РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ КОРПОРАЦИЯ «ЭНЕРГИЯ» ИМ. С.П. КОРОЛЁВА

На правах рукописи

Зыков Александр Владимирович

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С БОЛЬШИМ ВРАЩАЮЩИМСЯ СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. т. н.
Платонов В.Н.

Научный консультант:
к. т. н.
Тимаков С.Н.

Москва - 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы во всем мире и в России возрастают проблемы энергетического и экологического кризисов, а также проблема управления погодой. Для решения таких проблем совместно с традиционными источниками энергии предлагается использовать природные источники энергии, такие как энергия Солнца, ветра, геотермальных вод, приливов, а также внедрять энергосберегающие технологии.

С начала космической эры рассматриваются вопросы создания космических солнечных электростанций (КСЭС) и трансляции электроэнергии на Землю, в том числе переход большей части энергопотребления человечества на КСЭС, решающий одновременно вопрос стабилизации погоды. Крупномасштабность КСЭС в значительной мере осложняет их создание и требует поиска нетрадиционных подходов, которые, в свою очередь, могут быть использованы для решения широкого круга других перспективных задач космической техники.

В начале 80-х годов прошлого века в рамках государственных научно-исследовательских тем начались исследовательские работы по обоснованию наиболее целесообразных областей применения космических крупногабаритных конструкций и определению их конструктивного облика. Был проведен сравнительный анализ по массогабаритным характеристикам, стоимости разработки и изготовления, возможностям укладки в транспортное состояние и эффективности целевого использования следующих конструкций: различного вида каркасных, бескаркасных формируемых центробежными силами, надувных и формируемых электростатическими силами конструкций. За прошедшие три десятилетия были проведены полунатурные и натурные эксперименты по раскрытию в космическом пространстве солнечных парусов. Среди них стоит отметить первый в истории человечества космический эксперимент по разворачиванию паруса из уложенного состояния «Знамя-2», проведенный в 1993 году [1]. Во время проведения эксперимента с борта грузового корабля

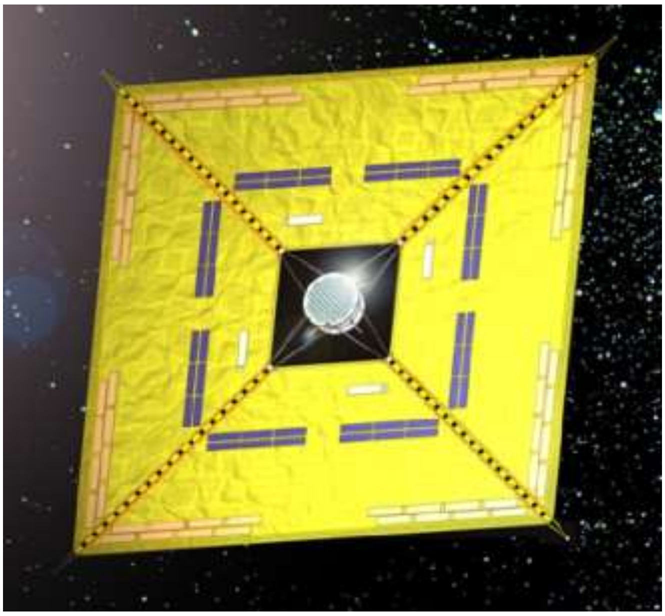
«Прогресс», отстыкованного от орбитальной станции «Мир», был развернут двадцатиметровый бескаркасный парус [2]. Также в 2010 году были успешно проведены эксперименты на японском аппарате IKAROS [3] по раскрытию квадратного солнечного паруса со стороной 14 метров и на американском мини-спутнике FASTSAT по раскрытию квадратного солнечного паруса NanoSail-D2 со стороной 3 метра [4, 5].

По комплексу определяющих проектных параметров и возможностям приложений наиболее перспективными были признаны бескаркасные формируемые центробежными силами конструкции. Такие конструкции исключают необходимость использования жестких каркасов для натяжения поверхности. По этой причине бескаркасные формируемые центробежными силами конструкции отличаются от своих каркасных аналогов рядом важных преимуществ [6, 7]:

- малым отношением массы к площади поверхности (до 5-10 г/м^2);
- возможностью укладки в малый объем при транспортировке;
- возможностью управления в пространстве на гироскопическом принципе без расхода рабочего тела;
- высокой точностью формы поверхности;
- нечувствительностью к метеоритной опасности;
- простотой и надежностью конструкции;
- низкой стоимостью.

Примерами конструкций плоских бескаркасных солнечных парусов, раскрываемых и поддерживающих свою форму за счет центробежных сил, являются уже упомянутые ранее круглый парус «Знамя-2» и квадратный парус IKAROS (рис. 1.1), а также разрабатываемый в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана гелиоротор «Парус-МГТУ» [8].

а) «Знамя-2»



б) IKAROS

Рис. 1.1: Солнечные паруса, растянутые центробежными силами

Следует отметить, что отсутствие жесткого каркаса конструкции является чрезвычайно важной и принципиальной особенностью для вновь создаваемых энергосистем с характерным геометрическим размером порядка нескольких сотен метров или одного километра, т.к. их стоимость определяет реальность создания таких систем. Основной особенностью подобных конструкций является принципиальная невозможность полномасштабной наземной отработки из-за отсутствия больших вакуумных камер и наличия гравитации. Доставка на орбиту и робототехническая сборка каркасных конструкций большой размерности является значительно более сложной, дорогостоящей и неперспективной задачей, по сравнению с использованием формируемых центробежными силами бескаркасных конструкций.

1. Актуальность работы

Создание в космосе конструкций площадью несколько тысяч квадратных метров и управление положением их в пространстве является сложной научно-технической задачей, не имеющей аналогов в космической технике и требующей для своего эффективного решения нетрадиционных подходов.

Сочетание космических условий, таких как глубокий вакуум, невесомость, поток солнечного излучения, с принципами формирования поверхности за счет центробежных сил, открывает новые возможности создания космических крупногабаритных солнечных батарей, отражателей и солнечных парусов. Под формированием поверхности солнечного паруса будем понимать его раскрытие из уложенного состояния и дальнейшее поддержание его формы.

В предлагаемой работе рассматривается новый класс космических аппаратов (КА) различного назначения, не требующих расхода рабочего тела (ракетного топлива) на коррекцию орбиты [9], угловые маневры и разгрузку накопленного кинетического момента. Такие КА используют бескаркасный вращающийся солнечный парус, растянутый центробежными силами инерции, в качестве исполнительного органа для передачи, как импульса, так и момента импульса объекту управления, используя для этого силы и моменты сил солнечного давления, а также гироскопические свойства вращающейся конструкции [10]. Базовая конструкция космической платформы как объекта управления (рис. 1.2) включает в себя солнечный парус, который представляет собой вращающийся пленочный диск с центральной жесткой вставкой, приборный отсек с целевой аппаратурой и компенсирующий силовой гироскоп во внутреннем кардановом подвесе (сочленение Гука) с регулируемой скоростью вращения ротора. Солнечный парус и компенсирующий силовой гироскоп вращаются в противоположных направлениях. Конструкции такого рода обладают скрытым кинетическим моментом. Внутренний карданов подвес с управляемыми и контролируемыми углами поворота предназначен для отклонения оси вращения ротора силового гироскопа от оси вращения центральной жесткой вставки паруса с целью создания управляющего гироскопического момента [11]. Центральная вставка паруса, выполненная в виде вантовой конструкции, служит для передачи момента импульса приборному отсеку.

В настоящий момент ведутся работы по подготовке к проведению космического эксперимента ТЗ.МКС-КЭ.ККР/11.08 от 24.11.2008 г. «Раскрытие двух пленочных отражателей, формируемых центробежными силами на ТГК «Прогресс-М», регистрация микрочастиц, освещение Земли отраженным солнечным светом, управление гироскопической парой, ретрансляция радиоволн». Также принято решение Координационного научно-технического совета Федерального космического агентства от 26.11.2008 г. по введению космического эксперимента «Знамя-3» в долгосрочную программу научно-прикладных исследований и экспериментов, планируемых на российском сегменте Международной космической станции (РС МКС).

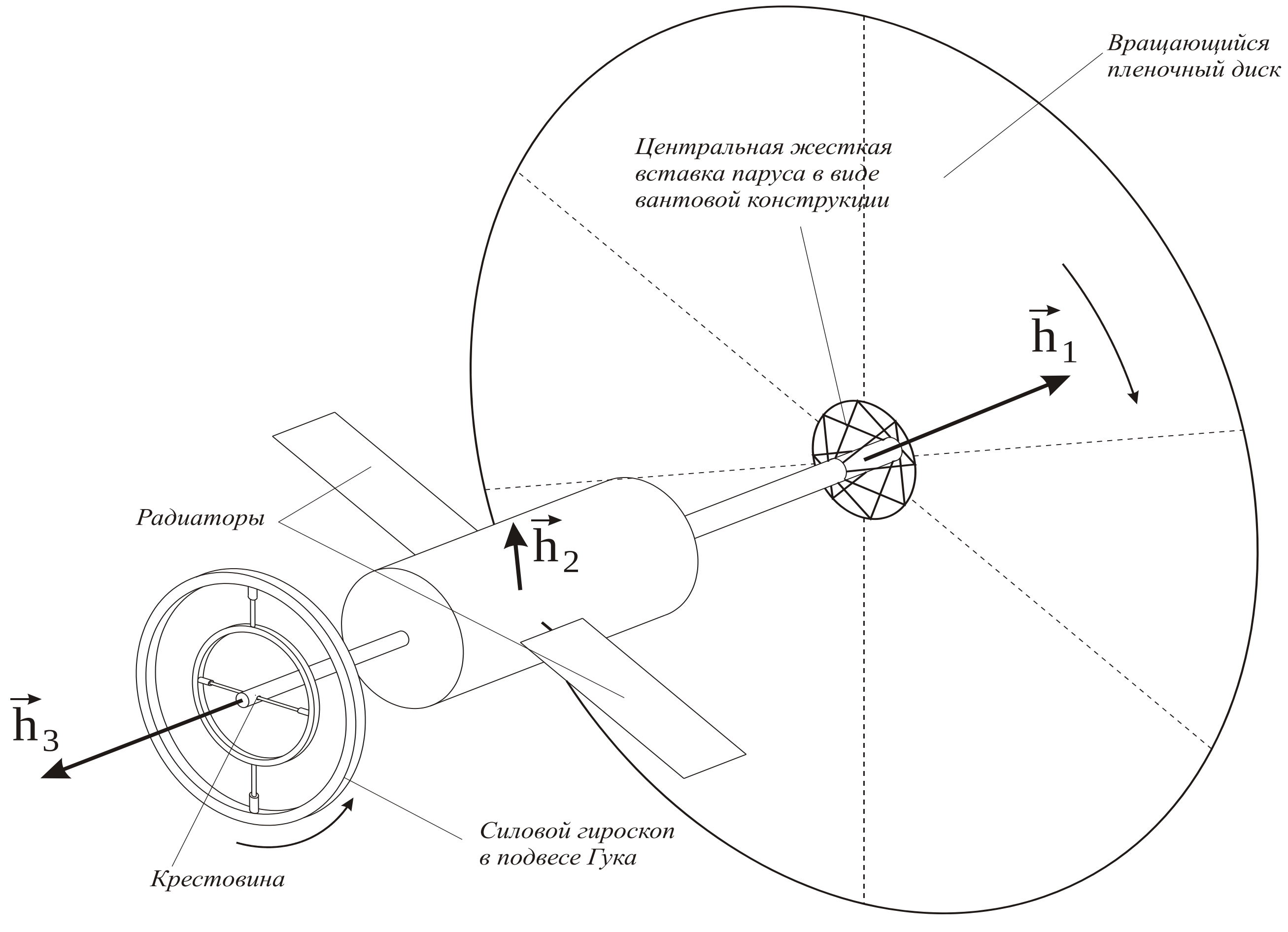


Рис. 1.2: Базовая конструкция космической платформы с вращающимся солнечным парусом

2. Цель работы

Цель диссертационной работы состоит в разработке математических моделей и алгоритмов управления угловым движением космической платформы с большим вращающимся солнечным парусом в различных динамических режимах.

В соответствии с поставленной целью в работе были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Разработка математической модели динамики вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой.
2. Нахождение стационарной формы мембранного диска при регулярной прецессии оси вращения паруса.
3. Исследование устойчивости найденной стационарной формы паруса.
4. Исследование динамики углового положения космической платформы с солнечным парусом в режимах гашения начальных угловых скоростей и программных разворотов.
5. Разработка математической модели выпуска солнечного паруса из уложенного состояния, в рамках которой парус представляется в виде четырех выпускаемых тросов.
6. Нахождение аналитического решения уравнения малых поперечных колебаний точечной массы на невесомом тросе в процессе выпуска из вращающегося центрального блока.
7. Разработка алгоритма раскрытия весомого троса из уложенного состояния, представленного в виде совокупности материальных точек, соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями.
8. Сравнение способов выпуска весомого троса из вращающегося с постоянной угловой скоростью центрального барабана.

3. <u>Объектом исследования</u> является динамика углового управляемого движения космической платформы с большим вращающимся солнечным парусом на различных этапах функционирования.

4. <u>Предметом исследования</u> являются разработанные в диссертации алгоритмы управления угловым движением космической платформы и алгоритм выпуска паруса из уложенного состояния за счет центробежных сил инерции.

