsymbol{\lambda}_v(t_1),\delta\mathbf{V}_1\right)-H(t_1)\delta t_1=\\&=\left(\boldsymbol{\lambda}_r(t_2),\delta\mathbf{r}_2\right)+\left(\boldsymbol{\lambda}_v(t_2),\delta\mathbf{V}_2\right)-H(t_2)\delta t_2,\end{aligned}\qquad (1.27)$$

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\lambda}_r(t_3),\delta\mathbf{r}_3\right)+\left(\boldsymbol{\lambda}_v(t_3),\delta\mathbf{V}_3\right)-H(t_3)\delta t_3=\\&=\left(\boldsymbol{\lambda}_r(t_4),\delta\mathbf{r}_4\right)+\left(\boldsymbol{\lambda}_v(t_4),\delta\mathbf{V}_4\right)-H(t_4)\delta t_4.\end{aligned}\qquad (1.28)$$

С учетом (1.21), (1.22), можно упростить (1.27) и (1.28) следующим образом:

$$\left(\boldsymbol{\lambda}_v(t_1),\delta\mathbf{V}_1\right)=\left(\boldsymbol{\lambda}_v(t_2),\delta\mathbf{V}_2\right),\ \left(\boldsymbol{\lambda}_v(t_3),\delta\mathbf{V}_3\right)=\left(\boldsymbol{\lambda}_v(t_4),\delta\mathbf{V}_4\right).\qquad (1.29)$$

Вычитая из (1.19) левые части уравнений (1.29) и прибавляя к (1.19) правых частей (1.29), и учитывая (1.24), (1.25), получим

$$\left(\frac{\mathbf{V}_{\infty1}}{V_{p1}}-\boldsymbol{\lambda}_v(t_1),\delta\mathbf{V}_1\right)+\left(\frac{\mathbf{V}_{\infty2}}{V_{p2}}+\boldsymbol{\lambda}_v(t_2),\delta\mathbf{V}_2\right)+\left(\frac{\mathbf{V}_{\infty3}}{V_{p3}}-\boldsymbol{\lambda}_v(t_3),\delta\mathbf{V}_3\right)+\left(\boldsymbol{\lambda}_v(t_4),\delta\mathbf{V}_4\right)=0.$$

В силу незаданности конечной скорости КА при приближении КА к орбите Земли и независимости между $\delta\mathbf{V}_1$, $\delta\mathbf{V}_2$, $\delta\mathbf{V}_3$, ясно, что

$$\frac{\mathbf{V}_{\infty1}}{V_{p1}}-\boldsymbol{\lambda}_v(t_1)=0,\quad \frac{\mathbf{V}_{\infty2}}{V_{p2}}+\boldsymbol{\lambda}_v(t_2)=0\quad \frac{\mathbf{V}_{\infty3}}{V_{p3}}-\boldsymbol{\lambda}_v(t_3)=0,\quad \boldsymbol{\lambda}_v(t_4)=0.$$

Тогда выражения базис-вектора в граничных точках траектории экспедиции Земля-астероид-Земля для случая минимизации характеристической скорости:

$$\mathbf{p}_1=\boldsymbol{\lambda}_v(t_1)=\frac{\mathbf{V}_{\infty1}}{V_{p1}},\quad \mathbf{p}_2=\boldsymbol{\lambda}_v(t_2)=-\frac{\mathbf{V}_{\infty2}}{V_{p2}},\quad \mathbf{p}_3=\boldsymbol{\lambda}_v(t_3)=\frac{\mathbf{V}_{\infty3}}{V_{p3}},\quad \mathbf{p}_4=\boldsymbol{\lambda}_v(t_4)=0\qquad (1.30)$$

Здесь векторы скорости на бесконечности определяются по (1.2), V_{p1}, V_{p2}, V_{p3} - по (1.23), (1.26).

Для астероида Апофис (и подобных ему) размеры (средний радиус ~ 160 м), гравитационный параметр μ_A (≈ 2 м^3/с^2) очень малы, первая и вторая космические скорости также малы (сантиметры в сек.). В то же время скорости «на бесконечности» $V_{\infty 2}$, $V_{\infty 3}$ велики (километры в сек. – сотни метров в сек.). Поэтому, учитывая также, что сама рассматриваемая модель – приближенная, можно не учитывать притяжение астероида в формуле (1.26). При этом имеем

$$\delta \Delta V_2 = \left(\frac{\mathbf{V}_{\infty 2}}{V_{\infty 2}}, \delta \mathbf{V}_2 \right), \quad \delta \Delta V_3 = \left(\frac{\mathbf{V}_{\infty 3}}{V_{\infty 3}}, \delta \mathbf{V}_3 \right). \tag{1.31}$$

Тогда выражения для базис-вектора имеют вид (аналогично [43]):

$$\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_1) = \frac{\mathbf{V}_{\infty 1}}{V_{p1}},\ \mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_2) = -\frac{\mathbf{V}_{\infty 2}}{V_{\infty 2}},\ \mathbf{p}_3 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_3) = \frac{\mathbf{V}_{\infty 3}}{V_{\infty 3}},\ \mathbf{p}_4 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_4) = 0 \tag{1.32}$$

Для случая максимизации конечной массы КА, функционал имеет вид

$$G_2 = m_f = \left[m(t_0) e^{-\Delta V_1 / c_1} - m_{1E} \right] e^{-(\Delta V_2 + \Delta V_3)/c_2},$$

где c_1, c_2, m_{1E} имеют тот же смысл, что и в разделе 1.2. Вариация функционала

$$\begin{aligned} \delta G_2 &= \frac{\partial G_2}{\partial \Delta V_1} \delta \Delta V_1 + \frac{\partial G_2}{\partial \Delta V_2} \delta \Delta V_2 + \frac{\partial G_2}{\partial \Delta V_3} \delta \Delta V_3 \\ &= -\frac{m(t_0) \mu_1 e^{-(\Delta V_2 + \Delta V_3)/c_2}}{c_1} \delta \Delta V_1 - \frac{m(t_1) e^{-(\Delta V_2 + \Delta V_3)/c_2}}{c_2} \delta \Delta V_2 - \cdots \\ &- \frac{m(t_1) e^{-(\Delta V_2 + \Delta V_3)/c_2}}{c_2} \delta \Delta V_3, \end{aligned} \tag{1.33}$$

где $\mu_1 = e^{-\Delta V_1 / c_1}$. Необходимое условие оптимальности импульсной траектории сводится к условию стационарности функционала

$$\delta G_2 = 0. \tag{1.34}$$

Подставляя (1.33) в (1.34), имеем

$$\frac{m(t_0) \mu_1 c_2}{c_1 m(t_1)} \delta \Delta V_1 + \delta \Delta V_2 + \delta \Delta V_3 = 0. \tag{1.35}$$

Используя аналогичный метод, как и в предыдущем случае, с учетом (1.24), (1.25), (1.29), (1.31), (1.35), можно найти:

$$\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_1) = \frac{m(t_0) \mu_1 c_2}{c_1 m(t_1)} \frac{\mathbf{V}_{\infty 1}}{V_{p1}}, \quad \mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_2) = -\frac{\mathbf{V}_{\infty 2}}{V_{\infty 2}} \tag{1.36a}$$

$$\mathbf{p}_3 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_3) = \frac{\mathbf{V}_{\infty 3}}{V_{\infty 3}}, \quad \mathbf{p}_4 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_4) = 0. \tag{1.36b}$$

Для случая максимизации полезной массы КА, функционал $G_3 = m_p$ определяется по (1.7), (1.8a). Из условия $\delta G_3 = 0$, получим

$$\frac{c_2 m(t_0)\mu_1}{c_1 m_f}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{a_{T2}}{1+a_{T2}}\right)\delta\Delta V_1 + \delta\Delta V_2 + \delta\Delta V_3 = 0$$

где $\mu_2 = e^{-\Delta V_2/c_2}$, $\mu_3 = e^{-\Delta V_3/c_2}$, $m_f = m(t_1)\mu_2\mu_3$. С учетом (1.24), (1.25), (1.31), (1.29), (1.35), можно найти (аналогично [37]):

$$\begin{gathered}\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_1) = \frac{c_2 m(t_0)\mu_1}{c_1 m_f}\left(\mu_2\mu_3 - \frac{a_{T2}}{1+a_{T2}}\right)\frac{\mathbf{V}_{\infty 1}}{V_{p1}}, \quad \mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_2) = -\frac{\mathbf{V}_{\infty 2}}{V_{\infty 2}} \\ \mathbf{p}_3 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_3) = \frac{\mathbf{V}_{\infty 3}}{V_{\infty 3}}, \quad \mathbf{p}_4 = \boldsymbol{\lambda}_v(t_4) = 0\end{gathered}. \tag{1.37}$$

1.4.2 Определение базис-вектора p на всей траектории

Пусть при заданных временах t_1, t_2, t_3, t_4, решена задача Ламберта для полета КА от Земли к астероиду и от астероида к Земле, соответственно, и решена задача оптимизации. На каждом пассивном участке, векторы состояния КА в любые два момента времени вдоль траектории полета связаны между собой переходной матрицы. Зная начальные (в t_1, t_3) и конечные (в t_2, t_4) состояния КА (положения и скорости), можно определить переходную матрицу, удовлетворяющую условиям

$$\begin{bmatrix}\delta\mathbf{r}_f \\ \delta\dot{\mathbf{r}}_f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\mathbf{r}_0 \\ \delta\dot{\mathbf{r}}_0\end{bmatrix}, \tag{1.38}$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\partial\mathbf{r}_f}{\partial\mathbf{r}_0}, \quad \Phi_2 = \frac{\partial\mathbf{r}_f}{\partial\dot{\mathbf{r}}_0}, \quad \Phi_3 = \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_f}{\partial\mathbf{r}_0}, \quad \Phi_4 = \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_f}{\partial\dot{\mathbf{r}}_0}.$$

В рамках задачи двух тел имеются аналитические выражения для матриц Φ_i. Например, Глэндорф (Glandorf D.R.) [90] вывел аналитические выражения переходных матриц, справедливые для круговых, эллиптических и гиперболических траекторий, в любой декартовой СК. Модификация этого выражения может быть применена к параболическим орбитам. Для задачи N тел (N> 2) матрицы перехода можно определить только численными методами.

Поскольку переходная матрица для ($\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}}$) идентична матрице для ($\delta\mathbf{r}$, $\delta\dot{\mathbf{r}}$), производная базис-вектора $\dot{\mathbf{p}}$ в начальный момент определяется:

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \Phi_2^{-1} \cdot \left(\mathbf{p}_f - \Phi_1 \cdot \mathbf{p}_0\right). \tag{1.39}$$

Тогда с помощью $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_f$ (1.30), (1.35), (1.37) и $\dot{\mathbf{p}}_0$ (1.39), можно определить изменение базис-вектора на всей траектории:

$$\mathbf{p}\left(t\right) = \Phi_1(t,t_0)\mathbf{p}_0 + \Phi_2(t,t_0)\dot{\mathbf{p}}_0,$$

при этом Φ_1, Φ_2 пересчитываются по (1.38) в каждый момент t. Изменение базис-вектора также можно определить путем интегрирования следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \\
&\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = -\mu_s \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\
&\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \\
&\frac{d\dot{\mathbf{p}}}{dt} = -\mu_s \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \left(\mathbf{p},\mathbf{r}\right) \cdot \frac{3\mu_s \mathbf{r}}{r^5}
\end{aligned}.$$

Выполнение условия (1.40) необходимо для оптимальности траекторий в классе многоимпульсных перелетов. Согласно теории Лоудена и [37], всюду на оптимальной импульсной траектории модуль базис-вектора должен удовлетворять условию

$$p(t) = \left|\mathbf{p}\left(t\right)\right| \le 1, \tag{1.40}$$

Если на некотором участке траектории это условие не выполняется, то можно вводить дополнительные импульсы и (или) варьировать граничные времена экспедиции, чтобы улучшить данную траекторию. Вводя такие импульсы и сделав специальный алгоритм [37], можно постепенно улучшить траекторию и затем получить оптимальный перелет. В данной работе для улучшения траектории варьируются граничные времена экспедиции, если условие (1.39) нарушается вблизи граничного времени.

Также получены производные от функционалов по граничным временам траектории [37], которые могут быть использованы для проверки выполнения условий трансверсальности и улучшения траектории по функционалу, например, градиентным или квазиньютоновским методом. Ниже приведены их выражения для функционала $G_3 = m_p$:

$$\frac{\partial G_3}{\partial t_1} = d_3 \dot{p}_1 V_{\infty 1}, \quad \frac{\partial G_3}{\partial t_2} = d_3 \dot{p}_2 V_{\infty 2}, \quad \frac{\partial G_3}{\partial t_3} = d_3 \dot{p}_3 V_{\infty 3}, \quad \frac{\partial G_3}{\partial t_4} = -d_3 \left(\dot{\mathbf{p}}_4, \mathbf{V}_{\infty 4}\right), \quad (1.41)$$

где

$$d_3 = m_f \left(1 + a_{T2}\right) / c_2,$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(t_i), \quad \dot{p}_i = \frac{d|\mathbf{p}_i|}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(\mathbf{p}_i \bullet \mathbf{p}_i)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{\dot{\mathbf{p}}_i \bullet \mathbf{p}_i}{|\mathbf{p}_i|}, \quad i = 1,2,3.$$

Если времена t_i (i = 1, 2, 3, 4) не зависят друг от друга, то для оптимальной траектории должно иметь $\partial G_3 / \partial t_i = 0$. Если между временами t_i есть связи, то переходим к независимым переменным x_j. Например, если заданы времена $\Delta t_{23} = t_3 - t_2$ и $\Delta t_{\sum} = t_4 - t_1$, то можно взять $x_1 = t_1$, $x_2 = \Delta t_{12} = t_2 - t_1$. Тогда, выражая $\mathrm{d}t_1$, $\mathrm{d}t_2$, $\mathrm{d}t_3$, $\mathrm{d}t_4$ через $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, получим

$$\mathrm{d}G_3 = \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_2, \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_1} = \frac{\partial G_3}{\partial t_1} + \frac{\partial G_3}{\partial t_2} + \frac{\partial G_3}{\partial t_3} + \frac{\partial G_3}{\partial t_4}, \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_2} = \frac{\partial G_3}{\partial t_2} + \frac{\partial G_3}{\partial t_3}. \quad (1.44)$$

Для оптимальной траектории должно быть $\partial G_3 / \partial x_i = 0$.

1.5 Уточнение параметров траекторий КА – этап 2 методики

На данном этапе характеристики полученных оптимальных траекторий уточняются в двух направлениях. Во-первых, проводится коррекция траекторий численным методом с учетом реального гравитационного поля, давления солнечного света и точных эфемерид Земли и астероида. При этом рассматриваются также параметры траектории на геоцентрических и астероидоцентрическх участках. Во-вторых, выполняется коррекция массово-энергетических характеристик экспедиции с учетом гравитационных потерь, обусловленных конечностью тяги, введением импульсов скорости для коррекции траектории КА и управления движением КА около астероида, а также с учетом отделяемых масс мини-спутника астероида и посадочного устройства.

1.5.1 Определение параметров траектории на геоцентрическом участке разгона

Сначала, в данном параграфе 1.5.1 определяются параметры геоцентрического участка разгона в предположении, что внутри сферы действия Земли на КА действует только центральное притяжение Земли, т.е. без учета возмущений. Учет возмущений будет сделан ниже в отделе 1.5.3.

Схема полета КА на данном участке показана на Рис.1.1(а). Известно [30, 43, 93, 115 и др.], что в Кеплеровском случае для разгона оптимальным является компланарный сход с опорной орбиты ИСЗ в перицентре гиперболы. Поэтому радиус перигея гиперболической орбиты также равняется радиусу опорной орбиты R_0, скорость КА в перигее гиперболической орбиты направлена по скорости опорной орбиты. Таким образом, определение траектории перелета КА на этом участке заключается в определении ориентации опорной орбиты ИСЗ и нахождении t_0, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{V}_0$ [30, 42, 45].

Обозначая через r_{p1} ($= R_0$) расстояние в перигее гиперболической орбиты, можно определить следующие параметры гиперболической орбиты

$$a_1 = -\frac{\mu_E}{V_{\infty 1}^{\ 2}}, \quad e_1 = 1 - \frac{r_{p1}}{a_1}, \quad V_{p1} = \sqrt{V_{\infty 1}^{\ 2} + \frac{2\mu_E}{r_{p1}}} \tag{1.45}$$

где, a_1 – большая полуось орбиты, e_1 – эксцентриситет, V_{p1} – величина скорости в перигее гиперболической орбиты, $V_{\infty 1}=|\mathbf{V}_{\infty 1}|$ (1.2).

Скорость «на бесконечности» $\mathbf{V}_{\infty 1}$ характеризирует связь между скоростями геоцентрического приземного участка и гелиоцентрического межпланетного участка. После первоначального определения гелиоцентрической межпланетной орбиты перелета КА, $\mathbf{V}_{\infty 1}$ из (1.2) преобразовываем в геоцентрическую геоэкваториальную систему координат, получаем вектор $\mathbf{V}_{\infty 1e}$ ($v_{\infty 1X}$, $v_{\infty 1Y}$, $v_{\infty 1Z}$). Его прямое восхождение $\alpha_{\infty 1}$ и склонение $\delta_{\infty 1}$ определяются следующими отношениями:

$$\sin\alpha_{\infty 1}=\frac{v_{\infty 1Y}}{v_{\infty 1XY}};\cos\alpha_{\infty 1}=\frac{v_{\infty 1X}}{v_{\infty 1XY}},\left(0\le\alpha_{\infty 1}\le 2\pi\right);\;\; \sin\delta_{\infty 1}=\frac{v_{\infty 1Z}}{V_{\infty 1}};\left(-\frac{\pi}{2}\le\delta_{\infty 1}\le\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1.46)$$

где $v_{\infty 1XY}=\sqrt{v_{\infty 1X}^2+v_{\infty 1Y}^2}$. Эти параметры непосредственно определяют плоскость орбиты КА.

Полагаем, что задано наклонение опорной орбиты ИСЗ к плоскости земного экватора i_1. В геоцентрической геоэкваториальной СК (2000.0) плоскость орбиты КА должна проходить через центр О под углом i_1 к плоскости OXY и через вектор $\mathbf{V}_{\infty 1e}$, проходящий через начало О. Из геометрии видно, что есть два решения этой задачи: для одного скорость $\mathbf{V}_{\infty 1e}$ вблизи восходящего узла орбиты $\Omega_1^{(1)}$, для другого - у нисходящего узла $\mho_1^{(2)}$ (см. Рис. 1.6).

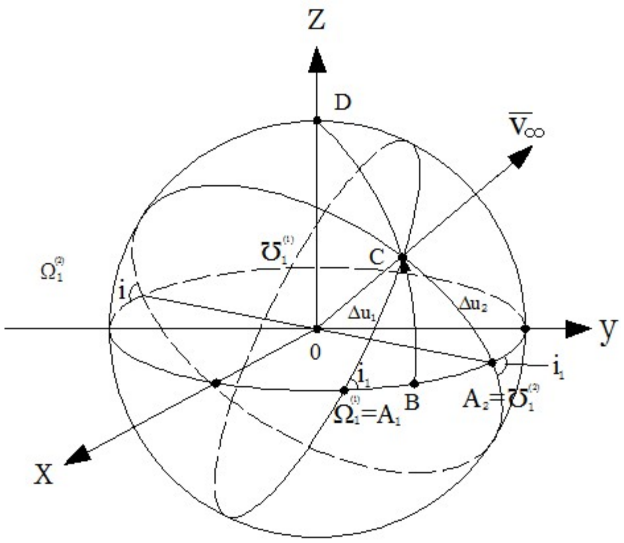


Рис.1.6. Геоцентрические характеристики орбиты

На Рис.1.6 точка A_1 - восходящий узел первого решения $\Omega_1^{(1)}$, точка A_2 - нисходящий узел второго решения $\mho_1^{(2)}$, ОС - по скорости $\mathbf{V}_{\infty 1e}$, ОВ - проекция $\mathbf{V}_{\infty 1e}$ в плоскости OXY. Склонение точки на орбите с наклонением i меняется от 0 до $\pm i$. Поэтому для реализации полета должно выполняться условие $|\delta_{\infty 1}|\le i_1$. Обозначим через Δu_1 угол $COA_1=COA_2$, тогда из сферического прямоугольного треугольника A_1CB ($CB=\delta_{\infty 1}, \angle A_1=i_1, A_1C=\Delta u_1$):

$$\sin\Delta u_1=\frac{\sin\delta_{\infty 1}}{\sin i_1},\quad -\frac{\pi}{2}\le\Delta u_1\le\frac{\pi}{2}. \qquad (1.47)$$

Тогда аргумент широты предельной точки орбиты:

$$u_{\infty 1}^{(1)} = \Delta u_1; \quad u_{\infty 1}^{(2)} = \pi - \Delta u_1. \tag{1.48}$$

Обозначим через $\Delta\Omega$ смещение проекции B относительно восходящего узла A_1: $\Delta\Omega = A_1B = BA_2$, тогда из треугольника A_1CD (точка D на оси OZ):

$$\sin\Delta\Omega = \frac{\cos i_1}{\cos\delta_{\infty 1}}\sin u_1 = \frac{\tan\delta_{\infty 1}}{\tan i_1}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \Delta\Omega \le \frac{\pi}{2}. \tag{1.49}$$

Существуют две орбиты с долготами восходящего узла, определяющимися формулами:

$$\begin{aligned} &\Omega_1^{(1)} = \alpha_{\infty 1} - \Delta\Omega, \quad \text{для первого решения;} \\ &\Omega_1^{(2)} = \alpha_{\infty 1} + \Delta\Omega - \pi, \quad \text{для второго решения.} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Дальше, можно найти точку P_0 на Рис.1.1(а) - положение перигея гиперболической орбиты. Предельное значение истинной аномалии определяется по формуле

$$\cos\vartheta_\infty = -\frac{1}{e_1}; \quad 0 < \vartheta_\infty < \pi . \tag{1.51}$$

Тогда аргумент перигея

$$\omega_1^{(i)} = u_{\infty 1}^{(i)} - \vartheta_\infty, \quad i = 1, 2 \tag{1.52}$$

В точки P_0 истинная аномалия равняется 0, то аргумент широты точки P_0

$$u_0 = \omega_1^{(i)} + \vartheta_0 = \omega_1^{(i)}. \tag{1.53}$$

Из (1.45), (1.50), (1.53) и заданного наклонения i_1 можно определить также векторы $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{V}_0$ (в геоцентрической геоэкваториальной СК) в перигее гиперболической орбиты. Переходная матрица от орбитальной СК к геоэкваториальной СК определяется так [56, 69]:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_\Omega \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_\omega \tag{1.54}$$

где

$$A_\Omega = \begin{bmatrix} \cos\Omega_1 & -\sin\Omega_1 & 0 \\ \sin\Omega_1 & \cos\Omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_1 & -\sin i_1 \\ 0 & \sin i_1 & \cos i_1 \end{bmatrix}, A_\omega = \begin{bmatrix} \cos\omega_1 & -\sin\omega_1 & 0 \\ \sin\omega_1 & \cos\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда радиус-вектор и вектор скорости КА в перигее получаются по формулам:

$$\mathbf{r}_0 = A\begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_0 = A\begin{bmatrix} 0 \\ V_{p1} \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.55)$$

Теперь неизвестны только временные характеристики. Полагаем приближенно, что при старте с космодрома получается орбита с наклонением i_1. Пусть выведение КА осуществляется с космодрома с широтой φ_c. Тогда из треугольника $KK'\Omega_1$ (см. Рис. 1.7), можно определить угол u_c (= Ω_1K) отношением:

$$\sin u_c = \frac{\sin\varphi_c}{\sin i_1}, 0 < u_c < \frac{\pi}{2}. \qquad (1.56)$$

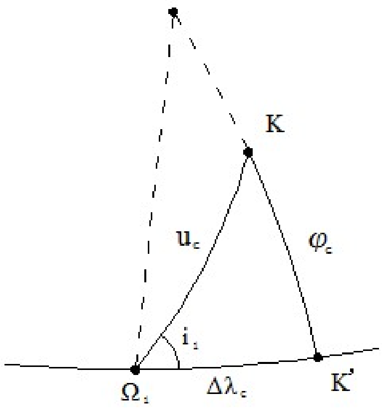


Рис.1.7. Угловые параметры космодрома

Пусть также известны угловые и временные характеристики выведения: $\Delta u_в$, $\Delta t_в$ - угловая дальность и время выведения. Тогда:

$$u_0 = u_c + \Delta u_в + \Delta u_{пас}, \qquad (1.57)$$

где $\Delta u_{пас}$ - угловая дальность пассивного полета по орбите ожидания. Из (1.53), (1.57) время пассивного полета КА по орбите ожидания вычисляется по формуле:

$$\Delta t_{пас} = \frac{R_0^{3/2}}{\sqrt{\mu_E}}\Delta u_{пас}. \qquad (1.58)$$

От точки P_0 до точки P_1 (см. Рис.1.1(а)) КА пассивно движется по гиперболической орбите. Время перелета по этой дуге:

$$\Delta t_{СДЗ} = \frac{|a_1|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu_E}}(M_1 - M_0), \qquad (1.59)$$

где M_1, M_0 - средние аномалии в точках P_1, P_0,

$$M_0 = 0, \quad M_1 = e_1 shH_1 - H_1, \tag{1.60}$$

H_1 - гиперболическая аномалия в точке P_1. Она определяется из условий

$$r_1 = |a_1|(e_1 chH_1 - 1),$$

где $r_1 = R_{СДЗ}$ – радиус сферы действия Земли. Затем определяем время старта. Обозначим через Δt_{c0} - время от старта до конца разгона, тогда

$$\Delta t_{c0} = \Delta t_{в} + \Delta t_{пас}. \tag{1.61}$$

Время начала пассивного полета в СДЗ:

$$t_0 = t_c + \Delta t_{c0}, \tag{1.62}$$

и время начала гелиоцентрического полета:

$$t_1 = t_c + \Delta t_{c0} + \Delta t_{СДЗ}. \tag{1.63}$$

Дата старта определяется следующей формулой, здесь берем наибольшее время начала суток, меньше чем t_c:

$$[t_c] = [t_1 - \Delta t_{c0} - \Delta t_{СДЗ}]. \tag{1.64}$$

Из Рис. 1.7 следует, что смещение $\Delta\lambda_c = \Omega_1 K$ стартового меридиана относительно восходящего узла орбиты определяется с учетом (1.56) соотношением:

$$\sin\Delta\lambda_c = \sin u_c \frac{\cos i_1}{\cos\varphi_c} = \frac{\tan\varphi_c}{\tan i_1}. \tag{1.65}$$

Момент старта t_{cm} от гринвичского начала суток старта $[t_c]$ определим приближенно из условия, что в момент старта плоскость орбиты пройдет через точку старта К и восходящий узел орбиты Ω_1, тогда

$$\Omega_1 = \alpha_0 + \omega_З t_{cm} + \lambda_c - \Delta\lambda_c + 2n\pi, \tag{1.66}$$

где α_0 — гринвичское среднее звездное время в полночь даты $[t_c]$ по всемирному времени, $\omega_З$ — угловая скорость вращения Земли, λ_c — долгота точки старта. α_0 определяется из выражения [139]

$$\alpha_0 = 100.4606184 + 36000.77004T_0 + 0.000387933T_0^2 - 2.583\times10^{-8}T_0^3(^\circ) \tag{1.67}$$

где $T_0 = \dfrac{JD - 2451545}{36525}$ - промежуток времени, измеряемый в юлианских столетиях между фундаментальной эпохой 2000,0 (*JD* 2451545,0) и рассматриваемым моментом (JD). Эта формула может давать значение вне диапазона $0 \le \alpha_0 \le 360°$. Если это так, то необходимо добавить или вычесть соответствующее целочисленное кратное 360°, чтобы принести α_0 в этот диапазон. Отсюда:

$$t_{cm} = \frac{\Omega_1 - \alpha_0 - \lambda_c + \Delta\lambda_c + 2n\pi}{\omega_З}. \tag{1.68}$$

Должно быть $0 < t_{\text{cm}} < 86400$ с. Обозначим через $t_{1\text{p}}$ расчетное значение времени начала гелиоцентрического полета

$$t_{1\text{P}} = [t_\text{c}] + t_{\text{cm}} + \Delta t_{\text{c}0} + \Delta t_{\text{СДЗ}}, \tag{1.69}$$

оно должно быть в заданных сутках.

В данной работе на стадии проектировании траектории экспедиции при возвращении КА к Земле нужно обеспечить, чтобы КА в момент $t_{4\text{СД}}$ подлетал к сфере действия Земли, и дальше входил в сферу действия Земли со скоростью $\mathbf{V}_{\text{СДЗ}}$ по гиперболической орбите с некоторым расстоянием условного перигея $r_{\text{p}4}$. При этом оценивается величина скорости входа в атмосферу $V_{\text{вх}}$ (в момент t_f, $r = r_a$) с помощью скорости $V_{\text{СДЗ}}$ или $V_{\infty 4}$:

$$V_{\text{вх}}^2 = V_{\infty 4}^2 + \frac{2\mu_E}{r_a} = V_{СДЗ}^2 - \frac{2\mu_E}{\rho_{СДЗ}} + \frac{2\mu_E}{r_a}, \quad r_a = R_E + h_a, \tag{1.70}$$

где R_E – средний радиус Земли, для границы атмосферы берем h_a=125 км [130].

1.5.2 Торможение и разгон КА у астероида

Согласно рассмотренной схеме экспедиции (Рис. 1.1), по достижении астероида, с помощью тормозного импульса $\Delta\mathbf{V}_2$ КА переводится на некоторую круговую орбиту спутника астероида. В импульсном приближении выход КА на орбиту ИСА производится в перицентре астероидоцентрической гиперболической траектории. По истечении запланированного срока пребывания на орбите ИСА (времени ожидания) КА с помощью разгонного импульса $\Delta\mathbf{V}_3$ выводится на астероидоцентрическую гиперболу для отлета от астероида.

Поскольку у астероидов нет атмосферы, высота орбиты ИСА может быть достаточно низкой. Вместе с тем, сложное силовое поле в окрестности астероидов (из-за неправильной формы, малости гравитации астероидов, возмущении от других небесных тел, давления Солнечного света и др.) затрудняет прогнозирование траектории движения КА и времени его существования. Исследование динамики движения КА в окрестности астероида для определения параметров орбит ИСА, обеспечивающих длительное существование спутника, представлено в главах 3, 4.

Теперь посмотрим торможение (Рис. 1.8) и разгон КА у астероида с конечной тягой и оцениваем характеристики на этих участках [41, 42]: время работы двигатели, изменение величины скорости КА, затрат топлива и др., которые необходимы для дальнейшего анализа массово-энергетических характеристик экспедиции (раздел 1.5.4).

Для описания движения КА при торможении у астероида используется относительная система координат O_aXYZ: начало которой расположено в центре массы астроида в момент времени t_2, оси X, Y, Z связаны с единичными векторами ***i***, ***j***, ***k***. Единичные векторы ***i***, ***j***, ***k*** определяются следующими формулами:

$$\mathbf{k} = -\frac{\mathbf{V}_{\infty 2}}{V_{\infty 2}}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{R}_A(t_f)\times\mathbf{V}_{\infty 2}}{\left|\mathbf{R}_A(t_f)\times\mathbf{V}_{\infty 2}\right|}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{k}.$$

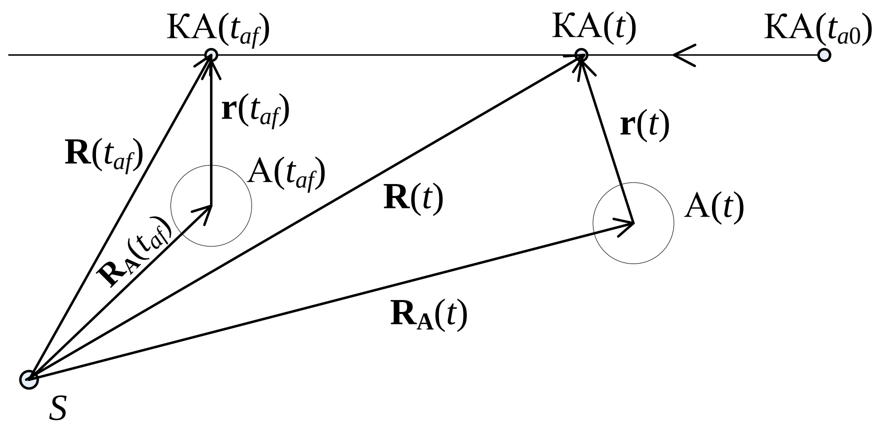


Рис.1.8 Схема движения КА при торможении у астероида

Конечный радиус-вектор в относительной системе координат:

$$\mathbf{r}(t_{af}) = (\rho_A + H)\mathbf{i}\,.$$

Здесь ρ_A – средний радиус астероида, H-высота орбиты спутника. Задаем момент начала торможения

$$t_{a0} = t_{af} - \Delta t < t_{af}\,,$$

тогда приближенно имеем:

$$\mathbf{r}(t_{a0}) \approx \mathbf{r}(t_{af}) + \mathbf{V}_{\infty 2}(t_{a0} - t_{af}) + \Delta \mathbf{r}_x \mathbf{i} + \Delta \mathbf{r}_y \mathbf{j};$$

$$\mathbf{v}(t_{a0}) \approx \mathbf{V}_{\infty 2}.$$

Дифференциальные уравнения движения КА в относительной астероидоцентрической системе координат $O_A XYZ$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}; \\ \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\dfrac{\mu_A}{r^3}\mathbf{r} - \mu_S\left(\dfrac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^3} + \dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|^3}\right) + \dfrac{\mathbf{P}}{m}; \\ \dfrac{dm}{dt} = -\dfrac{P}{c_2}, \quad t_{a0} \le t \le t_{af}. \end{cases} \tag{1.71}$$

Здесь: $\mathbf{r}$ = [x, y, z], $\mathbf{v}$ =[v_x, v_y, v_z] - текущие векторы состояния КА в относительной астероидоцентрической системе координат $O_A XYZ$, μ_A - гравитационный параметр астероида, c_2 - скорость истечения газов из ДУ2, P - величина тяги, вектор тяги $\mathbf{P}$ = [P_x P_y P_z] в плоскости орбиты $O_A XZ$, составляет с $\mathbf{v}$ угол атаки $\alpha = \pi - \Delta\alpha$; t_{af} - момент конца торможения, определяющийся условием:

$$\left| |\mathbf{v}(t_{af})| - \sqrt{\mu_A / |\mathbf{r}(t_{af})|} \right| \le \varepsilon \text{ (допустимая погрешность).}$$

В конце торможения должны выполняться условия:

$$x_f = r(t_{af}) = \rho_A + H, \quad y_f = 0, \quad z_f = 0,$$
$$v_x = 0, \quad v_y = 0.$$

Условия обеспечиваются варьированием параметров t_{a0}, Δr_x, $\Delta\alpha$. Определяются характеристики:

$$\begin{aligned} \Delta t_T &= t_{af} - t_{a0}; \\ \Delta m_T &= m(t_{af}) - m(t_{a0}); \\ \Delta V_T &= c_2 \ln \frac{m(t_{a0})}{m(t_{af})}. \end{aligned} \tag{1.72}$$

При отлете от астероида имеются идентичные уравнения движения КА (1.71) в астероидоцетрической СК, ориентированной по ортам $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\mathbf{k} = -\frac{\mathbf{V}_{\infty 3}}{V_{\infty 3}}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{R}_A(t_0) \times \mathbf{V}_{\infty 3}}{|\mathbf{R}_A(t_0) \times \mathbf{V}_{\infty 3}|}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}.$$

В начале разгона $t_0 = t_3$:

$$\left|\mathbf{r}(t_0)\right| = r_0 = \rho_A + H$$

$$\left|\mathbf{V}(t_0)\right| = V_{кр} = \sqrt{\frac{\mu_A}{\rho_A + H}}\,.$$

Обозначаем θ угол между осью **X** (по направлению **i**) и радиусом вектором **r**, то на круговой орбите спутника астероида **r** = $[r_0\cos\theta, 0, r_0\sin\theta]$, **v** = $[V_{кр}\sin\theta, 0, -V_{кр}\cos\theta]$. Сначала предполагаем в момент времени t_0: $\theta_0=0$, тогда

$$x_0 = \rho_A + H, y_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

$$v_x(t_0) = 0, \quad v_y(t_0) = 0, \quad v_z(t_0) = -\sqrt{\frac{\mu_A}{\rho_A + H}}.$$

Момент конца разгона t_f определяется условием:

$$h(t_f) = V(t_f)^2 - \frac{2\mu_A}{r(t_f)} = V_{\infty 3}^2.$$

В конце разгона, должно выполняться условие: направление $\mathbf{V}(t_f)$ совпадает с направлением $\mathbf{V}_{\infty 3}$, т.е. угол между ними $\varphi = 0$. Это условие обеспечивается варьированием параметра $\Delta\theta$ ($\theta = \theta_0 + \Delta\theta$). Определяются характеристики:

$$\begin{aligned} \Delta t_p &= t_f - t_0; \\ \Delta m_p &= m\left(t_f\right) - m\left(t_0\right); \\ \Delta V_p &= c_2 \ln\frac{m\left(t_0\right)}{m\left(t_f\right)}. \end{aligned} \tag{1.73}$$

1.5.3 Уточнение траектории КА с учетом возмущений

Уточнение траекторий выполняется численным решением системы дифференциальных уравнений движения КА, имеющих вид:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_0}{\left|\mathbf{r}\right|^3}\mathbf{r} - \sum_i \mu_i \left(\frac{\mathbf{r}_i}{\left|\mathbf{r}_i\right|^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right|^3}\right) + \boldsymbol{\Delta}_1 + \boldsymbol{\Delta}_2; \tag{1.74}$$

где **r** (x, y, z) – радиус-вектор КА в прямоугольной невращающейся системе координат; $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-го небесного тела (из Эфемериды DE421); μ_0 и μ_i – гравитационные параметры центрального тела и i-го небесного тела; $\boldsymbol{\Delta}_1$, $\boldsymbol{\Delta}_2$ –

ускорения за счет сжатия Земли (гармоники J_2) и давления солнечного света. Если КА движется в сфере действия Земли, то рассматривается геоцентрическая геоэкваториальная СК на эпоху 2000.0, при этом $\mu_0 = \mu_E$. Если КА выходит из сферы действия Земли, то рассматривается гелиоцентрическая геоэкваториальная СК на эпоху 2000.0, при этом $\mu_0 = \mu_S$. Во втором случае возмущение $\mathbf{\Delta_1}$ (δ_{1x}, δ_{1y}, δ_{1z}) не учитывается. В первом случае оно учитывается и определяется по формулам:

$$\begin{cases} \delta_{1x} = \dfrac{\varepsilon}{r^4}(5\dfrac{z^2}{r^2} - 1)\dfrac{x}{r}, \\ \delta_{1y} = \dfrac{\varepsilon}{r^4}(5\dfrac{z^2}{r^2} - 1)\dfrac{y}{r}, \\ \delta_{1z} = \dfrac{\varepsilon}{r^4}(5\dfrac{z^2}{r^2} - 3)\dfrac{z}{r}, \\ \dfrac{\varepsilon}{r^4} = \dfrac{3}{2}(\dfrac{\mu_E}{r^2})J_2(\dfrac{R_{экв}}{r})^2, \end{cases} \tag{1.75}$$

где μ_E - гравитационная постоянная Земли, $R_{экв}\approx 6378.136$ км, $J_2 = 1.0826348\times 10^{-3}$, координаты КА соответствуют геоцентрическому положению. При вычислении $\mathbf{\Delta_2}$ принято, что плоскость солнечных панелей КА перпендикулярна направлению солнечных лучей и КА всегда освещен Солнцем. Оно определяется соотношением:

$$\mathbf{\Delta}_2 = (C_{SC}F_{SC} + C_{SP}F_{SP})(P_{SR} / d^2(AU)) \cdot (\mathbf{d} / d) / m_{SC}. \tag{1.76}$$

Здесь: C_{SC}, C_{SP} – коэффициенты, учитывающие отражение, для КА и панелей солнечных батарей. F_{SC} – миделева средняя площадь КА; F_{SP} – площадь Солнечных панелей. P_{SR} ($\approx 4.6\times 10^{-6}$ Н/м^2) – давление солнечного света на расстоянии в 1 а.е. от Солнца. **d –** радиус-вектор КА относительно Солнца; $d=|\mathbf{d}|$; d (AU) = d(км)/1AU; 1AU = 149.59787×10^6 км; m_{SC} – масса КА. Здесь принято, что отражение света от КА происходит симметрично относительно направления на Солнце.