5. <u>Научная новизна работы</u>

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- Разработана математическая модель динамики вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой.
- Проведен анализ напряженно-деформированного состояния вращающегося пленочного диска, находящегося под нагрузкой гироскопического момента, возникающего при повороте оси вращения центральной жесткой вставки отражателя.
- Найдена стационарная форма мембранного диска, возникающая при регулярной прецессии оси вращения паруса, как прямым интегрированием неоднородного уравнения в частных производных, так и методом Фурье, путем разложения решения в ряд по собственным функциям.
- Доказана устойчивость найденной стационарной формы паруса прямым методом Ляпунова.
- Доказана асимптотическая устойчивость найденной стационарной формы паруса в случае конструкционного демпфирования согласно гипотезе Фойгта.
- Представлены результаты аналитических и численных исследований динамического поведения КА в режимах гашения начальных угловых скоростей и программных разворотов.
- Найдено аналитическое решение уравнения малых поперечных колебаний точечной массы на невесомом тросе в процессе выпуска из вращающегося центрального блока. Решение найдено для случая равномерного выпуска через функции Бесселя и для случая равномерно замедленного выпуска через гипергеометрические функции.
- Построена модель выпуска весомого троса, представленного в виде совокупности материальных точек, соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями.

6. <u>Теоретическая и практическая значимость</u>

Полученные в диссертации результаты применены к разработке систем управления движением КА с центробежными бескаркасными вращающимися конструкциями. Теоретические результаты имеют ярко выраженную практическую направленность. Доказанная устойчивость мембранного диска солнечного паруса, разработанные алгоритмы управления угловым движением КА и алгоритмы раскрытия вращающихся конструкций из уложенного состояния могут быть использованы при подготовке космических экспериментов по раскрытию как солнечных парусов, так и тросовых систем в существующих и разрабатываемых проектах.

Результаты исследования могут быть использованы для обучения студентов и аспирантов технических вузов, а также специалистов по ракетно-космической технике, занимающихся вопросами управления движением космических платформ с вращающимися солнечными парусами и разворачивания в космическом пространстве тросовых систем.

7. <u>Выносимые на защиту результаты и положения:</u>

1. Вывод стационарной формы мембранного диска солнечного паруса при регулярной прецессии оси его вращения и доказательство её устойчивости.
2. Алгоритм управления угловым движением космической платформы с большим вращающимся солнечным парусом в режимах гашения начальных угловых скоростей и программных разворотов.
3. Способ укладки солнечного паруса в виде четырех геометрически симметричных тросов.
4. Аналитическое решение линеаризованной задачи выпуска невесомого троса с точечной массой на конце из цилиндрического контейнера, вращающегося с постоянной угловой скоростью.
5. Математическая модель выпуска весомого троса из вращающегося с постоянной угловой скоростью центрального барабана.

8. Методы исследований

Теоретической базой для исследования упругой задачи солнечного паруса послужили теория аналитической и дифференциальной геометрии, векторной алгебры и теория специальных функций математической физики. Прямой метод Ляпунова применен к системе с распределенными параметрами для доказательства устойчивости найденной стационарной формы паруса при регулярной прецессии оси его вращения, а гипотеза Фойгта позволила доказать асимптотическую устойчивость стационарной формы.

В исследовании во второй главе использовалась теория гироскопических систем с гибкими вращающимися элементами конструкции, теория обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и дифференциальных уравнений в частных производных. Для вывода системы уравнений углового движения космической платформы применялась теория матричных систем.

При построении модели солнечного паруса и исследовании динамики разворачивания его из уложенного состояния в третьей главе использовались теория специальных функций математической физики, теория обыкновенных дифференциальных уравнений и элементы теоретической механики. Построенная система уравнений движения решалась методом прогонки с помощью процедуры, применяемой при исключении реакций связей в уравнениях Лагранжа первого рода.

Для отработки алгоритмов управления угловым движением космической платформы, а также режима развертывания солнечного паруса из уложенного состояния использовались методы сведения движения непрерывных систем к их дискретным аналогам и методы математического моделирования. Моделирование проводились в среде программирования MATLAB, Simulink и Borland C++ Builder 6.0.

Исследование устойчивости, нахождение численных значений коэффициентов обратной связи замыкаемой системы, построение геометрической интерпретации полученных результатов, а также графиков динамики углового движения космической платформы и разворачивания паруса осуществлялось с помощью пакетов программного обеспечения CorelDRAW и MATLAB с использованием библиотек символьных преобразований Maple.

9. Апробация результатов работы

Основные результаты, представленные в работе, методы и алгоритмы докладывались, обсуждались и получили одобрение специалистов на следующих российских и международных семинарах и конференциях:

1. 9-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2010» (16-18 ноября 2010 года, МАИ, Москва) [12];
2. XIII конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» (15-17 марта 2011 года, ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург) [13];
3. XIX научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов (14-18 ноября 2011 года, РКК «Энергия», Королёв) [14];
4. LIV научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (25-26 ноября 2011 года, МФТИ, Долгопрудный) [15];
5. Международная научная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения» (31 января – 3 февраля 2012 года, СПбГУ, Санкт-Петербург) [16];
6. Семинар по механике космического полета им. В.А. Егорова на механико-математическом факультете МГУ под руководством А.Ю. Белецкого. (25 апреля 2012 года, МГУ, Москва);
7. LV научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (19-25 ноября 2012 года, МФТИ, Долгопрудный) [17];
8. XXXVII Академические чтения по космонавтике «Актуальные проблемы Российской космонавтики» (27 января – 1 февраля 2013 года, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва) [18];

9. XV конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» (12-15 марта 2013 года, ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург) [19, 21];
10. Семинар по механике космического полета им. В.А. Егорова на механико-математическом факультете МГУ под руководством А.Ю. Белецкого. (3 апреля 2013 года, МГУ, Москва);
11. 64-ый Международный астронавтический конгресс (23-27 сентября 2013 года, Пекин, Китай) [20];
12. LVI научная конференция МФТИ «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе» (25-30 ноября 2013 года, МФТИ, Долгопрудный) [22];
13. XVI конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» (11-14 марта 2014 года, ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург) [23];
14. Семинар по механике космического полета им. В.А. Егорова на механико-математическом факультете МГУ под руководством А.Ю. Белецкого. (14 мая 2014 года, МГУ, Москва);
15. 7-я Российская мультиконференция по проблемам управления «Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2014)» (7-9 октября 2014 года, ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург) [24];
16. XX научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов (10-14 ноября 2014 года, РКК «Энергия», Королёв) [25];
17. Семинар по механике космического полета им. В.А. Егорова на механико-математическом факультете МГУ под руководством А.Ю. Белецкого. (19 ноября 2014 года, МГУ, Москва);
18. Семинар кафедры теоретической механики МФТИ (21 ноября 2014 года, МФТИ, Долгопрудный);
19. Семинар по теории управления и динамике систем под руководством академика Ф.Л. Черноусько (25 декабря 2014 года, ИПМех РАН, Москва);

20. XXXIX Академические чтения по космонавтике «Актуальные проблемы Российской космонавтики» (27-30 января 2015 года, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва) [26];
21. Международная научная конференция по механике «Седьмые Поляховские чтения» (2-6 февраля 2015 года, СПбГУ, Санкт-Петербург) [27];
22. XVII конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» (17-20 марта 2015 года, ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург);
23. Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Космодром «Восточный» и перспективы развития российской космонавтики» (5-6 июня 2015 года, Космодром «Восточный», Благовещенск) [28];
24. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (20-24 августа 2015 года, КФУ, Казань) [29];
25. Расширенный семинар отдела № 5 «Механика космического полета и управление движением» Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Руководитель: проф. Ю.Ф. Голубев (17 сентября 2015, ИПМ, Москва).

10. Публикации

Результаты работы изложены в 23 печатных работах, включая тезисы и доклады, сделанные на российских и международных конференциях, а также 6 из них [12, 20, 30, 31, 32, 33] в печатных изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

11. Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка используемых источников и списка иллюстративного материала. Общий объем диссертации составляет 112 страниц и включает 45 рисунков. Список использованных источников насчитывает 65 наименований на 8 страницах.

Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы, приводится описание базовой конструкции как объекта управления, дается краткий обзор и краткое содержание диссертации.

В **первой главе** приводится решение плоской и пространственной задачи упругости вращающейся мембраны солнечного паруса. Находится стационарная форма мембранного диска при регулярной прецессии оси вращения паруса. Прямым методом Ляпунова доказывается устойчивость найденной стационарной формы. В случае конструкционного демпфирования согласно гипотезе Фойгта доказывается ее асимптотическая устойчивость.

Вторая глава посвящена разработке алгоритмов управления угловым положением за счет гироскопического момента сил, возникающего при отклонении оси вращения ротора силового гироскопа в кардановом подвесе Гука, входящего в состав космической платформы. Рассматриваются два режима работы разработанных алгоритмов: гашение начальных угловых скоростей приборного отсека и программный разворот вокруг одной из поперечных центральных осей космической платформы. Проблемой при реализации первого и второго режимов является изменение формы поверхности вращающегося пленочного отражателя, выражающееся в возникновении на ее поверхности кососимметричной бегущей волны в сторону, обратную вращению системы. Решение данной проблемы осуществляется путем подбора геометрических параметров вращающегося полотна и относительной скорости вращения, а также путем активного демпфирования колебаний.

В **главе 3** приводится обзор существующих способов укладки солнечных парусов, рассматриваются различные способы раскрытия солнечного паруса из уложенного состояния, предлагается математическая модель выпуска полотна солнечного паруса, в рамках которой парус представляется в виде четырех симметрично выпускаемых тросов. Находится аналитическое решение уравнения движения точечной массы, закрепленной на конце невесомого троса, вращающегося вокруг центрального барабана, для случаев равномерного и равномерно замедленного выпусков, а также приводится математическое моделирование выпуска весомого троса из уложенного состояния за счет центробежных сил.

В **заключении** приводятся основные результаты, полученные в диссертации.

ГЛАВА 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПЛЕНОЧНОГО ДИСКА

В данной главе аналитически исследуется напряженно-деформированное состояние вращающегося пленочного диска, находящегося под нагрузкой центробежной силы и гироскопического момента, возникающего при повороте оси вращения центральной вставки отражателя в процессе выполнения угловых маневров. Находится стационарная форма мембранного диска при регулярной прецессии оси вращения паруса. Прямым методом Ляпунова, примененным к системе с распределенными параметрами, доказывается устойчивость найденной стационарной формы. В случае рассеяния энергии колебаний в соответствии с гипотезой Фойгта доказывается ее асимптотическая устойчивость.

1.1 Плоская задача теории упругости вращающегося пленочного диска

Рабочая поверхность солнечного паруса представляет собой в развернутом состоянии сплошной круглый пленочный диск радиусом $R = 50$ м, радиус центральной жесткой вставки $a = 5$ м, толщина пленки $h = 1,2 \cdot 10^{-5}$ м. Мембрана диска изготовлена из полиамидной пленки плотностью $\rho = 1,4 \cdot 10^{3}$ кг/м^3. Диск вращается с угловой скоростью $\Omega = 0,5$ рад/с, вследствие чего материал паруса находится в напряженно-деформированном состоянии [34].

Введем используемые в первой главе системы координат. Ось O_1x системы координат O_1xyz направим перпендикулярно плоскости жесткой вставки (O_1 – центр мембраны). Оси O_1y и O_1z выберем в плоскости вращения мембраны так, чтобы они составляли с осью O_1x правую систему координат (рис. 1.3). Систему

O_1xyz считаем инерциальной. Кроме нее выберем подвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$, связанную с жесткой вставкой и вращающуюся вокруг оси O_1x с угловой скоростью Ω. Считаем, что в начальный момент времени $t=0$ оси O_1xyz и $O_1x_1y_1z_1$ совпадают.

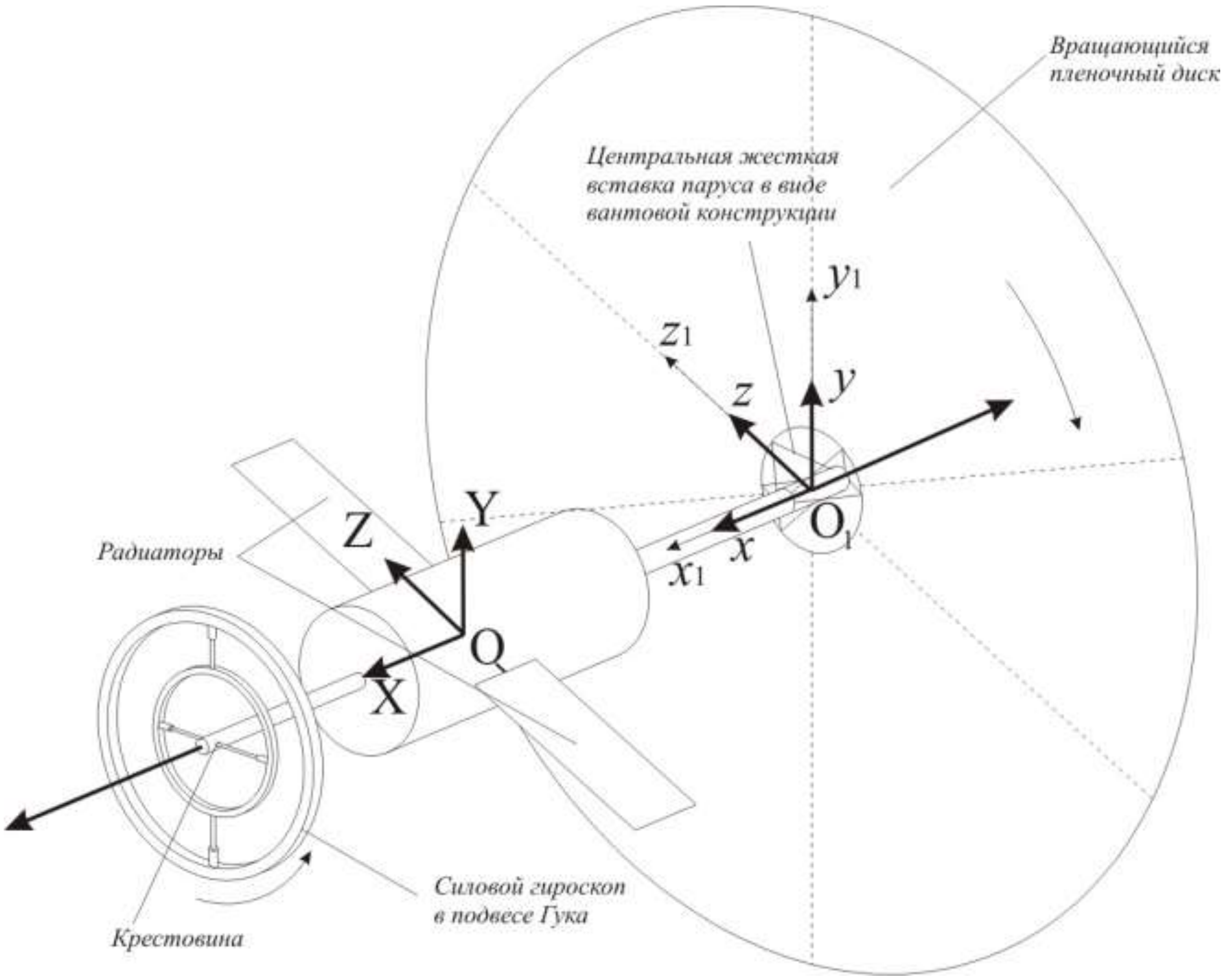


Рис. 1.3: Используемые системы координат

Уравнение напряженно-деформированного состояния круглой мембраны будем рассматривать во вращающейся системе координат $O_1x_1y_1z_1$, связанной с недеформированным полотном паруса.