Для первой части полета: начальное время - момент начала пассивного полета после разгона КА вблизи Земли, $t_{in1} = t_0$ (1.62), конечное время - момент подлета КА к астероиду, $t_{f1} = t_2$. Начальное положение и скорость КА $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{V}_0$ определяются по (1.55). Здесь было рассмотрено 2 варианта системы уравнений (1.74). Первый вариант – основной, уравнения движения КА интегрируются в геоцентрической, геоэкваториальной (2000.0) СК до того, как КА покинет сферу действия Земли (с учетом влияния дальних тел, сжатия Земли (гармоники J_2) и давления Солнечного света), потом - в гелиоцентрической СК. Второй вариант - интегрирование всегда выполняется в геоцентрической СК. Оба варианта дали очень близкие, практически совпадающие результаты: расхождение по координатам < 60 км.

КА в конечный момент t_2 имеет вектор состояния ($\boldsymbol{r}_f$, $\boldsymbol{V}_f$). Из-за возмущений, КА на первой итерации не будет попадать в астероид. Поэтому решается краевая задача - с помощью варьирования начальных параметров добиваемся попадания в астероид. Отклонение КА от астероида $\Delta\boldsymbol{r}_f$ записывается формулой

$$\begin{cases} \Delta X_f^{(1)} = X - X_A \\ \Delta Y_f^{(1)} = Y - Y_A \\ \Delta Z_f^{(1)} = Z - Z_A \end{cases}, \ \Delta\boldsymbol{r}_f = [\Delta\boldsymbol{X}_f \ \Delta\boldsymbol{Y}_f \ \Delta\boldsymbol{Z}_f]. \tag{1.77}$$

Здесь $\boldsymbol{r}_f$ (t_2)= [X, Y, Z] – радиус вектор КА, полученный интегрированием уравнения (1.74) от ($\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{V}_0$, t_0); $\boldsymbol{r}_A(t_2)$= [X_A, Y_A, Z_A] – радиус вектор астероида в геоцентрической СК, определенный по эфемеридам.

В качестве варьируемых выбираем следующие параметры: Ω_0 – долготу восходящего узла (1.50), ω_0 – аргумент перигея (1.52) и h_0= $V_{\infty 1}{}^2$, которые непосредственно связаны с $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{V}_0$, t_0. Задавая малые частные вариации $\delta\Omega_0$, $\delta\omega_0$, δh_0 к первоначальным Ω_0, ω_0, h_0, соответственно, получим новые векторы начального состояния КА ($\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{V}_0$, t_0). Интегрируя (1.74) до t_2 из этих новых начальных состояний КА, получим матрицу чувствительности от $\delta\boldsymbol{r}_f$ по $\delta\Omega_0$, $\delta\omega_0$, δh_0:

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_f}{\partial\Omega_0} & \dfrac{\partial X_f}{\partial\omega_0} & \dfrac{\partial X_f}{\partial h_0} \\ \dfrac{\partial Y_f}{\partial\Omega_0} & \dfrac{\partial Y_f}{\partial\omega_0} & \dfrac{\partial Y_f}{\partial h_0} \\ \dfrac{\partial Z_f}{\partial\Omega_0} & \dfrac{\partial Z_f}{\partial\omega_0} & \dfrac{\partial Z_f}{h_0} \end{bmatrix}, \text{ где } \begin{matrix} \dfrac{\partial\mathbf{r}_f}{\partial\Omega_0} = \dfrac{\mathbf{r}_f\left(\Omega_0 + \delta\Omega_0\right) - \mathbf{r}_f\left(\Omega_0\right)}{\delta\Omega_0} \\ \dfrac{\partial\mathbf{r}_f}{\partial\omega_0} = \dfrac{\mathbf{r}_f\left(\omega_0 + \delta\omega_0\right) - \mathbf{r}_f\left(\omega_0\right)}{\delta\omega_0} \\ \dfrac{\partial\mathbf{r}_f}{\partial h_0} = \dfrac{\mathbf{r}_f\left(h_0 + \delta h_0\right) - \mathbf{r}_f\left(h_0\right)}{\delta h_0} \end{matrix}. \tag{1.78}$$

Тогда связь между изменением в конечном радиусе КА и изменениями в начальных параметрах будет следующей:

$$\Delta\mathbf{r}_f^{(i)} = \begin{bmatrix} \Delta X_f^{(i)} \\ \Delta Y_f^{(i)} \\ \Delta Z_f^{(i)} \end{bmatrix} = K_i \cdot \begin{bmatrix} \Delta\Omega_0^{(i)} \\ \Delta\omega_0^{(i)} \\ \Delta h_0^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, поправки на начальные данные можно определить из отклонения конечного положения КА от положения астероида:

$$\begin{bmatrix} \Delta\Omega_0^{(i)} \\ \Delta\omega_0^{(i)} \\ \Delta h_0^{(i)} \end{bmatrix} = -K_i^{-1} \cdot \Delta\mathbf{r}_f^{(i)},\ i = 1, 2, 3\cdots. \qquad (1.79)$$

Далее пересчитываем ($\boldsymbol{r}_0^{(i+1)}$, $\boldsymbol{V}_0^{(i+1)}$, $t_0^{(i+1)}$) по обновленным параметрам:

$$\begin{aligned} &\Omega_0^{(i+1)} = \Omega_0^{(i)} + \Delta\Omega_0^{(i)} \\ &\omega_0^{(i+1)} = \omega_0^{(i)} + \Delta\omega_0^{(i)} \\ &h_0^{(i+1)} = h_0^{(i)} + \Delta h_0^{(i)} \qquad , \\ &t_0^{(i+1)} = t_0^{(i)} + \frac{\Delta\Omega_0^{(i)}}{\omega_З} + \frac{\Delta\omega_0^{(i)} R_0^{3/2}}{\sqrt{\mu_E}} \end{aligned} \qquad (1.80)$$

и вновь проинтегрируем уравнение (1.74) до t_2, получим $\Delta\boldsymbol{r}_f^{(i+1)}$. Повторяя этот цикл до момента, когда $|\Delta\boldsymbol{r}_f^{(i+1)}| < \varepsilon$ (допустимая погрешность), получим исправленные начальные данные, обеспечивающие попадание КА в астероид в момент t_2.

Во второй части: начальное время - момент отлета КА от астероида, $t_{in2} = t_3$, начальное состояние КА взято из решения задачи Ламберта, конечное время – сначала – это момент подлета КА к сфере действия Земли: $t_{f2} = t_{4СД}$. В этом случае варьируются 3 компоненты вектора скорости $\mathbf{V}_{\infty 3}$, чтобы обеспечить в момент $t_{4СД}$ вход КА в сферу действия Земли с вектором прицельной дальности, соответствующим входу в атмосферу Земли с необходимой высотой условного перигея (с учетом возмущения от сжатия Земли). Алгоритм анализа подлета к Земле формулируется следующим образом:

1. Определяется отклонение вектора состояния КА от Земли в момент $t_{4СД}$ $\Delta\boldsymbol{R}(t_{4СД}) = \boldsymbol{r}(t_{4СД}) - \boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}(t_{4СД})$, $\Delta\boldsymbol{V}(t_{4СД}) = \boldsymbol{V}(t_{4СД}) - \boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}(t_{4СД}) = \boldsymbol{V}_{\infty 4}$;
2. Переводится $\Delta\boldsymbol{R}(t_{4СД})$ в СК, связанную с $\mathbf{V}_{\infty 4}$, с ортами осей $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ - $\Delta\boldsymbol{R}(t_{4СД})_{ijk} = (\Delta r_{xкп}, \Delta r_{yкп}, \Delta r_{zкп})$

$$\mathbf{k} = -\frac{\mathbf{V}_{\infty 4}}{\left|\mathbf{V}_{\infty 4}\right|}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}_E(t_{4СД})}{\left|\mathbf{k} \times \mathbf{r}_E(t_{4СД})\right|}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k};$$

3. Краевые условия:

$$\begin{aligned}
&\Delta r_{xкп} - b \to 0, \\
&\Delta r_{yкп} \to 0, \\
&\Delta r_{zкп} - \rho_{СДЗ} \to 0, \\
&b = r_p^* \sqrt{1 + \frac{2\mu_E}{V_{\infty 4}^2 \cdot r_p^*}}.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Здесь $r_p^* = r_p + \delta r_p$, $r_p = R_E + 50$ км, $\rho_{сдз}$ - радиус сферы действия Земли. Затем интегрирование с учетом всех возмущений продолжается до входа КА в атмосферу Земли (1.70), и варьированием поправки δr_p добиваемся, чтобы возмущенное расстояние в условном перигее равнялось заданному значению r_p.

1.5.4 Коррекция массово-энергетических характеристик экспедиции

На данном этапе, прежде всего, был учтен неимпульсный характер разгона КА у Земли. В этом случае учитывается время работы двигателя. Это неизбежно приводит к увеличению требуемого импульса, связанного с гравитационными потерями. Тогда характеристическая скорость при отлете от Земли составляет сумму расчетного импульса скорости ΔV_1 (1.3) и величину «гравитационных потерь» скорости δV_{1gr}

$$\Delta V_1^* = \Delta V_1 + \delta V_{1gr}. \tag{1.82}$$

Величина этих «гравитационных потерь» определяется на основе аналитической формулы [68, 126]:

$$\delta V_{1gr} \approx k(\mu / r^3) t_e^2 \Delta V_1; \quad k \approx 0.019, \tag{1.83}$$

где t_e - время работы двигателя для создания импульса скорости ΔV_1 конечной тягой на расстоянии r от центра с гравитационным параметром μ:

$$t_e = \frac{m(t_0)}{\dot{m}} \left(1 - \boldsymbol{exp}\left(-\frac{\Delta V_1^*}{c_1} \right) \right). \tag{1.84}$$

Здесь $\dot{m}$ - секундный расход топлива, $\dot{m} = P_1 / c_1$, P_1 - тяга разгонного блока, используемого для создания импульса скорости ΔV_1. По формулам (1.82), (1.84), (1.83), делая итерации до момента, когда отклонение $|\delta V_{1gr}{}^{n} - \delta V_{1gr}{}^{n-1}| < \varepsilon$ (допустимая погрешность), получим расчетные величины t_e, δV_{1gr} и значение ΔV_1^*.

Для уменьшения этого дополнительного расхода скорости δV_{gr1} рассматривается режим разгона у Земли с двумя-тремя включениями двигателя, как и в [16]. В случае двух включений двигательной установки: в результате первого включения КА перейдет на промежуточную эллиптическую орбиту. Сделав по ней полный виток, он вернется к перигею - точке P_0 (см. Рис.1.1 (а)). Затем двигатель включается второй раз, и КА переводится на гиперболическую орбиту полета к астероиду. В этом случае при расчете времени старта в формуле (1.61) добавим период промежуточной эллиптической орбиты. Анализ показал, что для минимизации потери, полный импульс ΔV_1 следует разбиваться на два импульса, удовлетворяющие отношению:

$$\Delta V_1 = \Delta V_{11} + \Delta V_{12}, \quad \Delta V_{11} \approx 0.4\Delta V_1. \tag{1.85}$$

Для случая трех включений двигателя: совершается два оборота по эллиптическим орбитам.

При торможении и разгоне около астероида также возникают «гравитационные потери», и их, в принципе, тоже можно уменьшить с многократным включением двигателя. Гравитационные потери для импульсов скорости ΔV_2, ΔV_3 не учитываются при экспедиции к Апофису, так как гравитация Апофиса мала (μ_A ~ 2 – 3 м^3/с^2) и потери малы.

Для коррекции массо-энергетических характеристик также предусмотрены дополнительные импульсы скорости на коррекцию ΔV_{K1} (коррекция траектории полета от Земли к астероиду), ΔV_{K2} (управление движением КА у астероида), ΔV_{K3} (коррекция траектории полета от астероида к Земле); уточнены массовые характеристики отделяемых частей РБ; предусмотрены гарантийные запасы топлива; введены отделяемые массы – для мини-спутника астероида Δm_{A1} и посадочного устройства Δm_{A2}. С учетом этих перепишем формулы для расчета массы КА:

1) Масса КА после отделения ДУ1 (РБ) определяется так же, как (1.5)

$$m\left(t_1\right)=m\left(t_0\right)\exp\left(-\frac{\Delta V_1^*}{c_1}\right)-m_{1E}\,. \tag{1.86}$$

Здесь в ΔV_1* включены гравитационные потери (1.82). На данном этапе рассматривается несколько вариантов РБ с разной массой топлива, $m_{1\text{Е}}$ и т.д. Если требуемая масса топлива $m_\text{т}$ для создания ΔV_1* превышает эту массу для некоторого варианта РБ, то переходим к другому варианту РБ с бóльшей массой $m_\text{т}$ и соответствующей бóльшей массой $m_{1\text{Е}}$.

2) Масса КА после торможения у астероида:

$$m\left(t_2\right)=m\left(t_1\right)\exp\left(-\frac{\Delta V_{K1}+\Delta V_2}{c_2}\right). \tag{1.87}$$

3) Масса КА до разгона у астероида для отлета от него:

$$m\left(t_3\right)^- = m\left(t_2\right)\exp\left(-\frac{\Delta V_{K2}}{c_2}\right)-\Delta m_{A1}-\Delta m_{A2}\,, \tag{1.88}$$

где $\Delta m_{\text{А}1}$ – масса мини-спутника астероида, $\Delta m_{\text{А}2}$ – масса посадочного устройства.

4) Конечная масса:

$$m_f = m\left(t_3\right)^- \exp\left(-\frac{\Delta V_3+\Delta V_{K3}}{c_2}\right). \tag{1.89}$$

5) Полезная масса:

$$\begin{aligned} &m_{T2}=m\left(t_1\right)-m\left(t_2\right)\exp\left(-\frac{\Delta V_{K2}}{c_2}\right)+m\left(t_3\right)^- - m_f\,,\\ &m_{2E}=m_{20}+a_{T2}m_{T2}\,,\\ &m_p=m_f-m_{2E}\,. \end{aligned} \tag{1.90}$$

1.5.5 Оптимизация после уточнения

Траектории, определенные вышеуказанной методикой, являются «квазиоптимальными», т.к. для них оптимизация осуществляется только на первом этапе - в приближенном модели. Из-за разницы между упрощенной моделью и более точной моделью, оптимальные решения после уточнения могут быть немного сдвинуты по граничным временам, в частности, по временам t_1 и t_4. В упрощенной модели КА отправляется с орбиты Земли и по возвращении прилетает также на орбиту Земли. А в точной модели КА отправляется в момент t_0 с перигея отлетной траектории и возвращается в момент t_f к Земле, на границу ее атмосферы. Поэтому на основе «квазиоптимальных» траекторий выполняется дальнейшая оптимизация уточненных траекторий методом покоординатного спуска [1] по временам t_0, t_2, t_3, $t_f(t_{4СДЗ})$. За начальное приближение берем времена $t_0^к$, $t_2^к$, $t_3^к$, $t_f^к$ для «квазиоптимальной» траектории и рассмотрим функционал G_3 =max $m_р$ при фиксированных значениях всех переменных, кроме одной, например, первой: G_3 (t_0, $t_2^к$, $t_3^к$, $t_f^к$). Тогда G_3 превратится в функцию одной переменной t_0. Изменяя эту переменную, будем двигаться от начальной точки $t_0^к$ в сторону повышения функции, пока не дойдем до максимума m_p при t_0= t_0^1, после которого она начинает уменьшаться. Затем отдельно варьируем остальные переменные аналогичным образом и найдем решение с максимальной полезной массой, в частности t_0, t_f. Тогда траектории, полученные после всех этих процессов, будем называть оптимальными.

1.6 Выводы по главе 1

Таким обозам, в первой главе диссертационной работы разработана двухэтапная методика построения оптимальных по максимуму полезной массы межпланетных траекторий КА для экспедиции Земля - астероид – Земля. На первом этапе рассмотрено движение в центральном ньютоновском поле притяжения Солнца, в импульсной модели. На втором этапе выполнен анализ с учетом гравитационных возмущений от притяжения небесных тел и давления солнечного света, гравитационных потерь при разгоне у Земли, с определением координат небесных тел по эфемеридам. Разработан алгоритм построения сопряженных функций для случая максимизации полезной массы, с учетом различия скоростей истечения газов у двигательных установок и наличия отделения масс.

ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КА ДЛЯ ПОЛЕТА К АСТЕРОИДУ АПОФИС С ВОЗВРАЩЕНИЕМ К ЗЕМЛЕ

В данной главе, используя разработанную методику, численно определяются и исследуются оптимальные, по максимуму полезной массы КА, межпланетные траектории с запуском КА в течение 2019-2022 гг. для экспедиции «Земля-Апофис-Земля». Сначала, в пп. 2.2.1-2.2.3 рассмотрены результаты определения траекторий экспедиции в рамках этапа 1 методики – для модели точечных сфер действия Земли и астероида. Затем, в п. 2.2.4 изложены результаты этапа 2 – с учетом возмущений, гравитационных потерь, уточнения энергетических характеристик экспедиции. В заключительных разделах дано сравнение с характеристиками зарубежных проектов, описаны возможности разных ракет-носителей, возможности уменьшения скорости входа СА в атмосферу Земли, даны выводы по главе. Основные результаты были опубликованы в [35 - 38, 47, 48, 100, 99].

2.1 Формирование исходных данных анализа

Важным параметром, определяющим энергетические характеристики перелета КА, является расстояние между Землей и Апофисом. Периоды, когда расстояние между ними резко уменьшается, соответствуют более легкой достижимости астероида. На Рис. 2.1 показано расстояние между Землей и Апофисом в течение 2013-2036 гг. На ближайшее будущее, сближение Апофиса с Землей произойдет в марте 2021 г. Запуск КА около этого времени позволяет значительно экономить затрат топлива. Поэтому дата отлета от Земли t_1 рассмотрена в диапазоне [01.05.2019; 31.12.2022]. Общая продолжительность экспедиции $\Delta t_\Sigma = t_4 - t_1$ взята из множества [390, 420, 450, 510, 540, 570, 600, 630, 660, 690, 730] сут., т.е. менее двух лет. В основном варианте полета и оптимизации время пребывания КА около Апофиса полагалось $\Delta t_{23} = t_3 - t_2 = 7$ сут.

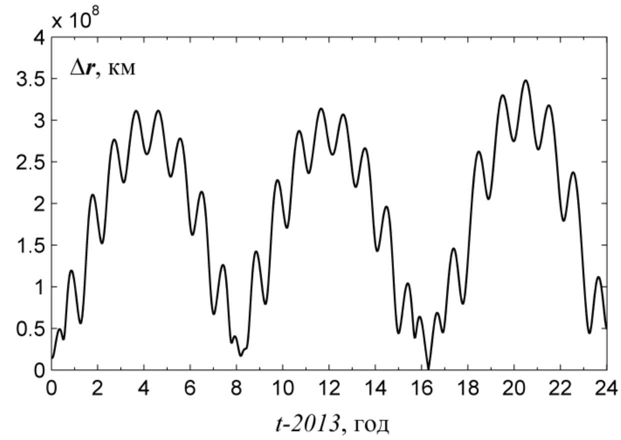


Рис.2.1. Расстояние между Землей и Апофисом в течение 2013-2036гг.

В качестве основного варианта анализа используются РН «Союз-ФГ» («Союз-2.1а») и РБ «Фрегат» для выведения КА на орбиту ожидания и затем – на орбиту перелета к Апофису. «Союз-ФГ» обеспечивает доставку массы $m_0 \approx 7130$ кг на начальную орбиту высотой $H_0 \approx 200$ км. Разгон КА у Земли совершается блоком «Фрегат» с тягой ~20000 Н, удельной тягой ~ 330 с. Отделяемая масса «Фрегата» m_{1E} составляет ~1000 кг. Приастероидные маневры совершаются ДУ2. Для этой двигательной установки принято, что тяга ~ 400 Н. удельная тяга ~ 304 с, постоянная составляющая массы m_{20} ~ 100 кг, коэффициент массы топливных баков a_{F2} = 0.15. Так как гравитационный параметр Апофиса совсем мал (μ_A ~ 2 – 3 м^3/с^2), скорости импульсы ΔV_2 и ΔV_3, определяемые формулами (1.3), практически равны соответствующим скоростям на «бесконечности».

Кроме того, рассматриваются случаи использования более мощных РН «Союз-2.1б», «Зенит» и вариантов РБ «Фрегат». Эти РН «Союз-2.1б» и «Зенит» позволяют доставить на начальную орбиту высотой $H_0 \approx 200$ км бóльшую начальную массу m_0, ~ 8250 кг и 14000 кг, соответственно.

Для учета дополнительного расхода топлива на коррекции траектории КА и управление движением КА у Апофиса было предусмотрено выделить импульсы скорости на коррекцию до подлета к астероиду $\Delta V_{к1}$=50 м/с, у астероида - $\Delta V_{к2}$=10 м/с и после отлета от астероида - $\Delta V_{к3}$=25 м/с.

На основании обсуждения проблемы с АО «НПО Лавочкина» были скорректированы некоторые массово-энергетические характеристики КА: уточнена удельная тяга блока «Фрегат»; уточнены массовые характеристики отделяемых частей блока; предусмотрены гарантийные запасы топлива; введены отделяемые массы небольшого спутника Апофиса и посадочного устройства – 10 кг и 20 кг. Подробные характеристики вариантов разгонного блока типа «Фрегат», принятых в диссертационной работе, приведены в Таблице 3 (по данным на сайте АО «НПО Лавочкина» [148]).

Таблица 3.

Характеристики вариантов разгонного блока типа «Фрегат»

	Фрегат-1	Фрегат-2	Фрегат-3	Фрегат - СБ	
				Основной РБ	Сбрасываемый блок баков
Гарантийные запасы топлива, кг	5250	5600	7100	7100	3100
Отделяемая масса, кг	930	980	1050	1050	360
Тяга двигателя, Н	19600				
Удельная тяга, с	333				

Для полученных траекторий оценивается скорость входа КА в атмосферу Земли и сравнивается эта скорость со скоростью входа для миссий «*Stardust*» [79, 83], «*Hayabusa*» [130, 149] и «*OSIRIS-REx*» [78]. Проанализирован также вспомогательный вариант полёта с заключительным ракетным торможением и переходом на высокую эллиптическую геоорбиту, с которой затем осуществляется спуск и аэродинамическое торможение в атмосфере Земли.

2.2 Определение оптимальных траекторий

В данном разделе рассматриваются энергетически оптимальные траектории для двух случая перелета: 1) каждый гелиоцентрический перелет осуществляется на дуге, меньшей 2π ($\Delta u<2\pi$); 2) хотя бы на одном гелиоцентрическом участке есть один пассивный виток ($\Delta u>2\pi$). При начальном анализе, для простоты, координаты и скорости Земли и Апофиса определяются их элементами орбиты, приведенными в Таблице 4. Потом с развитием работы используется эфемериды Земли для анализа. Здесь элементы орбиты Земли и Апофиса заданы в гелиоцентрической эклиптической инерциальной системе координат (ГЭИСК).

μ_S=132712440018 км^3/с^2, 1 а.е =149597870.691 км.

Таблица 4.

Элементы орбиты Земли и Апофиса в ГЭИСК

Параметры	Земля	Апофис
a (а.е.)	1.00000261	0.9223002432020343
e	0.01671123	0.1910762289628459
i (град)	0	3.331960043540561
Ω (град)	348.73936	204.4304100444624
ω (град)	114.20783	126.4244766663471
M_0 (град)	357.51716	287.5823055949761
T_0 (юлианская дата)	2451545.0	2455800.5
t_π	2451182.2607772136	2455542.0559298163

Для поиска оптимальных траекторий с максимальной полезной массой КА использовалось несколько методов оптимизации: метод Соболя И.М., генетический метод, квазиньютоновский BFGS метод, метод покоординатного спуска. При отладке методик для одно- и двухпараметрических случаев использовался также метод перебора. На основе этих методов разработан комплексный метод оптимизации, позволяющий сразу дать окончательные результаты. Рассмотрено несколько случаев оптимизации траекторий экспедиции. В основной двухмерной задаче оптимизации 1) задавались значения времен Δt_Σ и Δt_{23}, менялись даты отлета от Земли t_1 и время перелета от Земли к Апофису $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$. Для различных времен экспедиции Δt_Σ определяются оптимальные траектории с максимумом полезной массы. Подробно анализируются результаты для случая перелета $\Delta u < 2\pi$ и случая $\Delta u > 2\pi$. При решении дополнительных задач оптимизации: для задачи 2) трехмерной оптимизации задается время Δt_{23}, для задачи 3) трехмерной оптимизации задается время Δt_Σ, для задачи 4) четырехмерной оптимизации варьируются все четыре времени экспедиции. В задаче 5) четырехмерной оптимизации учитывается ограничение на скорость входа в атмосферу.

2.2.1 Этап 1 - Оптимальные траектории в рамках основной задачи оптимизации для случая $\Delta u<2\pi$

В Таблице 5 приведены результаты анализа по максимизации полезной массы m_p для первого случая перелета ($\Delta u<2\pi$). Для вариантов Δt_Σ = 660, 690 сут., нет траектории с положительной полезной массой. Это означает, что запланированную экспедицию в этих случаях нельзя осуществить на основе используемых двигателей.

Таблица 5.

Временные и массовые характеристики оптимальных траекторий по максимизации m_p для случая $\Delta u<2\pi$, Δt_{23}=7 сут.

№	Δt_Σ (сут.)	t_1 (дата)	Δt_{12} (сут.)	m_f (кг)	m_p (кг)
1	390	10.04.2021	116	327	89
2	420	22.02.2021	97	401	194
3	450	23.01.2021	120	416	196
4	480	08.01.2021	214	302	77
5	510	20.05.2020	272	368	119
6	540	22.10.2019	223	360	194
7	570	22.09.2019	258	364	152
8	600	23.08.2019	284	337	85
9	630	24.07.2019	313	301	22
10	730	15.04.2020	370	364	157

Самой лучшей здесь является траектория ***№ 3***. На Рис. 2.2 приведена зависимость полезной массы КА от t_1 и Δt_{12} для варианта Δt_Σ = 450 сут., $t_1 \in$ [01.05.2019; 31.12.2022], $\Delta t_{12} \geq 5$ сут., Δt_{23}= 7 сут., $\Delta t_{34} \geq 5$ сут. Для удобства в тех местах, где полезная масса m_p отрицательна, поставлено m_p= 0 вместо их расчетного значения. Можно видеть, что в рассмотренных диапазонах t_1 и Δt_{12} существуют 2 области, где $m_p > 0$. В первой области вершина соответствует $m_p \sim$ 196 кг, во второй пик - $m_p \sim$ 30 кг. На Рис.2.3 показан график изолиний полезной массы КА около вершины первой области при увеличенном масштабе.

Максимальная полезная масса соответствует траектории ***№ 3***. Для нее t_2 = 23,05,2021, t_3 = 30,05,2021, t_4 = 18,04,2022, скорость «на бесконечности» при отлете от Земли $V_{\infty 1}$=3.784 км/с, импульс ΔV_1=3.856 км/с. В приастероидном этапе ΔV_2 = 2.296 км/с, ΔV_3 = 0.912 км/с. Сумма трех импульсов $V_{хар}$=7.065 км/с.

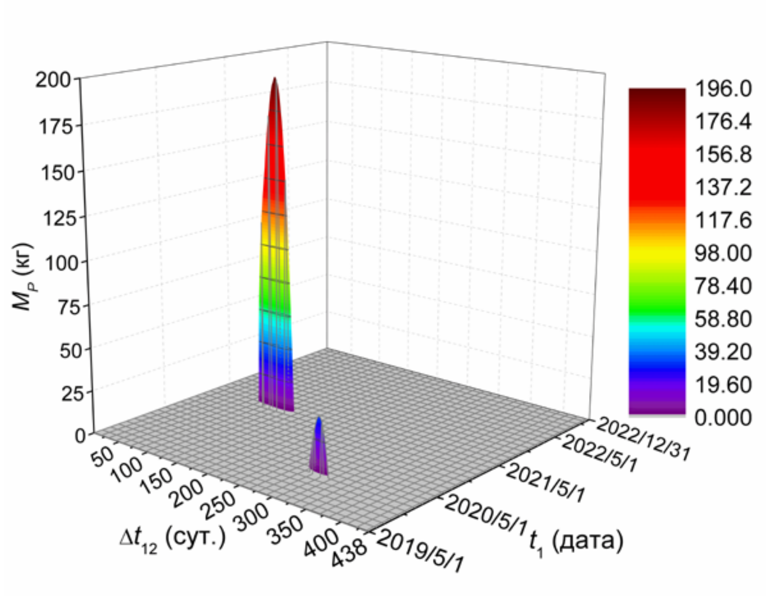


Рис.2.2. Зависимость полезной массы КА от t_1 и Δt_{12} для варианта Δt_Σ =450сут, $t_1 \in$ [01.05.2019; 31.12.2022], $\Delta t_{12} \geq$5сут., Δt_{23}=7сут., $\Delta t_{34} \geq$5сут.

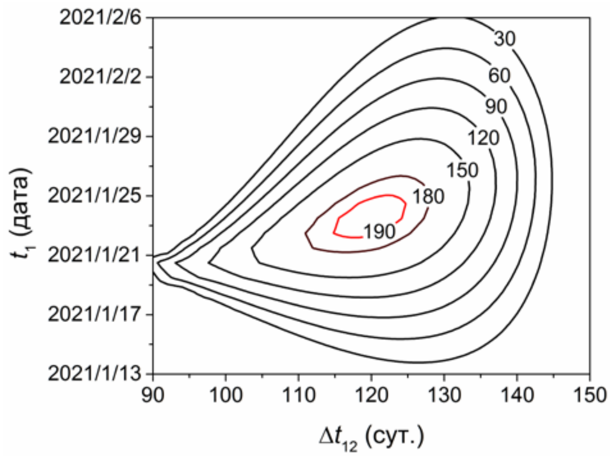
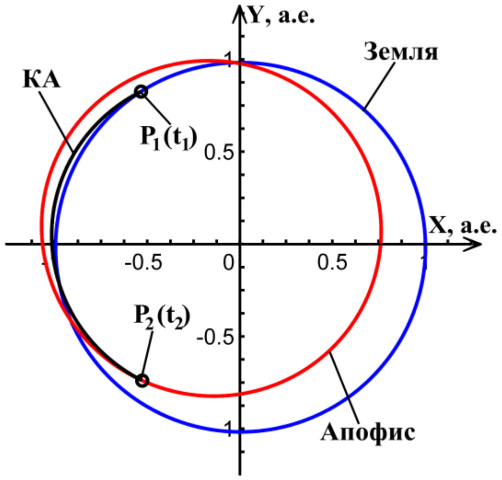
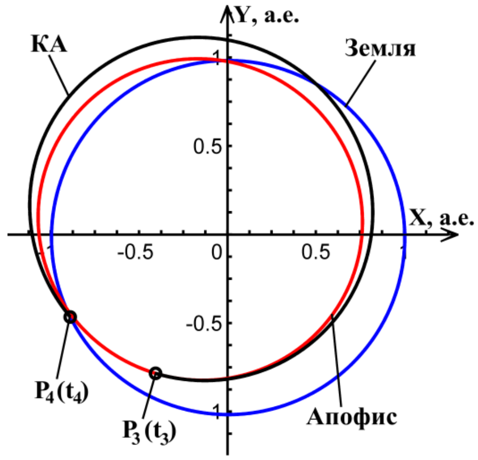


Рис.2.3. График изолиний полезной массы КА (кг) для варианта Δt_Σ =450сут, $t_1 \in$ [13.01.2021; 06.02.2021], Δt_{12}=90 -150 сут., Δt_{23}=7сут.

На Рис. 2.4 приведены картины траекторий перелета: а) от Земли (P_1) до Апофиса (P_2); б) от Апофиса (P_3) до Земли (P_4) для варианта ***№ 3***. Возврат КА к Земле происходит вблизи восходящего узла орбиты Апофиса относительно эклиптики.





(а) (б)

Рис.2.4. Межпланетные перелеты КА для варианта Δt_{Σ} = 450 сут., t_1= 23.01.2021, Δt_{12}=120сут., Δt_{23}=7сут.: (а) перелет от Земли (P_1) до Апофиса (P_2); (б) перелет от Апофиса (P_3) до Земли (P_4)

2.2.2 Этап 1 - Оптимальные траектории в рамках основной задачи оптимизации для случая Δu>2π

В Таблице 6 приведены результаты анализа по максимизации полезной массы m_p для второго случая перелета (Δu>2π). Здесь были проигнорированы варианты, для которых нет решений задачи Ламберта, и те с отрицательной полезной массой.

Таблица 6.

Временные и массовые характеристики оптимальных траекторий по максимизации m_{p} для случая Δu>2π, Δt_{23}=7 сут.

№	Δt_{Σ} (сут.)	t_1 (дата)	Δt_{12} (сут.)	m_f (кг)	m_p (кг)
11	540	22.10.2019	211	367	207
12	570	22.09.2019	245	294	69
13	600	23.08.2019	267	395	145
14	630	23.07.2019	280	454	190
15	660	23.06.2019	304	510	247
16	690	24.05.2019	335	527	272
17	730	27.04.2020	308	457	239

Из Таблиц 5, 6 видно, что обычно при небольшом суммарном времени полета ($\Delta t_{\Sigma} < 570$ сут.) схема прямых перелетов КА без совершения пассивного витка по орбите ($\Delta u<2\pi$) лучше с точки зрения оптимизации полезной массы КА. Для случая $\Delta t_{\Sigma} \geq 570$ сут., схема полета с одним пассивным витком по орбите ($\Delta u>2\pi$) позволяет заметно увеличить полезную массу.