Положение любой точки мембраны задается радиус-вектором r и полярным углом φ. Выделим на диске элемент, ограниченный окружностями r и $r+dr$ и сектором с углом раствора $d\varphi$, и рассмотрим напряжения, действующие на его границы (рис. 1.4).

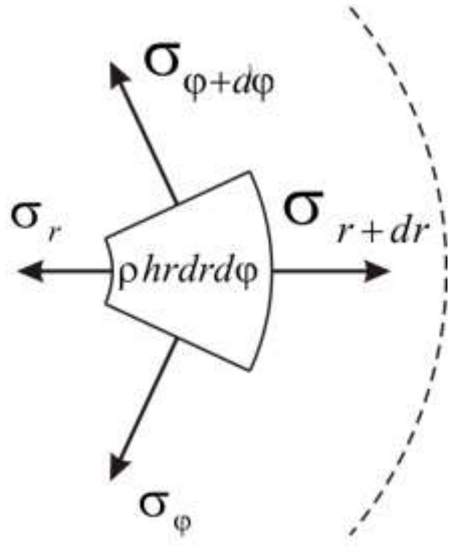


Рис. 1.4: Сектор мембранного диска

На границах элемента действуют нормальное радиальное σ_r и нормальное тангенциальное σ_φ напряжения. Касательным напряжением $\sigma_{r\varphi}$ пренебрегаем в силу симметрии вращения мембранного диска. Кроме того, на выделенный сегмент пленки действует объемная (массовая) – инерционная (центробежная) – сила, которая может быть представлена равнодействующей, лежащей в средней плоскости элемента:

$$m \cdot \Omega^2 r = h\rho r dr d\varphi \cdot \Omega^2 r$$

Уравнение равновесия в радиальном направлении имеет вид:

$$-\rho h r dr d\varphi \cdot \Omega^2 r = \frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial r} h dr d\varphi - \sigma_\varphi h dr d\varphi \quad \text{или}$$

$$r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\varphi + \rho \cdot \Omega^2 r^2 = 0 \qquad (1.1)$$

Для определения зависимости между σ_r и σ_φ необходимо знать перемещение $U = U(r)$ каждой точки диска в радиальном направлении, которое в силу симметрии будет зависеть только от r. Используя обобщенный закон Гука для плоской задачи теории упругости [35], получаем:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{dU}{dr} + \mu\frac{U}{r}\right)$$
$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{U}{r} + \mu\frac{dU}{dr}\right) \quad (1.2)$$

где $\varepsilon_r = \dfrac{dU}{dr}$ и $\varepsilon_\varphi = \dfrac{U}{r}$ – относительные удлинения в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона материала пленки.

Уравнение равновесия в радиальном направлении в перемещениях (1.1) с учетом (1.2) принимает вид:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = -\frac{1-\mu^2}{E}\rho\cdot\Omega^2 r \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(Ur)}{dr}\right] = -\frac{1-\mu^2}{E}\rho\cdot\Omega^2 r \quad (1.3)$$

Будем искать решение уравнения (1.3) в виде [36]:

$$U(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-\mu^2}{E}\frac{\rho\Omega^2}{8}r^3$$

Соответствующие радиальное и тангенциальное напряжения имеют вид

$$\sigma_r = a_1 + \frac{b}{r^2} - cr^2, \quad \sigma_\varphi = a_1 - \frac{b}{r^2} - dr^2 \quad (1.4)$$

где $a_1 = \dfrac{EC_1}{1-\mu}$, $b = -\dfrac{EC_2}{1+\mu}$, $c = (3+\mu)\dfrac{\rho\Omega^2}{8}$, $d = (1+3\mu)\dfrac{\rho\Omega^2}{8}$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из краевых условий на границах кольца. В рассматриваемом случае краевые условия соответствуют закрепленной внутренней границе ($U(a) = 0$) и свободной внешней границе ($\sigma_r(R) = 0$). Получим

$$a_1 = c\frac{R^4 + \xi a^4}{R^2 + \eta a^2}, \quad b = cR^2\eta a^2\frac{R^2 - \varsigma a^2}{R^2 + \eta a^2} \quad (1.5)$$

где $\xi = \dfrac{1-\mu}{3+\mu}$, $\eta = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$, $\zeta = \dfrac{1+\mu}{3+\mu}$

В рассматриваемом случае, так как функция $\sigma_r(r)$ – убывающая и $\sigma_r(R)=0$, то $\sigma_r(r)>0$ при $r<R$. Функция $\sigma_\varphi(r)$ – выпуклая на интервале (a,R). Так как $\sigma_\varphi(a)>0$ и $\sigma_\varphi(R)>0$, то на этом интервале функция $\sigma_\varphi(r)>0$, причем она может иметь (и обычно имеет) локальный максимум. На рисунках 1.5 и 1.6 приведены графики функций радиального $\sigma_r(r)$ и тангенциального $\sigma_\varphi(r)$ напряжений соответственно при $a/R=0{,}1$ и $\mu=0{,}4$.

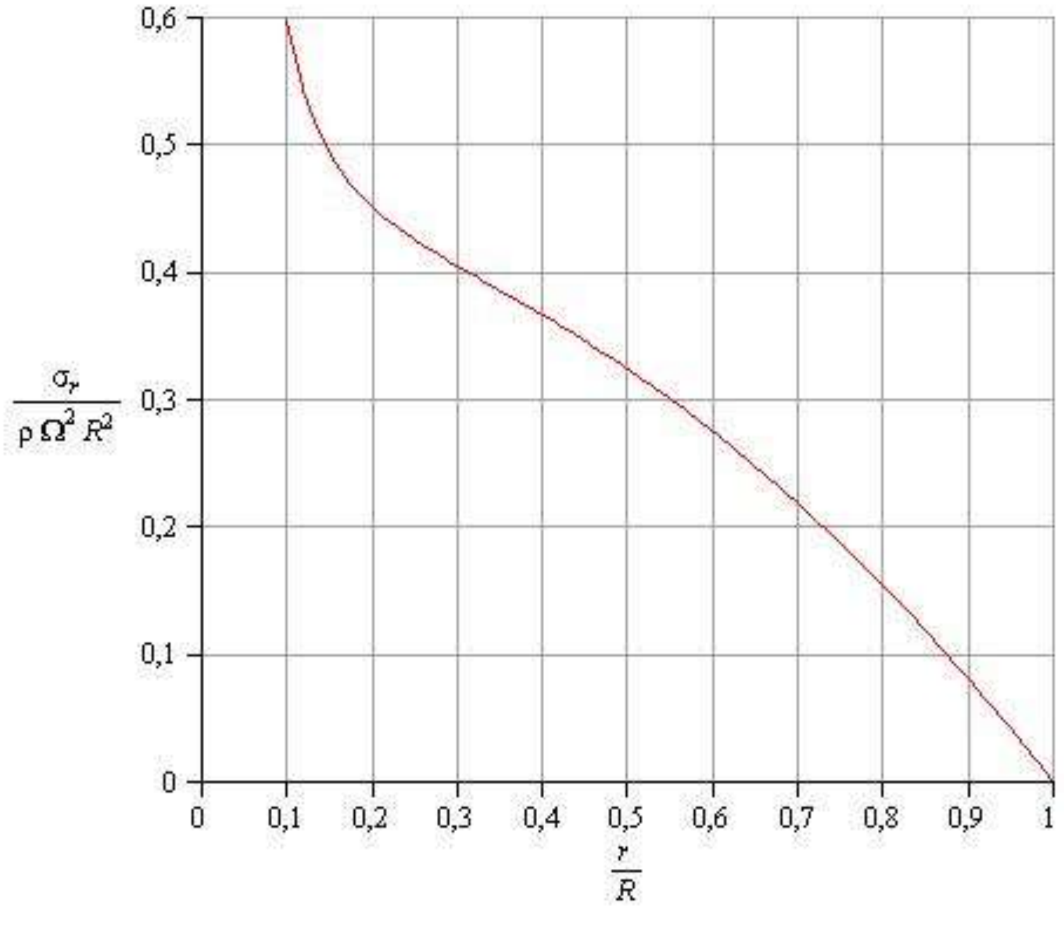


Рис. 1.5: Радиальное напряжение мембранного диска

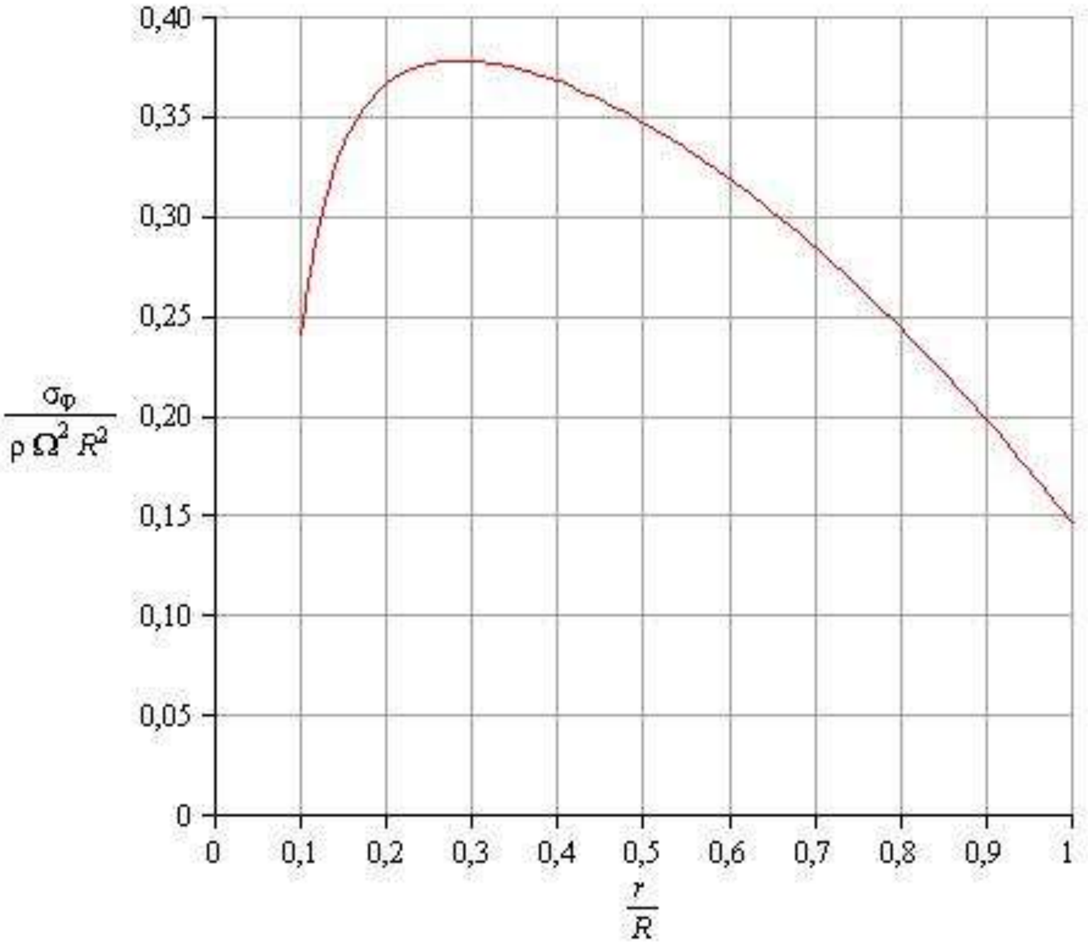


Рис. 1.6: Тангенциальное напряжение мембранного диска

Так как $\sigma_r(r) > 0$ и $\sigma_\varphi(r) > 0$, то можно поставить задачу о поперечных колебаниях мембраны, растянутой центробежными силами.

1.2 Стационарная форма паруса при регулярной прецессии

При изучении движения солнечного паруса в виде кольцеобразной вращающейся мембраны большую роль играет стационарная форма паруса, возникающая в процессе регулярной прецессии оси вращения мембраны. Перейдем к аналитическому исследованию напряженно-деформированного состояния вращающегося пленочного диска, находящегося под нагрузкой центробежной силы и гироскопического момента, возникающего при повороте оси вращения центральной вставки отражателя в процессе выполнения угловых маневров.

Известно, что уравнение движения мембраны в перпендикулярном к плоскости ее вращения направлении представляет собой уравнение поперечных колебаний мембраны [6, 37]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_r r\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sigma_\varphi}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)=\rho r\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \qquad (1.6)$$

где $W(r,\varphi,t)$ – смещение элемента пленки в нормальном направлении к плоскости вращения паруса в зависимости от переменной r в радиальном направлении, φ – в тангенциальном направлении и времени t; σ_r и σ_φ – радиальное и тангенциальное напряжения мембранного диска, найденные из решения плоской задачи упругости в предыдущем разделе. При этом предполагалось, что касательное напряжение $\sigma_{r\varphi}=0$ [38].

В рассматриваемом случае для закрепленной внутренней границы и свободного внешнего края мембраны граничные условия имеют вид:

$$W(a,\varphi,t)=0,\quad r\sigma_r\,\partial W/\partial r\to 0 \ \text{ при } \ r\to R-0$$

Так как $r\sigma_r\cong c'(R-r)$ при $r\to R-0$ для некоторой положительной постоянной c', то согласно правилу Бернулли-Лопиталя из последнего условия следует, что $W(r,\varphi,t)=o(\ln(R-r))$ при $r\to R-0$, и это будет равносильно ограниченности значений $W(r,\varphi,t)$ при приближении к внешнему краю мембраны.

Пусть система координат O_1xyz с осями Резаля (O_1x противоположна по направлению к оси вращения центральной вставки паруса) медленно поворачивается с угловой скоростью ω, например, вокруг оси O_1y. Тогда во вращающейся системе координат $O_1x_1y_1z_1$, жестко связанной с центральной вставкой, при этом оси O_1x и O_1x_1 совпадают, уравнение движения мембраны будет иметь вид [37, 39]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_r r\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sigma_\varphi}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)=\rho r\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+2\Omega\omega\rho r^2\cos(\varphi+\Omega t) \qquad (1.7)$$

Неоднородная добавка в правой части уравнения (1.7) соответствует кориолисовым силам, возникающим при равномерной прецессии оси вращения солнечного паруса. Центробежными силами, возникающими из-за прецессии оси вращения паруса, пренебрегаем в силу малости угловой скорости ω. Требуется найти решение вида $W(r,\varphi,t)=R(r)\cos(\varphi+\Omega t)$, удовлетворяющее граничным условиям $W(a,\varphi,t)=0$ и $\sigma_r r\,\partial W/\partial r\to 0$ при $r\to R-0$ в радиальном направлении и $W(r,\varphi,t)=W(r,\varphi+2\pi,t)$ – в тангенциальном.

Приведем два способа решения.

1.2.1 Метод вариации постоянной

Подставляя искомый вид решения в уравнение (1.7) и сокращая на $\cos(\varphi+\Omega t)$, получаем:

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r r\frac{dR}{dr}\right)+\left(\Omega^2\rho r-\frac{\sigma_\varphi}{r}\right)R(r)=2\Omega\omega\rho r^2$$

Согласно уравнению равновесия растянутой центробежными силами мембраны (1.1) это уравнение можно привести к виду:

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r r\frac{dR}{dr}\right)-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\sigma_r r\right)R(r)=2\Omega\omega\rho r^2 \qquad (1.8)$$

Так как $R(r)=r$ – решение однородного уравнения, то частное решение будем искать в виде $R_p(r)=rC(r)$. Подставив его в уравнение (1.8), получаем после сокращения уравнение

$$\left(\sigma_r r+\frac{d}{dr}\left(\sigma_r r^2\right)\right)C'(r)+\sigma_r r^2C''(r)=2\Omega\omega\rho r^2$$

Чтобы привести левую часть к полному дифференциалу, умножаем левую и правую часть на r и получаем:

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r r^3C'(r)\right)=2\Omega\omega\rho r^3 \qquad (1.9)$$

Исходя из того, что требуется найти только частное решение, то произвольная аддитивная постоянная, возникающая при интегрировании, берется равной нулю [40]. Поэтому получаем:

$$\sigma_r r^3 C'(r) = \frac{\Omega\omega\rho r^4}{2} \quad \text{и} \quad C'(r) = \frac{\Omega\omega\rho}{2}\frac{r}{\sigma_r},$$

где $\sigma_r = a_1 + b/r^2 - cr^2$. Учитывая, что $a_1 = cR^2 - b/R^2$, находим

$$C(r) = \frac{\Omega\omega\rho}{4}\int\frac{r^2 dr^2}{a_1 r^2 + b - cr^4} = \frac{\Omega\omega\rho}{4c}\int\frac{r^2 dr^2}{(R^2 - r^2)\left(r^2 + \dfrac{b}{cR^2}\right)} =$$

$$= \frac{\Omega\omega\rho}{4c\left(1 + \dfrac{b}{cR^4}\right)}\left[\ln\frac{1}{R^2 - r^2} - \frac{b}{cR^4}\ln\left(r^2 + \frac{b}{cR^2}\right)\right]$$

Само частное решение равно $R_p(r) = rC(r)$. Это частное решение не удовлетворяет второму граничному условию, так как имеет логарифмическую особенность при $r = R$. Чтобы избавиться от такой особенности на правом конце, найдем второе фундаментальное решение однородного уравнения, которое будет иметь логарифмическую особенность, и с помощью него избавимся от логарифмической особенности в частном решении.

Второе решение однородного уравнения ищем также в виде $R_2(r) = rC_1(r)$, только неоднородную правую часть в уравнении (1.9) полагаем равной нулю, а аддитивную постоянную при первом интегрировании полагаем равной единице $\sigma_r r^3 C_1'(r) = 1$. Тогда

$$C_1(r) = \int\frac{dr}{(a_1 r^2 + b - cr^4)r} = \frac{1}{2c}\int\frac{dr^2}{(R^2 - r^2)\left(r^2 + \dfrac{b}{cR^2}\right)r^2} =$$

$$= \frac{1}{2cR^4\left(1 + \dfrac{b}{cR^4}\right)}\ln\frac{1}{R^2 - r^2} + \frac{1}{b}\ln r - \frac{1}{2b\left(1 + \dfrac{b}{cR^4}\right)}\ln\left(r^2 + \frac{b}{cR^2}\right)$$

Вычитая из $R_p(r)$ решение $R_2(r) = rC_1(r)$, умноженное на $\Omega\omega\rho R^4/2$, получаем искомое частное решение:

$$\tilde{R}_p(r) = \frac{\Omega\omega\rho}{2c\dfrac{b}{cR^4}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{cR^4}\right)\ln\left(r^2+\frac{b}{cR^2}\right)-\ln r\right]r$$

В итоге, общее решение уравнения (1.8), не имеющее логарифмической особенности при $r = R$, записывается в виде

$$R(r) = \tilde{R}_p(r) + C^* r = \frac{\Omega\omega\rho}{2c\dfrac{b}{cR^4}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{cR^4}\right)\ln\left(r^2+\frac{b}{cR^2}\right)-\ln r + C^*\right]r$$

откуда из первого граничного условия $R(a) = 0$ определяем $C^* = \ln a - \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{b}{cR^4}\right)\ln\left(a^2+\dfrac{b}{cR^2}\right)$ и окончательно получаем искомое решение

$$R(r) = \frac{2\omega r}{(3+\mu)\Omega\dfrac{b}{cR^4}}\left[\left(1-\frac{b}{cR^4}\right)\ln\frac{r^2+\dfrac{b}{cR^2}}{a^2+\dfrac{b}{cR^2}}-\ln\frac{r^2}{a^2}\right]$$

где мы воспользовались соотношением $c = (3+\mu)\dfrac{\rho\Omega^2}{8}$. Сама стационарная форма имеет вид

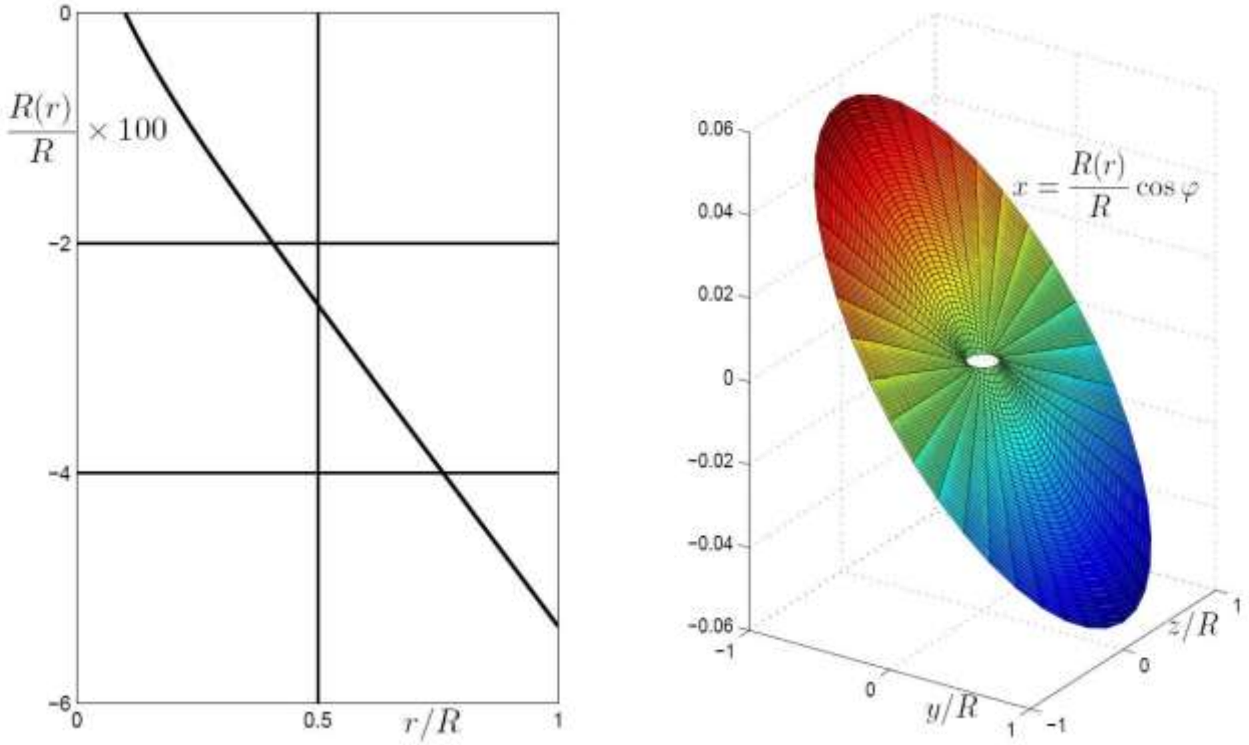
$$W(r,\varphi,t) = \frac{2\omega r}{(3+\mu)\Omega\dfrac{b}{cR^4}}\left[\left(1-\frac{b}{cR^4}\right)\ln\frac{r^2+\dfrac{b}{cR^2}}{a^2+\dfrac{b}{cR^2}}-\ln\frac{r^2}{a^2}\right]\cos(\varphi+\Omega t) \qquad (1.10)$$

в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (аналогичную формулу получил Магнус [41] при моделировании мембраны, свернутой в кольцо цепочкой и радиально связанной невесомыми нитями с центральной жесткой вставкой) и

$$W(r,\varphi,t) = \frac{2\omega r}{(3+\mu)\Omega\dfrac{b}{cR^4}}\left[\left(1-\frac{b}{cR^4}\right)\ln\frac{r^2+\dfrac{b}{cR^2}}{a^2+\dfrac{b}{cR^2}}-\ln\frac{r^2}{a^2}\right]\cos\varphi \qquad (1.11)$$

в системе координат O_1xyz. Видно, что (1.11) не зависит от времени, что и объясняет название «стационарная». Радиальный профиль и пространственная форма стационарной формы мембраны при регулярной прецессии в случае

$a/R=0{,}1$; $\mu=0{,}4$; $\omega=0{,}5236\cdot10^{-3}$ рад/с; $\Omega=0{,}5$ рад/с представлена на рисунке 1.7.



а) радиальный профиль б) пространственная форма

Рис. 1.7: Стационарная форма мембраны при регулярной прецессии

1.2.2 Метод Фурье

Выражение для стационарной формы можно получить в виде ряда по найденным в [39] нормированным собственным функциям. Собственные функции выражаются через функции Хойна [42, 43]. Преобразуем уравнение (1.7) к виду

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_r r\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sigma_\varphi}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)=\rho r\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+2\Omega\omega\rho r^2(\cos\varphi\cos\Omega t-\sin\varphi\sin\Omega t) \qquad (1.12)$$

Разложим неоднородную добавку в правой части уравнения (1.12) в ряд по собственным функциям, используя соотношения

$$r\cos\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1k}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi \quad \text{и} \quad r\sin\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1k}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi$$

где $\alpha_{1k} = \sqrt{\dfrac{\pi}{l_{1k}}} \int\limits_a^R R_{1k}(r)\rho r^2 dr$ – коэффициенты Фурье функций $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$ по системе $\{V_{0k}, V_{nk}, \bar{V}_{nk}\}$, где $V_{nk}(r,\varphi) = \dfrac{R_{nk}(r)}{\sqrt{l_{nk}\pi}}\cos n\varphi$, $\bar{V}_{nk}(r,\varphi) = \dfrac{\bar{R}_{nk}(r)}{\sqrt{l_{nk}\pi}}\sin n\varphi$ – собственные функции однородной задачи (1.12) [39]. Коэффициенты α_{nk} с $n \neq 1$ равны нулю в силу ортогональности тригонометрической системы.