Самой лучшей, с учетом обоих случаев перелета, является траектория ***№ 16***, см. Таблицу 6. Сделаем аналогичный анализ для этого случая. На Рис. 2.5 приведена зависимость полезной массы КА от t_1 и Δt_{12} для этого варианта Δt_{Σ} = 690 сут., $t_1 \in$ [01.05.2019; 31.12.2022], $\Delta t_{12} \geq 5$ сут., Δt_{23} =7 сут., $\Delta t_{34} \geq 5$ сут. В рассмотренных интервалах t_1 и Δt_{12} тоже существуют 2 области, где $m_{\text{p}} > 0$. Первая вершина соответствует m_p ~ 272 кг, вторая - m_p ~ 190 кг. На Рис.2.6 показан график изолиний полезной массы КА в окрестности вершины первой области с увеличенным масштабом. Максимальная полезная масса соответствует траектории ***№ 16***. Для нее t_2 = 23,04,2020, t_3 = 30,04,2020, t_4 = 13,04,2021, скорость «на бесконечности» при отлете от Земли $V_{\infty 1}$=1.89160 км/с, импульсы ΔV_1=3.388 км/с, ΔV_2 = 2.841 км/с, ΔV_3 = 0.389 км/с. Сумма величин трех импульсов $V_{\text{хар}}$=6.618 км/с.

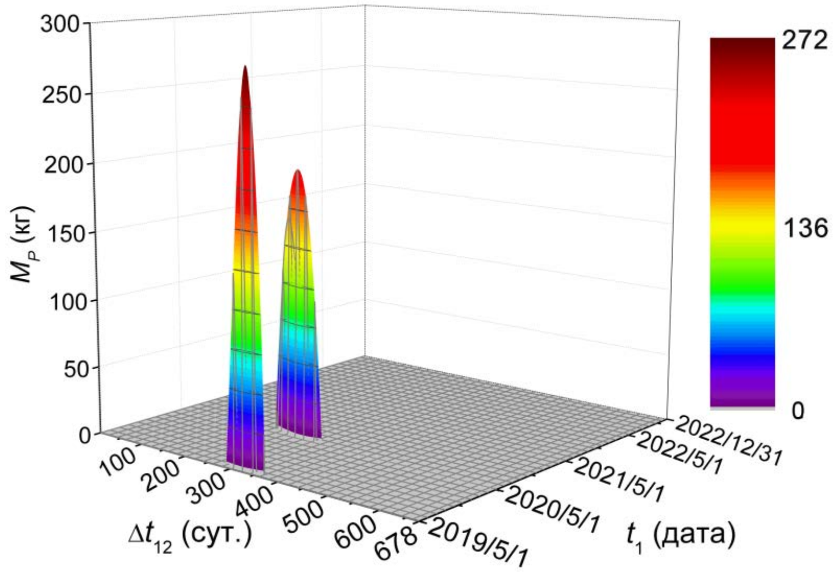


Рис.2.5. Трехмерный график изолиний полезной массы КА для варианта Δt_{Σ} = 690сут, $t_1 \in$ [01.05.2019; 31.12.2022], $\Delta t_{12} \geq 5$ сут., Δt_{23} =7 сут., $\Delta t_{34} \geq 5$ сут.

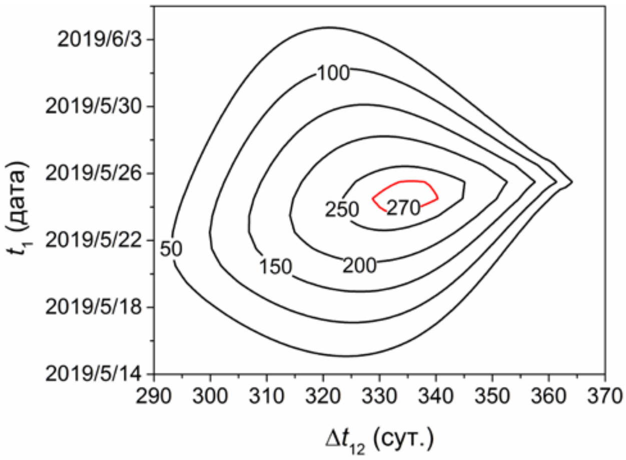


Рис.2.6. График изолиний полезной массы КА (кг) для варианта Δt_{Σ} =690сут, $t_1 \in$ [19.05.2019; 03.06.2019], Δt_{12}=290 -370 сут., Δt_{23}=7сут.

На Рис. 2.7 приведены картины траекторий перелета: а) от Земли (P_1) до Апофиса (P_2); б) от Апофиса (P_3) до Земли (P_4) для варианта ***№ 16***. Во второй части перелета, совершается более одного оборота относительно Солнца на орбите, $\Delta u > 2\pi$. Возврат КА к Земле происходит вблизи восходящего узла орбиты Апофиса относительно эклиптики.

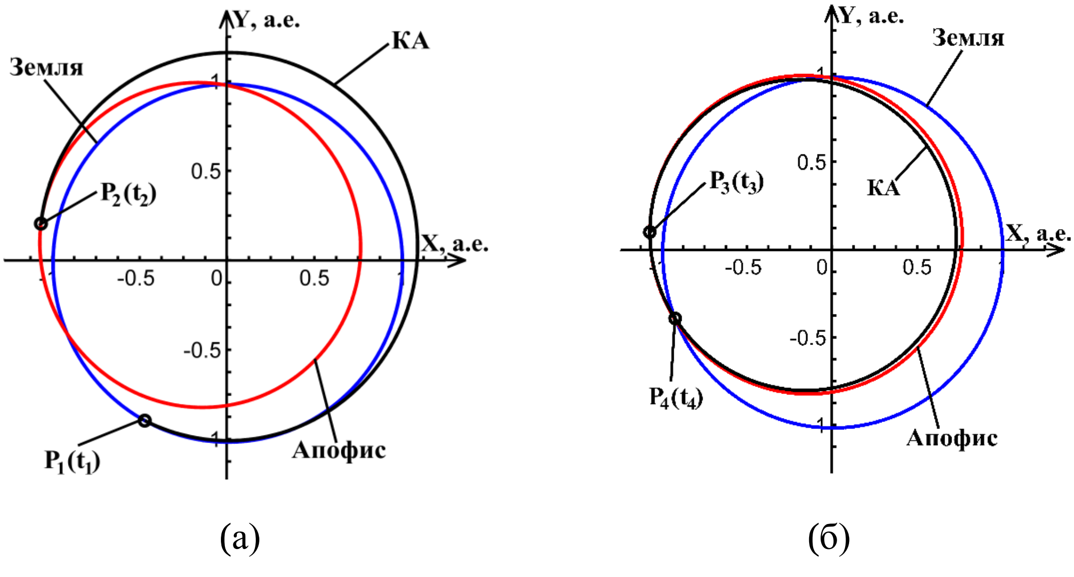
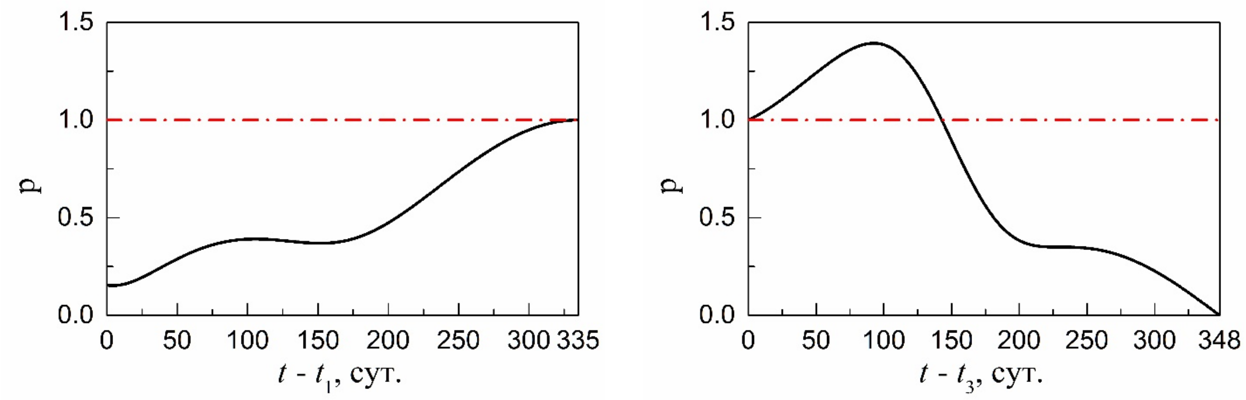


Рис.2.7. Межпланетные перелеты КА для варианта Δt_{Σ} =690 сут., t_1= 24.05.2019, Δt_{12}=335сут., Δt_{23}=7сут., $\Delta u_{(б)} > 2\pi$.: (а) перелет от Земли (P_1) до Апофиса (P_2); (б) перелет от Апофиса (P_3) до Земли (P_4)

Графики изменения модуля базис-вектора на обоих гелиоцентрических участках перелета для траектории ***№ 16*** показаны на Рис. 2.8. В первой части перелета всюду выполняется условие $p \le 1$, и только в момент t_2 p=1. Во второй части после приложения импульса $\Delta\mathbf{V}_3$ в момент t_3: $\dot{p}_3 = \mathrm{d}p_3 / \mathrm{d}t > 0$, $p > 1$, траекторию можно улучшить. Из выражений (1.41) для частных производных от функционала видно, что если $\mathrm{d}t_3>0$, то увеличим функционал, $\mathrm{d}G_3>0$. Т.е. задержка во времени отлета от Апофиса t_3 позволяет увеличить полезную массу. Далее рассмотрим этот вариант оптимизации с увеличением времени ожидания Δt_{23}.



(а) (б)

Рис.2.8. Изменение модуля базис-вектора для траектории ***№ 16***: а) на траектории перелета от Земли до Апофиса; б) на траектории перелета от Апофиса до Земли.

Вычисляем по (1.41) производные от G_3 по временам t_j (j=1, 2, 3, 4): $\partial G/\partial t_1$= -0.0463, $\partial G_3/\partial t_2$= -0.0228, $\partial G_3/\partial t_3$= 0.0227, $\partial G_3/\partial t_4$= 0.0468. Здесь результаты уже преобразованы в безразмерном виде. Поскольку заданы времена Δt_Σ и Δt_{23}, то возьмем $x_1=t_1$, $x_2=\Delta t_{12}=t_2-t_1$, тогда по (1.43), (1.44) имеем, что $\partial G_3/\partial x_1 \approx 0.0004 \sim 0$, $\partial G_3/\partial x_2 \approx -0.0001 \sim 0$.

2.2.3 Этап 1 - Оптимальные траектории в рамках дополнительных задач оптимизации (трехмерной и четырехмерной)

А) Сначала рассмотрим задачу (2) трехмерной оптимизации при фиксированном времени ожидания Δt_{23} и оптимальных трех других временах t_1, Δt_{12}, Δt_Σ. Для времени Δt_{23} задавались значения Δt_{23} =7, 30; 60; 90; 120; 130 сут. Тем самым получена оценка оптимального времени ожидания КА у Апофиса. Сначала рассмотрим вариант с Δt_{23}=7 сут. для демонстрации процесса оптимизации. Полученной траектории присвоен ***№ 18***. Приведем подробнее анализ этого случая.

1. Разделим диапазон $t_1 \in$ [01.05.2019; 31.12.2022] на 5 участков:

$t_{1(1)} \in [01.05.2019; 28.\ 02.2020]$, $t_{1(2)} \in [01.02.2020; 31.\ 08.2020]$

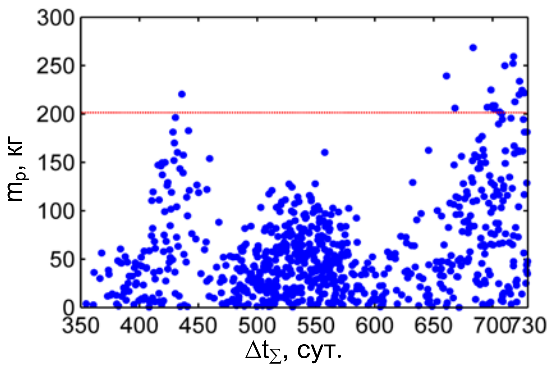
$t_{1(3)} \in [01.08.2020; 28.\ 2.2021]$, $t_{1(4)} \in [01.02.2021; 31.\ 10.2021]$

$t_{1(5)} \in [01.11.2021; 31.\ 12.2022]$.

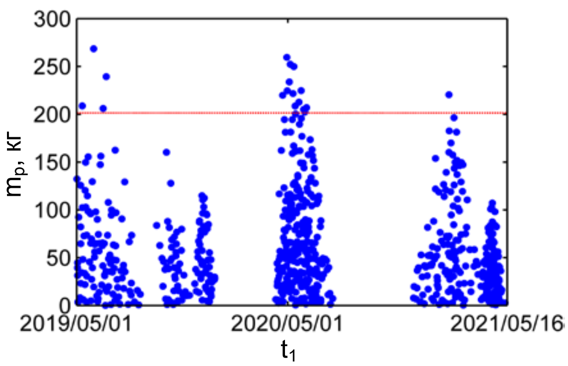
Другие исходные данные: $\Delta t_{\Sigma} \in [5; 730]$ сут., $\Delta t_{12} \in [5; 720]$ сут., $\Delta t_{23}=7$ сут.

2. Даем в каждой этой области $2^{16}=65536$ пробных точек (точек ЛПτ-последовательностей). Тогда общее количество точек N=327680. Из всех точек удаляем те, которые не удовлетворяют ограничениям $t_1 < t_2$, $t_2 < t_3$, $t_3 < t_4$. Число точек в допустимом множестве D N1=119541.

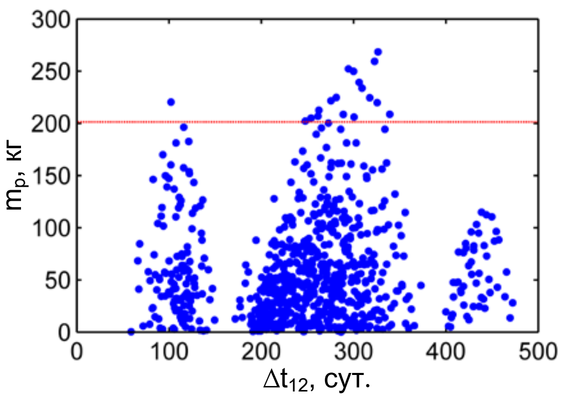
3. Вычисляем значение функционала m_p на каждой допустимой точке. Число точек, на которых $m_p > 0$, N2=730. На Рис. 2.9 показаны проекции этих точек на плоскости Δt_{Σ}-m_p, t_1-m_p, Δt_{12}-m_p. Среди них, максимум $m_{p\max1}$=268кг.



(а) Зависимость m_p от Δt_{Σ}



(б) Зависимость m_p от t_1



(в) Зависимость m_p от Δt_{12}

Рис.2.9. Проекции допустимых точек на плоскости Δt_{Σ}-m_p, t_1-m_p, Δt_{12}-m_p.

4. Выделяем точки, где $m_p > 0.75 \cdot m_{p\max1} \approx 200$кг (18 точек), они лежат в области A=$\{\Delta t_{\Sigma} \in [436; 730]$ сут., $t_1 \in [10.05.2019; 05.02.2021]$, $\Delta t_{12} \in [102; 339]$ сут.$\}$.

5. При локальной оптимизации для сравнения проводим две группы

экспериментов.

5а) Для первой группы в области А запускается ГА 30 раз (на каждый раз 50 итераций) с 2000 точек. Из них выбирается лучшее решение 1.

5б) Для второй группы запускается ГА только один раз в той же области А, используя 18 «хороших точек», полученных в п. 4. И потом на основе результата ГА выполняется BFGS метод. Отсюда находится лучшее решение 2

Результаты двух групп экспериментов определения параметров траектории ***№* 18** приведены в Таблице 7. Видно, что они хорошо согласованы, погрешность в m_p не более 1г. Но число вычислений значения функционала для второй группы намного меньше, чем для первой. Так, метод, применяемый ко второй группе, оказывается более эффективным. Несмотря на то, что каждый запуск ГА получается другой результат, на его основе после оптимизации с BFGS методом всегда получается решение, очень близко к «глобальному оптимуму». Видно также, что траектория ***№* 18** (m_p = 274.6 кг) близка к траектории ***№* 16** (m_p = 272 кг).

Таблица 7.

Сравнение результатов двух групп экспериментов для траектории *№* 18

Номер решений	Δt_Σ (сут.)	t_1 (юлианская дата)	Δt_{12} (сут.)	m_p (кг)
1	698.4031	2458619.2409	345.8176	274.663574
2	698.4047	2458619.2411	345.8236	274.663565

Используя аналогичный процесс, определим оптимальные траектории для этой задачи трехмерной оптимизации с Δt_{23}= 30, 60, 90, 120, 130 сут. Значение суммы величин импульсов скорости $V_{\text{хар}}$, конечной массы m_f и полезной массы m_p для полученных оптимальных траекторий показано на Рис. 2.10.

При этом полезная масса увеличивается до ~ 328 кг. Так, для траектории с Δt_{23} = 120 сут.: t_1=06.05.2020, Δt_{12}=297 сут., Δt_Σ =716 сут., $m_{\text{р}}$=328 кг. Следовательно, оптимальное время ожидания КА около Апофиса достигается на интервале 90 – 120 сут. Оно уточняется далее при решении задачи (4).

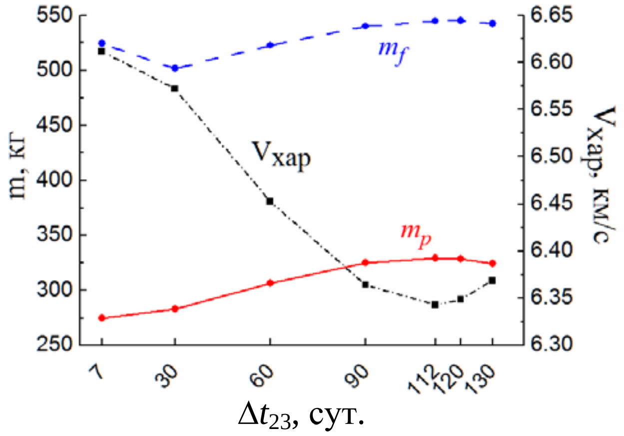
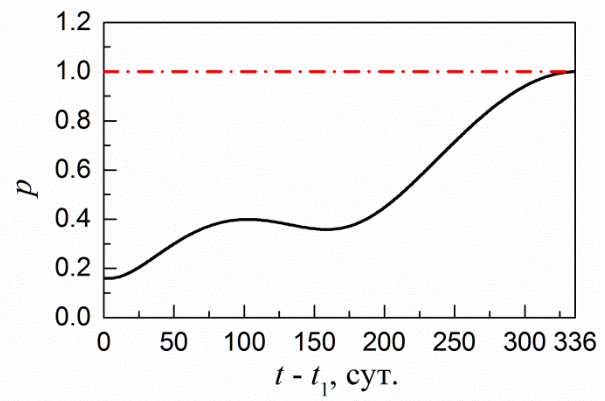
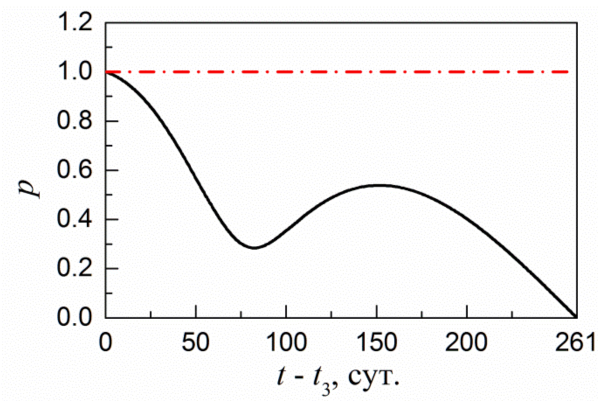


Рис.2.10. Зависимость $V_{хар}$, m_f , m_p от времени Δt_{23}

Б) Проверка выполнения условия оптимальности для траектории ***№ 16*** уже показала, что возможно увеличить полезную массу по мере увеличения время ожидания у Апофиса Δt_{23}. Поэтому для случая, когда система управления КА позволяет увеличить время ожидания у Апофиса, решена задача оптимизации (3). Для нее задается время Δt_{Σ}, оптимизируются три времени: t_1, Δt_{12}, Δt_{23}. В качестве основного варианта рассмотрим Δt_{Σ} =690 сут. Для полученной оптимальной траектории (**№ 19**) полезная масса увеличивается с 272 кг до 293 кг при t_1= 23.05.2019, Δt_{12}= 336 сут., оптимальное время ожидание Δt_{23}=93 сут., t_4= 12.04.2021. $V_{хар}$=6.519 км/с. На Рис.2.11 приведен график p(t), всегда |**p**(t)| ≤1. С увеличением времени ожидания Δt_{23}, времена перелета Δt_{12} и Δt_{34} не позволяют КА совершать более витка относительно Солнца, см. Рис.2.12.



(а)



(б)

Рис.2.11. Изменения модуля базис-вектора на траектории **№ 19**: (а) перелет от Земли до Апофиса ; (б) перелет от Апофиса до Земли

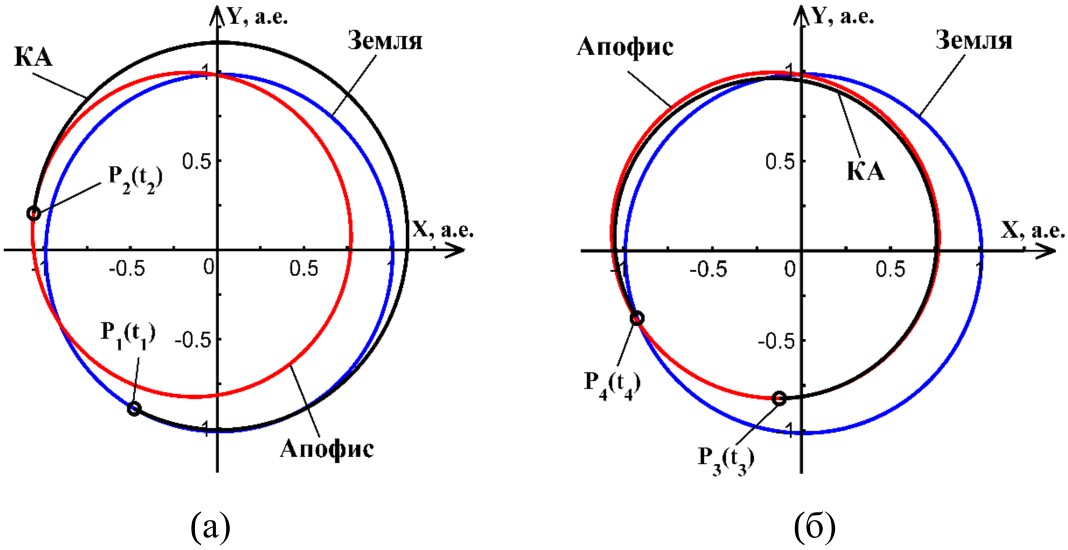
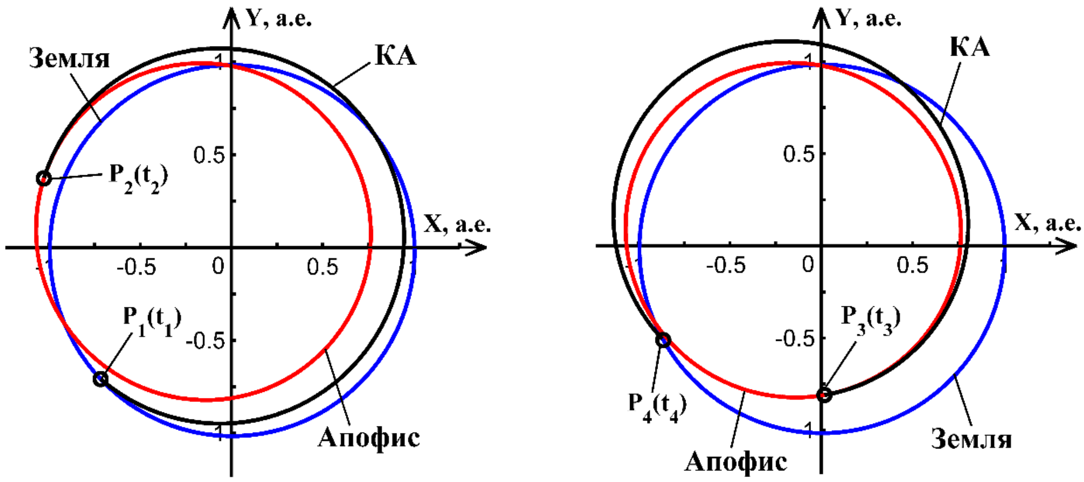


Рис.2.12. Межпланетные перелеты КА для траектории **№ 19** (Δt_{Σ} =690 сут., t_1= 23.05.2019, Δt_{12}=336сут., Δt_{23}=93сут., $\Delta u<2\pi$.): (а) перелет от Земли (P_1) до Апофиса (P_2); (б) перелет от Апофиса (P_3) до Земли (P_4)

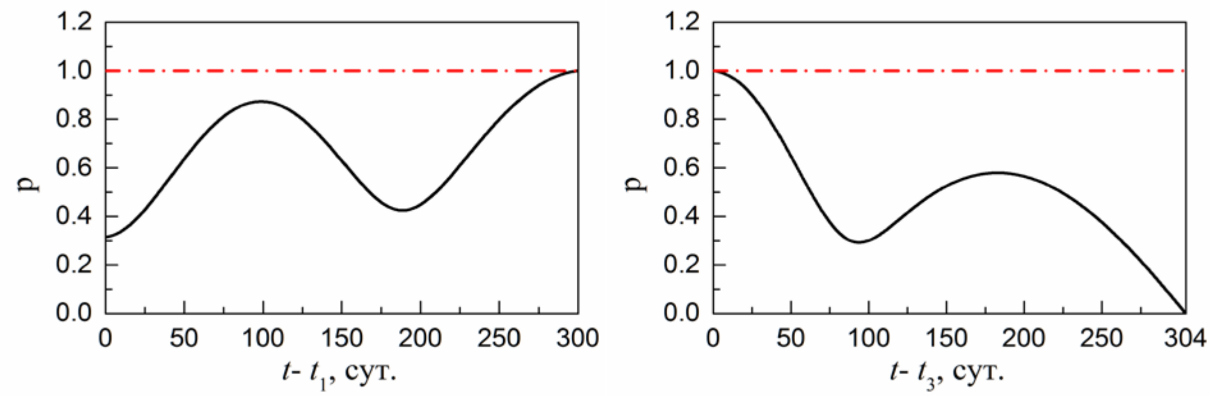
Вычисляем по (1.41) производные от G_3 по временам t_j (j=1, 2, 3, 4): $\partial G/\partial t_1$= -0.0351, $\partial G_3/\partial t_2$= -0.0002, $\partial G_3/\partial t_3$= 0.0003, $\partial G_3/\partial t_4$= 0.0356. Здесь результаты уже преобразованы в безразмерном виде. Поскольку задано только время Δt_{Σ}, то возьмем $x_1=t_1$, $x_2=\Delta t_{12}=t_2-t_1$, $x_3=\Delta t_{23}$, тогда имеем, что $\partial G_3/\partial x_1 =\partial G_3/\partial t_1+\partial G_3/\partial t_2+\partial G_3/\partial t_3+\partial G_3/\partial t_4\approx$ 0.0005 ~ 0, $\partial G_3/\partial x_2 =\partial G_3/\partial t_2+\partial G_3/\partial t_3\approx$ 0.0001 ~ 0, $\partial G_3/\partial x_3 =\partial G_3/\partial t_3$= 0.0003~ 0.

В) Выполнена также полная четырехмерная оптимизация (4) при ограничениях $\Delta t_{\Sigma}\leq 2$ года, $t_1\in$ [01.05.2019; 31.12.2022], $\Delta t_{12}\geq 5$ сут., $\Delta t_{23}\geq 7$ сут., $\Delta t_{34}\geq 5$ сут. Для полученной оптимальной траектории **№ 20** m_p = 329 кг, Δt_{Σ}=716 сут, t_1= 05.05.2020, Δt_{12}= 300 сут., Δt_{23}= 112 сут., t_4= 21.04.2022. Для этой траектории $V_{\text{хар}}$= 6.343 км/с, m_f = 545 кг. Возврат КА к Земле происходит вблизи восходящего узла орбиты Апофиса, как и для других оптимальных траекторий данного класса. Картины этой траектории перелета приведены на Рис. 2.13. Необходимое условие $|\mathbf{p}(t)|\leq 1$ везде выполняется для этой траектории, см. Рис. 2.14.



(а) (б)

Рис.2.13. Межпланетные перелеты КА для траектории **№ 20**: Δt_{Σ} =716 сут., t_1= 05.05.2020, Δt_{12}=300сут., Δt_{23}=112 сут., $\Delta u<2\pi$.: (а) перелет от Земли (P_1) до Апофиса (P_2); (б) перелет от Апофиса (P_3) до Земли (P_4)



(а) (б)

Рис.2.14. Изменения модуля базис-вектора на траектории **№ 20**: (а) перелет от Земли до Апофиса ; (б) перелет от Апофиса до Земли

2.2.4 Этап 2 - Уточнение полученных оптимальных траекторий

Полученные на этапе 1 оптимальные траектории затем уточняются рассмотренными в главе 1 методами.

Проводится интегрирование уравнений движения КА на участках перелета от Земли к Апофису и от Апофиса к Земле. Система уравнений движения КА (1.74) интегрируется методом Рунге-Кутта-Фельберга 7-го порядка с контролем ошибки 8 порядка. При коррекции массово-энергетических характеристик экспедиции, проанализирована зависимость гравитационных потерь от количества включений

ДУБТ при разгоне у Земли. Результаты вычислений с использованием характеристик РН «Союз-ФГ» и разгонного блока «Фрегат» для траектории ***№ 16*** приведены в Таблице 8 (после уточнения). Приведенные расчеты показали, что для этого варианта режим разгона с двумя включениями более эффективен. Потери ΔV_{1gr} уменьшились примерно на 75%.

Таблица 8.

Зависимость гравитационных потерь от количества включения ДУБТ при разгоне у Земли (для траектории ***№ 16***)

Количества включения ДУБТ	ΔV_1 (м/с)	Время работы двигателя t_{e1} (с)	δV_{1gr} (м/с)	m_p (кг) с учетом δV_{1gr}
1	3386	774	54	224
2		766	13	231

Выполнен также анализ гравитационных потерь для маневров около астероида. Рассмотрены 2 подхода к этому анализу: 1) – аналитически, по (1.83); 2) - численным интегрированием (подраздел 1.5.2). Также сделана оценка пути l, пройденного КА во время работы двигателя, и гелиоцентрический угол α, соответствующий этому пути:

$$l_i \approx \begin{cases} \Delta t_{\mathrm{ei}} \cdot V_{cp} & \text{(для первого подхода)} \\ \left|\mathbf{R}(t_f) - \mathbf{R}(t_0)\right| & \text{(для второго подхода)} \end{cases}, \qquad \alpha_i \approx l_i / \left|\mathbf{R}(t_{\mathrm{i}})\right|, \qquad i = 2,3.$$

Здесь V_{cp} - средняя гелиоцентрическая скорость, $\mathbf{R}(t)$ - гелиоцентрический радиус-вектор КА. Результаты анализа, в том числе потери δV_{2gr}, δV_{3gr}, приведены в Таблице 9 для обоих подходов, строки 1 соответствуют первому подходу, строки 2 - второму. Учитывая, что радиус сферы действия Апофиса $R_{СФА}$ равен ~2 км, и $l_i >> R_{СФА}$, разумно считать, что торможение КА происходит в центральном гравитационном поле Солнца. Анализ показал, что гравитационные потери δV_{2gr}, δV_{3gr} довольно малы (< 1 м/с), и гелиоцентрические углы меньше чем 0.07°. Поэтому можно считать, что ΔV_2, ΔV_3 являются импульсами.

Таблица 9.

Характеристики траектории КА при торможении и разгоне у Апофиса (для траектории *№ 16*)

Торможение, ΔV_2	Δt_{e2} (с)	δV_{2gr} (м/с)	l_2 (км)	α_2 (°)	ΔV (км/с)
1	7135	$1.1 \cdot 10^{-4}$	194033	0.068	2.841
2	7133	$1.1 \cdot 10^{-4}$	186357	0.066	2.841
Разгон, ΔV_3	Δt_{e3} (с)	δV_{3gr} (м/с)	l_3 (км)	α_3 (°)	ΔV (км/с)
1	548	$8.5 \cdot 10^{-8}$	14495	0.0052	0.389
2	547	$8.5 \cdot 10^{-8}$	14229	0.005	0.389

В Таблице 10 приведены уточненные характеристики квазиоптимальных траекторий ***№ 16***, ***18***, ***19***, ***20***, соответствующих основной и дополнительным задачам оптимизации 1-4. Здесь вектор состояния КА получаются путем интегрирования уравнения движения КА с учетом возмущений и решения краевых задач. При этом векторы состояния Земли и других планет определяются по эфемеридам DE421, векторы состояния Апофиса взяты из сайта JPL [150].

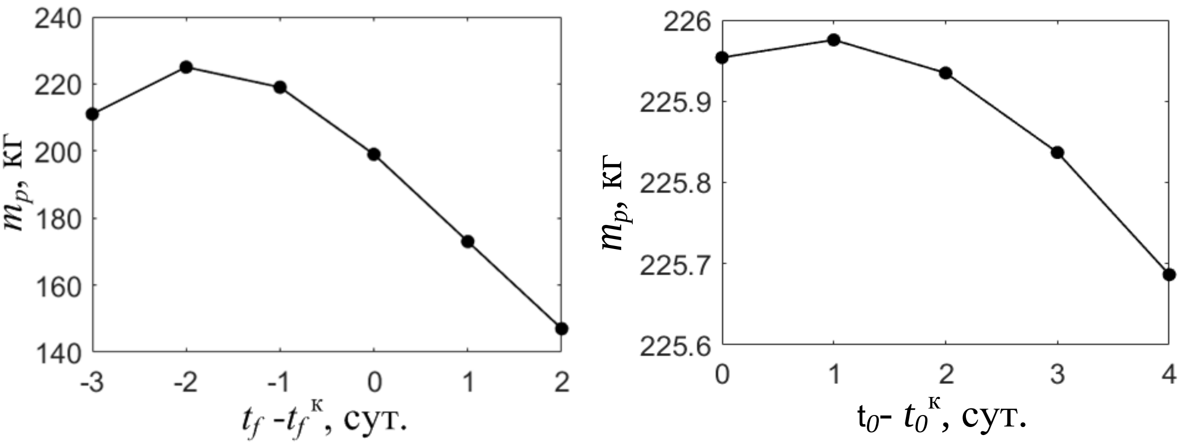
Таблица 10.

Характеристики «квазиоптимальных» траекторий, по максимуму полезной массы КА, *№ 16*, *18*, *19*, *20*.

Траектория	***№ 16***	***№ 18***	***№ 19***	***№ 20***
Δt_Σ (сут.)	690	698	690	716
$t_{1сд}$ (дата)	24,05,2019	16,05,2019	23,05,2019	05,05,2020
Δt_{12} (сут.)	335	345	336	300
Δt_{23} (сут.)	7	7	93	112
$t_{4сд}$ (дата)	13,04,2021	13,04,2021	12,04,2021	21,04,2022
δV_{1gr} (м/с)	16	17	16	20
ΔV_1* (м/с),	3440	3498	3447	3790
$\Delta V_{кор}$, (м/с)	85	85	85	85
ΔV_2 (м/с)	2805	2763	2800	1736
ΔV_3 (м/с)	535	526	392	889
$V_{хар}$ (м/с)	6865	6872	6724	6500
m_f (кг)	468	463	490	503
m_p (кг)	199	200	226	280

Для случая использования РН «Союз» при разгоне у Земли принимаем режим с двумя включениями ДУБТ для уменьшения гравитационных потерь. Массовые характеристики КА получаются с учетом всех факторов, указанных в главе 1. После уточнения, для всех вариантов масса КА уменьшилась.

Выполнена также оптимизация на множестве уточненных траекторий. Для этого использован метод покоординатного спуска. Рассмотрим сначала уточнение траектории **№ 16**. Для удобства характерные времена для «квазиоптимальных» траекторий (до оптимизации уточненных траекторий) будем снабжать верхним индексом «к». Сначала варьируется только t_f ($t_{4СДЗ}$), а остальные времена $t_0^к$, $t_2^к$, $t_3^к$ не меняются. На Рис. 2.15 (а) показано изменение значения полезной массы со временем t_f в окрестности $t_f^к$. Затем варьируется t_0 с постоянными временами $t_2^к$, $t_3^к$, t_f, Рис. 2.15 (б). Здесь полезная масса с изменением t_0 мало меняется. Также варьируются t_2 вместе с t_3 (Δt_{23}= 7сут.) при улучшенных t_f, t_0. Получается оптимальная траектория **№ 16а**: Δt_s=692 сут, t_0= 21.05.2019, Δt_{23}= 7сут., m_f = 492 кг, m_p= 226 кг.