Ищем решение уравнения (1.12) в виде:

$$W(r,\varphi,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(q_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi + s_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi \right)$$

Подставляя это представление в уравнение (1.12), с учетом того, что $\dfrac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi$ и $\dfrac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi$ являются собственными функциями с собственными значениями ω_{1k}^2, имеем:

$$-\rho r\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{1k}^2\left[q_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi + s_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi \right] =$$

$$= \rho r\sum_{k=0}^{\infty}\left(\ddot{q}_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi + \ddot{s}_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi \right) +$$

$$+\rho r\cdot 2\Omega\omega\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1k}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi\cos\Omega t - \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1k}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi\sin\Omega t \right).$$

Сравнивая коэффициенты при собственных функциях, получаем уравнения для нахождения $q_k(t)$ и $s_k(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{q}_k(t) + \omega_{1k}^2 q_k(t) + 2\Omega\omega\alpha_{1k}\cos\Omega t = 0 \\ \ddot{s}_k(t) + \omega_{1k}^2 s_k(t) - 2\Omega\omega\alpha_{1k}\sin\Omega t = 0 \end{cases}$$

Находим частное решение первого уравнения в виде $q_k^p(t) = C_k\cos\Omega t$:

$$-C_k\Omega^2\cos\Omega t + C_k\omega_{1k}^2\cos\Omega t + 2\Omega\omega\alpha_{1k}\cos\Omega t = 0 \;\Rightarrow\; C_k = -\frac{2\Omega\omega\alpha_{1k}}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2}$$

и частное решение второго уравнения в виде $s_k^p(t) = D_k\sin\Omega t$:

$$-D_k\Omega^2\sin\Omega t + D_k\omega_{1k}^2\sin\Omega t - 2\Omega\omega\alpha_{1k}\sin\Omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad D_k = \frac{2\Omega\omega\alpha_{1k}}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2}$$

Следовательно, искомое частное решение будет иметь вид:

$$W_p(r,\varphi,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\Omega\omega\alpha_{1k}}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\left[-\cos\Omega t\cos\varphi + \sin\Omega t\sin\varphi\right] \text{ или}$$

$$W_p(r,\varphi,t) = -2\Omega\omega\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_{1k}}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos(\varphi + \Omega t) \tag{1.13}$$

Ряд в последней формуле сходится равномерно, поэтому для его суммы выполняются те же краевые условия, что и для собственных функций. Отсюда можно сделать вывод, что это решение должно совпадать с решением (1.11), полученным в подразделе 1.2.1 методом вариации постоянной. Поэтому получается тождество

$$-2\Omega\omega\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_{1k}}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}} = \frac{2\omega r}{(3+\mu)\Omega\dfrac{b}{cR^4}}\left[\left(1 - \frac{b}{cR^4}\right)\ln\frac{r^2 + \dfrac{b}{cR^2}}{a^2 + \dfrac{b}{cR^2}} - \ln\frac{r^2}{a^2}\right]$$

1.3 Анализ устойчивости стационарной формы паруса при равномерной прецессии

1.3.1 Прямой метод Ляпунова

Устойчивость полученной стационарной формы поверхности мембранного диска при равномерной прецессии оси его вращения доказывается прямым методом Ляпунова. Под устойчивостью стационарной формы (1.10) понимаем, что малые возмущения начальных условий стационарной формы [44] приводят к малым отклонениям решения уравнения (1.7).

Необходимо отметить, что в данном случае метод Ляпунова применяется к системе с распределенными параметрами [45], описываемой уравнением движения (1.7). Поэтому в качестве аргументов функции Ляпунова выбираются поперечные мембранные усилия, которые являются линейными комбинациями от угловых перемещений $\frac{\partial W}{\partial r}$ и $\frac{\partial W}{r\partial\varphi}$, и скорости поперечных перемещений $\frac{\partial W}{\partial t}$.

Эти переменные полностью описывают состояние любого элемента мембранного диска. Для каждого такого элемента можно построить положительно определенную квадратичную форму от перечисленных переменных и, проинтегрировав по всей поверхности мембраны, получить функцию Ляпунова в виде интеграла энергии:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_a^R\left[\frac{\sigma_r}{\rho\Omega^2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{\partial W_{стац}}{\partial r}\right)^2+\frac{\sigma_\varphi}{\rho\Omega^2}\left(\frac{\partial W}{r\partial\varphi}-\frac{\partial W_{стац}}{r\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{\partial W_{стац}}{\partial t}\right)^2\right]rdrd\varphi,$$

где

$$\frac{\partial W_{стац}}{\partial r}=-\frac{2\omega}{\Omega A(3+\mu)}\left((1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}+2A\frac{r^2+R^2}{r^2-AR^2}\right)\cos(\varphi+\Omega t),$$

$$\frac{\partial W_{стац}}{r\partial\varphi}=\frac{2\omega}{\Omega A(3+\mu)}\left((1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}\right)\sin(\varphi+\Omega t),$$

$$\frac{\partial W_{стац}}{\partial t}=\frac{2\omega r}{A(3+\mu)}\left((1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}\right)\sin(\varphi+\Omega t),$$

$$A=-\frac{b}{cR^4}.$$

Функция Ляпунова в этом виде принимает нулевое значение при подстановке в нее стационарной формы (1.10).

Покажем, что производная по времени $\frac{dV}{dt}$, взятая в силу уравнения движения (1.7), равна нулю. Действительно,

$$\frac{dV}{dt}=2\int_0^{2\pi}\int_a^R \frac{\sigma_r}{\rho\Omega^2}\left[\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{2\omega}{\Omega A(3+\mu)}\left((1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}+2A\frac{r^2+R^2}{r^2-AR^2}\right)\cos(\varphi+\Omega t)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial t}-\frac{2\omega}{A(3+\mu)}\left((1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}+2A\frac{r^2+R^2}{r^2-AR^2}\right)\sin(\varphi+\Omega t)\right]rdrd\varphi+$$

$$+2\int_0^{2\pi}\int_a^R \frac{\sigma_\varphi}{\rho\Omega^2}\left[\frac{\partial W}{r\partial\varphi}-\frac{2\omega}{\Omega A(3+\mu)}\left((1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}\right)\sin(\varphi+\Omega t)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\partial^2 W}{r\partial\varphi\partial t}-\frac{2\omega}{A(3+\mu)}\left((1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}\right)\cos(\varphi+\Omega t)\right]rdrd\varphi+$$

$$+2\int_0^{2\pi}\int_a^R \frac{1}{\Omega^2}\left[\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{2\omega r}{A(3+\mu)}\left((1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}\right)\sin(\varphi+\Omega t)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{2\omega r\Omega}{A(3+\mu)}\left((1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}\right)\cos(\varphi+\Omega t)\right]rdrd\varphi$$

Интегрируя по частям, принимая во внимание граничные условия $W(a,\varphi,t)=0$, $W(r,\varphi,t)$ – ограничено, обозначая для удобства $S(r)=(1+A)\ln(\frac{r^2-AR^2}{a^2-AR^2})-\ln\frac{r^2}{a^2}$, получим:

$$\frac{dV}{dt}=-2\int_0^{2\pi}\int_a^R\left[\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{2\omega r}{A(3+\mu)}S(r)\sin(\varphi+\Omega t)\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\rho\Omega^2}\frac{d}{dr}(\sigma_r r)\frac{\partial W}{r\partial r}+\frac{1}{\rho\Omega^2}\frac{d}{dr}(\sigma_r r)\frac{2\omega}{\Omega Ar(3+\mu)}\left(S(r)+2A\frac{r^2+R^2}{r^2-AR^2}\right)\cos(\varphi+\Omega t)+\right.$$

$$+\frac{\sigma_r}{\rho\Omega^2}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\sigma_r}{\rho\Omega^2}\frac{2\omega}{\Omega A(3+\mu)}\left(\frac{2A}{r}\frac{r^2+R^2}{r^2-AR^2}-\frac{4ArR^2(1+A)}{(r^2-AR^2)^2}\right)\cos(\varphi+\Omega t)+$$

$$+\frac{\sigma_\varphi}{\rho\Omega^2}\frac{\partial^2 W}{r^2\partial\varphi^2}-\frac{\sigma_\varphi}{\rho\Omega^2}\frac{2\omega}{\Omega Ar(3+\mu)}S(r)\cos(\varphi+\Omega t)-\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+$$

$$\left.+\frac{2\omega r}{A\Omega(3+\mu)}S(r)\cos(\varphi+\Omega t)-\frac{2\omega r}{\Omega}\cos(\varphi+\Omega t)+\frac{2\omega r}{\Omega}\cos(\varphi+\Omega t)\right\}rdrd\varphi$$

Выделяя в фигурных скобках уравнение движения мембранного диска (1.7), подставляя выражения для σ_r, σ_φ и A, получим:

$$\frac{dV}{dt}=-2\int_0^{2\pi}\int_a^R\left[\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{2\omega r}{A(3+\mu)}S(r)\sin(\varphi+\Omega t)\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{\sigma_r}{\rho\Omega^2}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{\rho\Omega^2}\frac{d}{dr}\left(\sigma_r r\right)\frac{\partial W}{r\partial r}+\frac{\sigma_\varphi}{\rho\Omega^2}\frac{\partial^2 W}{r^2\partial\varphi^2}-\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{2\omega r}{\Omega}\cos(\varphi+\Omega t)+\right.$$

$$+\left[\frac{1}{\rho\Omega^2}\frac{d}{dr}\left(\sigma_r r\right)\frac{2\omega}{\Omega Ar(3+\mu)}\left(S(r)+2A\frac{r^2+R^2}{r^2-AR^2}\right)-\frac{\sigma_\varphi}{\rho\Omega^2}\frac{2\omega}{\Omega Ar(3+\mu)}S(r)+\frac{2\omega r}{A\Omega(3+\mu)}S(r)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sigma_r}{\rho\Omega^2}\frac{2\omega}{\Omega A(3+\mu)}\left(\frac{2A}{r}\frac{r^2+R^2}{r^2-AR^2}-\frac{4ArR^2(1+A)}{(r^2-AR^2)^2}\right)+\frac{2\omega r}{\Omega}\right]\cos(\varphi+\Omega t)\right\}rdrd\varphi$$

и окончательно

$$\frac{dV}{dt}=-2\int_0^{2\pi}\int_a^R\left[\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{2\omega r}{A(3+\mu)}S(r)\sin(\varphi+\Omega t)\right]\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{\sigma_\varphi}{\rho\Omega^2}-r^2+\frac{\sigma_r}{\rho\Omega^2}\right)\frac{2\omega}{\Omega r(3+\mu)}\left(2\frac{r^2+R^2}{r^2-AR^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma_r}{\rho\Omega^2}\frac{2\omega}{\Omega(3+\mu)}\left(-\frac{4rR^2(1+A)}{(r^2-AR^2)^2}\right)+\frac{2\omega r}{\Omega}\right\}\cos(\varphi+\Omega t)rdrd\varphi=0.$$

Таким образом, устойчивость стационарной формы паруса при равномерной прецессии оси его вращения доказана.

1.3.2 Асимптотическая устойчивость

Применим гипотезу Фойгта [35], согласно которой напряжения σ_r и σ_φ зависят не только от деформаций ε, но и от скорости деформаций $\partial\varepsilon/\partial t$, то есть

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_r+\mu\varepsilon_\varphi+h\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_r+\mu\varepsilon_\varphi\right)\right]=\frac{E}{1-\mu^2}\left(1+h\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\varepsilon_r+\mu\varepsilon_\varphi\right),$$

$$\sigma_\varphi=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_\varphi+\mu\varepsilon_r+h\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_\varphi+\mu\varepsilon_r\right)\right]=\frac{E}{1-\mu^2}\left(1+h\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\varepsilon_\varphi+\mu\varepsilon_r\right),$$

где h – коэффициент трения, E – модель Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

В этом случае уравнение для нахождения стационарной формы выглядит следующим образом:

$$\left(1+h\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_r r\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sigma_\varphi}{r}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)\right]=\rho r\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+2\Omega\omega\rho r^2\cos(\varphi+\Omega t) \qquad (1.14)$$

Находим решение уравнения (1.14) методом Фурье в виде ряда

$$W(r,\varphi,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(q_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi+s_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi\right)$$

где $\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi$ и $\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi$ – найденные в [39] собственные функции для однородной части уравнения (1.7) с собственными значениями ω_{1k}^2 (здесь $\frac{1}{\sqrt{l_{1k}\pi}}$ – нормировочные коэффициенты).

Подставляя это представление в уравнение (1.14), имеем:

$$-\rho r\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k^2\left[\left(q_k(t)+h\dot{q}_k(t)\right)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi+\left(s_k(t)+h\dot{s}_k(t)\right)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi\right]=$$

$$=\rho r\sum_{k=0}^{\infty}\left(\ddot{q}_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi+\ddot{s}_k(t)\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi\right)+$$

$$+\rho r\cdot 2\Omega\omega\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1k}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi\cos\Omega t-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1k}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi\sin\Omega t\right)$$

Сравнивая коэффициенты при собственных функциях, получаем уравнения для нахождения $q_k(t)$ и $s_k(t)$:

$$\begin{cases}\ddot{q}_k(t)+h\omega_k^2\dot{q}_k(t)+\omega_k^2 q_k(t)+2\Omega\omega\alpha_{1k}\cos\Omega t=0\\ \ddot{s}_k(t)+h\omega_k^2\dot{s}_k(t)+\omega_k^2 s_k(t)-2\Omega\omega\alpha_{1k}\sin\Omega t=0\end{cases} \qquad (1.15)$$

где α_{1k} – коэффициенты разложения функций $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$ по системам

$$\left\{\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos\varphi\right\} \text{ и } \left\{\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\sin\varphi\right\}$$

Вводя новую переменную $t_k(t)=-q_k(t)+is_k(t)$, перейдем от двух уравнений (1.15) к одному комплексному уравнению:

$$\ddot{t}_k(t)+h\omega_k^2\dot{t}_k(t)+\omega_k^2 t_k(t)=2\Omega\omega\alpha_{1k}e^{i\Omega t}.$$

Решение в терминах этой переменной записывается как:

$$W(r,\varphi,t) = -\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty} t_k(t)e^{i\varphi}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}$$

Находим частное решение последнего уравнения в виде $t_k^p(t) = C_k e^{i\Omega t}$:

$$-C_k\Omega^2 e^{i\Omega t} + i\Omega C_k h\omega_k^2 e^{i\Omega t} + C_k\omega_k^2 e^{i\Omega t} - 2\Omega\omega\alpha_{1k}e^{i\Omega t} = 0$$

$$C_k = \frac{2\Omega\omega\alpha_{1k}}{\omega_k^2 - \Omega^2 + ih\omega_k^2\Omega}$$

Следовательно, искомое частное решение будет иметь вид:

$$W_p(r,\varphi,t) = -\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\frac{2\Omega\omega\alpha_{1k}}{\omega_k^2 - \Omega^2 + ih\omega_k^2\Omega}e^{i(\varphi+\Omega t)}$$

или

$$W_p(r,\varphi,t) = -2\Omega\omega\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_{1k}}{\sqrt{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(h\omega_k^2\Omega\right)^2}}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos(\varphi + \Omega t - \Delta\varphi_k)$$

где $\Delta\varphi_k = \arg\left(\omega_k^2 - \Omega^2 + ih\omega_k^2\Omega\right) = \mathrm{arctg}\dfrac{h\omega_k^2\Omega}{\omega_k^2 - \Omega^2}$.

При $h = 0$, то есть в отсутствии демпфирования, видно, что $W_p(r,\varphi,t)$ совпадает с аналитическим решением (1.13), полученным в подразделе 1.2.2 методом Фурье.

При переходе в систему осей Резаля полученная форма принимает вид:

$$W_p(r,\varphi) = -2\Omega\omega\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_{1k}}{\sqrt{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(h\omega_k^2\Omega\right)^2}}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}\cos(\varphi - \Delta\varphi_k)$$

и не зависит от времени.

Общее решение уравнения (1.14) будет иметь вид:

$$W(r,\varphi,t) = W_h(r,\varphi,t) + W_p(r,\varphi,t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_{1k}(r)}{\sqrt{l_{1k}\pi}}e^{-\frac{h\omega_k^2}{2}t}\left((A_k\cos\bar{\omega}_k t + B_k\sin\bar{\omega}_k t)\cos\varphi + (C_k\cos\bar{\omega}_k t + D_k\sin\bar{\omega}_k t)\sin\varphi\right) + \quad (1.16)$$

$$+W_p(r,\varphi,t)$$

где $W_h(r,\varphi,t)$ – общее решение однородного уравнения (1.14) и $\bar{\omega}_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{1}{4} h^2 \omega_k^2}$ – частота собственных колебаний системы с затуханием.

Из (1.16) видно, что общее решение асимптотически стремится к $W_p(r,\varphi,t)$ – стационарной форме. Таким образом, асимптотическая устойчивость доказана.

1.4 Обсуждение результатов первой главы

Получена стационарная форма солнечного паруса при регулярной прецессии оси его вращения как частное решение неоднородного уравнения вращающейся мембраны с центральной жесткой вставкой. Устойчивость найденной стационарной формы паруса была доказана прямым методом Ляпунова, примененного к системе с распределенными параметрами. Используя разложение аналитического выражения найденной стационарной формы по собственным функциям (локальным функциям Хойна) и гипотезу Фойгта о рассеянии энергии колебаний, доказана асимптотическая устойчивость равновесной формы. Полученные результаты позволяют преодолеть сложности в описании динамического поведения космического аппарата, как объекта управления с распределенными параметрами, в процессе выполнения им угловых маневров. Результаты данной главы могут быть использованы для построения динамической модели вращающейся мембраны в виде системы гироскопов в упругих подвесах каждый со своей приведенной жесткостью крепления подвеса и приведенным кинетическим моментом.

ГЛАВА 2. УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАТФОРМЫ С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

В предыдущей главе было найдено точное аналитическое решение уравнения в частных производных для поперечных колебаний вращающейся мембраны с центральной жесткой вставкой [39, 46]. В радиальном направлении решение было получено в виде ряда по локальным функциям Хойна [47, 48, 49]. В тангенциальном направлении решение сводится к волновому уравнению с периодическими граничными условиями.

На основе полученного аналитического решения в данной главе разрабатывается математическая модель в виде набора независимых гироскопически связанных мод движения или, другими словами, разрабатывается механический аналог вращающегося пленочного диска в виде набора гироскопов в упругих подвесах, каждый со своим приведенным моментом инерции и жесткостью подвеса. Из нормировки полученных мод движения на приведенные массы (моменты инерции) следует, что 99,9% массы пленочного диска паруса совершает колебания на первых двух гироскопически связанных кососимметрических формах колебаний паруса (с одним узловым диаметром и без узловых окружностей) [39]. Это позволяет с большой степенью точности заменить описание динамического поведения объекта управления как системы с распределенными параметрами его описанием как КА с одним гироскопом в упругом подвесе (вращающийся мембранный диск солнечного паруса) и управляющим силовым гироскопом в подвесе Гука с равным по величине и противоположно направленным кинетическим моментом (рис. 1.1).

2.1 Решение уравнения вращающейся мембраны в приборной системе координат

2.1.1 Приближенный вариант с использованием полиномов Якоби

Собственные частоты и формы колебаний мембранного диска были найдены в работе [39] во вращающейся с пленкой системе координат (ВСК). Однако для исследования углового движения космической платформы требуется провести модальную декомпозицию объекта управления в приборной системе координат (ПСК). При переходе от ВСК к ПСК собственные частоты аксиальных кососимметричных колебаний мембранного диска для каждой формы колебаний раздваиваются на *нутационную* и *прецессионную* частоты. Физический смысл этого заключается в том, что две бегущие в противоположном направлении волны упругих деформаций имеют во вращающейся системе координат одинаковые фазовые скорости. При переходе от ВСК к ПСК, которая является неподвижной, волна, бегущая по направлению вращения, имеет большую скорость, чем волна, бегущая против вращения. В ВСК эти волны создают одну стоячую волну. Однако датчик угловой скорости (ДУС) является неподвижным наблюдателем, если пренебречь относительно малой угловой скоростью самой ПСК, и его показания зафиксируют колебания мембраны с двумя частотами: нутационной и прецессионной. Разность частот по каждой форме колебаний равна 2Ω, что соответствует разности фазовых скоростей бегущих волн деформации. Это доказывается аналитически, например, при $a \ll R$. В отличие от точного аналитического описания с помощью функций Хойна в этом случае формы паруса в радиальном направлении можно описать только приближенно с помощью полиномов Якоби [50, 51].

Во вращающейся с мембраной системе координат две волны деформации, бегущие в противоположных направлениях с угловыми скоростями $\pm\lambda_{p,n}$, создают одну стоячую волну:

$$W\left(x,\varphi,t\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mathrm{A}_{p,n}\cos\left(\lambda_{p,n}t+\theta_{p,n}\right)\cdot\cos p\varphi\cdot F\left(-n,n+p+1,p+1,x^{2}\right)\right\},$$

которую можно представить в виде волн, бегущих в тангенциальном направлении в противоположные стороны:

$$W\left(x,\varphi,t\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\mathrm{A}_{p,n}\left[\cos\left(p\varphi-\lambda_{p,n}t-\theta_{p,n}\right)+\cos\left(p\varphi+\lambda_{p,n}t+\theta_{p,n}\right)\right]\cdot$$
$$F\left(-n,n+p+1,p+1,x^2\right)\Big\}$$

где $F\left(-n,n+p+1,p+1,x^2\right)$ – выражение полиномов Якоби через гипергеометрическую функцию. Здесь использовано тригонометрическое тождество:

$$\cos\left(\lambda_{p,n}t+\theta_{p,n}\right)\cdot\cos p\varphi=\cos\left(p\varphi-\lambda_{p,n}t-\theta_{p,n}\right)+\cos\left(p\varphi+\lambda_{p,n}t+\theta_{p,n}\right)$$

В приборном базисе фазовые скорости волн равны сумме фазовых скоростей в ВСК и угловой скорости вращения мембраны $\lambda_{p,n}+\Omega$ и $-\lambda_{p,n}+\Omega$, поэтому решение примет следующий вид:

$$W\left(x,\varphi,t\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\mathrm{A}_{p,n}\left[\cos\left(p\varphi-\left(\lambda_{p,n}+\Omega\right)t-\theta_{p,n}\right)+\cos\left(p\varphi+\left(\lambda_{p,n}-\Omega\right)t+\theta_{p,n}\right)\right]\cdot$$
$$F\left(-n,n+p+1,p+1,x^2\right)\Big\}$$

Далее рассмотрим случай для моды с одним узловым диаметром ($p=1$) и без узловых окружностей ($n=0$), т.е. $\theta_{p,n}=0$. Подставляя выражение для $\lambda_{1,0}$, получим:

$$W\left(x,\varphi,t\right)=\mathrm{A}_{1,0}\left[\cos\left(\varphi-\left(\lambda_{1,0}+\Omega\right)t\right)+\cos\left(\varphi+\left(\lambda_{1,0}-\Omega\right)t\right)\right]\cdot x=$$
$$=\mathrm{A}_{1,0}\left[\cos\left(\varphi-\Omega\left(\sqrt{\frac{R}{R-a}}+1\right)t\right)+\cos\left(\varphi+\Omega\left(\sqrt{\frac{R}{R-a}}-1\right)t\right)\right]\cdot x$$

Последнее выражение соответствует решению системы дифференциальных уравнений для плоского гироскопа в упругом подвесе, причем частоты нутационных и прецессионных колебаний выражаются через $\Omega\left(\sqrt{\frac{R}{R-a}}+1\right)$ и $\Omega\left(\sqrt{\frac{R}{R-a}}-1\right)$ соответственно.

Таким образом, аналогично тому, как упругие колебания нежесткой конструкции можно представить в виде набора независимых осцилляторов каждый со своей приведенной массой и жесткостью, также и упругие колебания вращающейся мембраны можно представить в виде набора независимых плоских гироскопов в упругих подвесах [52] каждый со своим приведенным моментом инерции и жесткостью подвеса. Полученная декомпозиция колебаний вращающейся мембраны на гироскопически связанные моды движения позволяет провести редукцию космической платформы с вращающимся пленочным отражателем и существенно упростить бортовую модель объекта управления, ограничившись одной парой гироскопически связанных мод, или, другими словами, одним плоским гироскопом в упругом подвесе.

2.1.2 Точное решение уравнения вращающейся мембраны в приборной системе координат

Приступим к общему случаю движения приборной системы координат O_1xyz относительно инерционного пространства.

Уравнение возмущенного движения солнечного паруса во вращающейся системе координат $O_1x_1y_1z_1$, жестко связанной с центральной вставкой, имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_r r\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sigma_\varphi}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)=\rho r\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+2\Omega\omega_y\rho r^2\cos(\varphi+\Omega t)+\\+\dot{\omega}_y\rho r^2\sin(\varphi+\Omega t)+2\Omega\omega_z\rho r^2\sin(\varphi+\Omega t)-\dot{\omega}_z\rho r^2\cos(\varphi+\Omega t)\end{gathered}\qquad(2.1)$$

Краевые условия, как и в первой главе, а именно, внутренняя граница кольца закреплена, а внешняя граница свободна, записываются в виде $W(a,\varphi,t)=0$ и $W(r,\varphi,t)$ – ограничено при $r\to R-0$.

Здесь $W(r,\varphi,t)$ – поперечное смещение точки мембраны, ω_y и ω_z – компоненты угловой скорости приборной системы координат, Ω – угловая скорость вращения мембраны относительно продольной оси.

Антисимметричные собственные формы колебаний мембраны соответствующей краевой задачи, вычисленные в работе [39] в точном виде, имеют вид:

$$V_{nk}(r,\varphi)=\frac{R_{\omega_{nk}}(r)}{\sqrt{\pi l_{nk}h}}\cos n\varphi,\quad \overline{V}_{nk}(r,\varphi)=\frac{R_{\omega_{nk}}(r)}{\sqrt{\pi l_{nk}h}}\sin n\varphi,$$

где ω_{nk} – собственные частоты, l_{nk} – нормирующие коэффициенты, определяемые из условия нормировки собственных форм по массе, явное выражение $R_{\omega_{nk}}(r)$ через функции Хейна $F\left(a,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta,z\right)$ приводятся в [51] и для случая $n=1$ выглядит следующим образом

$$R_{\omega_{1k}}(r)=\frac{r}{R}F\left(1-A,\frac{3}{4}-\nu_{1k}(\nu_{1k}+1),\frac{1}{2}-\nu_{1k},\frac{3}{2}+\nu_{1k},1,1,1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Параметры ν_{1k} находятся из условия $R_{\omega_{1k}}(a)=0$, параметр A вычисляется по формуле $A=-b/(cR^4)$.