(а) (б)

Рис.2.15. Изменение полезной массы траектории **№ 16** при варьировании граничных времен по отдельности: (а) варьируется только t_f; (б) варьируется только t_0.

Аналогичный анализ проведены для «квазиоптимальных» траекторий ***№ 18***, ***19***, ***20***, полученные характеристики оптимальных траекторий ***№ 18а***, ***19а***, ***20а*** приведены в Таблице 11, где Δt_s = t_f-t_0. Видно, что траектории ***№ 16а***, ***18а*** почти совпадают. Отметим, что здесь между $t_0^к$, $t_f^к$ и t_0, t_f имеются связи $t_0 \approx t_0^к$+2 сут., $t_f \approx$

$t_f^к$ -2 сут., и полезная масса соответственно увеличивается. Кроме того, если на основе граничных времен оптимальных траекторий меняем только t_0 в окрестности [t_0-3сут., t_0+3сут.], полезная масса экспедиции практически не меняется. Это, с одной стороны, обеспечивает большое значение полезной массы КА, с другой стороны, позволяет при необходимости (плохой погоде, отказе от бортовой системы, и т.д.) переносить дату запуска.

Таблица 11.

Характеристики оптимальных траекторий, по максимуму полезной массы КА, *№ 16а*, *18а*, *19а*, *20а*, для РН «Союз-ФГ».

Траектория	*№ 16а*	*№ 18а*	*№ 19а*	*№ 20а*
Δt_s (сут.)	692	695	691	715
t_0 (дата)	21,05,2019	18,05,2019	21,05,2019	06,05,2019
t_2 (дата)	24,04,2020	24,04,2020	24,04,2020	02,03,2021
t_3 (дата)	1,05,2020	1,05,2020	22,07,2020	23,06,2021
t_f (дата)	12.04.2021	12.04.2021	11.04.2021	21.04.2022
ΔV_1* (м/с),	3433	3452	3435	3735
$\Delta V_{кор}$, (м/с)	85	85	85	85
ΔV_2 (м/с)	2810	2794	2812	1765
ΔV_3 (м/с)	393	393	292	862
$V_{хар}$ (м/с)	6721	6724	6624	6447
m_f (кг)	492	490	509	517
m_p (кг)	226	226	245	290

Рассмотрены также случаи использования РН «Союз-2.1б» и «Зенит» с вариантами РБ «Фрегат». Для случая использования РН «Союз-ФГ» и «Союз-2.1б» при разгоне у Земли принят режим двух включений двигателя. Для случая РН «Зенит» - режим трех включений с использованием «Фрегат-СБ»: все топливо в сбрасываемом блоке баков расходуется на создание первого импульса ΔV_{11}, остальная часть ΔV_1-ΔV_{11} разбивается на два импульса $\Delta V_{12,}$ ΔV_{13} по (1.85). В Таблице 12 приведены результаты расчета для оптимальных траекторий.

Таблица 12.

Значения полезной массы КА (после уточнения) с использованием разных РН

	***№ 16*а**			***№ 19*а**			***№ 20*а**		
	Союз-ФГ	Союз-2.1б	Зенит	Союз-ФГ	Союз-2.1б	Зенит	Союз-ФГ	Союз-2.1б	Зенит
m_0 (кг)	7130	8250	14000	7130	8250	14000	7130	8250	14000
Вариант Фрегата	Фрегат -1	Фрегат -2	Фрегат -СБ	Фрегат -1	Фрегат -2	Фрегат -СБ	Фрегат -1	Фрегат -3	Фрегат -СБ
m_f (кг)	492	604	1193	509	624	1233	517	611	1287
m_p (кг)	226	301	700	245	325	748	290	362	877

2.3 Сравнение с характеристиками миссий “*Stardust*”, “*Hayabusa*” и “*OSIRIS-REx*”

В Таблице 13 приведены характеристики для миссий “*Stardust*”, “*Hayabusa*” и “*OSIRIS-REx*” [78, 79, 83, 130, 149, 151]: сухая масса КА, скорость входа в атмосферу Земли $V_{вх}$. Видим, что согласно нашим данным, с помощью РН «Союз-2.1б» и «Зенит» можно обеспечить полезную массу КА для экспедиции Земля-Апофис-Земля более 300 кг, т.е. больше, чем сухая масса КА проекта “*Stardust*”. Поэтому имеется возможность использовать аналогичные КА для реализации экспедиции Земля - Апофис - Земля по полученным оптимальным траекториям.

Таблица 13.

Характеристики миссий “*Stardust*”, “*Hayabusa*” и “*OSIRIS-REx*”

Миссия	“*Stardust*”	“*Hayabusa*”	“*OSIRIS-REx*”
Сухая масса КА (кг)	300	415	880
Скорость входа в атмосферу Земли $V_{вх}$ (км/с)	12.9	12.5	12.2

По возвращении к Земле спускаемый аппарат, несущий капсулу с образцами, отделяется от КА и совершает вход в атмосферу Земли, торможение, посадку. Эти последние операции здесь не рассматриваются, но оценивается скорость входа КА в атмосферу Земли.

Опыт аналогичных миссий “*Stardust*” и **“***Hayabusa*” для доставки образцов грунта малых небесных тел на Землю показывает, что современные технологии позволяют успешно приземляться КА, который входит в атмосферу Земли с гиперболической скоростью до 12.9 км/с. В Таблице 14 приведена скорость входа для полученных нами траекторий ***№* 16а**, ***№* 19а**, ***№* 20а**. Здесь $V_{вх}$ для траектории ***№* 20а** превышает 12.9 км/с.

Таблица 14.

Скорость входа в атмосферу Земли

	***№* 16а**	***№* 19а**	***№* 20а**
$V_{вх}$ (км/с)	12.74	12.32	13.26

2.4 Случай ограничения скорости входа в атмосферу Земли

Для поиска траектории, которая имеет максимальную полезную массу при условии $V_{вх} \le 12.9$ км/с, решается еще задача (5) полной четырехпараметрической оптимизации с ограничением на скорость входа в атмосферу Земли. Используем такие же методы оптимизации - сначала по методу Соболя, затем по генетическому алгоритму, при этом отбросим решения, которые не удовлетворяют данному условию. Квазиньютоновский метод, применяемый для безусловной оптимизации, здесь не подходит. Потом выполняется уточнение характеристик траектории. После того, как получена улучшенная траектория, опять проверяем $V_{вх}$ для этой траектории. Варьируя граничные времена методом покоординатного спуска, найдем лучшее решение с учетом ограничением в $V_{вх}$.

В Таблице 15 приведены результаты анализа зависимости полезной массы от $V_{вх}$ (12.8 км/с – 13.26 км/с). Первая строка – ограничения в скорости входа в атмосферу Земли. Пятая строка – $V_{вх}$ для полученной оптимальной траектории при заданном ограничении. Отметим, что при этом для РН «Союз-2.1б» и РН «Зенит» полезная масса все же остается большей, чем сухая масса КА “*Stardust*”(300 кг).

Таблица 15.

Изменение полезной массы со скоростью $V_{вх}$

$V_{вх\ max}$ (км/с)	12.8	12.9	13	13.1	13.2	13.26
m_p (кг) Союз-ФГ	275.3	280	284	287.5	289	290
m_p (кг) Союз-2.1б	343.6	349	354	358	361	362
m_p (кг) Зенит	839.6	852	861	869.8	876	877
$V_{вх}$ (км/с)	12.799	12.899	12.999	13.098	13.197	13.26

2.5 Схема полета с эллиптическим входом КА в атмосферу Земли

Для анализа характеристик КА при входе в атмосферу не с гиперболической скоростью, а с эллиптической скоростью, рассматривается также и схема полета с эллиптическим входом КА в атмосферу Земли. Первые три импульса определяются как раньше. После того, как КА подлетает к сфере действия Земле с $V_{\infty 4}$, в перигее гипербола сообщается тормозной импульс ΔV_4, в результате чего КА переходит на эллиптическую орбиту с радиусом перигея r_{p4} = 6800 км и радиусом апогея r_{a4} = 200000 км. Затем в апогее этой орбиты сообщается импульс ΔV_5, и КА переходит на эллиптическую орбиту с радиусом перигея r_{pf} =6400 км. После этих импульсов отделяется блок ДУ2. Величины импульсов ΔV_4 и ΔV_5 определяются по формулам:

$$\Delta V_4 = \sqrt{V_{\infty 4}^2 + \frac{2\mu_E}{r_{p4}}} - \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_{p4}} \cdot \frac{r_{a4}}{r_{p4} + r_{a4}}}, \tag{2.1}$$

$$\Delta V_5 = \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_{a4}} \cdot \frac{r_{p4}}{r_{p4} + r_{a4}}} - \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_{a4}} \cdot \frac{r_{pf}}{r_{pf} + r_{a4}}}. \tag{2.2}$$

В этом случае конечная масса КА определяется по формуле

$$m_f = m(t_3)\exp\left(-\frac{\Delta V_4 + \Delta V_5}{c_2}\right). \tag{2.3}$$

Оптимальная траектория при максимизации полезной массы КА для этого случая получается при Δt_Σ=720 сут, t_1= 06.05.2020, Δt_{12}= 296 сут., Δt_{23}= 7 сут., t_4= 26.04.2022, m_f = 349 кг, m_p = 103 кг (с использованием «Союз-ФГ», до улучшения). Для нее ΔV_1=3.713 км/с, ΔV_2 = 1.772 км/с, ΔV_3 = 1.211 км/с, ΔV_4 = 0.969 км/с, ΔV_5 =

0.010 км/с. $V_{хар}$ = 7.675 км/с. Скорость входа КА в атмосферу Земли по эллиптической орбите составляет ~10.7 км/с. В этом случае полезная масса намного уменьшилась. Поэтому для уменьшения энергетических затрат в качестве основной принята схема полета, где тормозной импульс скорости двигателем не сообщается при подлете к Земле, аналогично [79, 130].

Применение двигательных установок большой тяги, конечно, менее эффективно, чем применение электрореактивных двигателей малой тяги [35]. С другой стороны, тем не менее, анализ показывает, что при полете в 2019-2021 гг. существует принципиальная возможность реализации экспедиции к астероиду Апофис с возвращением к Земле при использовании ракет «Союз-ФГ», «Союз-2.1б», «Зенит».

2.6 Оценка ошибок вычислений

При решении поставленной задачи ошибки вычислений могут включать, в основном, следующие составляющие: (1) ошибка интегрирования; (2) ошибка из-за перехода между системами координаты; (3) ошибка в эфемеридах DE.

Оценка ошибки интегрирования делалась следующим образом. Уравнения движения КА с учетом возмущений (1.74) интегрируются из начального вектора состояния КА (t_0, $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}_0$) до $t_{f1} \approx t_0 + (t_f - t_0)/2$. Затем уравнения интегрируются назад из (t_{f1}, $\boldsymbol{r}_{f1}$, $\boldsymbol{v}_{f1}$) до t_0 с конечными векторами ($\boldsymbol{r}_0'$, $\boldsymbol{v}_0'$). Ошибка Δr1 определяется как $|\boldsymbol{r}_0' - \boldsymbol{r}_0|$. Этот анализ сделан для обеих орбит: от Земли до Апофиса и от Апофиса до Земли. Анализ показал, что ошибка интегрирования очень мала, меньше одного метра. Например, для траектории ***№ 16***а при полете от Земли до Апофиса Δr1~ 0.7м, при перелете от Апофиса до Земли Δr1~ 0.1мм.

Ошибка Δr2 из-за перехода между системами координат (геоцентрической и гелиоцентрической) оценивается путем сравнения радиус-вектора КА в конце интегрирования для двух случаев: (1) без изменения СК при выходе из сферы действия Земли или входе в нее; (2) с изменением СК. Для траектории ***№ 16***а при полете от Земли до Апофиса Δr2~ 66 км, при перелете от Апофиса до Земли Δr2~ 25км.

Ошибка вычисления за счет ошибок использования современных эфемерид для определения координат Земли и Апофиса, а также учета возмущений от больших планет и Луны нами не оценивалась. Ошибки определения координат небесных тел по эфемеридам DE 421 достаточно малы. Ошибка знания координат Земли (а также Венеры и Марса) по эфемеридам DE 421 менее 1 км [89]. Ошибки знания координат Апофиса больше, приближенно они составляют около 100 – 1000 км. Поэтому можно считать наши расчеты достаточно аккуратными.

2.7 Выводы по главе 2

В данной главе 2 с помощью разработанной в главе 1 методики построены оптимальные по максимуму полезной массы межпланетные траектории КА для экспедиции Земля - Апофис - Земля. Получены следующие результаты:

1. Построены оптимальные по максимуму полезной массы межпланетные траектории КА для экспедиции Земля - Апофис - Земля при выведении с помощью РН «Союз-ФГ», «Союз-2.1б» и «Зенит», при разгоне у Земли с помощью разгонного блока «Фрегат» и при дальнейших маневрах с помощью специальной ДУ большой тяги - для перелета в течение 2019-2022 гг.
2. Определено оптимальное время ожидания КА у Апофиса, ~ 90-120 сут.
3. Выявлено, что для оптимальных межпланетных траекторий экспедиции возврат к Земле происходит вблизи восходящего узла орбиты Апофиса относительно эклиптики.
4. С помощью сопряженных функций сделан анализ оптимальности построенных траекторий в классе многоимпульсных перелетов. Анализ показал, что нужно не более трех импульсов скорости для реализации оптимальных траекторий экспедиции Земля - Апофис - Земля.
5. Показано, что существует принципиальная возможность реализации космической экспедиции Земля - Апофис - Земля с использованием обычных двигателей большой тяги и РН «Союз-ФГ», «Союз-2.1б», «Зенит» при полете в 2019-2022 гг.

ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА ВОКРУГ АСТЕРОИДА

Для анализа влияния нецентральности поля сил тяготения астероида можно использовать разные модели. В общем случае, когда форма наблюдаемого с Земли астероида неизвестна, то ее стараются аппроксимировать с помощью трехосного эллипсоида. С этой моделью и потенциалом однородного эллипсоида Chauvineau, Farinella и Mignard [85] исследовали орбиты спутники астероида путем численного интегрирования и идентифицировали хаотические и регулярные орбиты изменением распределения масс и скорости вращения астероида. В работах [2-4, 118, 125, 146] на основе моделирования астероидов с разными формами (такими как прямой отрезок, эллипсоид, куб и т.д.), исследуются их потенциальное поле, а также вопросы, связанные с точками равновесия, периодическими орбитами и стабильностью движения КА вблизи астероида. Гравитационный потенциал несферичного астероида также моделируют с помощью разложения по сферическим гармоникам до второго порядка включительно [95, 97, 133], или до еще более высокого порядка. Используют также модель «масконов» (mascon), которая представляет тело с набором точечных масс. Эта модель впервые была использована для оценки гравитационного потенциала Луны [120]. Модель однородного полиэдра аппроксимирует форму и гравитационное поле астероидов с помощью большого числа небольших многогранников с постоянной плотностью. Она является самой точной и широко применяется для определения динамической среды и анализа движения частиц вокруг астероидов, у которых есть подробные модели форм [132- 135].

Модель простых геометрических тел пригодна для общего анализа и может применяться к большинству астероидов и комет. Но ее простота также приносит неточности в отражении реального динамического окружения. Разложение потенциала по сферическим гармоникам является классическим методом моделирования гравитационного поля небесного тела. Этот метод имеет быструю сходимость, высокую вычислительную эффективность, но его применение вблизи поверхности астероида может дать ошибки. Модели «масконов» и однородного полиэдра имеют преимущество, что они могут воспроизводить форму определенного тела с высокой точностью, позволяя учитывать нестандартные формы и асимметрии. Модель «масконов» особенно полезна для описания внешнего гравитационного поля астероида, когда распределение масс является неравномерным. Но она не способна обнаружить случай столкновения КА с поверхностью астероида. Модель однородного полиэдра требует подробной информации о форме изучаемого тела, а также больших вычислений.

Влияние притяжения Солнца, Луны и планет, так называемого «третьего тела», на орбиты искусственных спутников планет давно было исследовано [50, 123]. Когда речь идет об этом влиянии на орбиты спутников астероида, особое внимание следует уделить возможным сближениям астероида с Землей и с другими планетами.

В отличие от привычного небольшого влияния давления солнечного света на низкие орбиты спутников Земли [59, 69, 129], эффект давления солнечного света на орбите вблизи астероидов может быть довольно серьезным. В [131] обсуждены случаи, когда давление солнечного света является доминирующим возмущающим фактором. На основе аппроксимации Хилла и использования усредненной формы уравнений движения КА, в [136] сформулировано условие о предельном значении большой полуоси орбиты КА, при котором КА не покидает окрестности астероида под влиянием давления солнечного света.

На сегодняшний день для анализа возмущенного движения искусственных спутников малых небесных тел применяются аналитические методы и методы численного интегрирования уравнений движения. Аналитические приближенные способы анализа подобной задачи предполагают обычно одно- или двукратное осреднение и сравнительно более простые случаи возмущений [57, 113]. Из-за значительной сложности и громоздкости вычислительных алгоритмов, с помощью аналитических методов трудно выполнить анализ совместного действия многих возмущений.

В данной диссертационной работе принята модель орбитального движения спутника астероида с учетом притяжения нескольких небесных тел, несферичности астероида и давления солнечного света, близкая к описанной в [33], где даны формулы и исправлена неточность работы [20]. Для анализа применяется численный метод [38 - 40].

3.1 Уравнения движения спутника астероида

Для анализа движения КА вокруг астероида используем две системы координат (СК): $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$ – невращающаяся прямоугольная геоэкваториальная система координат с центром в центре масс астероида, в которой определяется движение КА; $OX_{A2}Y_{A2}Z_{A2}$ – астероидоцентрическая СК, вращающаяся вместе с телом астероида, связана с центром масс астероида и ориентирована по главным центральным осям инерции астероида.

Мы использовали уравнения астероидоцентрического движения КА с учетом трех возмущений - притяжения удаленных небесных тел, несферичности астероида и давления солнечного света:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}; \\ \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{a}_0 + k_1 \cdot \mathbf{a}_1 + k_2 \cdot \mathbf{a}_2 + k_3 \cdot \mathbf{a}_3. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь: $\mathbf{r}$ (x, y, z), $\mathbf{V}$ (V_x, V_y, V_z) **–** радиус-вектор и вектор скорости КА в возмущенном движении относительно указанной системы координат $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$, $\mathbf{a}_0$ **–** центральное ускорение,

$$\mathbf{a}_0 = -\frac{\mu_A}{r^3}\mathbf{r}, \tag{3.2}$$

$r = |\mathbf{r}|$; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ **–** возмущающие ускорения от притяжения удаленных небесных тел (Солнце, Земля, Луна, Венера, Юпитер и др.), от несферичности астероида и от давления солнечного света; k_i (0; 1) **–** коэффициенты для учета возмущений, *i*=1, 2, 3.

3.2 Возмущающее ускорение от притяжения удаленных небесных тел

Возмущающее ускорение $\mathbf{a}_1$ от притяжения удаленных небесных тел вычисляется, для повышения точности расчета, в модифицированной форме, аналогично [15]. При этом обычное выражение для возмущения, являющееся разностью двух близких ускорений, сообщаемых возмущающим телом космическому аппарату и центральному телу, преобразуется, чтобы выделить непосредственно малое возмущение. Пусть: $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j) = \mathbf{R}_{Pj} - \mathbf{R}_A, r_j = |\mathbf{r}_j|$ – вектор положения небесного тела (Солнце, Земля, Луна, Венера, Юпитер и др.) относительно астероида; $\mathbf{R}_{Pj}$ –вектор положения небесного тела относительно Солнца (из Эфемериды DE421 ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/bsp); $\mathbf{R}_A$ – вектор положения астероида относительно Солнца, он определяется по сайту JPL (http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi). Тогда:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_1 = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{1j}; \\
&\mathbf{a}_{1j} = -\frac{\mu_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r} + f_j \cdot \mathbf{r}_j); \\
&f_j = \frac{3 + 3q_j + q_j^{\,2}}{1 + (1 + q_j)^{3/2}} \cdot q_j; \\
&q_j = \frac{x}{r_j} \cdot \left(\frac{x}{r_j} - 2\frac{x_j}{r_j}\right) + \frac{y}{r_j} \cdot \left(\frac{y}{r_j} - 2\frac{y_j}{r_j}\right) + \frac{z}{r_j} \cdot \left(\frac{z}{r_j} - 2\frac{z_j}{r_j}\right).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

3.3 Возмущающее ускорение от несферичноси астероида

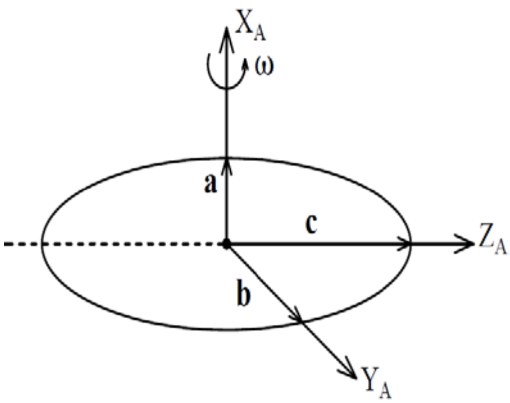


Рис.3.1. Модель астероида. Астероид вращается вокруг оси эллипсоида **a**, a=b<c.

Для определения возмущения $\mathbf{a}_2$ от несферичности астероида на данном этапе исследования использована приближенная модель однородного вытянутого эллипсоида вращения, см. Рис. 3.1. Формы реальных малых небесных тел (малых астероидов, ядер комет) часто близки к такой [33, 104]. Наблюдения астероида Апофис также показали [124], что он геометрически и динамически близок к вытянутому эллипсоиду вращения.

Для определения возмущения $\mathbf{a}_2$ (a_{2X}, a_{2Y}, a_{2Z}) сначала получаем это ускорение во вращающейся СК $OX_{A2}Y_{A2}Z_{A2}$ (СК $OX_AY_AZ_A$ на Рис. 3.1), используя формулы для компонент ускорения вытянутого эллипсоида вращения [20, 33]:

$$\begin{cases} a_{2X} = -k\dfrac{3\mu_A}{l^3 a_A^3}\left[-\ln(\sqrt{1+l^2u^2}+lu)+lu\sqrt{1+l^2u^2}\right]x_2 + \dfrac{\mu_A}{r_2^2}\dfrac{x_2}{r_2}; \\ a_{2Y} = -k\dfrac{3\mu_A}{l^3 a_A^3}\left[-\ln(\sqrt{1+l^2u^2}+lu)+lu\sqrt{1+l^2u^2}\right]y_2 + \dfrac{\mu_A}{r_2^2}\dfrac{y_2}{r_2}; \\ a_{2Z} = -\dfrac{3\mu_A}{l^3 a_A^3}\left[\ln(\sqrt{1+l^2u^2}+lu)-\dfrac{lu}{\sqrt{1+l^2u^2}}\right]z_2 + \dfrac{\mu_A}{r_2^2}\dfrac{z_2}{r_2}; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$a_A = R_A / \sqrt[3]{\alpha};\ \ l = \sqrt{\alpha^2 - 1}; r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2};$$

$$l^2u^2 = \frac{2l^2a_A^2}{\sqrt{\beta^2 + 4\gamma a_A^2} + \beta}; \quad lu = \sqrt{l^2u^2};$$

$$\beta = r_2^2 - l^2a_A^2; \quad \gamma = (r_2^2 - z_2^2)l^2 = (x_2^2 + y_2^2)l^2;$$

где μ_A – гравитационный параметр астероида; $\mathbf{r}_2$ (x_2, y_2, z_2) **–** радиус-вектор КА во вращающейся СК; ось OZ_2 – по большой оси эллипсоида $\boldsymbol{c}_A$; R_A – средний радиус астероида, соответствующий однородному шару с массой астероида; a_A, b_A, c_A – малая, средняя, большая полуоси эллипсоида для астероида. $\alpha = c_A/a_A$ – удлинение эллипсоида.

Коэффициент k = 0.5 введен нами, уменьшая экваториальные компоненты вдвое в соответствии с [33], для коррекции неточности в [20]. Это обеспечивает также равенство нулю возмущения для сферического астероида, см. Рис.3.2. Отметим, что данное замечание относится также к случаю сжатого эллипсоида вращения, а также к соответствующим частям силовых функций.

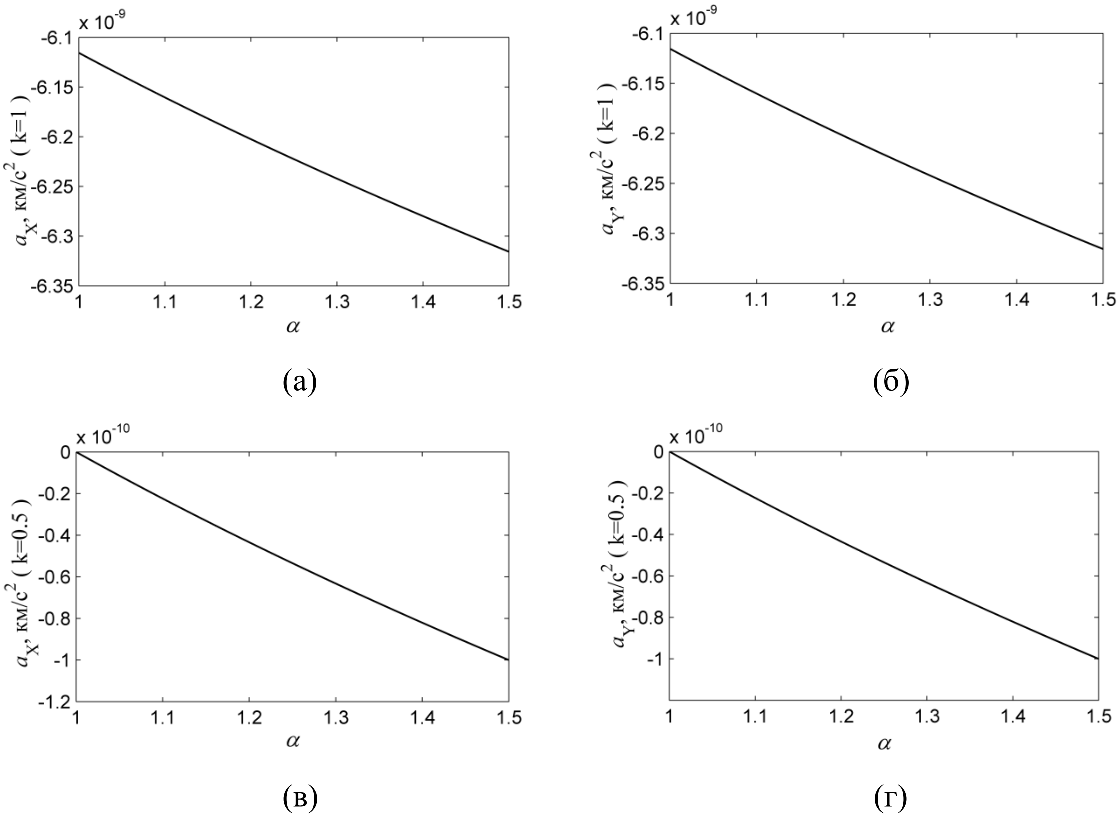


Рис.3.2. Экваториальные компоненты возмущающего ускорения для случая k =1 (а, б) и k =0.5 (в, г) при удлинении α=[1.0001- 1.5], μ_A=2.86 м^3/с^2, R_A=160м, $\mathbf{r}_2$=[300, 300, 300]м.

Данное ускорение затем преобразуется в невращающуюся СК $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$ для использования в уравнениях (3.1). Для этого надо знать вращение астероида вокруг его центра масс и его ориентацию.

В силу незначительности внешних моментов при анализе вращения малых небесных тел обычно принимается, что моменты внешних сил отсутствуют, и имеем задачу Эйлера «свободного» движения тела с постоянным вектором кинетического момента $\boldsymbol{L}$. При этом вследствие диссипации энергия вращательного движения малого тела постепенно уменьшается. Поэтому в большинстве случаев, это подтверждается наблюдениями, основным является режим вращения вокруг малой главной оси, т.е. оси максимального момента инерции тела, ему соответствует наименьшая энергия вращения [17, 107, 137, 138]. При этом вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль этой малой оси и вектора кинетического момента $\boldsymbol{L}$. Реже наблюдается переходной случай двухосного вращения с полодиями Пуансо вокруг полюсов малой или большой главных осей эллипсоида инерции. Последний случай вращения определен для ядра кометы Галлея. Учитывая эти соображения, полагаем, что астероид равномерно вращается вокруг малой оси $\mathbf{a}_A$ с периодом P_A, причем эта ось вращения имеет постоянную ориентацию в пространстве по вектору $\boldsymbol{L}$, определяемому в эклиптической системе координат долготой λ_L и широтой β_L.

Переход от СК $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$ к СК $OX_{A2}Y_{A2}Z_{A2}$ делается в два этапа [42]. Здесь вводим вспомогательную прямоугольную систему координат $OX_{A3}Y_{A3}Z_{A3}$, связанную с вектором $\boldsymbol{L}$ кинетического момента. Ось OZ_{A3} сохраняет неизмененное положение по вектору $\boldsymbol{L}$ в пространстве. В СК $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$ сначала определяется положение вектора кинетического момента $\boldsymbol{L}$ углами прямого восхождения α_L и склонения δ_L, определяемыми углами λ_L и β_L. Они связаны через угол наклона плоскости Эклиптики к экватору Земли $\varepsilon \approx 23.5°$:

$$\begin{cases} \sin\delta_L = \sin\lambda_L \cos\beta_L \sin\varepsilon + \sin\beta_L \cos\varepsilon, \\ \cos\delta_L = \sqrt{1-\sin^2\delta_L}, \\ \sin\alpha_L = \left(\sin\lambda_L \cos\beta_L \cos\varepsilon - \sin\beta_L \sin\varepsilon\right)/\cos\delta_L, \\ \cos\alpha_L = \cos\lambda_L \cos\beta_L / \cos\delta_L, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \delta_L \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le \alpha_L < 2\pi. \end{cases} \tag{3.5}$$

Переход от СК $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$ к СК $OX_{A3}Y_{A3}Z_{A3}$ выполняется 2 поворотами: сначала поворотом вокруг оси OZ_{A1} на угол ψ_0 переходим от оси OX_{A1} к оси OX_{A3}; затем поворотом вокруг оси OX_{A3} на угол θ_0 переходим от оси OZ_{A1} к OZ_{A3}.

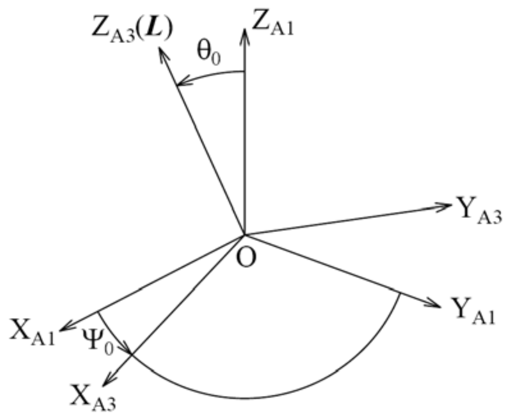


Рис.3.3. Переход от СК $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$ к СК $OX_{A3}Y_{A3}Z_{A3}$

Связь между ними задаем матрицей поворота A_{13}, получаемой из общей матрицы поворота из-за Эйлеровых углов ψ, θ, φ (см. Рис.3.3) при $\psi=\psi_0=\alpha_L+\pi/2$, $\theta=\theta_0=\pi/2-\delta_L$, $\varphi=0$. Эта общая матрица $\boldsymbol{A}$ за счет поворотов на Эйлеровы углы ψ, θ, φ задается элементами:

$$A=\begin{cases} a_{11}=\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\cos\theta; \\ a_{12}=-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi\cos\theta; \\ a_{13}=\sin\psi\sin\theta; \\ a_{21}=\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\theta; \\ a_{22}=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\cos\theta; \\ a_{23}=-\cos\psi\sin\theta; \\ a_{31}=\sin\varphi\sin\theta; a_{32}=\cos\varphi\sin\theta; a_{33}=\cos\theta \end{cases}. \tag{3.6}$$

Тогда матрицы A_{13} и A_{31}

$$A_{13}=\begin{pmatrix} a_{11}=cos\psi_0 & a_{12}=-\sin\psi_0\cos\theta_0 & a_{13}=\sin\psi_0\sin\theta_0 \\ a_{21}=\sin\psi_0 & a_{22}=\cos\psi_0\cos\theta_0 & a_{23}=-\cos\psi_0\sin\theta_0 \\ a_{31}=0 & a_{32}=\sin\theta_0 & a_{33}=\cos\theta_0 \end{pmatrix};$$

$$A_{31}=A_{13}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

позволяют осуществить переход между координатами вектора $\mathbf{r}(x,y,z)\equiv\mathbf{r}_1(x_1,y_1,z_1)$ в СК $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$, и координатами этого вектора $\mathbf{r}_3(x_3,y_3,z_3)$ в СК $OX_{A3}Y_{A3}Z_{A3}$:

$$\mathbf{r}_1^{\mathrm{T}}=A_{13}\mathbf{r}_3^{\mathrm{T}}, \tag{3.8}$$

и обратно:

$$\mathbf{r}_3^{\mathrm{T}}=A_{31}\mathbf{r}_1^{\mathrm{T}}. \tag{3.9}$$

На втором этапе переходим от СК $OX_{A3}Y_{A3}Z_{A3}$ к «астероидной» СК $OX_{A2}Y_{A2}Z_{A2}$. В ней малая ось - OX_{A2}, вокруг нее происходит вращение. Она будет направлена по вектору $\boldsymbol{L}$, т.е. по оси OZ_{A3}. Большая ось OZ_{A2} лежит в плоскости $OX_{A3}Y_{A3}$ под углом

$$\psi_1=\psi_{10}+\omega(t-t_0), \quad \omega=2\pi/3600P[\text{рад/с}] \tag{3.10}$$

к оси OX_{A3}, см. Рис.3.4. Здесь P – период вращения астероида вокруг собственной оси в часах.

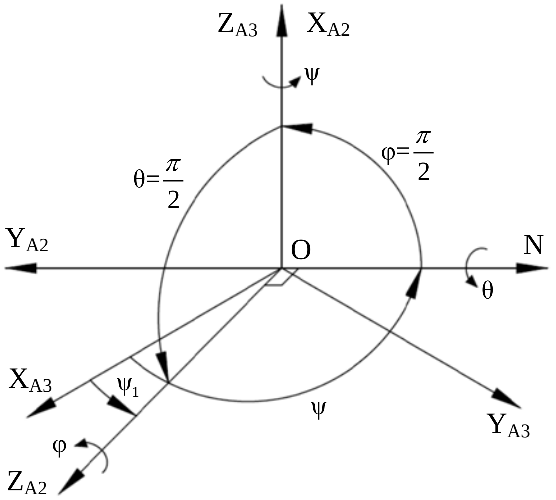


Рис.3.4. Переход от СК $OX_{A3}Y_{A3}Z_{A3}$ к СК $OX_{A2}Y_{A2}Z_{A2}$

Переход от СК $OX_{A3}Y_{A3}Z_{A3}$ к СК $OX_{A2}Y_{A2}Z_{A2}$ делается тремя поворотами на Эйлеровы углы $\psi=\psi_1+\frac{\pi}{2},\ \ \theta=\frac{\pi}{2},\ \ \varphi=\frac{\pi}{2}$. Матрицу A_{32} этого перехода можно получить из общей матрицы A (3.6) при

$$\psi=\psi_1+\frac{\pi}{2},\theta=\frac{\pi}{2},\varphi=\frac{\pi}{2}; \tag{3.11}$$

где ψ_1 дано в (3.10). Тогда

$$A_{32}=\begin{pmatrix} a_{11}=0 & a_{12}=\sin\psi_1 & a_{13}=\cos\psi_1 \\ a_{21}=0 & a_{22}=-\cos\psi_1 & a_{23}=\sin\psi_1 \\ a_{31}=1 & a_{32}=0 & a_{33}=0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Суммарная матрица перехода от СК $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$ к СК $OX_{A2}Y_{A2}Z_{A2}$:

$$A_{12}=A_{13}A_{32};\ \ \mathbf{r}^{\mathrm{T}}=A_{12}\mathbf{r}_2^{\mathrm{T}}. \tag{3.13}$$

Суммарная обратная матрица

$$A_{21}=A_{12}^{\mathrm{T}};\ \ \mathbf{r}_2^{\mathrm{T}}=A_{21}\mathbf{r}^{\mathrm{T}}. \tag{3.14}$$

Так, с помощью (3.13), (3.14) возмущающее ускорение $\mathbf{a}_2$ может быть вычислено в СК $OX_{A2}Y_{A2}Z_{A2}$, потом преобразовано в СК $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$ в уравнениях (3.1).