Разложим правую часть уравнения (2.1) по собственным функциям:

$$\begin{aligned}&\rho r\Big\{\Big[(2\Omega\omega_y-\dot{\omega}_z)\cos\Omega t+(\dot{\omega}_y+2\Omega\omega_z)\sin\Omega t\Big]r\cos\varphi+\\&\quad+\Big[(\dot{\omega}_z-2\Omega\omega_y)\sin\Omega t+(\dot{\omega}_y+2\Omega\omega_z)\cos\Omega t\Big]r\sin\varphi\Big\}=\\&=\rho r\Big\{\Big[(2\Omega\omega_y-\dot{\omega}_z)\cos\Omega t+(\dot{\omega}_y+2\Omega\omega_z)\sin\Omega t\Big]\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1k}\frac{R_{\omega_{1k}}(r)}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}\cos\varphi+\\&+\Big[(\dot{\omega}_z-2\Omega\omega_y)\sin\Omega t+(\dot{\omega}_y+2\Omega\omega_z)\cos\Omega t\Big]\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1k}\frac{R_{\omega_{1k}}(r)}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}\sin\varphi\Big\}\end{aligned}\tag{2.2}$$

где α_{nk} – коэффициенты Фурье разложения функций $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$ по системам $\left\{V_{nk}\right\}$ и $\left\{\overline{V}_{nk}\right\}$ соответственно. При $n\neq 1$ коэффициенты α_{nk} равны нулю в силу ортогональности тригонометрической системы, поэтому в уравнениях дальше рассматривается только случай $n=1$.

Ищем решение уравнения (2.1) в виде ряда по собственным функциям:

$$W(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[q_{nk}(t)V_{nk}(r,\varphi)+s_{nk}(t)\bar{V}_{nk}(r,\varphi)\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[q_{1k}(t)\cos\varphi+s_{1k}(t)\sin\varphi\right]\frac{R_{\omega_{1k}}(r)}{\sqrt{\pi l_{1k}h}} \tag{2.3}$$

где q_{nk} и s_{nk} – обобщенные координаты.

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), а также учитывая, что функции $\frac{R_{\omega_{1k}}(r)}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}\cos\varphi$ и $\frac{R_{\omega_{1k}}(r)}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}\sin\varphi$ являются собственными с собственными значениями ω_{1k}^2, путем сравнения коэффициентов при собственных функциях в левых и правых частях получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\ddot{q}_{1k}(t)+\omega_{1k}^2 q_{1k}(t)+\alpha_{1k}\left[(2\Omega\omega_y-\dot{\omega}_z)\cos\Omega t+(\dot{\omega}_y+2\Omega\omega_z)\sin\Omega t\right]=0\\ \ddot{s}_{1k}(t)+\omega_{1k}^2 s_{1k}(t)+\alpha_{1k}\left[(\dot{\omega}_z-2\Omega\omega_y)\sin\Omega t+(\dot{\omega}_y+2\Omega\omega_z)\cos\Omega t\right]=0\end{cases} \tag{2.4}$$

из которой определяется движение мембраны как упругого тела.

Если обозначить $t_{1k}=-q_{1k}+is_{1k}$, система (2.4) записываются в виде одного комплексного уравнения

$$\ddot{t}_{1k}+\omega_{1k}^2 t_{1k}+\alpha_{1k}\left[\dot{\omega}_z-2\Omega\omega_y+i(\dot{\omega}_y+2\Omega\omega_z)\right]e^{i\Omega t}=0 \tag{2.5}$$

Само решение в терминах комплексных коэффициентов запишется как:

$$W(r,\varphi,t)=\text{-Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_{\omega_{1k}}(r)}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}e^{i\varphi}t_{1k}(t) \tag{2.6}$$

В уравнении (2.5) неоднородность является сильно осциллирующей, поэтому целесообразно сделать замену $t_{1k}=t'_{1k}e^{i\Omega t}$. Исходя из (2.6), видно, что данная замена соответствует переходу от вращающейся системы координат к приборной, то есть, если $t'_{1k}=-q'_{1k}+is'_{1k}$, то

$$W(r,\varphi,t)=\text{-Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_{\omega_{1k}}(r)}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}e^{i\varphi}t'_{1k}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[q'_{1k}(t)\cos\varphi+s'_{1k}(t)\sin\varphi\right]\frac{R_{\omega_{1k}}(r)}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}$$

будет разложением по собственным функциям в приборной системе координат. При этом полярные углы во вращающейся системе координат и в приборной отличаются на Ωt.

Итак, производя в (2.5) указанную замену и сокращая на $e^{i\Omega t}$, получим:

$$\ddot{t}'_{1k} + 2i\Omega\dot{t}'_{1k} + (\omega_{1k}^2 - \Omega^2)t'_{1k} + \alpha_{1k}\left[\dot{\omega}_z - 2\Omega\omega_y + i(\dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z)\right] = 0$$

Отделяя действительную и мнимую части, получаем уравнения на обобщенные координаты в приборной системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{q}'_{1k}(t) + 2\Omega\dot{s}'_{1k}(t) + (\omega_{1k}^2 - \Omega^2)q'_{1k}(t) + \alpha_{1k}(2\Omega\omega_y - \dot{\omega}_z) = 0 \\ \ddot{s}'_{1k}(t) - 2\Omega\dot{q}'_{1k}(t) + (\omega_{1k}^2 - \Omega^2)s'_{1k}(t) + \alpha_{1k}(\dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Также находим поперечную силу, действующую со стороны мембраны на маленький участок $d\varphi$ обода жесткой вставки (силу реакции). Очевидно, что она вычисляется по формуле

$$F = \sigma_r(a)a\frac{\partial W}{\partial r}(a,\varphi,t) = \sigma_r(a)a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}\frac{dR_{\omega_{1k}}}{dr}(a)\left[q'_{1k}(t)\cos\varphi + s'_{1k}(t)\sin\varphi\right]$$

Умножая на $-a\cos\varphi$ и интегрируя по окружности обода, находим моменты, действующие со стороны мембраны на жесткую вставку относительно осей Oy и Oz:

$$M_y = \pi\sigma_r(a)a^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}\frac{dR_{\omega_{1k}}}{dr}(a)s'_{1k}(t)$$

$$M_z = -\pi\sigma_r(a)a^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi l_{1k}h}}\frac{dR_{\omega_{1k}}}{dr}(a)q'_{1k}(t)$$

Выразив их через первые и вторые производные обобщенных координат согласно уравнениям (2.7), получим:

$$M_y = -\pi\sigma_r(a)a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi l_{1k} h}} \frac{dR_{\omega_{1k}}}{dr}(a) \frac{s'_{1k}(t)}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2} +$$

$$+ \pi\sigma_r(a)a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi l_{1k} h}} \frac{dR_{\omega_{1k}}}{dr}(a) \frac{2\Omega \dot{q}'_{1k}(t)}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2} -$$

$$- \pi\sigma_r(a)a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi l_{1k} h}} \frac{dR_{\omega_{1k}}}{dr}(a) \frac{\alpha_{1k}}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2} (\dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z)$$

и

$$M_z = \pi\sigma_r(a)a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi l_{1k} h}} \frac{dR_{\omega_{1k}}}{dr}(a) \frac{q'_{1k}(t)}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2} +$$

$$+ \pi\sigma_r(a)a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi l_{1k} h}} \frac{dR_{\omega_{1k}}}{dr}(a) \frac{2\Omega \dot{s}'_{1k}(t)}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2} -$$

$$- \pi\sigma_r(a)a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi l_{1k} h}} \frac{dR_{\omega_{1k}}}{dr}(a) \frac{\alpha_{1k}}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2} (\dot{\omega}_z - 2\Omega\omega_y)$$

Осталось воспользоваться формулой для коэффициента α_{1k}

$$\alpha_{1k} = \frac{\sigma_r(a)\pi a^2}{\omega_{1k}^2 - \Omega^2} \frac{R'_{\omega_{1k}}(a)}{\sqrt{\pi l_{1k} h}}$$

полученной в разделе 1.2.2, а также вытекающим из равенства Парсеваля тождеством

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}^2 = J_y = J_z = C,$$

где J_y и J_z – моменты инерции мембраны относительно осей Oy и Oz соответственно (экваториальные моменты инерции мембраны).

Таким образом, окончательно находим формулы вычисления моментов, действующих со стороны мембраны на жесткую вставку относительно осей Oy и Oz:

$$M_y = -\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k} \ddot{s}'_{1k}(t) + 2\Omega \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k} \dot{q}'_{1k}(t) - C(\dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z)$$

$$M_z = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k} \ddot{q}'_{1k}(t) + 2\Omega \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k} \dot{s}'_{1k}(t) - C(\dot{\omega}_z - 2\Omega\omega_y)$$

Так как моменты, создаваемые мембраной, должны быть противоположны моментам, действующим на жесткую вставку со стороны всей остальной части КА, то получаем «твердые» уравнения мембраны:

$$\begin{aligned} M_y^{ext} &= C(\dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}\ddot{s}'_{1k}(t) - 2\Omega\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}\dot{q}'_{1k}(t) \\ M_z^{ext} &= C(\dot{\omega}_z - 2\Omega\omega_y) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}\ddot{q}'_{1k}(t) - 2\Omega\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}\dot{s}'_{1k}(t) \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Переходя от обобщенных координат к физическим по формулам $\mu_{yk} = \dfrac{s'_{1k}}{\alpha_{1k}}$ и $\mu_{zk} = -\dfrac{q'_{1k}}{\alpha_{1k}}$, а также присоединяя к (2.8) «упругие» уравнения (2.7), получаем полную систему уравнений движения мембраны:

$$\begin{cases} C(\dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}^2 \left[\ddot{\mu}_{yk}(t) + 2\Omega\dot{\mu}_{zk}(t)\right] = M_y^{ext} \\ C(\dot{\omega}_z - 2\Omega\omega_y) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}^2 \left[\ddot{\mu}_{zk}(t) - 2\Omega\dot{\mu}_{yk}(t)\right] = M_z^{ext} \\ \ddot{\mu}_{zk}(t) - 2\Omega\dot{\mu}_{yk}(t) + (\omega_{1k}^2 - \Omega^2)\mu_{zk}(t) + \dot{\omega}_z - 2\Omega\omega_y = 0 \\ \ddot{\mu}_{yk}(t) + 2\Omega\dot{\mu}_{zk}(t) + (\omega_{1k}^2 - \Omega^2)\mu_{yk}(t) + \dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z = 0 \end{cases} \qquad (2.9)$$

Данная система напоминает систему уравнений движения гироскопов в упругом подвесе [53]. Поэтому μ_{yk} и μ_{zk} приобретают физический смысл углов поворотов гироскопов относительно соответствующих осей.

Следовательно можно сделать вывод, что коэффициенты α_{1k} характеризуют степень участия тонов в движении мембраны как твердого тела, а величины α_{1k}^2 являются эффективными моментами инерции антисимметричных тонов согласно вкладам в моменты относительно центра жесткой вставки. Сумма эффективных моментов инерции равна моментам относительно соответствующих осей, т.е. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}^2 = C$. Поэтому по процентному вкладу α_{1k}^2 в момент инерции мембраны можно судить о важности учета отдельно взятого тона в какой-либо математической модели мембраны.

В реальности при обычных параметрах мембраны ($a/R = 0{,}1$ и $\mu = 0{,}4$) приведенные моменты инерции первых двух гироскопически связанных мод движения (α_{10}^2) дают 99,9% от моментов инерции мембраны как твердого тела. Поэтому математическая модель упругой мембраны сводится к модели одного гироскопа в упругом подвесе. При желании можно учитывать и большее число гироскопов.

Таким образом, усеченная модель динамики мембраны с центральной жесткой вставкой с учетом $\alpha_{10}^2 \approx C$ может быть описана следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z + \ddot{\mu}_y(t) + 2\Omega\dot{\mu}_z(t) = M_y^{ext} / C \\ \dot{\omega}_z - 2\Omega\omega_y + \ddot{\mu}_z(t) - 2\Omega\dot{\mu}_y(t) = M_z^{ext} / C \\ \ddot{\mu}_z(t) - 2\Omega\dot{\mu}_y(t) + (\omega_{10}^2 - \Omega^2)\mu_z(t) + \dot{\omega}_z - 2\Omega\omega_y = 0 \\ \ddot{\mu}_y(t) + 2\Omega\dot{\mu}_z(t) + (\omega_{10}^2 - \Omega^2)\mu_y(t) + \dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Представленные уравнения (2.10) будут получены в следующем разделе исходя из закона сохранения кинетического момента для космической платформы с вращающейся мембраной в целом.

Далее получим уравнения упругих колебаний мембраны. Для составления математической модели упругой мембраны достаточно оставить только первые два тона:

$$\frac{R_{\omega_{10}}(r)}{\sqrt{\pi l_{10} h}}\cos\varphi \quad \text{и} \quad \frac{R_{\omega_{10}}(r)}{\sqrt{\pi l_{10} h}}\sin\varphi,$$

приведя их, по возможности, к моделям гироскопов в упругом подвесе.

В этом случае можно также упростить упругие уравнения, введя другие, физические координаты вместо обобщенных координат q_{10}' и s_{10}'. Действительно, согласно сказанному выше, можно приближенно написать:

$$r\cos\varphi \approx \alpha_{10}\frac{R_{\omega_{10}}(r)}{\sqrt{\pi l_{10} h}}\cos\varphi \;\text{ и }\; r\sin\varphi \approx \alpha_{10}\frac{R_{\omega_{10}}(r)}{\sqrt{\pi l_{10} h}}\sin\varphi$$

Следовательно, первые собственные формы с точностью до некоторых числовых коэффициентов почти совпадают с плоскими формами $y = r\cos\varphi$ и $z = r\sin\varphi$. Тогда движение мембраны можно приближенно записать в виде

$$W(r,\varphi,t) \approx q'_{10}\frac{R_{\omega_{10}}(r)}{\sqrt{\pi l_{10}h}}\cos\varphi + s'_{10}\frac{R_{\omega_{10}}(r)}{\sqrt{\pi l_{10}h}}\sin\varphi \approx \frac{q'_{10}}{\alpha_{10}}r\cos\varphi + \frac{s'_{10}}{\alpha_{10}}r\sin\varphi$$

Поэтому, если мы введем новые переменные по формулам $\varphi_z = -\frac{q'_{10}}{\alpha_{10}}$ и $\varphi_y = \frac{s'_{10}}{\alpha_{10}}$, то φ_y и φ_z приобретут физический смысл углов поворотов относительно соответствующих осей «почти плоской» поверхности мембраны. Тогда «упругие» уравнения после дополнительного сокращения на α_{10} можно привести к виду:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_z - 2\Omega\dot{\varphi}_y + (\omega_{10}^2 - \Omega^2)\varphi_z + \dot{\omega}_z - 2\Omega\omega_y = 0 \\ \ddot{\varphi}_y + 2\Omega\dot{\varphi}_z + (\omega_{10}^2 - \Omega^2)\varphi_y + \dot{\omega}_y + 2\Omega\omega_z = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

В таком виде уравнения упругих колебаний мембраны впервые были написаны В.А. Павловым [10].