3.4 Возмущающее ускорение от давления Солнечного света

При учете светового давления ($\mathbf{a}_3$) принято, что плоскость солнечных панелей основного КА перпендикулярна направлению солнечных лучей. В астероидоцентрической СК, выражение для этого возмущения представляет собой разность двух ускорений, сообщаемых давлением солнечного света космическому аппарату и астероиду. Ускорение, сообщаемое ДСС астероиду, обычно намного меньше, чем сообщаемое КА, поэтому здесь им пренебрегаем. Тогда возмущающее ускорение $\mathbf{a}_3$ определяется соотношением:

$$\mathbf{a}_3 = K_{SH}(C_{SC}F_{SC} + C_{SP}F_{SP})(P_{SR} / d^2(AU)) \cdot (\mathbf{d} / d) / m_{SC}. \qquad (3.15)$$

Здесь: K_{SH} – коэффициент тени: K_{SH} = 1, если спутник освещен Солнцем, K_{SH} = 0 – в противном случае. C_{SC}, C_{SP} – коэффициенты, учитывающие отражение, для КА и панелей солнечных батарей. F_{SC} [м^2] – миделева средняя площадь КА; F_{SP} [м^2] – площадь Солнечных панелей. P_{SR} ($\approx 4.6\times10^{-6}$ Н/м^2) – давление солнечного света на расстоянии в 1 а.е. от Солнца. $\mathbf{d}=\mathbf{r} - \mathbf{r}_S$ **–** радиус-вектор КА относительно Солнца; $\mathbf{r}_S$ **–** радиус-вектор Солнца относительно центра масс астероида; $d=|\mathbf{d}|$; d (AU) = d(км)/1AU; 1AU = 149.59787×10^6 км; m_{SC} [кг] – масса КА. Здесь принято, что отражение света от КА происходит симметрично относительно направления на Солнце. Численные данные взяты по согласованию с АО «НПО Лавочкина». Для основного КА взято: F_{SC} = 5м^2, F_{SP} = 10м^2, C_{SP}=1.1, C_{SC}=1.4, m_{SC} = 600 кг. Для мини-спутника принято, что он имеет форму шара с диаметром D = 40 см, массой m =10 кг, для него C_{SC} = 1.4, F_{SP} =0.

При определении коэффициента тени K_{SH} используется цилиндрическая модель тени (не учитывается полутень), также учитывается несферичная форма астероида. На данном этапе анализа коэффициент K_{SH} определяется с учетом тени для астероида как эллипсоида вращения [42]. Для определения K_{SH} полагаем, что исходная система координат OXYZ (=$OX_{A2}Y_{A2}Z_{A2}$) имеет начало в центре масс астероида, оси направлены по полуосям эллипсоида (OZ – по большой полуоси длиной c, OX, OY – по малым полуосям длиной a, см. Рис.3.5).

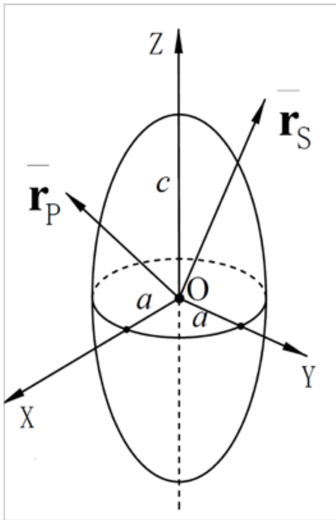


Рис.3.5 Исходная система координат OXYZ

В этой СК заданы радиус-вектор Солнца и КА:

$$\mathbf{r}_s(x_s, y_s, z_s), \quad r_s = |\mathbf{r}_s|; \tag{3.16}$$

$$\mathbf{r}_p(x_p, y_p, z_p), \quad r_p = |\mathbf{r}_p|. \tag{3.17}$$

Сначала находим расстояние ρ_P от КА до $\mathbf{r}_S$ (см. Рис.3.6):

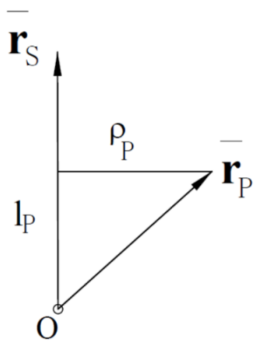
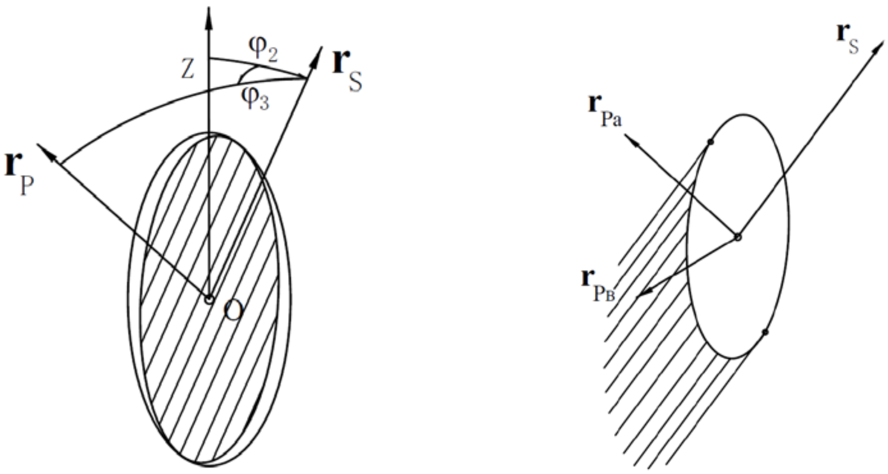


Рис.3.6 Проекция радиус-вектора КА

$$\rho_p = r_p \frac{\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_s}{r_p \cdot r_s}. \tag{3.18}$$

Если $\rho_\mathrm{P} \geq c$, то тени нет, если $\rho_\mathrm{P} < c$, то переходим к следующему анализу.

Находим эллипс-сечение эллипсоида плоскостью, проходящей через начало координат O и радиус-векторы $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{r}_p$, см. Рис.3.7. Если радиус-вектор КА вне полосы тени под эллипсом, как $\mathbf{r}_{\mathrm{Pa}}$, то тени нет. Если же он под эллипсом, в полосе тени, как $\mathbf{r}_{\mathrm{PB}}$, то тень есть.



(а) (б)

Рис.3.7 Эллипс-сечение эллипсоида, проходящее через начало координат О и радиус-векторы $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{r}_p$

Делаем три поворота СК, после которых ось OZ_3 направлена по $\mathbf{r}_s$, а плоскость OX_3Z_3 включает $\mathbf{r}_p$ и делает искомое сечение.

А) Поворот СК OXYZ вокруг OZ на угол φ_1 (см. Рис.3.8), чтобы плоскость OX_1Z_1 включила $\mathbf{r}_s$, при этом $\varphi_1=\alpha_s$, где α_s – «прямое восхождение» Солнца относительно исходной СК OXYZ:

$$OXYZ \to OX_1Y_1Z_1 \text{ (поворот на угол } \varphi_1 \text{ вокруг OZ);} \tag{3.19}$$

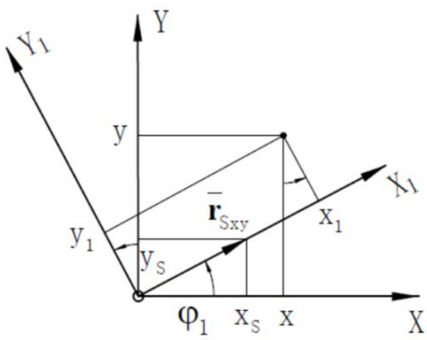


Рис.3.8 Первый поворот СК (от OXYZ к $OX_1Y_1Z_1$)

$$\begin{cases} \cos\varphi_1 = x_s / r_{sxy}; \\ \sin\varphi_1 = y_s / r_{sxy}; \\ r_{sxy} = \sqrt{x_s^{\,2} + y_s^{\,2}}. \end{cases} \tag{3.20}$$

С помощью замены переменных:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 \\ y_1 = -x\sin\varphi_1 + y\cos\varphi_1\,, \\ z_1 = z \end{cases} \tag{3.21}$$

переводим векторы $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{r}_p$ в СК $OX_1Y_1Z_1$:

$$\mathbf{r}_{s1}(x_{s1}, y_{s1}, z_{s1}),\quad \mathbf{r}_{p1}(x_{p1}, y_{p1}, z_{p1}).$$

Должно быть $x_{s1} = r_{sxy},\ y_{s1} = 0,\ z_{s1} = z_s$. Если φ_1=0, то $\mathbf{r}_{s1} = \mathbf{r}_s$, $\mathbf{r}_{p1} = \mathbf{r}_p$. Уравнение эллипсоида в СК $OX_1Y_1Z_1$:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1. \tag{3.22}$$

Б) Поворот СК $OX_1Y_1Z_1$ вокруг OY_1 на угол φ_2 (см. Рис.3.9), чтобы ось OZ_2 была направлена по $\mathbf{r}_s$:

$$OX_1Y_1Z_1 \rightarrow OX_2Y_2Z_2 \text{ (поворот на угол } \varphi_2 \text{ вокруг } OY_1). \tag{3.23}$$

Угол φ_2 определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} - \delta_s,\ 0 \le \varphi_2 \le \pi; \\ \cos\varphi_2 = z_{s1} / r_s; \\ \sin\varphi_2 = x_{s1} / r_s. \end{cases} \tag{3.24}$$

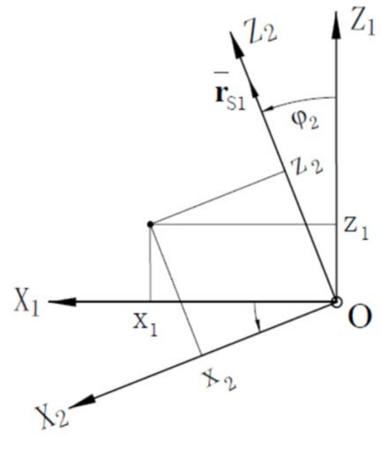


Рис.3.9 Второй поворот СК (от $OX_1Y_1Z_1$ к $OX_2Y_2Z_2$)

Тогда координаты в СК $OX_2Y_2Z_2$ будут

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Используя (3.25), получим векторы $\mathbf{r}_{s2}(x_{s2}, y_{s2}, z_{s2})$, $\mathbf{r}_{p2}(x_{p2}, y_{p2}, z_{p2})$. Должно быть $x_{s2}= y_{s2}=0$, $z_{s2}=z_s$.Уравнение эллипсоида в СК $OX_2Y_2Z_2$:

$$\frac{(x_2\cos\varphi_2 + z_2\sin\varphi_2)^2}{a^2} + \frac{{y_2}^2}{a^2} + \frac{(-x_2\sin\varphi_2 + z_2\cos\varphi_2)^2}{c^2} = 1. \qquad (3.26)$$

B) Поворот СК $OX_2Y_2Z_2$ вокруг OZ_2 на угол φ_3, чтобы ось + OX_3 прошла через проекцию вектора $\mathbf{r}_{p2}$ на плоскость OX_2Y_2:

$$OX_2Y_2Z_2 \rightarrow OX_3Y_3Z_3 \text{ (поворот на угол } \varphi_3 \text{ вокруг } OZ_2\text{);} \qquad (3.27)$$

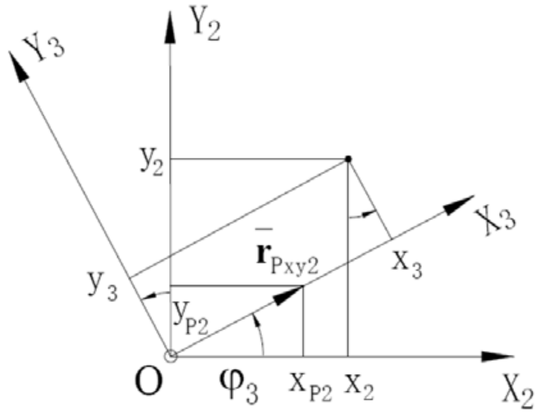


Рис.3.10 Третий поворот СК (от $OX_2Y_2Z_2$ к $OX_3Y_3Z_3$)

Угол φ_3 определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \cos\varphi_3 = x_{p2} / r_{pxy2}; \\ \sin\varphi_3 = y_{p2} / r_{pxy2}; \\ r_{pxy2} = \sqrt{{x_{p2}}^2 + {y_{p2}}^2}. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Матрица поворота:

$$\begin{cases} x_3 = x_2\cos\varphi_3 + y_2\sin\varphi_3 \\ y_3 = -x_2\sin\varphi_3 + y_2\cos\varphi_3 \\ z_3 = z_2 \end{cases} \qquad (3.29)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_3\cos\varphi_3 - y_3\sin\varphi_3 \\ y_2 = x_3\sin\varphi_3 + y_3\cos\varphi_3 . \\ z_2 = z_3 \end{cases} \qquad (3.30)$$

С помощью (3.29) переводим векторы $\mathbf{r}_{s2}$, $\mathbf{r}_{p2}$ в СК $OX_3Y_3Z_3$: $\mathbf{r}_{s3}(x_{s3}, y_{s3}, z_{s3})$, $\mathbf{r}_{p3}(x_{p3}, y_{p3}, z_{p3})$. Должно быть $x_{p3} = r_{pxy2}, y_{p3} = 0, z_{p3} = z_{p2}$. Плоскость OX_3Z_3 включает векторы $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{r}_p$ причем: $\mathbf{r}_s$ - по $+OZ_3$, $\mathbf{r}_p$ в полуоси $O(+X_3)Z_3$, $X_{p3}>0$.

Поставляя (3.30) в (3.26), получим уравнение эллипсоида в СК $OX_3Y_3Z_3$:

$$\frac{(x_2(x_3,y_3)\cos\varphi_2 + z_3\sin\varphi_2)^2}{a^2} + \frac{{y_2}^2(x_3,y_3)}{a^2} + \frac{(-x_2(x_3,y_3)\sin\varphi_2 + z_3\cos\varphi_2)^2}{c^2} = 1.$$

Полагаем в этом уравнении y_3=0, тогда получим уравнение сечения эллипсоида плоскостью OX_3Z_3:

$$\frac{(x_3\cos\varphi_3\cos\varphi_2 + z_3\sin\varphi_2)^2}{a^2} + \frac{{x_3}^2\sin^2\varphi_3}{a^2} + \frac{(-x_3\cos\varphi_3\sin\varphi_2 + z_3\cos\varphi_2)^2}{c^2} = 1. \tag{3.31}$$

Построим картинки тени в плоскости OX_3Z_3 (см. Рис. 3.11). Точки B_1, B_2 касания эллипсоида и прямых, параллельных оси OZ_3 ($\mathbf{r}_{s3}$) – это границы тени. В этих точках:

$$dx_3/dz_3 = 0\,. \tag{3.32}$$

Из этого уравнения и (3.31) получаем:

$$\frac{(x_3\cos\varphi_3\cos\varphi_2 + z_3\sin\varphi_2)\sin\varphi_2}{a^2} + \frac{(-x_3\cos\varphi_3\sin\varphi_2 + z_3\cos\varphi_2)\cos\varphi_2}{c^2} = 0\,. \tag{3.33}$$

Отсюда следует:

$$z_3 = -\frac{(c^2-a^2)\cos\varphi_3\cos\varphi_2\sin\varphi_2}{a^2\cos^2\varphi_2 + c^2\sin^2\varphi_2}x_3,$$

или для координат точек B_1, B_2 верно:

$$z_3 = Ax_3, \tag{3.34}$$

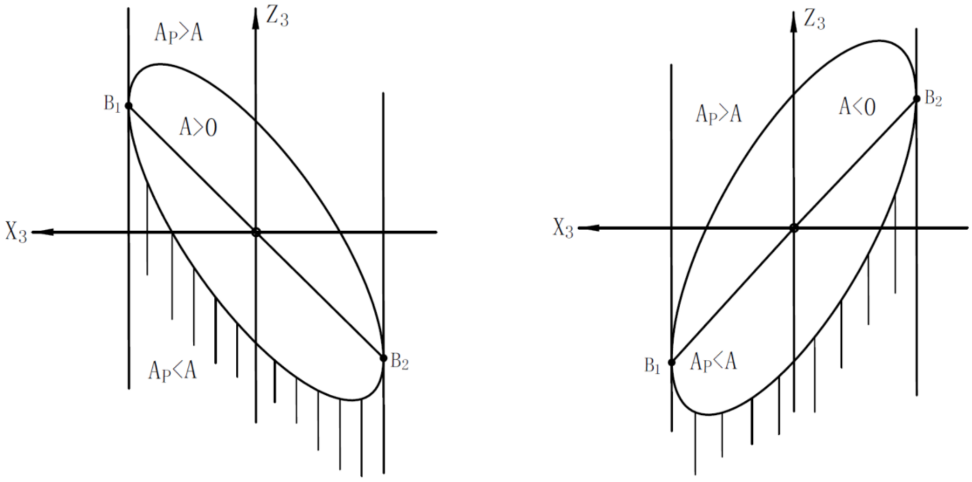
$$\begin{aligned} A &= -\frac{(c^2-a^2)\cos\varphi_2\sin\varphi_2}{a^2\cos^2\varphi_2 + c^2\sin^2\varphi_2}\cos\varphi_3; \\ &= -A_1\cos\varphi_3 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$A_1(\varphi_2) = \frac{(c^2-a^2)\cos\varphi_2\sin\varphi_2}{a^2\cos^2\varphi_2 + c^2\sin^2\varphi_2}. \tag{3.36}$$

Случай A>0 изображен на Рис.3.11(а), случай A<0 – на Рис.3.11(б).

Подставляем (3.34) в уравнение (3.31):

$$\frac{(x_3\cos\varphi_3\cos\varphi_2 + Ax_3\sin\varphi_2)^2}{a^2} + \frac{{x_3}^2\sin^2\varphi_3}{a^2} + \frac{(-x_3\cos\varphi_3\sin\varphi_2 + Ax_3\cos\varphi_2)^2}{c^2} = 1.$$



(а) (б)

Рис.3.11 Картинки тени в плоскости OX_3Z_3

Отсюда определяем $x_3{}^2$:

$$x_3{}^2 = \left\{ \frac{\left(\cos\varphi_2 - A_1 \sin\varphi_2\right)^2 \cos 2\varphi_3}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi_3}{a^2} + \frac{(\sin\varphi_2 + A_1\cos\varphi_2)^2 \cos^2\varphi_3}{c^2} \right\}^{-1},$$

или $x_3{}^2 = B^{-1}$,

$$B = \frac{\left(\cos\varphi_2 - A_1 \sin\varphi_2\right)^2 \cos 2\varphi_3}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi_3}{a^2} + \frac{(\sin\varphi_2 + A_1\cos\varphi_2)^2 \cos^2\varphi_3}{c^2}.$$

Упростим эту формулу для B, учитывая (3.36):

$$B = \frac{a^2 + (c^2 - a^2)\sin^2\varphi_2 \sin^2\varphi_3}{a^2(a^2\cos^2\varphi_2 + c^2\sin^2\varphi_2)} > 0. \qquad (3.37)$$

Тогда для координат точек B_1:

$$x_3 = (x_3)_1 = \sqrt{B^{-1}} > 0; \quad (z_3)_1 = A(x_3)_1 = -A_1\cos\varphi_3 (x_3)_1, \qquad (3.38)$$

для точки B_2:

$$x_3 = (x_3)_2 = -\sqrt{B^{-1}} < 0; \quad (z_3)_2 = A(x_3)_2 = -A_1\cos\varphi_3 (x_3)_2. \qquad (3.39)$$

В данном случае $\rho_p < c$, так как Солнце находится в направлении оси $+OZ_3$. Тень для КА есть только, если КА – под эллипсом, см. Рис.3.11(а), 3.11(б). Поэтому:

$$\text{если} \quad x_{p3} \geq (x_3)_1, \text{ то тени нет;} \qquad (3.40)$$

если же $x_{p3} < (x_3)_1$, то находим

$$A_p = \frac{z_{p3}}{x_{p3}}. \tag{3.41}$$

Тогда:

$$\begin{cases} \text{если } A_p \geq A, \text{ то тени нет,} \\ \text{если } A_p < A, \text{ то КА в тени.} \end{cases} \tag{3.42}$$

3.5 Выводы по главе 3

В данной главе 3 представлена математическая модель орбитального движения КА у астероида с учетом возмущений от небесных тел, несферичности астероида как вытянутого эллипсоида вращения, давления солнечного света и собственного вращения астероида вокруг малой оси. При этом:

1. Построена численная математическая модель орбитального движения КА вблизи астероида.
2. Возмущающее ускорение от притяжения удаленных небесных тел вычисляется, для повышения точности расчета, в модифицированной форме. Разработанная модель позволяет учесть возмущения от притяжения нескольких небесных тел, в частности, Солнца, Земли, Луны, Юпитера, Венеры.
3. Применяется модель возмущения от несферичности астероида, как вытянутого эллипсоида вращения.
4. Разработан алгоритм вычисления возмущающего ускорения от давления солнечного света с учетом возможного затенения КА астероидом как вытянутым эллипсоидом вращения.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ КА ВОКРУГ АСТЕРОИДА АПОФИС

Для рассмотренной модели движения основного КА и мини-спутника, а также астероида выполнен численный анализ задачи движения основного КА и мини-спутника в близкой окрестности астероида Апофис. Параллельно проводился качественный анализ результатов по приближенным аналитическим методам. Начальная дата выбрана 23.04.2020. Это дата подлета к астероиду для оптимальной траектории полета к Апофису с возвращением к Земле ***№ 16*** (см. главу 2). Начальная орбита КА взята круговой с радиусом r_0 в диапазоне 0.5–2 км (скорость 6–3 см/с, орбитальный период ~14.5–116.4 ч для μ_A = 1.8 м^3/с^2).

Определены орбиты, которые довольно устойчивы при действии рассмотренных возмущений и могут служить эффективными решениями, которые практически не требуют усилий по поддержанию орбиты вокруг астероида Апофис в течение очень длинных периодов времени. Главные результаты были опубликованы в [38-40, 47, 48, 114].

4.1 Модель астероида Апофис

Анализ последних результатов наблюдения астероида Апофис [124] показал, что он геометрически и динамически близок к вытянутому эллипсоиду вращения: максимальный и средний главные моменты инерции практически совпадают с $I_2/I_3 = 0.965^{+0.009}_{-0.015}$, а минимальный главный момент инерции существенно ниже с $I_1/I_3 = 0.61^{+0.11}_{-0.08}$. С учетом преимуществ и недостатков вышеуказанных методов моделирования астероидов и анализа последних наблюдений Апофиса, в данной работе использована приближенная модель однородного вытянутого эллипсоида вращения, которая хорошо соответствует наблюдениям и позволяет применить конечные формулы для возмущений.

Для Апофиса сначала из кривого блеска был определен режим вращения вокруг малой оси, затем было получено уточненное решение в классе двухосных вращений с полодией вокруг полюса малой оси, близкое к одноосному вращению вокруг малой оси с периодом P_A=30.56 час [124]. Это одноосное вращение и принято в данной работе. В [124] определено направление $\boldsymbol{L}$ для Апофиса в эклиптической системе координат углами долготы λ_L и широты β_L.

В Таблице 16 приведены основные параметры Апофиса. Здесь μ_A – гравитационный параметр Апофиса (масса Апофиса 2.7 – 4.3×10^{10} кг); R_A – средний радиус Апофиса, соответствующий однородному шару с массой астероида; a_A, b_A, c_A – малая, средняя, большая полуоси эллипсоида для Апофиса. Исходя из соотношений $b_A/a_A\approx1.06$ (±0.02), $c_A/a_A\approx 1.5$ (±0.2), полученных из наблюдений [124], мы приняли, что $a_A \approx b_A$, удлинение $\alpha=c_A/a_A \approx 1.3$-$1.7$, и выполнили анализ для α = (1.3; 1.5; 1.7). Основное внимание уделили варианту α =1.7.

Таблица 16.

Параметры модели астероида Апофис, принятой в данной работе

μ_A (м^3/с^2)	R_A (м)	$b_\mathrm{A}/a_\mathrm{A}$	$c_\mathrm{A}/a_\mathrm{A}$	λ_L (°)	β_L (°)	P_A (ч)
1.8-2.86	160	1	1.5 (±0.2)	250	-75	30.56

4.2 Анализ движения КА у астероида Апофис с учетом частных возмущений

В первую очередь приведем некоторые качественные и количественные результаты анализа движения КА у астероида под действием частных рассматриваемых возмущений, взятых по отдельности.

Сначала отметим, что важным фактором, влияющим на движение КА у астероида, является малость массы астероида и его гравитации. Это приводит к заметному изменению ряда привычных характеристик движения его спутника.

Для того чтобы иметь качественное представление о величинах ускорений $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, на Рис.4.1. приведены их значения в начальный момент (2020/04/23) на круговых орбитах с радиусом r_0 в диапазоне 0.5-5 км около Апофиса (μ_A = 1.8 м^3/с^2). Начальная плоскость орбиты задается в системе координат $OX_{A1}Y_{A1}Z_{A1}$ прямым восхождением восходящего узла Ω_0 и наклоном i_0, $\Omega_0 = i_0 = 90°$. Здесь удлинение α взято 1.7. Астероид вращается вокруг малой ось a_A, ориентированной вдоль вектора $\boldsymbol{L}$. Величины возмущающего ускорения $\mathbf{a}_3$ здесь вычисляются для модели основного КА и $\mathbf{a}_3$* - для мини-спутника. Видно, что на низкой орбите ИСА, главным возмущением является несферичность Апофиса, на орбите с бóльшим радиусом давление солнечного света становится главным.

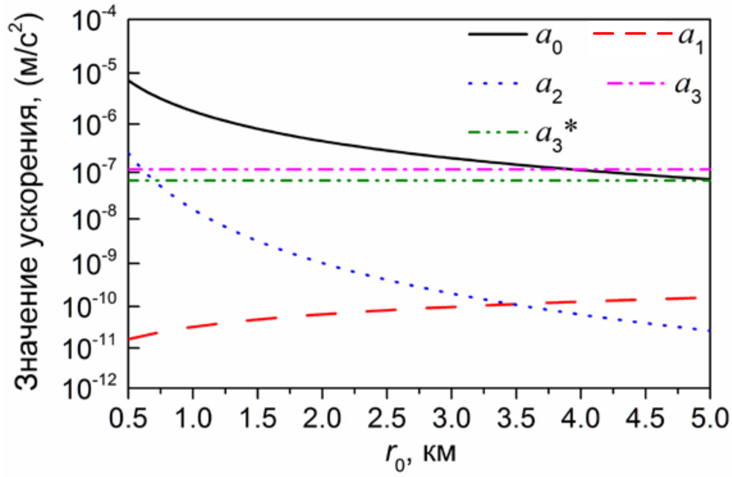


Рис.4.1 Зависимость величины ускорений a_0, a_1, a_2, a_3 от r_0 для случая $\mu_A = 1.8$ м^3/с^2, $\Omega_0 = i_0 = 90°$, $r_0 = 0.5$-5 км, $t_2 = 2020/04/23$.

4.2.1 Орбитальное движение спутника Апофиса с учетом притяжения удаленных небесных тел

Влияние возмущений только от удаленных небесных тел ($k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$) обычно весьма мало и усиливается с ростом начального радиуса орбиты r_0. При этом отношение возмущающего ускорения к центральному имеет порядок [69]:

$$a_{1j}/a_0 \sim \left(\mu_j/\mu_A\right)\left(r_0/r_j\right)^3. \tag{4.1}$$

Для нашей модели на орбите радиусом 500 м значение a_1/a_0 составляет порядка 10^{-5}, и a_1/a_0 (r_0 = 2 км) ≈ $64 \cdot a_1/a_0$ (r_0 = 0.5 км). Главным здесь будет обычно возмущение от Солнца, другие составляющие заметно меньше. А отклонение линейного параметра орбиты, расстояния r, от начального r_0 [69]:

$$\delta r_1 \sim A r_0^{\,4}. \tag{4.2}$$

В Таблице 17 приведены максимальные отклонения расстояния между КА и центром массы астероида, эксцентриситета и большой полуоси от их начальных значений до тесного сближения астероида с Землей в Апреле 2029 года. Положение плоскости орбиты для всех здесь приведенных вариантов едва изменились: изменение в Ω и i не более 1° за 9 лет (2020-2029). Нужно отметить, что в апреле 2029 г. будет тесное сближение Апофиса с Землей, и это возмущение за счет притяжения Земли резко увеличивается, орбита спутника сильно изменяется. После этого КА обычно улетает от Апофиса или врезает в его поверхность. В качестве примера на Рис. 4.2-4.5 приведена эволюция параметров орбиты КА за 9 лет (2020-2029) для варианта μ_A = 1.8 м^3/с^2, $\Omega_0 = i_0 = 90°$, r_0 = 1.5 км, под влиянием только притяжения удаленных небесных тел. После тесного сближения Апофиса с Землей в 2029 г. КА улетает, этому соответствует «всплеск» кривых при t ~9 лет.

Таблица 17.

Изменения в расстоянии δr_1, эксцентриситете δe_1 и большой полуоси δa_1 для r_0 = 0.5-2 km за 9 лет (2020-2029) при учете только притяжения удаленных небесных тел

r_0 (км)	δr_1 (м)	δe_1	δa_1 (м)
0.5	0.005	~0	~0
1	0.07	1.3×10^{-4}	0.07
1.5	0.4	4.7×10^{-4}	0.4
2	1.3	1.25×10^{-3}	1

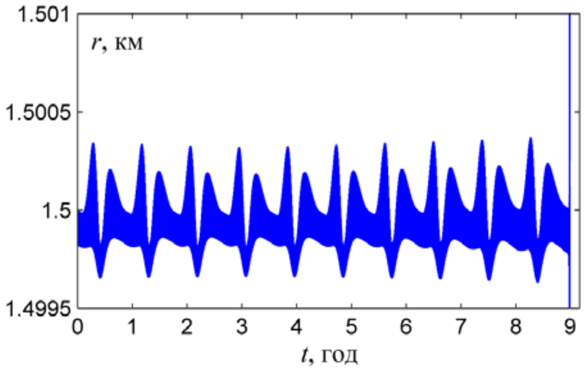


Рис.4.2. Изменение расстояния от КА до центра масс астероида под влиянием только притяжения удаленных небесных тел за 9 лет (2020-2029) для варианта μ_A = 1.8 м^3/с^2, $\Omega_0 = i_0 = 90°$, r_0 = 1.5 км

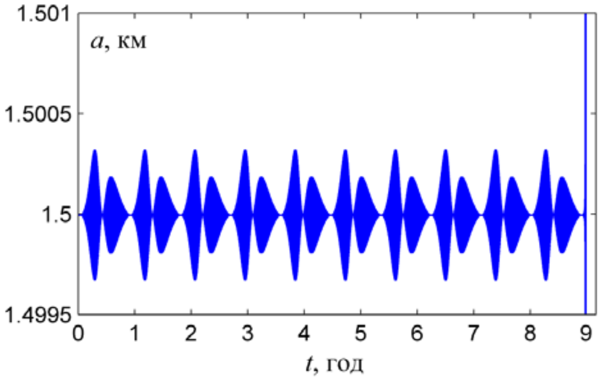


Рис.4.3. Эволюция большой полуоси орбиты КА под влиянием только притяжения удаленных небесных тел за 9 лет (2020-2029) для варианта μ_A = 1.8 м^3/с^2, $\Omega_0 = i_0 =$

90°, r_0 = 1.5 км

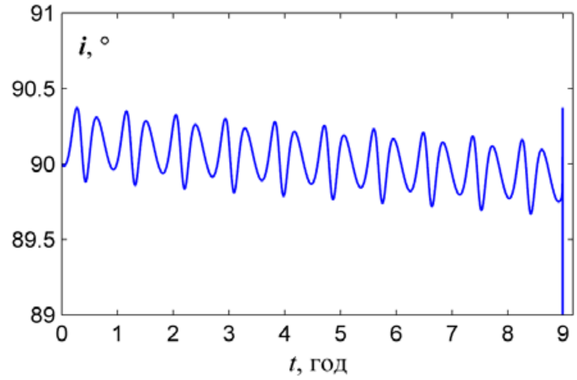


Рис.4.4. Эволюция угла i в 2020-2029 гг. для варианта μ_A = 1.8 м^3/с^2, $\Omega_0 = i_0$ = 90°, r_0 = 1.5 км, с учетом возмущения только от удаленных небесных тел

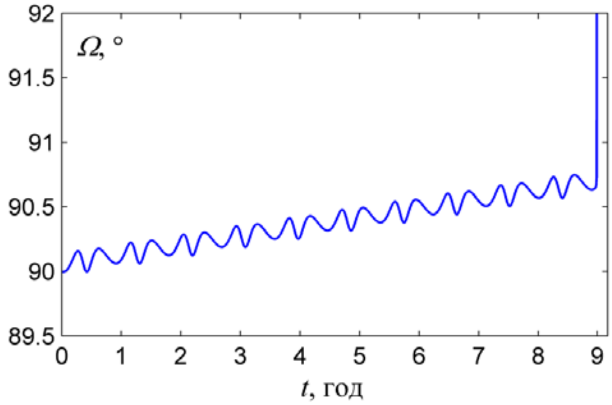


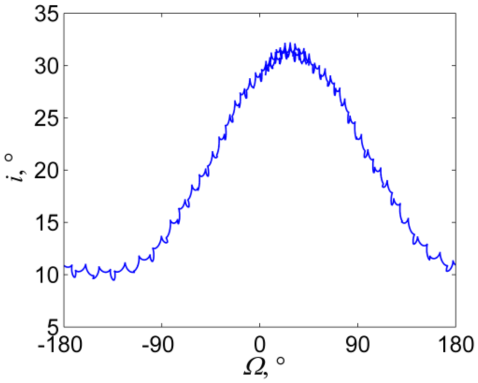
Рис.4.5. Эволюция угла Ω в 2020-2029 гг. для варианта μ_A = 1.8 м^3/с^2, $\Omega_0 = i_0$ = 90°, r_0 = 1.5 км, с учетом возмущения только от удаленных небесных тел

4.2.2 Орбитальное движение спутника Апофиса с учетом несферичности астероида

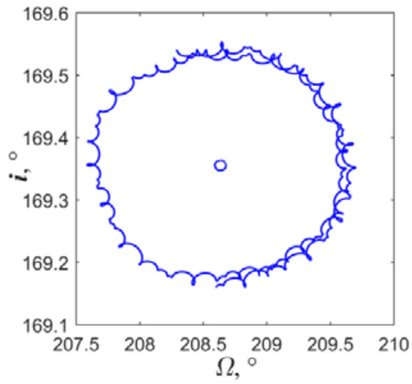
В случае учета влияния только несферичности Апофиса ($k_1 = k_3 = 0$, $k_2 = 1$) с увеличением начального радиуса орбиты r_0 возмущающее ускорение уменьшается. При вращении вокруг большой оси эллипсоида поле стационарно, и возмущение по расстоянию имеет порядок $\delta r_2 \sim B/r_0$ [69]. Если же тело вращается вокруг малой оси, то поле нестационарно, характер возмущений сложнее, могут быть ситуации типа резонансных, когда возмущающее воздействие на КА приближается к импульсному. Но все же обычно возмущение остается небольшим, хотя и, как правило, заметно бо́льшим, чем возмущение от удаленных тел. Сравнительно больше изменение оказалось в ориентации плоскости орбиты КА. При варьировании начальной ориентации плоскости низкой орбиты радиусом 0.5 км, выявлены два типа орбит: плоскость орбиты будет либо вращаться по углу Ω (в ротационном режиме), как показано на Рис.4.6 (а), либо колебаться по наклону и узлу (в либрационном режиме), см. Рис.4.6 (б). Аналогичные результаты были получены в [96]. Найдены две равновесные точки, в которых наклонение и долгота восходящего узла остаются практически постоянными, для них

$$\Omega_0 \approx 208.6°,\ i_0 \approx 169.35°,\ \text{и}\ \Omega_0 \approx 28.6°,\ i_0 \approx 10.65°. \quad (4.3)$$

Они соответствуют экваториальной плоскости астероида. Первая точка указана в центре «окружности» на Рис.4.6 (б).



(а)



(б)

Рис.4.6. Изменение Ω и i при учете возмущения только от несферичности; r_0= 0.5 км, μ_A=1.8 м^3/с^2, α=1.7, вращение вокруг малой оси $\boldsymbol{a}$: (а) для случая вращательного движения по Ω (Ω_0= 45°, i_0 =30°); (б) для случая колебательного движения в координатах (Ω, i).

На Рис.4.7 показаны изменения r в 2020-2029 гг. для варианта μ_A = 1.8 м^3/с^2, α=1.7, Ω_0 = i_0 = 90°, r_0 = 0.5 км, с учетом только несферичности Апофиса (вращение астероида вокруг малой оси, вектора $\boldsymbol{L}$).

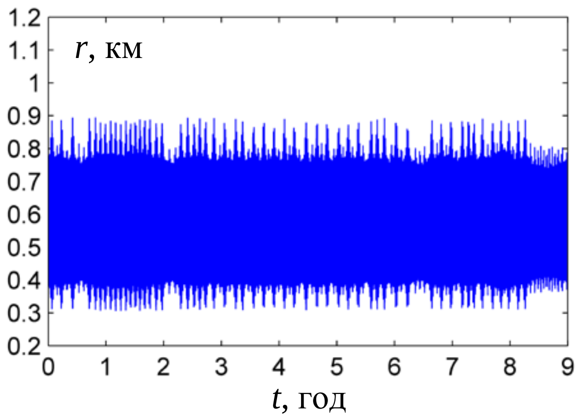


Рис.4.7. Изменение со временем в течение 9 лет расстояния от КА до центра астероида для r_0= 0.5 км при учете возмущения только от несферичности; μ_A=1.8 м^3/с^2, Ω_0=i_0 =90°; α=1.7, вращение вокруг малой оси ***a*** по ***L***

На Рис.4.8 показана эволюция r в 2020-2021 гг. с теми же исходными данными, кроме Ω_0=28.6°, i_0 =10.64°, с учетом только несферичности Апофиса. Понятно, что когда учитывается только несферичность Апофиса, движение КА с начальной ориентации плоскости орбит Ω_0, i_0, взятыми вблизи двух «равновесных» точек, будет довольно устойчивым.

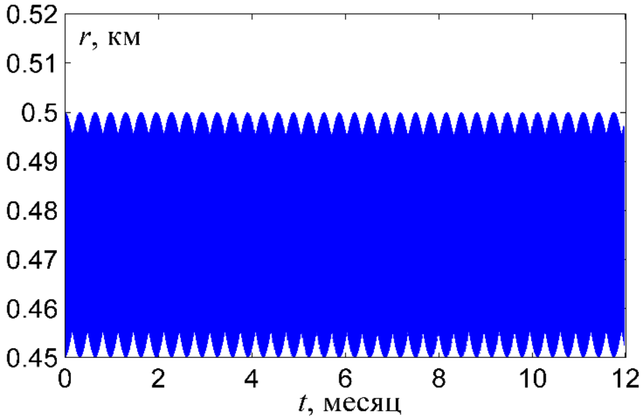


Рис.4.8. Изменение со временем в течение года расстояния от КА до центра астероида для r_0= 0.5 км при учете возмущения только от несферичности; μ_A=1.8 м^3/с^2, Ω_0=28.6°, i_0 =10.64°; α=1.7, вращение вокруг малой оси ***a*** по ***L***

С увеличением начального радиуса орбиты, в общем, влияние возмущения от несферичности астероида на орбите КА уменьшается. Но когда радиус орбиты близок к «резонансным», т.е. период данной орбиты близок к периоду собственного вращения Апофиса, изменения параметров орбиты КА могут увеличиваться. Так, в Таблице 18 приведены изменения в расстоянии δr, в эксцентриситете δe и в большой полуоси δa для r_0 = 0.5-2 км за 9 лет (2020-2029) при учете только несферичности астероида Апофис. Общие исходные данные для этих вариантов: α=1.7, c_A=228 м, Ω_0=i_0=90°, μ_A=1.8 м^3/с^2, e_0=0, вращение астероида вокруг малой оси, вектора ***L***, с периодом $P_{\text{А}}$=30.56 ч. Для случая r_0 = 800 м период движения КА вокруг астероида $P_{\text{КА}} \approx P_{\text{А}}$, для случая r_0 = 1300 м $P_{\text{КА}} \approx 1.5\ P_{\text{А}}$, и при этом обнаружено увеличение изменения параметров орбиты КА по сравнению с вариантами r_0 = 500 м и r_0 = 1000 м, соответственно.

Таблица 18.

Изменения в расстоянии δ*r*, эксцентриситете δ*e* и большой полуоси δ*a* для r_0 = 0.5-2 км за 9 лет (2020-2029) при учете только несферичности астероида Апофис

r_0 (м)	$\delta r = r - r_0$ (м)		$\delta a = a - a_0$ (м)		δe
	мин	мах	мин	мах	
500	-189	394	-42	100	0.5
800	-367	509	-44	85	0.518
1000	-33	25	-20	2	0.032
1300	-88	107	-10	13	0.0785
1500	-6	1	-8	0.03	0.005
2000	-3	0.4	-5	0.02	0.002

Аналогичный анализ также проведен для случаев α=1.3, 1.5, и для более тяжелого астероида μ_A=2.86 м^3/с^2. Анализ показал, что для рассмотренных круговых орбит с радиусом r_0 = 0.5-2 км, резонансный эффект, вызванный только несферичностью астероида Апофис (α=[1.3, 1.5, 1,7], μ_A=[1.8, 2.86] м^3/с^2) не приведет ни к столкновению КА с Апофиса, ни к выходу КА из близкой окрестности астероида.

Для примера на Рис.4.9-4.11 показана эволюция орбиты КА в 2020-2029 гг. для вариантов r_0 =1.5км (μ_A = 1.8 м^3/с^2, Ω_0 = i_0 = 90°, α=1.7), с учетом только несферичности астероида (вращение астероида вокруг малой оси).

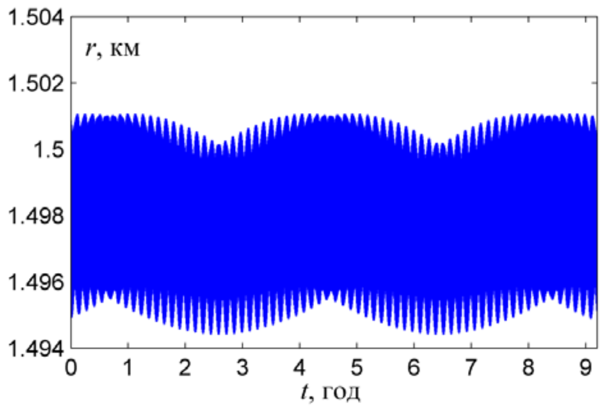
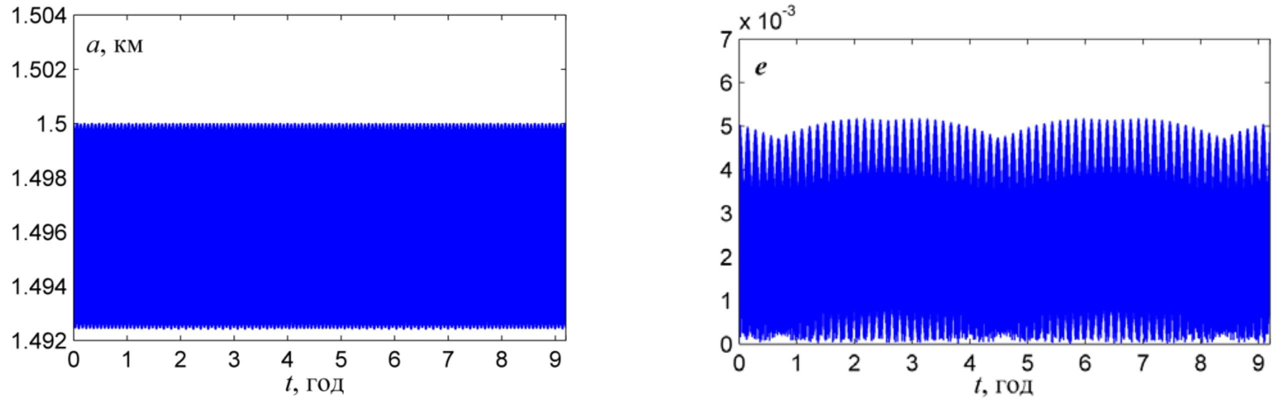


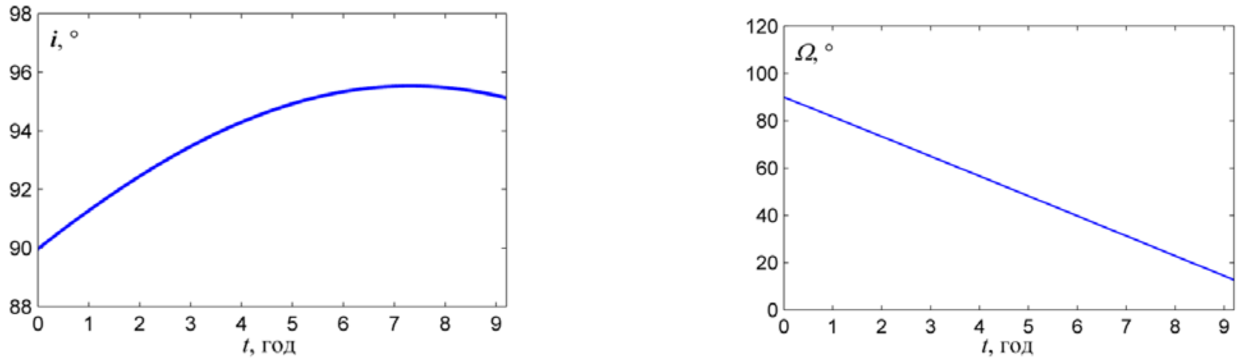
Рис.4.9. Изменение со временем в течение 9 лет расстояния от КА до центра

астероида для r_0= 1.5 км при учете возмущения только от несферичности; μ_A=1.8 м^3/с^2, Ω_0=i_0 =90°, r_0 =1.5км; α=1.7, вращение вокруг малой оси ***a*** по ***L***.



(а) (б)

Рис.4.10. Изменение со временем в течение 9 лет большой полуоси (а) и эксцентриситета (б) орбиты КА для r_0= 1.5 км при учете возмущения только от несферичности; μ_A=1.8 м^3/с^2, Ω_0=i_0 =90°; α=1.7, вращение вокруг малой оси ***a*** по ***L***.



(а) (б)

Рис.4.11. Эволюция плоскости орбиты КА в 2020-2029 гг. для варианта r_0 =1.5км, μ_A = 1.8 м^3/с^2, Ω_0 = i_0 = 90°, α=1.7, с учетом только несферичности астероида: (а) наклонение i; (б) угол Ω.

Таким образом, влияние несферичности Апофиса обычно больше чем возмущение от удаленных небесных тел, но все-таки остается небольшим.

4.2.3 Орбитальное движение спутника Апофиса с учетом давления солнечного света

При анализе влияния давления солнечного света (k_1= k_2=0, k_3=1) на орбитальное движение спутника астероида выявлены три важных моментов. В первую очередь здесь отметим, что при движении КА у малого астероида это возмущение является весьма заметным, в отличие от привычного движения у Земли. Существует предельное расстояние, где притяжение астероида мало для борьбы с воздействием солнечного света, и КА улетит от астероида. Так, для варианта Ω_0=i_0=90°, μ_A=1.8 м^3/с^2, если начальный радиус взят r_0=1 км и r_0=1.5 км, то в течение 9 лет мини-спутник держится у Апофиса. А для начального радиуса r_0=2 км, КА через ~ 90 сут. уже улетит от Апофиса (см. Рис.4.12).

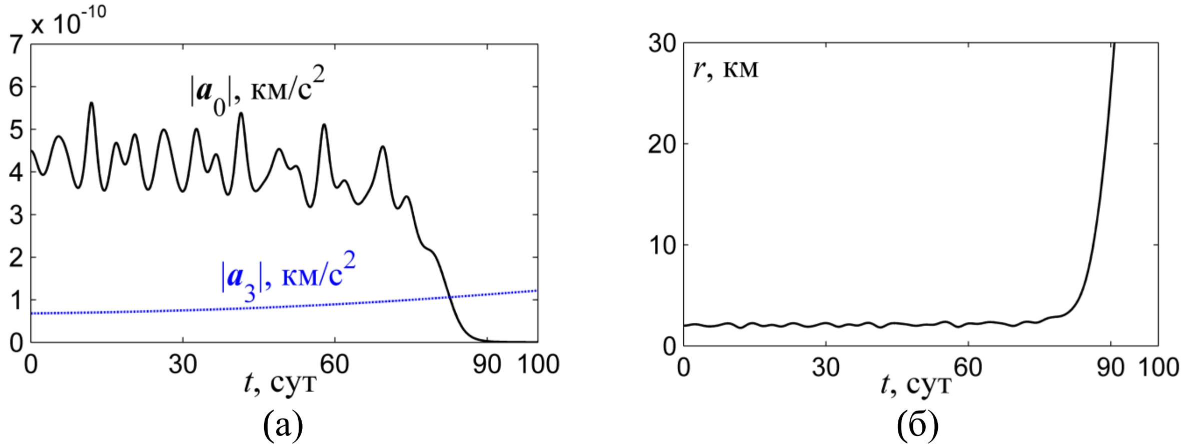


Рис.4.12. Эволюция орбиты мини-спутника под влиянием только давления солнечного света для варианта μ_A=1.8 м^3/с^2, Ω_0=i_0=90°, r_0=2 км: (а) величина центрального ускорения $|\boldsymbol{a}_0|$ и возмущающего ускорения от давления солнечного света $|\boldsymbol{a}_3|$; (б) расстояние от мини-спутника до центра масс астероида.

По аналогичной задаче Scheeres и Marzari в [136] аналитически получили приближенное предельное значение большой полуоси орбиты a*, при превышении которого КА улетит от центрального малого тела:

$$a* = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu_A B}{G_1}}d\,, \tag{4.4}$$

где G_1 ≈1×10^8 кг·км^3/(с^2·м^2), B – отношение массы КА к площади в кг/м^2. Поставляя наши принятые данные в (4.4), получилось, что для мини-спутника при μ_A=1.8 м^3/с^2, будет a*≈ 1.53км.

Вторым важным фактором является ориентация плоскости орбиты относительно солнечных лучей. Обозначая через β угол между нормалью к плоскости орбиты КА и направлением от КА к Солнцу, напишем приближенное линейное аналитическое выражение для вариации расстояния, отражающее зависимость величины этой вариации от угла β [69]:

$$\delta r_3 \sim r_0^3 \sin\beta. \tag{4.5}$$

Отсюда, понятно, что плоскость орбиты КА лучше брать перпендикулярной к солнечным лучам, чтобы уменьшать вариацию расстояния. Если в начале движения взять плоскость орбиты не очень удачно, например, когда Ω_0=0, i_0=90° и для данной начальной даты (23 апреля 2020) направление от Солнца к астероиду будет близко к плоскости орбиты ($\beta_0 \approx 80°$), то давление солнечного света будет сильно влиять на размеры орбиты, см. Рис. 4.13. Изменение расстояния в апоцентре и перицентре от времени за один виток орбиты основного КА показано на Рис. 4.14 для этого случая, при Ω_0=0, i_0=90° ($\beta_0 \approx 80°$),; r_0=0.5 км, μ_A=2.86 м^3/с^2, когда учитывается возмущение только от солнечных лучей.

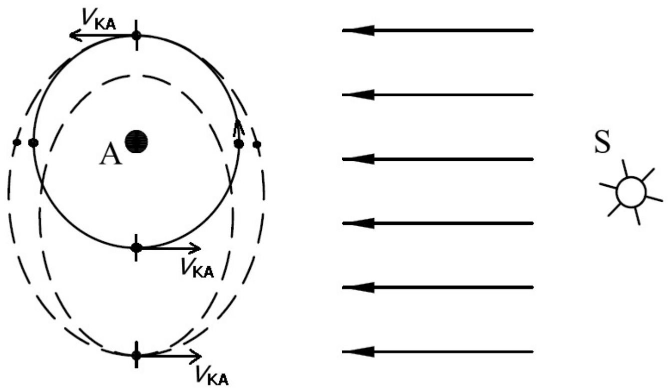


Рис. 4.13. Иллюстрация воздействия давления солнечного света на КА и его орбиту при нахождении солнечных лучей в плоскости орбиты ($\beta_0 \approx 80°$).

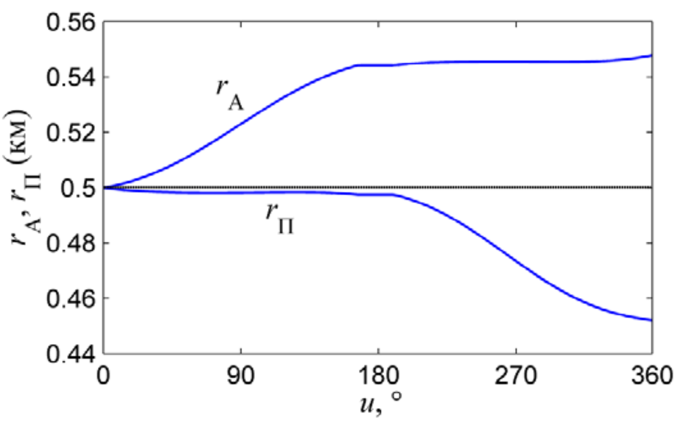


Рис. 4.14. Изменения расстояний в апоцентре и перицентре от аргумента широты за один оборот при Ω_0=0, i_0=90°, μ_A=2.86 м^3/с^2; r_0=0.5 км, для основного КА.

Здесь на одной половине витка солнечные лучи ускоряют движение, скорость КА растет, и в результате расстояние в перицентре почти постоянно, а расстояние в апоцентре возрастает. На другой половине витка КА движется навстречу солнечному свету, и давление света тормозит движение [59, 123]. Получается, что здесь расстояние в апоцентре почти постоянно, а расстояние в перицентре уменьшается, эксцентриситет орбиты растет. Этот эффект накапливается по виткам, и КА быстро, за несколько оборотов, может столкнуться с астероидом или улететь. На Рис.4.15 показана картина движения основного КА от начальной точки P_0 до конечной точки P_f при влиянии только давления солнечного света. Через ~ 4.5 сут КА сталкивается с поверхностью астероида.

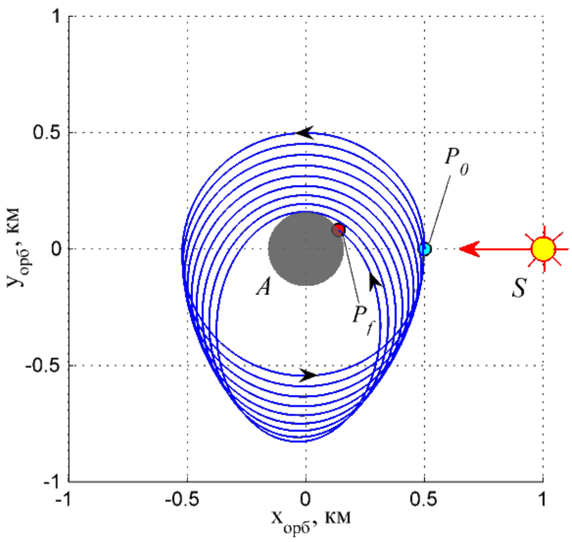


Рис.4.15. Движение основного КА вокруг астероида при возмущении только от давления солнечных лучей, при Ω_0=0, i_0=90°, μ_A=2.86 м^3/с^2; r_0=0.5 км. P_0, P_f – начальная и конечная точки движения КА. *C* – Солнце, *A* – астероид.

Рассмотрены также случаи ориентации плоскости орбиты (r_0=0.5 км) относительно Солнечных луч в «равновесных точках» (4.3), полученных из результатов анализа движения КА при учете только несферисности астероида. Для них $\beta_0 \approx 85°$ и $\beta_0 \approx 95°$. Тогда с учетом возмущения только от ДСС «равновесное» состояние вскоре будет нарушено, и КА быстро врезается в поверхность астероида.

Поэтому для дальнейшего анализа, как основной вариант, взято

$$\Omega_0 \approx 90°,\ i_0 \approx 90°\ (\beta_0 \approx 10°), \tag{4.6}$$

т.е. для принятой начальной даты начальное направление солнечного луча примерно перпендикулярно плоскости орбиты. В этом случае меняются, в основном, угловые параметры орбиты, а ее размеры остаются стабильными.

Так, если для предыдущего варианта движения основного КА (Рис.4.15) с параметрами μ_A=2.86 м^3/с^2, Ω_0=0, i_0=90°, r_0=0.5 км, e_0=0, возьмем Ω_0=90°, то ситуация резко изменится. КА будет стабильно двигаться у астероида длительное время. Максимальное изменение r за 9 лет (2020-2029г) составит примерно ±150 м, см. Рис.4.16. Для этого варианта на Рис.4.17-4.18 приведены графики изменения по времени полета долготы восходящего узла орбиты КА и угла β за 9 лет. Орбита КА прецессирует и отслеживает направление на Солнце, так что плоскость орбиты КА остается примерно перпендикулярной к направлению на Солнце.

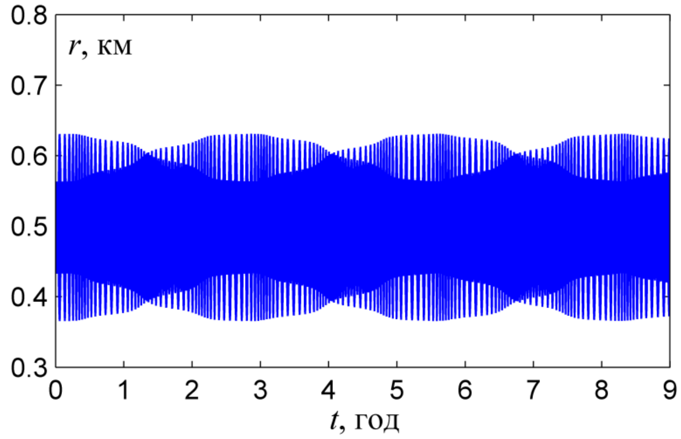


Рис.4.16. Изменение со временем r орбиты основного КА при возмущении только от давления солнечных лучей для варианта μ_A=2.86 м^3/с^2, Ω_0=i_0=90°, r_0=0.5 км, e_0=0.

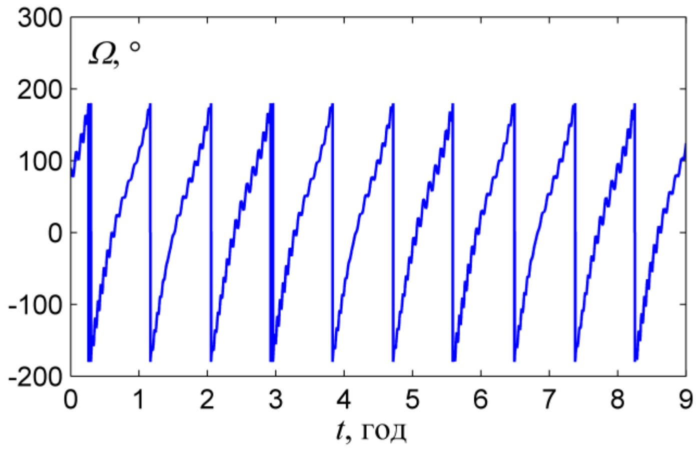


Рис.4.17. Изменение со временем долготы восходящего узла орбиты основного КА при возмущении только от давления солнечных лучей для варианта μ_A=2.86

м^3/с^2, Ω_0=i_0=90°, r_0=0.5 км, e_0=0.

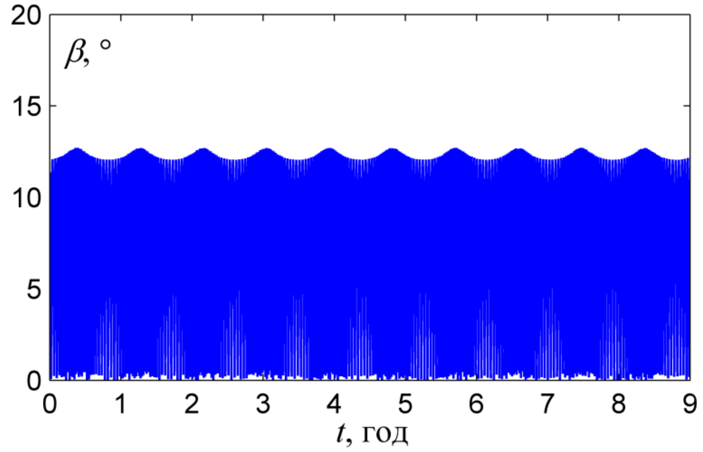
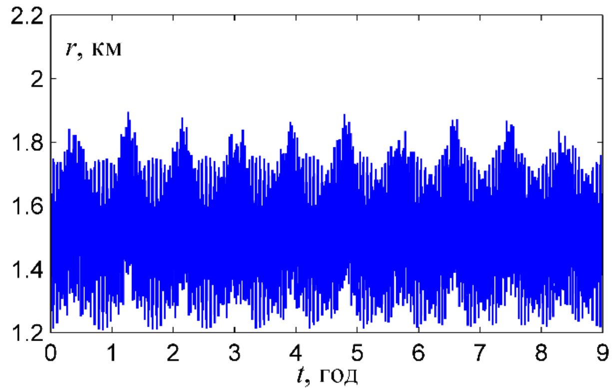


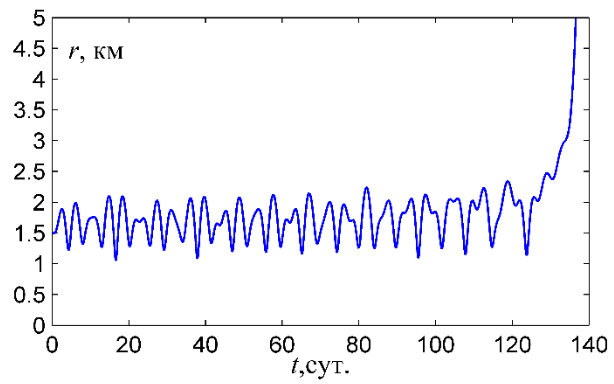
Рис.4.18. Эволюция угла β между нормалью орбиты КА и направлением от КА к Солнцу за 9 лет (2020-2029) для варианта μ_A=2.86 м^3/с^2, Ω_0=i_0=90°, r_0=0.5 км, e_0=0.

Аналогичный анализ сделан для мини-спутника. Мини-спутник также будет долго держаться около астероида при выполнении условия (4.6). Так, если для него $\Omega_0 = i_0 = 90°$, μ_A=1.8 м^3/с^2; r_0=1.5 км, то мини-спутника стабильно движется у астероида в течение более 9 лет под действием возмущения только от давления солнечного света, см. Рис. 4.19 (а).

Отметим, что, в принципе, возможен второй вариант ориентации орбиты – при Ω_0 = 270° с обратным направлением движения по отношению к (4.6). Однако анализ показал, что в этом случае время движения КА у астероида меньше, чем в предыдущем случае Ω_0 = 90°. Например, если в только что рассмотренном случае взять Ω_0 =270°, то мини-спутник улетает от Апофиса через ~ 130 сут., см. Рис. 4.19 (б). Поэтому основной анализ соответствует (4.6).



(а)



(б)

Рис.4.19. Эволюция расстояния от мини-спутника до центра масс астероида под влиянием только давления солнечного света для варианта μ_A=1.8м^3/с^2,i_0=90°r_0=1.5 км: а) Ω_0=90°; (б) Ω_0=270°.

Для произвольной начальной даты полета, ориентация начальной орбиты КА, обеспечивающая $\beta_0 = 0$, может быть определена с помощью «прямого восхождения» Солнца α_S и «склонения» Солнца δ_S в данный момент

$$\Omega_0=90° + \alpha_S;\ i_0=90° - \delta_S. \tag{4.7}$$

Так, для принятой начальной даты (23 апреля 2020) угловые координаты Солнца в СК (1) $\alpha_S \approx 349°$, $\delta_S \approx -3°$. Тогда за начальные элементы (4.7) можно взять $\Omega_0 \approx 79°$, $i_0 \approx 93°$. Картина движения КА остается при этом практически той же, что и для прежнего случая $\Omega_0 = i_0$=90°. Принятые в основном варианте значения (4.6) можно рассматривать также как модель неточности выведения КА на орбиту спутника астероида (4.7). Если за основную плоскость возьмем плоскость орбиты астероида, то $\delta_S = 0$ и тогда $i_0 = 90°$.

Отметим, что в отличие от случая постоянного направления солнечных лучей [69], из-за вращения Апофиса вокруг Солнца давление солнечного света вызывает прецессию орбиты КА, поворот плоскости орбиты КА по долготе узла Ω, так что если начальная ориентация плоскости орбиты КА выбрана должным образом, то угол β будет не только в начальный момент, но и долгое время оставаться малым. Вследствие этого линейные параметры орбиты слабо меняются.

4.3 Анализ движения КА у астероида Апофис при совместном влиянии всех трех возмущений

Рассмотрим теперь основной случай совместного влияния всех трех возмущений. Приведем результаты для α=1.3-1.7, μ_A=1.8-2.86 м^3/с^2, i_0=Ω_0=90°. Полагаем, что астероид вращается вокруг малой оси $\mathbf{a}_A$, ориентированной по вектору $\boldsymbol{L}$.

Отметим сначала основные качественные особенности движения КА у астероида в данном случае. Сохраняется в общем случае, при учете всех возмущений, отмеченная выше, при анализе частных возмущений от небесных тел, малость влияния этих возмущений на большей части полета, до тесного сближения с Землей в 2029 г. Поэтому обычно основное влияние на движение КА оказывают возмущения от несферичности и давления солнечного света.

С точки зрения качественных особенностей движения КА у астероида в этом случае важнейшим, по-видимому, следует признать эффект нелинейности вследствие корреляции между влиянием несферичности астероида и влиянием давления солнечного света, что отмечено в [46, 59, 109, 110]. С точки зрения механики это происходит, во-первых, из-за того, что несферичность астероида вызывает изменение ориентации орбиты КА, это может заметно изменить положение лучей света относительно плоскости орбиты и возмущающее ускорение от солнечного света, и наоборот. Кроме того, несферичность фигуры астероида влияет на картину тени и, вследствие этого, меняется силовое воздействие света на движение КА. Суммарное изменение орбиты поэтому не равняется сумме частных вариаций, и при совместном действии возмущений ситуация может сильно ухудшится по сравнению с вариантами частных возмущений.

Влияние несферичности обычно увеличивается с уменьшением радиуса орбиты. Влияние давления света усиливается с увеличением радиуса орбиты, когда мало влияние центрального притяжения и возмущения от несферичности. Поэтому на близких к поверхности орбитах главным будет влияние несферичности (только с учетом отмеченной корреляции этих возмущений), и для орбит с большим радиусом главным становится давление солнечного света.

При анализе совместного влияния всех трех возмущений определяется «время жизни» КА T около астероида. Для оценки этого времени T введен параметр относительного расстояния $r/R_Э$ - отношения радиуса КА к расстоянию от центра масс астероида до подспутниковой точки на поверхности астероида-эллипсоида. Так, T определяли условиями $r/R_Э \geq 1{,}1$ и $r \leq 10$ км.

4.3.1 Орбитальное движение основного КА как спутника Апофиса

Сначала исследуем движение основного КА на низкой орбите спутника Апофиса с радиусом около 500 м. В Таблице 19 приведены значения «времени жизни» КА T около Апофиса для основного КА под совместным влиянием всех трех возмущений.

Таблица 19.

«Время жизни» основного КА по орбите спутника Апофиса при разных значениях μ_A, удлинения α для случая r_0=0.5 км, e_0=0, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями.

μ_A (м^3/с^2)	α	*T* (сут.)
1.8	1.3	136
	1.5	88
	1.7	38
2.86	1.3	71
	1.5	310
	1.7	60

Для основного КА при начальном радиусе орбиты r_0=0.45-0.55 км и μ_A=1.8-2.86 м^3/с^2, α=1.3-1.7 удается обеспечить выбором начальной ориентации орбиты КА ((4.6), (4.7)) время нахождения КА вблизи Апофиса, более 3-5 недель. В конце этого времени КА обычно соударяется с поверхностью астероида. На Рис. 4.20 приведено изменение со временем полета относительного расстояния для основного КА для самой худшей ситуации, с точки зрения продолжительности полета КА, в таб.19 (μ_A=1.8 м^3/с^2, α=1.7, r_0=0.5 км).

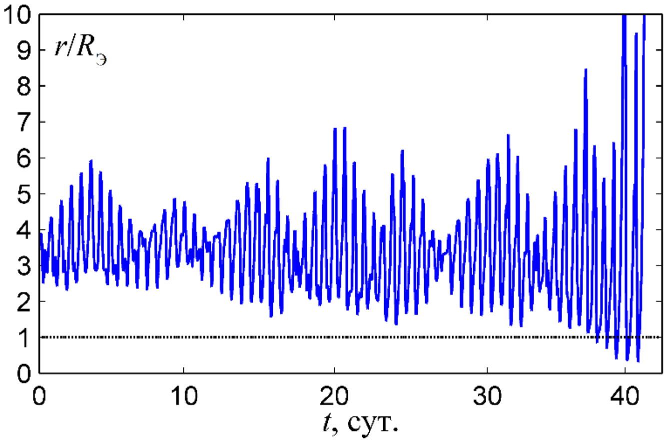


Рис.4.20. Зависимость относительного расстояния $r/R_Э$ от времени для случая μ_A=1.8 м^3/с^2, α=1.7, r_0=0.5 км, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями (основной КА).

Здесь при совместном влиянии всех трех возмущений КА движется вблизи астероида в течение ~ 38 сут. При этом плоскость орбиты КА поворачивается из-за возмущений. В конце этого времени полета плоскость орбиты примерно параллельна Солнечным лучам, поэтому сильно меняются размеры орбиты из-за влияния давления солнечного света, и КА соударяется с поверхностью астероида. На Рис.4.21 для ясности показана картина последних витков орбиты основного КА до столкновения с Апофисом во вращающейся плоскости, перпендикулярной направлению астероид-Солнце. Здесь астероид условно изображен как шар радиусом 160м.

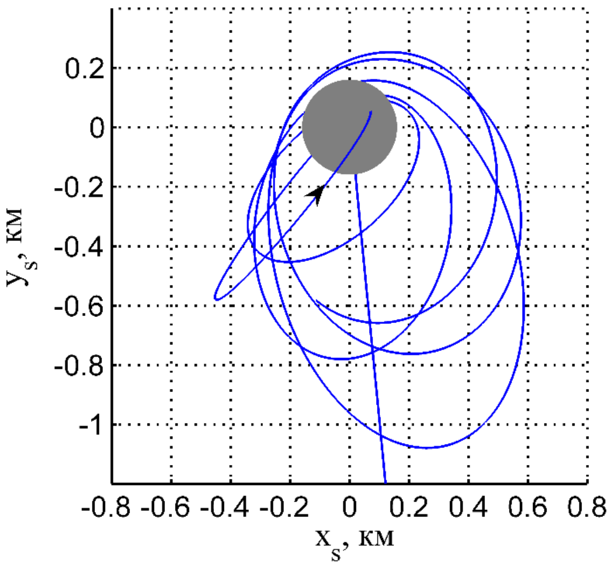


Рис.4.21. Последние витки орбиты основного КА до столкновения с Апофисом для случая μ_A=1.8 м^3/с^2, α=1.7, r_0=0.5 км, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями; вид со стороны Солнца.

Для варианта μ_A = 2.86 м^3/с^2, α=1.5 обнаружено большое (~10 месяцев) «время жизни» основного КА. По-видимому, это связано с резонансным эффектом. На Рис. 4.22 для этого варианта приведены изменения со временем относительного расстояния $r/R_Э$, текущего периода движения КА P и модуля возмущающего ускорения $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Видно, что до столкновения $|\boldsymbol{a}_2|$ в 10~100 раз больше, чем $|\boldsymbol{a}_3|$. И резкий рост $|\boldsymbol{a}_2|$ обычно соответствуют тому случаю, когда $P \approx P_A$~30час. При этом происходят орбитальные резонансы, в результате «амплитуда» изменения параметров орбиты КА увеличивается. Похожая ситуация видна на Рис. 4.22 (а) и (б) при t > 210 сут., когда КА как будто был выброшен на более высокую орбиту спутника Апофиса.

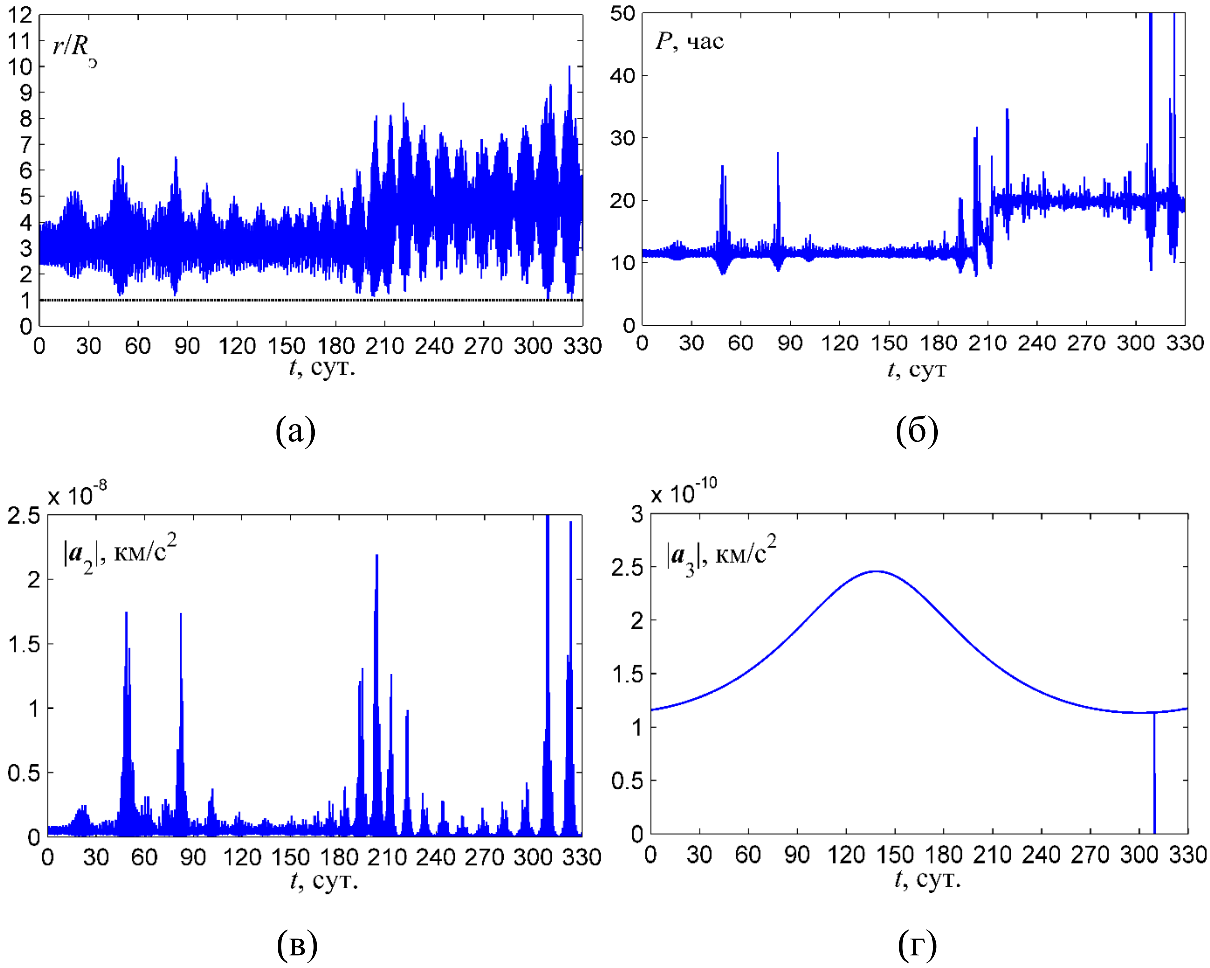


Рис.4.22. Эволюция характеристик орбиты основного КА и возмущений до столкновения с Апофисом для случая μ_A=2.86 м^3/с^2, α=1.5, r_0=0.5 км, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями: (а) относительное расстояние, (б) текущий период движения КА, (в) модуль возмущающего ускорения от несферичности астероида, (г) модуль возмущающего ускорения от ДСС.

На основе варианта с наименьшим «временем жизни» (38 сут.) - Ω_0=90°, i_0=90°, α=1.7, μ_A=1.8 м^3/с^2; r_0=0.5, e_0=0, по отдельности варьировались эксцентриситет начальной орбиты КА, период вращения астероида и масса основного КА. «Время жизни» основного КА увеличивается, если начальная орбита была с малой эллиптичностью. При e_0=0.05, КА очень близок к поверхности астероида на ~ 113-ий день, но с ней не сталкивается до 132-го дня (см. Рис.4.23). Для случая e_0=0.08 «время жизни» основного КА у Апофиса ~ 105 сут.

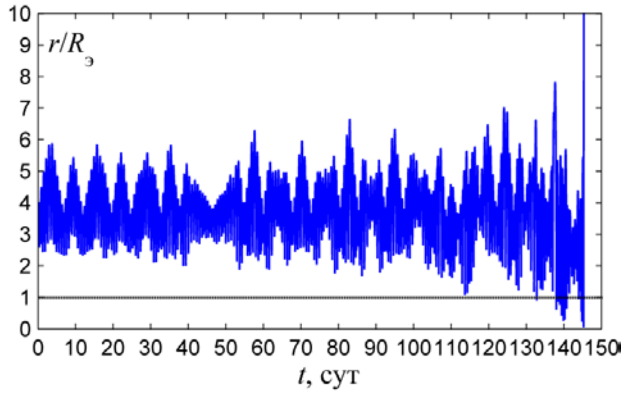


Рис.4.23. Эволюция относительного расстояния $r/R_Э$ от времени для случая μ_A=1.8 м^3/с^2, α=1.7, a_0=0.5 км, e_0=0.05, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями (основной КА).

В широких пределах менялся период вращения астероида, при P_A= 20–200 ч. В Таблице 20 приведены значения «времени жизни» основного КА около Апофиса по орбите начального радиуса 500м для варианта Ω_0=90°, i_0=90°, μ_A=1.8 м^3/с^2. Отметим, что для вариантов P_A = 30.56 ч, 50ч, 100ч, 200ч, «время жизни» основного КА уменьшается с увеличением удлинения α. Это нетрудно понять, т.к. здесь сначала главным возмущением является несферичность астероида, и она увеличивается с увеличением удлинения α. А для вариантов P_A = 20 ч, 40 ч, наоборот, «время жизни» основного КА увеличивается с увеличением удлинения α. Это связано с выше отмеченным резонансного эффекта, когда P:P_A~1:2 и P:P_A~1:1. Так, кроме P_A = 30.56 ч рассмотрены близкие периоды 30 ч, 31 ч и значение 30.4 ч, полученное в первой работе R. Behrend [82]. Основные приведенные результаты анализа при этом сохраняются.

Таблица 20.

«Время жизни» основного КА по орбите спутника Апофиса радиусом 500 м при разных значениях удлинения *α* и периода вращения астероида P_A для случая μ_A=1.8 м^3/с^2, e_0=0, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями.

P_A (ч)	α=1.3	α=1.5	α=1.7
20	93 сут	168 сут	503 сут
30.56	136 сут	88 сут	38 сут
40	93 сут	102 сут	254 сут
50	79 сут	59 сут	40 сут
100	78 сут	57 сут	47 сут
200	92 сут	59 сут	56 сут

При варьировании массы основного КА в диапазоне 540-660 кг, КА может держаться около Апофиса более месяца для этого варианта: μ_A=1.8 м^3/с^2, α=1.7, r_0=0.5 км, i_0=Ω_0=90°.

4.3.2 Анализ возможностей увеличения «времени жизни» основного КА вблизи Апофиса

а) Применение импульсных маневров для увеличения «времени жизни»

Чтобы использовать оптимальное время ожидания КА у Апофиса (~ 90-120 сут.), полученное в анализе главы 2, выполнена оценка затрат импульсов скорости для коррекции низкой орбиты. Маневры для поддержания орбиты проводятся, когда КА близок к столкновению с Апофисом. После маневров орбита КА снова становится круговой с радиусом 500 м, и плоскость орбиты перпендикулярна направлению на Солнце.

В качестве примера начальной орбиты, берем прежний вариант: Ω_0=90°, i_0=90°, α=1.7, μ_A=1.8 м^3/с^2; r_0=0.5 км со временем жизни основного КА 38сут. Маневры для поддержания орбиты проводятся примерно после 30 суток полета. В Таблице 21 приведены параметры полученной исходной орбиты (1) и конечной орбиты (4).

Таблица 21.

Параметры орбиты до и после орбитального поддержания

Орбита	r_a (км)	r_p (км)	Ω (°)	i (°)	β (°)
исходная (1)	0.8163	0.2941	99.74	106.74	22.8
конечная (4)	0.5	0.5	102.22	84	0

Для оценки рассмотрен трехимпульсный переход, Рис.4.24. Первый импульс скорости сообщается, когда КА находится в апоцентре исходной вытянутой орбиты 1 (в точке А на Рис.4.24), в результате КА переходит на круговую орбиту 2, находящуюся в той же плоскости орбиты. Точка приложения второго импульса является одной из точек пересечения орбиты 2 с плоскостью конечной орбиты 4. Здесь одним импульсом $\Delta\mathbf{V}_2$ выполняется поворот плоскости орбиты и увеличение расстояния в перицентре орбиты до конечного значения 0.5 км. В результате КА переходит на эллиптическую орбиту 3, находящуюся в плоскости конечной орбиты 4, с расстоянием в перицентре 500 м. Условно на Рис. 4.24 орбита 3 показана в прежней плоскости орбиты 1 и направление движения КА по этой орбите оставлено прежним. После приложения третьего импульса скорости (в точке С на Рис.4.24) расстояние в апоцентре уменьшается до 0.5 км, и КА переходит в конечную круговую орбиту 4. Сделаем оценку импульсов скорости.

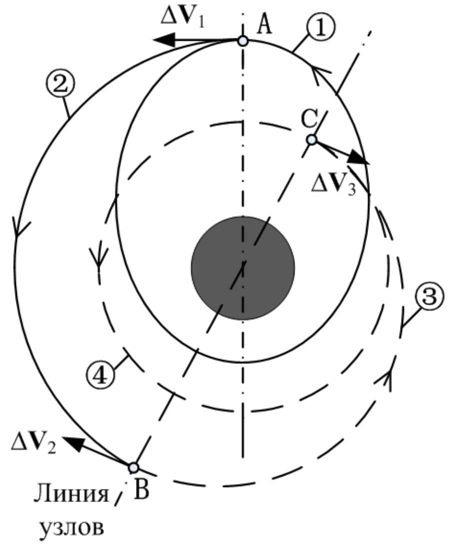


Рис.4.24. Трехимпульсный перелет КА

На орбите 1 скорость КА в апоцентре:

$$V_{A1}=\sqrt{\frac{2\mu_A}{r_{a1}}\frac{r_{p1}}{r_{a1}+r_{p1}}}\text{=3.42 см/с.}$$

На круговой орбите 2 скорость КА:

$$V_{A2}=\sqrt{\frac{\mu_A}{r_{a1}}}\text{=4.7 см/с.}$$

На круговой орбите 2 скорость КА в точке В:

$$V_{B2}=V_{A2}\text{=4.7 см/с.}$$

Величина импульса скорости $\Delta\mathbf{V}_1$ в точке А:

$$\Delta V_1=\left|\Delta\mathbf{V}_1\right|=\left|\mathbf{V}_{A2}-\mathbf{V}_{A1}\right|\text{=1.28 см/с.}$$

На орбите 3 ($r_{a3}=r_{a1}$, $r_{p3}=r_{p4}$) скорости в точках В и С:

$$V_{B3}=\sqrt{\frac{2\mu_A}{r_{a3}}\frac{r_{p3}}{r_{a3}+r_{p3}}}=4.09\text{ см/с},\ V_{C3}=\sqrt{\frac{2\mu_A}{r_{p3}}\frac{r_{a3}}{r_{a3}+r_{p3}}}=6.68\text{ см/с}.$$

Величина импульса скорости $\Delta\mathbf{V}_2$ в точке B:

$$\Delta V_2=\left|\Delta\mathbf{V}_2\right|=\left|\mathbf{V}_{B3}-\mathbf{V}_{B2}\right|=\sqrt{{V_{B3}}^2+{V_{B2}}^2-2V_{B2}V_{B3}\cos\beta}\ .$$

Берем худший случай $\cos\beta$ = -1, тогда

$$\Delta V_2=V_{B3}+V_{B2}=8.79\text{ см/с}.$$

Скорость на орбите 4 в точке C:

$$V_{C4}=\sqrt{\frac{\mu_A}{r_C}}=6\text{ см/с}.$$

Величина импульса скорости $\Delta\mathbf{V}_3$:

$$\Delta V_3=\left|\Delta\mathbf{V}_3\right|=\left|\mathbf{V}_{C3}-\mathbf{V}_{C4}\right|=0.68\text{ см/с}.$$

Тогда суммарные затраты скорости будут:

$$\Delta V_{\text{к}}=\Delta V_1+\Delta V_2+\Delta V_3=10.75\text{ см/с}.$$

Оптимизация схемы перехода может дополнительно уменьшать эти затраты. Повторяя эти маневры примерно 3-4 раза за весь полет в течение 3-4 месяцев, получим, что необходимая суммарная скорость коррекции мала, < 1 м/с.

б) Использование бóльшего радиуса орбиты спутника

Выше для главного варианта орбиты основного КА использовалась круговая орбита спутника Апофиса радиусом r_0 = 0.5 км. Дополнительно для анализа возможности увеличения времени жизни основного КА рассмотрено его движение на орбите спутника Апофиса с бóльшим радиусом. В Таблице 22 показаны результаты соответствующих расчетов. Анализ показал, что для всех рассмотренных значений μ_A и α, при r_0 = 0.9-1.2 км «время жизни» основного КА T > 120 сут., т.е. возможно использование оптимального времени ожидания без коррекции орбиты при увеличении r_0 до 0.9-1.2 км.

Таблица 22.

«Время жизни» основного КА на орбите спутника Апофиса при разных значениях μ_A, удлинения α и начального радиуса r_0 для случая e_0=0, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями.

μ_A =1.8 (м^3/с^2)										
α	1.3			1.5			1.7			
r_0 (км)	0.5 -1.2	1.3	1.5	0.5	0.6-1.2	1.3	0.5	0.6-1.2	1.3	1.5
T (сут)	> 130	110	85	88	>150	113	38	>150	110	80

μ_A =2.86 (м^3/с^2)											
α	1.3				1.5				1.7		
r_0 (км)	0.5	0.6-1.5	1.6	1.8	0.6	0.8-1.5	1.6	1.7	0.6	0.7-1.5	1.6
T (сут)	71	>150	122	95	86	>150	122	103	60	>150	122

Отметим, что нами при рассмотрении возможности увеличения времени жизни выполнен также приближенный качественный анализ точек либрации астероида. При этом за основу взята модель Белецкого В.В. [12] гантелеобразного астероида, порождающая обобщенную ограниченную круговую задачу трех тел. Полагаем здесь, что астероид состоит из двух одинаковых шарообразных частей, имеющих сферическое распределение масс. Центры масс этих шаров соединены стрежнем длины l. Гантель вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вектора кинетического момента $\boldsymbol{L}$ (по малой оси $\boldsymbol{a}$ модели эллипсоида вращения). Угол между вектором $\boldsymbol{L}$ и осью гантели взят $\pi/2$. Рассмотрены два случая: (1) два шара касаются в центре масс астероида; (2) два шара пересекаются, их суммарный объем равен объему рассмотренной модели эллипсоида вращения. Для первого случая $l = c_A$ (длина большой полуоси эллипсоида вращения). Для второго случая $l = 2c_A$-2R$_ш$, где $R_ш = c_A / \sqrt[3]{2\alpha_A{}^2}$ - радиус шара. Согласно работе Белецкого В.В. [12], условием существования треугольных точек либрации является

$$\alpha = \frac{\omega_K^2}{\omega^2} \geq \frac{1}{8}, \tag{4.8}$$

где $\omega_K^2 = \mu_A \big/ l^3$; $\omega = 2\pi \big/ P_A$. Если это условие выполняется, то существуют две треугольные точки либрации, находящиеся на прямой линии, перпендикулярной продольной оси астероида с координатами (от центра масс астероида):

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha^{2/3} - 1/4} \cdot l.$$

Принимая α_A=1.5, μ_A= [1.8; 2.86] м^3/с^2, получим, что эта модель дает две точки либрации, на расстоянии ~ 816 – 955 м от центра масс астероида. Влияние других возмущений меняет картину движения КА у этих точек. Тем не менее, видно увеличение времени жизни КА для орбит вблизи этих точек либрации.

4.3.3 Анализ возможности создания стабильной орбиты мини-спутника Апофиса для долгосрочных исследований

Одной из главных целей проекта полета КА к Апофису является создание мини-спутника с радиомаяком с длительным временем жизни около Апофиса. Важно посмотреть, существуют ли стабильные орбиты спутника около Апофиса. Здесь под словом «стабильность» понимаем, что КА не врезается в поверхность астероида и не улетает далеко от астероида.

Таблица 23.

«Время жизни» мини-спутника по орбите спутника Апофиса при разных значениях μ_A, удлинения α и начального радиуса r_0 для случая e_0=0, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями.

<table>
<tr><th>μ_A (м^3/с^2)</th><th>α</th><th>r_0 (км)</th><th>T</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1.8</td><td>1.3</td><td>0.9</td><td>~ 2 года</td></tr>
<tr><td>1.5 - 1.7</td><td>0.9</td><td>~ 1.2 года</td></tr>
<tr><td>1.3 - 1.7</td><td>1.5</td><td>~9 лет</td></tr>
<tr><td>1.3 - 1.7</td><td>2.0</td><td>~80 сут</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2.86</td><td>1.3</td><td>1.0</td><td>~ 2 года</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>1.0</td><td>~ 1.2 года</td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>1.0</td><td>~ 2 года</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1.3 - 1.7</td><td>1.5</td><td>~9 лет</td></tr>
<tr><td>2.0</td><td>~9 лет</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>~90 сут</td></tr>
</table>

В Таблице 23 приведено «время жизни» T мини-спутника около Апофиса с учетом всех трех возмущений при разных значениях μ_A, удлинения α и начального радиуса орбиты r_0 (i_0=Ω_0=90°). Интересным качественным результатом, важным и с практической точки зрения, явилось наличие «оптимального» (с точки зрения стабильности орбиты КА) начального радиуса r_0 орбиты мини-спутника, для которого, при правильном выборе начальной ориентации орбиты ((4.6), (4.7)), возмущения будут малыми, а центральное ускорение еще велико, и КА в течение довольно длительного времени остается в окрестности астероида. Для рассмотренного мини-спутника оптимальным является начальный радиус r_0~1.5 км. Тогда при всех принятых значениях удлинения и массы астероида мини-спутник движется по орбите у Апофиса в течение T~9 лет, до сближения с Землей в 2029 г, когда возмущение от Земли отбрасывает КА от астероида.

На Рис. 4.25 показано относительное расстояние для варианта: r_0 =1.5 км, i_0=Ω_0=90°, μ_A=1.8 м^3/с^2, α=1.7. За 9 лет (2020г-2029г) $r/R_Э$ ≈10, и резко увеличивается только при тесном сближении Апофиса с Землей в 2029г.

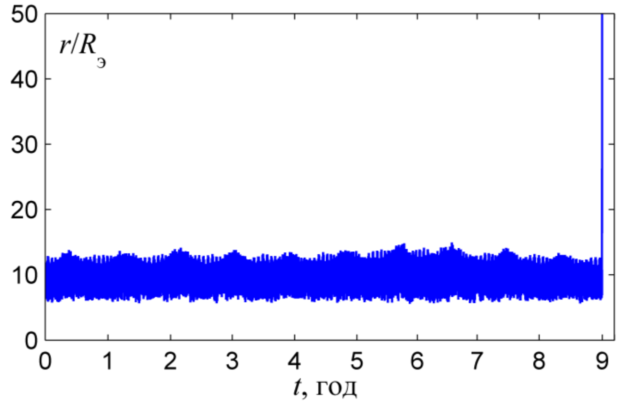


Рис.4.25. Изменение относительного расстояния в течение 2020-2029 для случая μ_A=1.8 м^3/с^2, α=1.7, r_0=1.5 км, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями.

На Рис.4.26 для этого варианта приведена картина движения мини-спутника с 2020 г. по 2029 г. во вращающейся плоскости, перпендикулярной направлению астероид-Солнце. Отлет КА от астероида 13 апреля 2029г происходит вблизи показанной на Рис.4.26 точки P_0 сближения Апофиса с Землей до расстояния ~ 38000 км. Точки P_n (n=1, 2, 3) на дуге отлета соответствуют времени полета n суток после сближения в точке P_0. Стрелки E_2, M_2 показывают на Землю и Луну для n=2, через 2 суток после отлета. На Рис.4.27 показано геоцентрическое движение КА вместе с астероидом в течение 3 суток до и после точки P_0. Здесь траектории астероида и КА близки и практически неразличимы. После сближения с Землей Апофис и КА сближаются с Луной до расстояния ~ 96 тыс. км. На Рис. 4.27 показаны также проекции Луны M_3, M_{-3} на данной плоскости XY на третьи сутки до и после отлета КА от Апофиса.

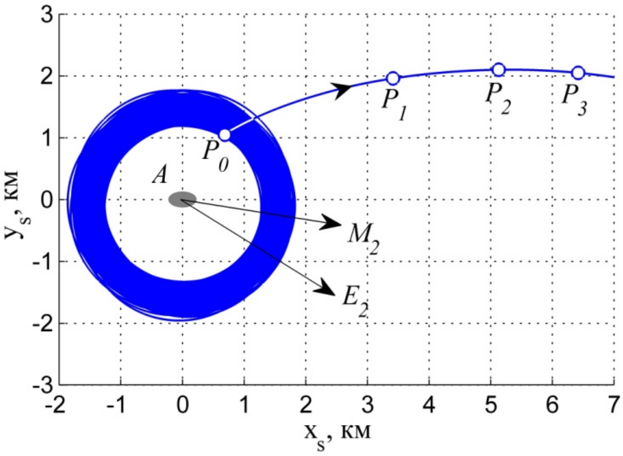


Рис.4.26. Движение мини-спутника около Апофиса в течение 2020-2029 для случая μ_A=1.8 м^3/с^2, α=1.7, r_0=1.5 км, i_0=Ω_0=90°, со всеми возмущениями.

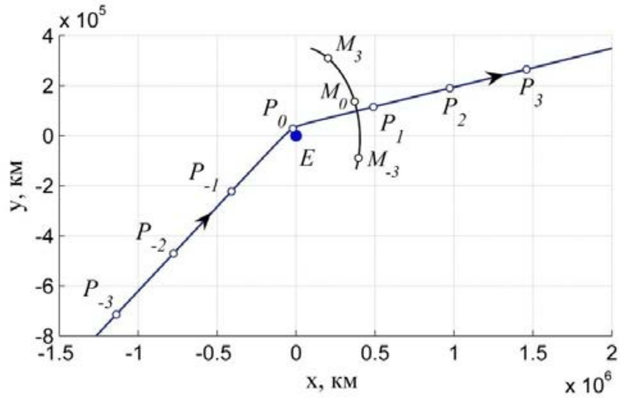


Рис.4.27. Геоцентрическая траектория КА вблизи Апофиса около точки сближения Апофиса с Землей 13.04.2029 г.; r_0=1.5 км, Ω_0= i_0=90°, α=1.7, μ_A=1.8m^3/s^2.

Результаты более подробного анализа по начальному радиусу орбиты r_0 показали, что имеет место «оптимальный» диапазон значений радиуса r_0, для которого при начальной ориентации орбиты, перпендикулярной к направлению на Солнце, мини-спутник в течение 9 лет (2020-2029) остается в окрестности астероида. При α=1.7, μ_A=1.8 м^3/с^2, для этого диапазона r_0 ≈1.3-1.6 км. Для более тяжелого астероида, μ_A=2.86 м^3/с^2, центральная сила притяжения увеличивается, и обычно время движения КА у Апофиса становится больше. В этом случае при μ_A=2.86 м^3/с^2, α=1.7 указанный диапазон радиусов орбиты КА составляет r_0≈1.4-2 км. При этом для мини-КА даже при r_0=2 км «время жизни» T~9 лет.

При увеличении радиуса орбиты r_0 сверх указанного диапазона центральное притяжение становится уже малым для удержания КА, и КА быстрее улетает от астероида. На Рис. 4.28 приведено изменение расстояния $r(t)$ для r_0=2 км при μ_A=1.8

$м^3/с^2$, α=1.7, i_0=Ω_0=90°, здесь T~ 80 суток.

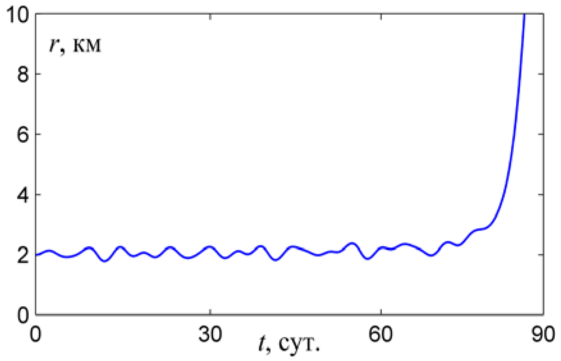


Рис.4.28. Изменение со временем расстояния от центра масс астероида до мини-КА при учете всех возмущений. Радиус начальной орбиты r_0=2 км, Ω_0=i_0=90°, α=1.7, μ_A=1.8 $м^3/s^2$.

Если же радиус орбиты уменьшается, то в некоторый момент, вследствие увеличения влияния несферичности и отмеченной корреляции с влиянием давления света, через меньшее время мини-спутник улетает от астероида или сталкивается с поверхностью астероида. Так, если r_0=0.9 км при μ_A=1.8 $м^3/с^2$, α=1.7, i_0=Ω_0=90°, то через ~1.2 года КА улетает от астероида.

При совместном действии всех возмущений достаточно точный расчет движения КА вблизи малого астероида в течение длительного времени является непростой задачей. В силу ряда причин малые вариации начальных условий движения и параметров модели иногда могут приводить к большим изменениям в движении КА. Это было отмечено в [138] и встречалось в нашей задаче. Большие и близкие значения возмущающих ускорений от несферичности и давления солнечного света и их корреляция может вызвать неустойчивость параметров движения КА. Близость орбиты КА к синхронной может привести к явлениям типа резонансных.

При средних значениях радиуса орбиты КА, около 1 км, движение мини-спутника может быть недостаточно устойчивым за счет указанных факторов, в частности, в отношении времени T (см. Рис. 4.29). Так, в окрестности r_0 = 1км, при μ_A=1.8 $м^3/с^2$ время движения мини-спутника у астероида T имеет острый максимум при изменении радиуса орбиты: при r_0 =1км это время $T \approx$ 6.4 лет, но при r_0 =0.999 км время $T \approx$ 2.1 года; а при r_0 =1.001 км время $T \approx$ 2.8 года. Аналогичный пример приведен в [138] для астероида Eros.

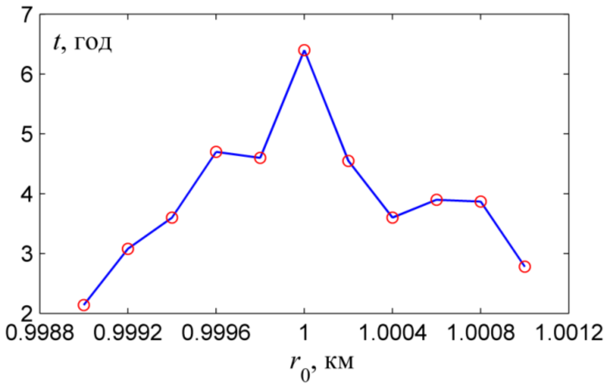


Рис.4.29. Зависимость «времени жизни» мини-спутника около Апофиса от начального радиуса r_0 в диапазоне r_0 = [0.999, 1.001] км, для варианта α=1.7, μ_A=1.8 м^3/с^2, Ω_0=i$_0$=90°.

При этом основной результат о возможности длительного, в течение нескольких лет, движения мини-спутника у астероида по орбите в зоне стабильности носит устойчивый характер, он сохраняется при вариациях параметров задачи.

Варьировался и гипотетический начальный момент t_0 движения спутника Апофиса. Результаты также подтвердились. Так, для t_0=2004 г. устойчивое движение мини-спутника сохранилось вплоть до сближения с Землей в 2029 г., т.е. в течение 25 лет. При начале движения после сближения в 2029 г., анализ в течение 10 лет, до 2039 г., также показал стабильное движение мини-спутника у астероида. На Рис.4.30 приведено изменение относительного расстояния мини-спутника при α=1.7, μ_A=1.8 м^3/с^2, P_A=30.56 ч, r_0=1.5 км для вариантов t_0= 01. 06. 2004 и t_0= 18. 04. 2029, соответственно. Начальная ориентация орбиты мини-спутника удовлетворяет условию (4.7).

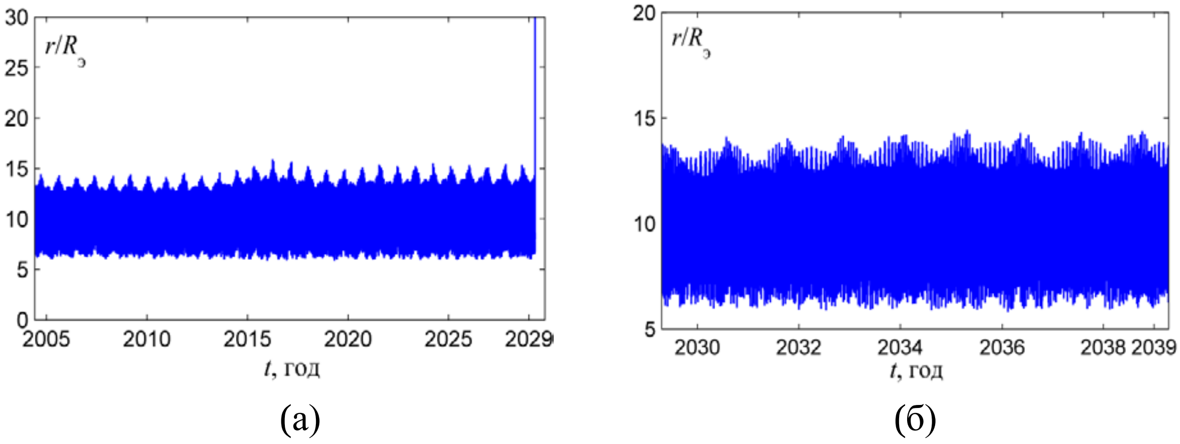


Рис.4.30. Относительное расстояние для варианта α=1.7, μ_A=1.8 м^3/с^2, P_A=30.56 ч, r_0=1.5 км: а) t_0= 01, 06, 2004 (Ω_0=93°, i_0=87°); б) t_0= 18, 04, 2029 (Ω_0=116°, i_0=79°)

4.4 Выводы по главе 4

В четвертой главе диссертационной работы с помощью разработанной модели выполнен численный анализ движения спутника в окрестности Апофиса. Выявлены рациональные («оптимальные») параметры начальной орбиты, при которых «время жизни» основного КА и мини-спутника около Апофиса будет большим. На основе полученных результатов можно сделать выводы:

1. Выполнен численный анализ движения спутника в окрестности Апофиса. Анализ показал, что главными параметрами, лимитирующими стабильность орбиты ИСА, являются начальный радиус и ориентация плоскости орбиты.
2. Выявлено, что в случае совместного влияния возмущений имеет место сильная корреляция между несферичностью астероида и давлением Солнечного света.
3. Рациональной (с точки зрения увеличения «времени жизни» спутника) является начальная ориентация плоскости орбиты КА, перпендикулярная к направлению на Солнце.
4. При рациональном выборе параметров начальной орбиты спутника КА «время жизни» основного КА на низкой орбите с начальным радиусом r_0 ~ 0.5 км составляет более месяца.
5. Можно реализовать оптимальное время ожидания КА у Апофиса (~ 90-120 сут.) увеличением начального радиуса орбиты спутника до r_0 = 0,9-1,2 км или коррекциями орбиты с очень малой необходимой скоростью (< 1 м/с).
6. Существует «оптимальный» (с точки зрения «времени жизни») начальный радиус орбиты мини-спутника, ~ 1.5 км.
7. Показана возможность создания стабильных орбит мини-спутника Апофиса с временем жизни несколько лет - до тесного сближения с Землей в 2029 г.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ДИССЕРТАЦИИ

На основании выполненного диссертационного исследования можно заключить, что в работе решена актуальная задача разработки методики построения оптимальных траекторий экспедиции КА для полета от Земли к потенциально опасному астероиду, пребывания КА у астероида и последующего возвращения КА к Земле с помощью ДУБТ, включая формирование орбиты искусственного спутника астероида. По результатам работы могут быть сделаны следующие выводы:

1. Разработана двухэтапная методика построения оптимальных по максимуму полезной массы межпланетных траекторий КА для экспедиции Земля - астероид - Земля: в центральном ньютоновском поле притяжения Солнца, в импульсной модели – на первом этапе, и при учете возмущений от небесных тел и давления солнечного света, гравитационных потерь при разгоне у Земли, с определением координат небесных тел по эфемеридам – на втором этапе. Разработан алгоритм построения сопряженных функций для случая максимизации полезной массы, с учетом различия скоростей истечения газов у двигательных установок и наличия отделения масс.
2. С помощью разработанной методики построены оптимальные по максимуму полезной массы межпланетные траектории КА для экспедиции Земля - Апофис - Земля при выведении с помощью РН «Союз-ФГ», «Союз-2.1б» и «Зенит», при разгоне у Земли с помощью разгонного блока «Фрегат» и при дальнейших маневрах с помощью специальной ДУ большой тяги - для перелета в течение 2019-2022 гг. Показано, что существует принципиальная возможность реализации космической экспедиции Земля-Апофис-Земля с использованием обычных двигателей большой тяги, РН «Союз-ФГ», «Союз-2.1б», «Зенит» и РБ «Фрегат».
3. Выявлено, что для оптимальных межпланетных траекторий экспедиции возврат к Земле происходит у восходящего узла орбиты Апофиса относительно эклиптики. Определено оптимальное время ожидания КА у Апофиса. Установлено, что нужно не более трех импульсов скорости для реализации оптимальной экспедиции Земля-Апофис-Земля при полете в 2019-2022 гг.

4. Разработана методика анализа характеристик орбитального движения спутника астероида с учетом возмущений от небесных тел, несферичности астероида как вытянутого эллипсоида вращения, давления солнечного света и собственного вращения астероида вокруг малой оси.
5. Определены характеристики орбит движения основного КА и мини-спутника вокруг Апофиса. Выявлены параметры начальной круговой орбиты (ориентация и радиус), при которых «время жизни» спутника Апофиса будет большим: более месяца для основного КА на низкой орбите и несколько лет, до сближения с Землей в 2029 г., для мини-спутника. При этом рациональной (с точки зрения увеличения «времени жизни» спутника) является начальная ориентация плоскости орбиты КА, перпендикулярная к направлению на Солнце.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА-ЛАМБЕРТА В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

А.1 Уравнения для задачи Эйлера-Ламберта и переменная итераций

Предположим, что КА движется в центральном ньютоновском гравитационном поле от точки $P_1(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ до точки $P_2(\boldsymbol{r}_2, t_2)$. Надо найти траекторию перелета КА между точками P_1, P_2 с заданной угловой дальностью u_{12} за время $\Delta t = t_2 - t_1$. Используем вариант решения этой задачи на основе метода Иццо [102].

Для эллиптической орбиты, на основе уравнения Кеплера, получаем функцию времени перелета

$$\sqrt{\mu}\left(t_2 - t_1\right) = a^{3/2}\left[E_2 - e\sin E_2 - (E_1 - e\sin E_1) + 2M\pi\right] \tag{А.1.1}$$

где μ – гравитационный параметр центрального тела, a – большая полуось орбиты перелета, e – эксцентриситет, E_1, E_2 – эксцентрические аномалии, соответствующие точкам P_1, P_2, M – число полных витков движения КА в течение времени Δt вокруг центра притяжения.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = e\cos\frac{E_1+E_2}{2}, \quad 0 \le \alpha+\beta \le 2\pi \\ &\alpha-\beta = E_2 - E_1 - 2\mathrm{M}\pi, \quad 0 \le \alpha-\beta \le 2\pi \end{aligned}. \tag{А.1.2}$$

Тогда уравнение (А.1.1) перепишется следующим образом:

$$\sqrt{\mu}\left(t_2 - t_1\right) = a^{3/2}\left(\left(\alpha - \sin\alpha\right) - \left(\beta - \sin\beta\right) + 2M\pi\right). \tag{А.1.3}$$

Напишем квадрат расстояния между точками P_1 и P_2

$$c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos u_{12}. \tag{А.1.4}$$

Учтем, что

$$r_1 = a(1 - e\cos E_1),\, r_2 = a(1 - e\cos E_2). \tag{А.1.5}$$

Преобразуя уравнения (А.1.4), (А.1.5) с учетом (А.1.2), получаем соотношения

$$\begin{aligned} &\cos\beta - \cos\alpha = c/a, \\ &\cos\beta + \cos\alpha = 2 - \frac{r_1 + r_2}{a}. \end{aligned} \tag{А.1.6}$$

Отсюда можно получить выражения:

$$\frac{s}{2a}=\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad \frac{s-c}{2a}=\sin^2\frac{\beta}{2}, \tag{A.1.7}$$

где обозначено s=(r_1+ r_2+c)/2.

Из уравнения (A.1.4) также получим выражение:

$$\cos^2\frac{u_{12}}{2}=\frac{(r_1+r_2+\mathrm{c})(r_1+r_2-\mathrm{c})}{4r_1r_2}.$$

Подставляя сюда (A.1.6), (A.1.7), получим:

$$\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{u_{12}}{2}=2a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \tag{A.1.8}$$

Рассмотрим параметр λ:

$$\lambda=\frac{\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{u_{12}}{2}}{s}.$$

Подставляя сюда выражения (A.1.7) и (A.1.8), получим

$$\lambda^2=\frac{s-c}{s}, \tag{A.1.9}$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\lambda\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{A.1.10}$$

Параметр $\lambda\in[-1,1]$: $\lambda<0$ при $u_{12}\in[0,\pi]$; $\lambda>0$ при $u_{12}\in[\pi,2\pi]$.

Введем обозначение для безразмерного времени перелета T:

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a_m^3}}(t_2-t_1)=\sqrt{2\frac{\mu}{s^3}}(t_2-t_1), \tag{A.1.11}$$

где a_m=s/2 – большая полуось эллипса минимальной энергии [15]. Из уравнения (A.1.3) можно получить выражения для безразмерного времени перелета:

$$T\sin^3\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{(\alpha-\beta)}{2}-\frac{(\sin\alpha-\sin\beta)}{2}+M\pi\right). \tag{A.1.12}$$

Аналогичные выкладки проведены и для гиперболического случая. При этом вместо (A.1.2), введем обозначения:

$$\mathrm{ch}\frac{\alpha+\beta}{2}=e\,\mathrm{ch}\frac{H_1+H_2}{2},\quad \alpha+\beta\ge 0,$$

$$\alpha - \beta = H_2 - H_1, \quad 0 \le \alpha - \beta \le 2\pi,$$

где H_1, H_2 – гиперболические аномалии (Гудерманианы), соответствующие точкам P_1, P_2. Тогда получим:

$$\frac{s}{2a} = -\mathrm{sh}^2\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{s-c}{2a} = -\mathrm{sh}^2\frac{\beta}{2}, \quad \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{u_{12}}{2} = -2a\,\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}\mathrm{sh}\frac{\beta}{2}, \quad \mathrm{sh}\frac{\beta}{2} = \lambda\,\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2},$$

$$T\,\mathrm{sh}^3\frac{\alpha}{2} = \frac{(\beta-\alpha)}{2} - \frac{(\mathrm{sh}\,\beta - \mathrm{sh}\,\alpha)}{2}. \quad \text{(A.1.13)}$$

Введем обозначения:

$$x = \begin{cases} \cos\dfrac{\alpha}{2} & \text{(эллипс)} \\ \mathrm{ch}\dfrac{\alpha}{2} & \text{(гипербола)} \end{cases}, \quad y = \begin{cases} \cos\dfrac{\beta}{2} & \text{(эллипс)} \\ \mathrm{ch}\dfrac{\beta}{2} & \text{(гипербола)} \end{cases}. \quad \text{(A.1.14)}$$

Имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ \sqrt{x^2-1} = \mathrm{sh}\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda\sqrt{1-x^2} = \sin\dfrac{\beta}{2} \\ \lambda\sqrt{x^2-1} = \mathrm{sh}\dfrac{\beta}{2} \end{cases}, \quad y = \sqrt{1-\lambda^2(1-x^2)}. \quad \text{(A.1.15)}$$

Используя эти соотношения, можно связать вспомогательный угол $\psi = (\alpha-\beta)/2$ и переменные x, y:

$$\begin{matrix} \cos\psi = xy + \lambda(1-x^2) \\ \mathrm{ch}\psi = xy - \lambda(x^2-1) \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \sin\psi = (y - x\lambda)\sqrt{1-x^2} \\ \mathrm{sh}\psi = (y - x\lambda)\sqrt{x^2-1} \end{matrix}. \quad \text{(A.1.16)}$$

Использование новых величин x, y позволяет получить следующее уравнение времени полета, справедливое во всех случаях (парабола, гипербола и эллипс):

$$T = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\psi + M\pi}{\sqrt{|1-x^2|}} - x + \lambda y\right). \quad \text{(A.1.17)}$$

Здесь мы должны взять $M = 0$ в случаях гиперболического и параболического движения. Учитывая ограничения на α, из определения x можно видеть, что $x \in [-1, +\infty]$. Для эллиптической орбиты $x<1$, для гиперболической орбиты $x>1$, для параболической орбиты $x=1$. Значение $x = 0$ соответствует эллипсу минимальной энергии. Так, задача свелась к разрешению уравнения вида T=T(x).

Для дальнейшего необходимо значение T (А.1.17) при x = 0. Вычислим его:

$$T(x=0)=T_0=\arccos\lambda+\lambda\sqrt{1-\lambda^2}+M\pi=T_{00}+M\pi, \tag{А.1.18}$$

где T_0 – значение T для случая x = 0, T_{00} – для случая x = 0, M=0.

При вычислении значения T (А.1.17) для случая M=0, возникает потеря точности, когда $x \approx 1$. В этом случае вычисляем T по формулам, представленным в работе Р. Бэттина [81]:

$$\begin{aligned}&\eta=y-\lambda x,\\&S_1=\frac{1}{2}\left(1-\lambda-x\eta\right),\\&Q=\frac{4}{3}\,{}_1F_2\left(3,1,\frac{5}{2},S_1\right),\\&2T=\eta^3Q+4\lambda\eta,\end{aligned} \tag{А.1.19}$$

где ${}_1F_2$ (a, b, c, d) - Гауссовская или обычная гипергеометрическая функция. Подставляя x = 1, y = 1 в уравнение (А.1.19), получаем следующее выражение:

$$T(x=1)=T_1=\frac{2}{3}(1-\lambda^3)\,. \tag{А.1.20}$$

Можно также получить следующие формулы для производных от времени перелета:

$$\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)\frac{dT}{dx}=3Tx-2+2\lambda^3\frac{x}{y}\\&\left(1-x^2\right)\frac{d^2T}{dx^2}=3T+5x\frac{dT}{dx}+2\left(1-\lambda^2\right)\frac{\lambda^2}{y^3}\\&\left(1-x^2\right)\frac{d^3T}{dx^3}=7x\frac{d^2T}{dx^2}+8\frac{dT}{dx}-6\left(1-\lambda^2\right)\lambda^5\frac{x}{y^5}\end{aligned}\quad. \tag{А.1.21}$$

Для параболы (x=1):

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=1}=\frac{2}{5}\left(\lambda^5-1\right). \tag{А.1.22}$$

А.2 Решение задачи Эйлера-Ламберта

Опишем процедуру решения задачи Эйлера-Ламберта, согласно [102]. Заданы исходные параметры $\boldsymbol{r}_1$ = [r_{11}, r_{12}, r_{13}], $\boldsymbol{r}_2$ = [r_{21}, r_{22}, r_{23}], Δt и μ. Вычислим квадрат параметра λ по (А.1.9), и далее:

$$\lambda = \begin{cases} \sqrt{\lambda^2} & (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} > 0) \\ -\sqrt{\lambda^2} & (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} < 0) \end{cases}. \qquad (А.2.1)$$

Преобразуем время перелета Δt в безразмерный вид T^* по (А.1.11).

Приступим к нахождению параметров x, y при полученных λ и T^*. Сначала следует определить $M_{\max}$ – максимальное число полных витков движения КА в течение времени T^* движения вокруг центра притяжения. Для начала за $M_{\max(1)}$ берем целую часть T^*/π. Определяется T_0 по (А.1.18) для $M_{\max(1)}$. Если выполняются условия $T^*<T_0$ и $M_{\max(1)} > 0$, то итерация для нахождения $T_{\min}$ при данном значения $M_{\max(1)}$ начинается с $x = 0$, $T= T_0$ по схеме Halley:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}, \; n=0,\, 1\,, 2,\, \ldots \qquad (А.2.2)$$

В этом случае функция $f(x)$ = dT/dt, и $f(x)$ и ее производные $f'(x)$, $f''(x)$ могут быть определены по (А.1.21), (А.1.22), а $T(x_n)$ вычисляется по (А.1.17), (А.1.19). Итерационная процедура продолжается до тех пор, пока не будет выполнено:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \text{ (допустимая погрешность).}$$

Таким образом, получается $T_{\min}$, соответствующее $M_{\max(1)}$. Если $T_{\min}< T^*$, то $M_{\max} = M_{\max(1)}$, а если $T_{\min} > T^*$, то $M_{\max} = M_{\max(1)}$-1.

Для решения уравнения $f(x) = T(x) - T^* = 0$ используется итерационная схема Householder:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{f'^2(x_n) - f(x_n)f''^2(x_n)/2}{f'(x_n)\left(f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)\right) + f'''(x_n)f'^2(x_n)/6} \qquad (А.2.3)$$

где $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ означают соответствующие производные.

В случае $M_{\max} = 0$ начальное приближение x_0 определяется так:

$$\begin{aligned} x_0 &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{2}{3}} - 1, && T \ge T_0 \\ x_0 &= 2\frac{T_1}{T} - 1, && T < T_1 \quad, \\ x_0 &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\log_2(\frac{T_1}{T})} - 1, && T_0 < T < T_1 \end{aligned} \qquad (А.2.4)$$

где T_1 определяется по (А.1.20).

В случае $M_{max} > 0$, если решение существует, то возможны два значения x, и, следовательно, нам понадобятся два начального приближения x_{01}, x_{02}:

$$x_{01} = \frac{(\frac{M\pi + \pi}{8T})^{\frac{2}{3}} - 1}{(\frac{M\pi + \pi}{8T})^{\frac{2}{3}} + 1}, \qquad x_{02} = \frac{(\frac{8T}{M\pi})^{\frac{2}{3}} - 1}{(\frac{8T}{M\pi})^{\frac{2}{3}} + 1}, \tag{А.2.5}$$

где $M = M_{max}$.

Расчеты значений x_n для случая $M_{max} = 0$ и x_{1n}, x_{2n} для случая $M_{max} > 0$ продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon \text{ (допустимая погрешность).}$$

После этого получим значение y по (А.1.15).

А.3 Восстановление параметров орбиты по решению уравнения Эйлера-Ламберта

Векторы скорости КА в моменты времени t_1, t_2 определяются методом, предложенным Гудингом [92].

Определим основные орты для скоростей КА $\boldsymbol{V}_1(t_1)$, $\boldsymbol{V}_2(t_2)$:

$$r_1 = |\boldsymbol{r}_1|,\ r_2 = |\boldsymbol{r}_2|;$$

$$\mathbf{i}_{r,1} = \boldsymbol{r}_1 / r_1,\ \mathbf{i}_{r,2} = \boldsymbol{r}_2 / r_2,\ \mathbf{i}_h = \mathbf{i}_{r,1} \times \mathbf{i}_{r,2};$$

$$\mathbf{i}_{t,1} = \begin{cases} \mathbf{i}_h \times \mathbf{i}_{r,1} & (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} > 0) \\ \mathbf{i}_{r,1} \times \mathbf{i}_h & (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} < 0) \end{cases}, \qquad \mathbf{i}_{t,2} = \begin{cases} \mathbf{i}_h \times \mathbf{i}_{r,2} & (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} > 0) \\ \mathbf{i}_{r,2} \times \mathbf{i}_h & (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} < 0) \end{cases}.$$

Здесь $\mathbf{i}_{r,1}$, $\mathbf{i}_{r,2}$ – радиальные орты вдоль $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\mathbf{i}_h$ – орт вдоль нормали к плоскости орбиты перелета, $\mathbf{i}_{t,1}$, $\mathbf{i}_{t,2}$ – трансверсальные орты.

Вычислим некоторые константные параметры:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\mu s}{2}}, \quad \rho = \frac{r_1 - r_2}{c}, \quad \sigma = \sqrt{(1 - \rho^2)}\ .$$

Для каждого найденного решения x (и y) вычисляем радиальные и трансверсальные компоненты скоростей $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, используя следующие формулы:

$$\begin{aligned}
V_{r,1} &= \gamma\left[\left(\lambda y - x\right) - \rho\left(\lambda y + x\right)\right] / r_1 \\
V_{r,2} &= -\gamma\left[\left(\lambda y - x\right) + \rho\left(\lambda y + x\right)\right] / r_2 \\
V_{t,1} &= \gamma\sigma(y + \lambda x) / r_1 \\
V_{t,2} &= \gamma\sigma(y + \lambda x) / r_2
\end{aligned}.$$

Тогда скорости $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ определяются

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1 &= V_{r,1}\mathbf{i}_{r,1} + V_{t,1}\mathbf{i}_{t,1} \\
\mathbf{V}_2 &= V_{r,2}\mathbf{i}_{r,2} + V_{t,2}\mathbf{i}_{t,2}
\end{aligned}.$$

Далее элементы орбиты могут быть получены с помощью ($\boldsymbol{r}_1$,$\boldsymbol{V}_1$) или ($\boldsymbol{r}_2$,$\boldsymbol{V}_2$). Этот метод изложен в работах по небесной механике и теории полета КА, например, в [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аббасов М.Э. Методы оптимизации: Учеб. пособие. СПб.: Издательство "ВВМ", 2014. 64 с.
2. Абалакин В.К. К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида // Бюлл. ИТА АН СССР. 1957, т. 6, № 8. С. 543-549.
3. Абалакин В.К. О движении материальной точки внутри неоднородного гравитирующего трехосного эллипсоида // Бюлл. ИТА АН СССР. 1959, т. 7, № 5. С. 327-353.
4. Автоматические космические аппараты для фундаментальных и прикладных научных исследований / Ред. Полищука Г.М. и Пичхадзе К.М. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 660 с.
5. Аксёнов Е.П. 1960. О периодических движениях частицы в поле тяготения вращающегося тела // Вестник Моск. Ун. Физ. астрон. 4. С. 86-95.
6. Алексеев К.Б. Бебенин Г.Г., Ярошевский В.А. Маневрирование космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1970. 416 с.
7. Антонов В.А., Холшевников К.В. О возможности использования классического представления гравитационного потенциала вблизи поверхности планеты // Науч. пробл. авиации и космонавт.: Ист. и современность. М., 1985. С. 162-165.
8. Астероидо-кометная опасность / Под ред. А.Г. Сокольского. С.-Петербург, изд. ИТА РАН, 1996. 244 с.
9. Астероидо-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра / Под ред. Б.М. Шустова, Л.В. Рыхловой. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2010. 384 с. ISBN 978-5-9221-1241-3.
10. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: Учеб. Для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 440 с.
11. Балашов В.В. Исследование оптимальных перелетов к Марсу с возвращением в атмосферу Земли с заданной скоростью // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. 2, № 1. С. 82-91.
12. Белецкий В.В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // Космич. исслед., 2007, т. 45, № 5. С. 435–442.

13. Белецкий В.В., Родников А.В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Космические исследования, 2008, т. 46, № 1. С. 42–50.
14. Белецкий В.В., Родников А.В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Нелинейная динамика, 2011,т. 7, № 3. С. 569–576.
15. Бэттин Р. Наведение в космосе. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1966. 448 с.
16. Бычков А.Д., Ивашкин В.В. Проектно-баллистический анализ создания многоразовой транспортной системы Земля-Луна-Земля на основе ядерного ракетного двигателя // Космонавтика и ракетостроение. 2014, № 1. С. 68 – 76.
17. Голдстоун Г., Пул Ч., Сафко Дж. Классическая механика. 3-е изд. Перевод с англ. Под ред. Новокшонова С.Г. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований. 2012.
18. Григорьев И.С., Заплетин М.П., Проблема построения экстремалей Понтрягина в задачах оптимизации перелетов космического аппарата к астероидам // Автомат. и телемех., 2009, № 9. С. 69–84.
19. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 702 с.
20. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 799 с.
21. Дубошин Г.Н. (ред.) Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1976. 864 с.
22. Егоров В.А. О некоторых задачах динамики полета к Луне. – Успехи физических наук, т. 63, вып. 1а. 1957. С. 73-117.
23. Егоров В.А. Пространственная задача достижения Луны. М.: Наука, 1965. 224 с.
24. Егоров В.А., Гусев Л.И. Динамика перелетов между Землей и Луной. М.: Наука, 1980. 544 с.
25. Ерошкин Г. И. Разложение внешнего потенциала притяжения однородного трехосного эллипсоида в ряд по сферическим функциям // Бюлл. ИТА АН СССР. 1986, т. 15, № 10. С. 575-579.
26. Ефимов Г.Б. Оптимальный разгон в центральном поле до гиперболических

скоростей // Космические исследования, 1970, т.8, №1. С. 26-47.
27. Журавлёв С.Г. Стационарные и периодические движения в поле притяжения вращающегося трехосного эллипсоида // Прикл. матем. мех. 1980, т. 44, № 3. С. 387-394.
28. Журавлёв С.Г. Метод исследования острорезонансных задач небесной механики и космодинамики. т.1. Орбитальное движение. Архангельск. АГТУ. 2000.
29. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2004.
30. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975. 392 с.
31. Ивашкин В.В., Райкунов Г.Г. Оптимизация двухимпульсного маневра встречи двух аппаратов на круговой орбите при наличии ограничений // Космические исследования, 1991, т. 29, № 3. С. 352-366.
32. Ивашкин В.В., Смирнов В.В. Качественный анализ некоторых методов уменьшения астероидной опасности для Земли // Астрономический вестник, 1993, т. 27, № 6. С. 46-54.
33. Ивашкин В.В. Модель орбитального движения КА вблизи ядра кометы. I // Ордена Ленина Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН. Препринт № 60, 1998. 32 с.
34. Ивашкин В.В., Стихно К.А. О предотвращении возможного столкновения астероида Апофис с Землей // Астрономический вестник. 2009. Т. 43. № 6. С. 502-516.
35. Ивашкин В.В., Крылов И.В., Лан А. Оптимальные траектории для экспедиции КА к астероиду Апофис с возвращением к Земле // Астрономический вестник. 2013. Т. 47. № 4. С. 361-372.
36. Ивашкин В.В., Лан А. Определение и анализ оптимальных космических траекторий для организации экспедиции Земля – Апофис – Земля с применением двигательных установок большой тяги // Космонавтика и ракетостроение. 2017. Вып 5 (98). С. 63-71.
37. Ивашкин В.В., Лан А. Анализ оптимальности траекторий экспедиции

Земля-астероид-Земля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 113, 25 c.doi:10.20948/prepr-2017-113.
URL: http://library.keldysh/ru/preprint/asp?id=2017-113

38. Ивашкин В.В., Лан А. Построение траекторий космического аппарата для экспедиции Земля-астероид-Земля с учетом выбора орбит пребывания у астероида // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 90, 27 с. doi: 10.20948/prepr-2018-90.
URL: http://library.keldysh/ru/preprint/asp?id=2018-90
39. Ивашкин В.В., Лан А. Анализ орбитального движения космического аппарата вокруг астероида Апофис // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 4. С. 403-407.
40. Ивашкин В.В., Лан А. Анализ орбитального движения спутника астероида Апофис // Космические исследования. 2017. Т. 55, № 4. С. 268-277.
41. Ивашкин В.В. Лунные траектории. Материалы лекций по курсу «Математическое моделирование в баллистике». Кафедра СМ-3 «Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов», МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016.
42. Ивашкин В.В. Межпланетные траекторий КА. Материалы лекций по курсу «Математическое моделирование в баллистике». Кафедра СМ-3 «Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов», МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2017.
43. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976. 744 с.
44. Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М. Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелётов. М: МАИ, 2015. 216 с.
45. Кубасов В.Н., Дашков А.А. Межпланетные полеты. М.: Машиностроение, 1979. 272 с.
46. Кузнецов Э.Д., Соколов Л.Л. Нелинейная эволюция орбиты спутника-баллона // Космические исследования, 2001, т. 39, № 6. С. 648-656.
47. Лан Аньци. Анализ космических траекторий для экспедиции Земля–Апофис–Земля и движения космического аппарата вокруг астероида

Апофис. Инженерный журнал: наука и инновации, 2017. № 7(67). С. 1-19.

48. Лан Аньци, Ивашкин В.В. Исследование характеристик траекторий космического аппарата для экспедиции Земля–Апофис–Земля // Экологический Вестник Научных Центров ЧЭС. 2017. №4 . Вып. 2. С. 93–101.
49. Левантовский В.И., Механика космического полета в элементарном изложении, 3-е изд., дополн. и переработ. М.: Наука. Гл. ред. Физ. – мат. лит., 1980. 512 с.
50. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. № 8. С. 5–45.
51. Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л.С. [и др.], М.: Наука, 1983. 393 с.
52. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета / под ред. Дж. Лейтмана. М.: Наука. Гл. ред. Физ. – мат. лит., 1965. 540 с.
53. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука. Гл. ред. Физ. – мат. лит., 1971. 424 с.
54. Новоселов В.С. Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. Л., 1972, 317 с.
55. Основы теории полета космических аппаратов / под ред. Г.С. Нариманова, М.К. Тихонравова. М.: Машиностроение, 1972. 608 с.
56. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета: Учеб. Пособие. М.: Наука. Гл. ред. Физ. – мат. лит., 1990. 448с.
57. Поль В.Г. Оценка параметров динамики движения КА вблизи малого небесного тела. // Вестник «НПО им. С.А. Лавочкина», 2009. № 2. С. 53-62.
58. Поль В.Г., Симонов А.В., Суханов К. Г. О стабильности орбиты спутника малого небесного тела, возмущаемого внешним телом // Вестник ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина», 2010. №2. С. 17-23.
59. Поляхова Е.Н. Световое давление и движение спутников Земли. Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР. 1963. Т. IX. № 1(104). С. 15–45.
60. Пономарев В.М. Теория управления движением космических аппаратов. М.: Наука, 1965. 455 с.

61. Родников А.В. Моделирование динамики космической станции в окрестности астероида // Математическое моделирование и численные методы, 2016, № 2(10). С. 55–68.
62. Суханов А.А. Астродинамика. Серия «Механика, управление, информатика». М.: ИКИ РАН, 2010. 204 с.
63. Сенцов Ю.И., Сорокин С.В. Сравнительный анализ энергетической эффективности некоторых методов борьбы с астероидами // Вестник НПО им. Лавочкина. 2013. № 4 (20). С. 57-60.
64. Соболь И.М., Статинков Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многим критериями. М.: Наука, 1981. 110 с.
65. Соколов Л.Л., Башаков А.А., Борисова Т.П. и др. Траектории соударения астероида Апофис с Землей в XXI веке // Астрономический вестник. 2012. Т. 46. № 4. С. 311-320.
66. Соловьев Ц.В. Прогнозирование межпланетных полетов / Ц.В. Соловьев, Е.В. Тарасов. М.: Машиностроение, 1973. 400 с.
67. Угроза с неба: рок или случайность? / Под ред. А.А. Боярчука. М.: Космосинформ, 1999. 220 с. ISBN 5-900242-34-х.
68. Хохулин В.С., Чумаков В.А. Проектирование космических разгонных блоков с ЖРД. Учебное пособие для курсового и дипломного проектирования. М.: Изд-во МАИ , 2000. 72 с.
69. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, Физматлит. 1965. 540 с.
70. Энеев Т.М., Егоров В.А., Ефимов Г.Б., Ахметшин Р.З., Смирнов В.В. Траектории перелетов к астероидам и кометам КА с ЭРД. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1994. № 34. 26 с.
71. Эрике К. Космический полет, т. I. Окружающие условия и небесная механика. М.: Физматгиз, 1963. 586 с.
72. Эрике К. Космический полет, т. II. Динамика, ч. I (главы 1 4). М.: Наука, 1969. 571 с.
73. Эрике К. Космический полет, т. II. Динамика, ч. II (главы 5 9). М.: Наука, 1970. 744 с.

74. Эскобал П.Р. Методы определения орбит. Перевод с англ. М.: Мир, 1970. 476 с.
75. Эскобал П.Р. Методы астродинамики. Перевод с англ. М.: Мир, 1971. 341 с.
76. Alshaery A.A. An Enhanced Solution of the Universal Lambert's Problem // Journal of American Science. 2012. Vol. 8, № 12. Pp. 721-724.
77. Arora N., Russell R.: A fast and robust multiple revolution Lambert algorithm using a cosine transformation // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 2013. Paper AAS 13–728.
78. Ajluni T, Everett D, Linn T, et al. OSIRIS-REx, returning the asteroid sample [C] // Aerospace Conference, IEEE, 2015. Pp. 1-15.
79. Atkins K L, Brownlee D E, Duxbury T, et al. STARDUST: Discovery's InterStellar dust and cometary sample return mission [C] // Aerospace Conference, 1997. Proceedings, IEEE, 1997, 4. Pp. 229-245.
80. Bate R.R., Mueller D.D., White J.E. Fundamentals of Astrodynamics. Dover publications, Inc. New York. 1971.
81. Battin R.H. An Introduction to the Mathematics and Methods Astrodynamics. Revised Edition, AIAA Education Series, New York, 1999, 799 p. http://dx.doi.org/10.2514/4.861543
82. Behrend, S. 2005, Asteroids and comets rotation curves, CdR, Observatoire de Genève, http://obswww.unige.ch/~behrend/page_cou.html, 2005.
83. Brownlee D.E., Tsou P., Anderson J. D., et al. Stardust: Comet and interstellar dust sample return mission // Journal of geophysical research. Vol. 108, No. E10, 8111, doi:10.1029/2003JE002087, 2003.
84. Broyden, C.G. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms // Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications. 1970. Vol. 6. Pp. 76–90, doi:10.1093/imamat/6.1.76.
85. Chauvineau B., Farinella P., Mignard F. Planar orbits about a triaxial body: Application to asteroidal satellites. Icarus, 1993, 105(2). Pp. 370-384.
86. Dachwald B. Optimization of solar sail interplanetary trajectories using evolutionary neurocontrol // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, Vol. 27, No. 1. Pp. 66-72.
87. Farquhar R, Kawaguchi J, Russell C, et al. Spacecraft Exploration of Asteroids: The

2001 Perspective[C] // Ed. Willam F. et al. Asteroids III. Tucson, AZ: Univ. Arizona Press, 2002. Pp. 367-376.

88. Fletcher, R.A New Approach to Variable Metric Algorithms // Computer Journal, 1970. 13 (3). Pp. 317–322. doi:10.1093/comjnl/13.3.317

89. Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H. The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421 // Memorandum IOM 343R-08-003, 31-March 2008. Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology.

90. Glandorf D.R. Lagrange multipliers and the state transition matrix for coasting arcs // AIAA Journal, 1968, Vol. 7, No. 2. Pp. 363-365.

91. Goldfarb, D., A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means // Mathematics of Computation, 1970. 24 (109). Pp. 23–26. doi:10.1090/S0025-5718-1970-0258249-6

92. Gooding R.H. A procedure for the solution of Lambert's orbital boundary-value problem // Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy. 1990. Vol. 48, № 2. Pp. 145-165.

93. Gobetz F.W., Doll J.R. A Survey of Impulsive Trajectories. AIAA J., 1969, Vol. 7, No. 5. Pp. 801-834.

94. Hohmann W.F. Die Erreichbarkeit der Himmelskörper. Untersuchungen über das Raumfahrtproblem. München und Berlin, Druck und Verlag R.Oldenbourg. 1925. Перевод: Пионеры ракетной техники. Гансвиндт. Годдард. Эсно-Пельтри. Оберт. Гоман. Избранные труды (1891-1938). М.: Наука. 1977. С. 525-607.

95. Howard D. Curtis. Orbital Mechanics for Engineering Students. Butterworth – Heinemann - Elsevier, second edition, 2010.

96. W. Hu and D. J. Scheeres. Spacecraft motion about slowly rotating asteroids. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 25(4), July-August 2002.

97. W. Hu and D. J. Scheeres. Numerical determination of stability regions for orbital motion in uniformly rotating second degree and order gravity fields. Planetary and Space Science, Elsevier, 2004, 52. Pp. 685-692.

98. Hussmann H., Oberst J., Wickhusen K. et al. Stability and evolution of orbits around the binary asteroid 175706 (1996 FG3): Implications for the MarcoPolo mission // Planetary and Space Science. 2012. V. 70. Pp. 102–113.

99.Ivashkin, V.V., Krylov, I.V., Lang, A. Optimal spacecraft trajectories for expedition to asteroid Apophis with return to Earth // International Astronautical Congress IAC-2013. Proceedings. 2013.Vol. 7, pp. 5388-5398.

100. Ivashkin V.V., and Lang Anqi. Optimal Spacecraft Trajectories For Flight To Asteroid Apophis With Return To Earth Using Chemical High Thrust Engines // Advances in the Astronautical Sciences. Vol. 153. Published by Univelt. P.O. Box 28130. San Diego, California 92198. 2015. Pp. 1653-1667.

101. Izzo D. Global optimization and space pruning for spacecraft trajectory design // Spacecraft Trajectory Optimization, Conway B. A., ed. Cambridge University Press, 2010. Pp. 178-200.

102. Izzo D. Revisiting Lambert’s problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 121, No. 1. Pp. 1–15, Jan. 2015. ISSN 0923-2958. doi:10.1007/s10569-014-9587-y.

103. Ji C., Nan Y., An B., Chen H. The Global Optimization Design of Trajectories between the Earth and the Mars // Aerospace Control. 2015. Vol. 33, № 3. Pp. 57-62.

104. Jewitt D.C., and Meech K.J. Optical properties of cometary nuclei and preliminary comparison with asteroids // Astrophysical Journal. 1988. V. 328. Pp. 974-986.

105. Joe S. Remark on Algorithm 659: Implementing Sobol's quasirandom sequence generator //ACM Trans. Math. Softw. 2003. Vol. 29. Pp. 49 – 57.

106. Joe S. Constructing Sobol sequences with better two-dimensional projections // SIAM J. Sci. Comput. 2008. Vol. 30. Pp. 2635 – 2654.

107. Kaasalainen M. Interpretation of lightcurves of precessing asteroids // Astronomy &Astrophysics. 2001. Vol. 376. Pp. 302–309.

108. Kelley C.T. Iterative Methods for Optimization. – SIAM: Philadelphia, 1999. Pp. 40–43.

109. Krivov A.V., Sokolov L.L., Dikarev V.V. Dynamics of Mars-orbiting dust: effects of light pressure and planetary oblateness // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1996. V. 63. Pp. 313-339.

110. Krivov A.V., Sokolov L.L., Getino J. Orbital instability zones of space balloon // Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies / Ed. by I.M.

Wytrzyszczak, J.H. Lieske, R.A. Feldman. Kluwer Academic Publichers, 1997. Pp. 361-366.
111. Lancaster E.R., Blanchard R.C., Devaneyj R.A. A Note on Lambert's Theorem // Journal of Spacecraft and Rockets. 1966. Vol. 3, № 9. Pp. 1436-1438.
112. Lancaster E.R., Blanchard R.C. A unified form of Lambert's theorem // NASA technical note TN D-5368. 1969.
113. Lantukh D., Russell R.P., Broschart S. Heliotropic orbits at oblate asteroids: balancing solar radiation pressure and J2 perturbations // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2015. Vol. 121. Pp. 171–190.
114. Anqi Lang, V.V. Ivashkin. Dynamics of Spacecraft Orbital Motion around Asteroid Apophis // International Astronautical Congress IAC-2016. Proceedings. 2016. Paper IAC-16-C1,6,2,x33922, 12 p.
115. Lawden D.F. Interplanetary Rocket Trajectories. Advances in Space Science, Academic Press, New York, 1959, Chap. 1. Pp. 1-53.
116. Lawden D.F. Optimal Trajectories for Space Navigation. Butterworths, London, 1963.
117. Lion P.M., Handelsman M. The primer vector on fixed-time impulsive trajectories // AIAA Journal, 1968, Vol. 6, No. 1. Pp. 127-132.
118. Liu X., Baoyin H., Ma X. Periodic Orbits in the Gravity of a Fixed Homogeneous Cube // Astrophys. Space Sci., 2011(334). Pp. 357-364.
119. Marec J.P. Optimal Space Trajectories. Studies in Astronautics. Elsevier, 1979. 356 p.
120. Muller P.M., Sjogren W.L. Mascons: Lunar mass concentrations. Science, 1968, 161(3842). Pp. 680-684.
121. Nelson S.L., Zarchan P. Alternative Approach to the Solution of Lambert's Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1992. Vol. 15, № 4. Pp. 1003-1009.
122. Numerical recipes in C: The art of Scientific computing / W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling [et al.]. 2nd ed. Cambridge University Press, 1992. 1018 p.
123. Orbital Mechanics / Ed. Chobotov V.A. AIAA Education Series. American

Institute of Aeronautics and Astronautics. Inc., Washington, DC. 1991.
124. Pravec P., Scheirich P., Durech J., et al. The tumbling spin state of (99942) Apophis // Icarus, 2014. V. 233. Pp. 48–60.
125. Riaguas A, Elipe A, López-Moratalla T. Non-Linear Stability of the Equilibria in the Gravity Field of a Finite Straight Segment // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2001(81). Pp. 235-248.
126. Robbins H.M. An Analytical Study of the Impulsive Approximation. AIAA Journal, 1966, vol. 4, no. 8. Pp. 1417–1423.
127. Rogata P., Di Sotto E., Graziano M., Graziani F. Guess value for interplanetary transfer design through genetic algorithms // Proceedings of 13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, AAS 03-130, Ponce, Puerto Rico, 2003.
128. Rossi A., Marzari F., Farinella P. Orbital evolution around irregular bodies // Earth Planets Space. 1999. V. 51. Pp. 1173–1180.
129. Roy A.E. Orbital motion –2nd / Ed. Adam Hilger. Bristol, UK, 1982.
130. Sandford S A. The Power of Sample Return Missions-Stardust and Hayabusa [J]. Proceedings of the International Astronomical Union, 2011, 7(S280). Pp. 275-287.
131. Scheeres D.J. Satellite Dynamics About Asteroids. Paper AAS 94-112, presented at the AAAS/AIAA Spaceight Mechanics Meeting, Cocoa Beach, FL, February 14-16, 1994.
132. Scheeres D., Ostro S., Hudson R., & Werner R. Orbits close to asteroid 4769 Castalia. Icarus, 1996, 121(1). Pp. 67-87.
133. Scheeres D.J., Marzari F., Tamazella L., Vanzani V. ROSETTA mission: satellite orbits around a cometary nucleus // Planet. Space Sci. 1998. V. 46. Pp. 649–671.
134. Scheeres D. Ostro S.J. Hudson R., DeJong E.M., & Suzuki S. Dynamics of orbits close to asteroid 4179 Toutatis. Icarus, 1998, 132(1). Pp. 53-79.
135. Scheeres D. Williams B., & Miller J. Evaluation of the dynamic environment of an asteroid: Applications to 433 Eros. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2000, 23(3). Pp. 466-475.
136. Scheeres D.J., and Marzari F., Spacecraft Dynamics in the Vicinity of a Comet. Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 50, No. 1, 2002. Pp. 35–52.
137. Scheeres D.J. Orbital mechanics about small bodies // Acta Astronautica, 2012.

V. 72. Pp. 1–14.

138. Scheeres D.J. Orbital mechanics about asteroids and comets // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2012. V. 35. № 3. Pp. 987–997.

139. Seidelmann P.K. Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. University Science Books, Mill Valley, CA (USA), 1992, 780 p., ISBN 0-935702-68-7.

140. Sergeyevsky A., Snyder G., and Cunniff R., Interplanetary Mission Design Handbook, Volume 1, Part 2: Earth to Mars Ballistic Mission Opportunities, 1990-2005, Tech. Rep. JPL Publication 82-43, Jet Propulsion Laboratory, 1983.

141. Shanno, David F. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization // Mathematics of Computation, 1970. 24 (111): 647–656, MR 274029, doi:10.1090/S0025-5718-1970-0274029-X

142. Shen H., Tsiotras P. Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple-Revolution Lambert Solutions // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2003. Vol. 26, № 1. Pp. 50-61.

143. Sobol’ I.M., Asotsky D., Kreinin A. [et al.]. Construction and Comparison of High-Dimensional Sobol’ Generators // Wilmott Journal. – 2012. – Vol. 2011, Is.56. – Pp. 64–79.

144. Spacecraft trajectory optimization. Ed. Conway B.A. Cambridge University Press, 2010. 312 p.

145. Wagner S., Zimmerman D., Wie B. Preliminary Design of a Crewed Mission to Asteroid Apophis in 2029-2036[C] // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 2010: 8374.

146. Wang X., Jiang Y., Gong S. Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies // Astrophys Space Sci 2014 (353). Pp. 105–121.

147. China Focus: Riding an asteroid: China's next space goal. http://news.xinhuanet.com/english/2017-03/02/c_136096668.htm (Дата обращения 22.11.2017).

148. Фрегат – разгонный блок. Официальный сайт АО «НПО Лавочкина». http://www.laspace.ru/rus/fregat_construction.php (Дата обращения 22.11.2017).

149. Малые тела Солнечной системы // Исследование Солнечной системы. 2005. UCL: http://galspace.spb.ru/index257.html. (Дата обращения 22.11.2017).

150. HORIZONS Web-Interface. NASA, JPL. http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi (Дата обращения 22.11.2017).

151. OSIRIS-REx. Официальный сайт Lockheed Martin. https://lockheedmartin.com/us/products/osirisrex.html (Дата обращения 22.11.2017).