2.2 Уравнения движения КА с солнечным парусом вокруг центра масс

Для вывода уравнений движения космической платформы введем дополнительную систему координат $OXYZ$, связанную с осями чувствительности датчиковой аппаратуры, следующим образом. O – центр системы расположим в центре масс космической платформы (рис. 1.3. и рис. 2.1), ось OX направим, как и ранее, в сторону, противоположную оси вращения центральной жесткой вставки, ось OY направим параллельно оси O_1y, проходящей в плоскости вращения мембраны, а ось OZ будет дополнять систему осей до правой тройки.

Рассмотрим угловое движение объекта управления вокруг поперечных осей аппарата [54], полагая, что вокруг продольной оси система управления с достаточной степенью точности удерживает аппарат. Представим объект управления в виде двух тел и рассмотрим каждое по отдельности: тело 1 – солнечный парус, тело 2 – приборный отсек вместе с силовым гироскопом.

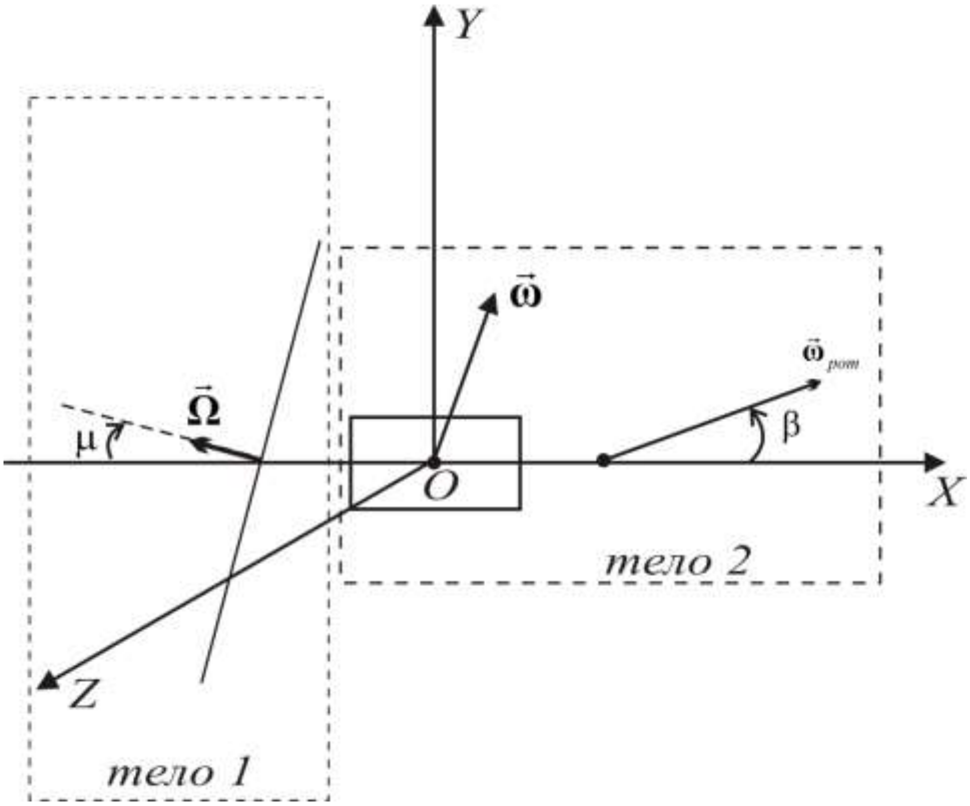


Рис 2.1: Динамическая схема объекта управления в системе координат $OXYZ$

На рис. 2.1 представлена динамическая схема объекта управления, где $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ – угловая скорость вращения аппарата, $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ – относительная угловая скорость вращения паруса, $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{рот}$ – относительная угловая скорость вращения ротора силового гироскопа, μ – угол отклонения плоскости вращения мембранного диска, β – угол отклонения ротора силового гироскопа в подвесе Гука.

В предыдущем разделе на основе материалов работы [39] приводится описание системы с распределенными параметрами, а именно вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой в виде набора гироскопов в упругих подвесах, каждый со своим приведенным моментом инерции и жесткостью подвеса. При этом доказано, что 99,9% массы мембраны совершают колебания на первых двух гироскопически связанных кососимметричных модах движения, что позволяет с высокой степенью точностью описать динамическое поведение мембранного диска динамикой одного гироскопа в упругом подвесе.

На основании этого вывода кинетический момент тела 1 можно представить в виде:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{M}\mathbf{J}_1\left(\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{M}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega}\right),$$

где $\mathbf{M}$ – матрица малого поворота вектора, $\mathbf{J}_1$ – приведенный момент инерции паруса, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения аппарата, $\boldsymbol{\Omega}$ – относительная угловая скорость вращения паруса.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu_z & \mu_y \\ \mu_z & 1 & -\mu_x \\ -\mu_y & \mu_x & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} -\Omega + \dot{\mu}_x \\ \dot{\mu}_y \\ \dot{\mu}_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix},$$

где A и C – осевой и экваториальный моменты инерции паруса ($A \simeq 2C$).

После линеаризации, полагая $\mu_x = 0$, с точностью до второго порядка малости получаем кинетический момент паруса:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\mu_z & \mu_y \\ \mu_z & 1 & -\mu_x \\ -\mu_y & \mu_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -\Omega + \dot{\mu}_x \\ \dot{\mu}_y \\ \dot{\mu}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \mu_z & -\mu_y \\ -\mu_z & 1 & \mu_x \\ \mu_y & -\mu_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} A & -C\mu_z & C\mu_y \\ A\mu_z & C & -C\mu_x \\ -A\mu_y & C\mu_x & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\Omega + \dot{\mu}_x + \dot{\varphi}_x \\ \dot{\mu}_y + \dot{\varphi}_y \\ \dot{\mu}_z + \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A\Omega + A\dot{\mu}_x + A\dot{\varphi}_x \\ -A\Omega\mu_z + C\dot{\mu}_y + C\dot{\varphi}_y \\ A\Omega\mu_y + C\dot{\mu}_z + C\dot{\varphi}_z \end{bmatrix}$$

В итоге получим:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -A\Omega + A\dot{\mu}_x + A\dot{\varphi}_x \\ -A\Omega\mu_z + C\dot{\mu}_y + C\dot{\varphi}_y \\ A\Omega\mu_y + C\dot{\mu}_z + C\dot{\varphi}_z \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Кинетический момент тела 2 вычисляется по следующей формуле:

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{J}_2\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\mathbf{H}$$

где $\mathbf{J}_2$ – момент инерции КА, $\mathbf{B}$ – матрица направляющих косинусов малых угловых отклонений ротора силового гироскопа в подвесе Гука, $\mathbf{H}$ – кинетический момент ротора силового гироскопа в подвесе Гука в связанной с ним системе координат,

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 1 & -\beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

После линеаризации с точностью до второго порядка малости и, учитывая, что $\beta_x = 0$, получаем кинетический момент тела 2:

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_x & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 1 & \beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x\dot{\varphi}_x + H \\ J_y\dot{\varphi}_y + H\beta_z \\ J_z\dot{\varphi}_z - H\beta_y \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

Зная кинетические моменты каждого тела (2.12) и (2.13), применяя теорему об изменении кинетического момента ко всему объекту управления и отдельно к парусу, получим:

$$\begin{cases} (\dot{\mathbf{h}}_1 + \dot{\mathbf{h}}_2) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) = \mathbf{M}_{sun} \\ \dot{\mathbf{h}}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_1 = -k^2 C \boldsymbol{\mu} \end{cases} \qquad (2.14)$$

где $k^2 C$ – эффективный коэффициент жесткости,

$$k^2 = \omega_{10}^2 - \Omega^2 \approx \frac{(3+\mu)^2}{2(1+\mu)} \frac{a^2}{R^2} \Omega^2 \approx 0{,}01\, c^{-2}.$$

Пренебрегая моментами сил солнечного давления $\mathbf{M}_{sun}$, воздействующих на парус, получим следующую совокупность уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{const} \\ \dot{\mathbf{h}}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_1 = -k^2 C \boldsymbol{\mu} \end{cases} \qquad (2.15)$$

Расписывая систему уравнений (2.15) покомпонентно,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -A\Omega + A\dot{\mu}_x + A\dot{\varphi}_x \\ -A\Omega\mu_z + C\dot{\mu}_y + C\dot{\varphi}_y \\ A\Omega\mu_y + C\dot{\mu}_z + C\dot{\varphi}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_x\dot{\varphi}_x + H \\ J_y\dot{\varphi}_y + H\beta_z \\ J_z\dot{\varphi}_z - H\beta_y \end{bmatrix} = \mathbf{const} = \begin{bmatrix} h_{x0} \\ h_{y0} \\ h_{z0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A\ddot{\mu}_x + A\ddot{\varphi}_x \\ -A\Omega\dot{\mu}_z + C\ddot{\mu}_y + C\ddot{\varphi}_y \\ A\Omega\dot{\mu}_y + C\ddot{\mu}_z + C\ddot{\varphi}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}_z & \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z & 0 & -\dot{\varphi}_x \\ -\dot{\varphi}_y & \dot{\varphi}_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -A\Omega + A\dot{\mu}_x + A\dot{\varphi}_x \\ -A\Omega\mu_z + C\dot{\mu}_y + C\dot{\varphi}_y \\ A\Omega\mu_y + C\dot{\mu}_z + C\dot{\varphi}_z \end{bmatrix} = -k^2 C \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} \end{cases}$$

получаем уравнения движения объекта управления вокруг осей Oy и Oz:

$$\begin{cases} -A\Omega\mu_z + C\dot{\mu}_y + (C + J_y)\dot{\varphi}_y + H\beta_z = h_{y0} \\ A\Omega\mu_y + C\dot{\mu}_z + (C + J_z)\dot{\varphi}_z - H\beta_y = h_{z0} \\ -A\Omega\dot{\mu}_z + C\ddot{\mu}_y + C\ddot{\varphi}_y - A\Omega\dot{\varphi}_z = -k^2 C\mu_y \\ A\Omega\dot{\mu}_y + C\ddot{\mu}_z + C\ddot{\varphi}_z + A\Omega\dot{\varphi}_y = -k^2 C\mu_z \end{cases} \tag{2.16}$$

Полученную систему уравнений дополним законом управления:

$\dot{\beta}_z = K_1\varphi_y + K_2\dot{\varphi}_y + K_3\hat{\dot{\mu}}_y$ – вокруг оси OY и

$\dot{\beta}_y = -\left(K_1\varphi_z + K_2\dot{\varphi}_z + K_3\hat{\dot{\mu}}_z\right)$ – вокруг оси OZ,

где $\dot{\beta}_z$ и $\dot{\beta}_y$ – угловые скорости прецессии ротора силового гироскопа вокруг соответствующих осей, K_1, K_2, K_3 – коэффициенты усиления обратной связи по состоянию, численные значения которых находятся из условий асимптотической устойчивости замкнутой системы, $\hat{\dot{\mu}}_y$, $\hat{\dot{\mu}}_z$ – оценки угловых скоростей колебаний мембранного диска паруса, полученных с помощью адаптивного наблюдателя [12].

Адаптивный наблюдатель применяется в виду того, что переменные $\dot{\mu}_y$ и $\dot{\mu}_z$ не могут быть измерены датчиковой аппаратурой. При проведении моделирования предполагалось, что оценки полностью соответствуют фактическим угловым скоростям колебаний ($\hat{\dot{\mu}}_y = \dot{\mu}_y$ и $\hat{\dot{\mu}}_z = \dot{\mu}_z$).

Из системы уравнений (2.16) следует, что стационарное движение при равномерной прецессии, например вокруг оси OY, описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} -A\Omega\mu_z^{np} + \left(C + J_y\right)\dot{\varphi}_y^{np} + H\beta_z^{np} = 0 \\ A\Omega\dot{\varphi}_y^{np} = -k^2 C\mu_z^{np} \end{cases} \tag{2.17}$$

где $\dot{\varphi}_y^{np}$ – угловая скорость прецессионного движения вокруг оси OY объекта управления (скорость программного разворота КА с вращающимся солнечным парусом), β_z^{np} – установившийся угол отклонения вокруг оси OZ ротора силового гироскопа в подвесе Гука, обеспечивающий прецессионное движение

КА, и μ_z^{np} – угол отклонения плоскости вращения паруса вокруг оси OZ при стационарной прецессии.

Решая систему уравнений (2.17) относительно μ_z^{np} с учетом выражения для k^2, получим:

$$\mu_z^{np} = \frac{H}{A\Omega + \left(C + J_y\right)\frac{(3+\mu)^2}{4(1+\mu)}\frac{a^2}{R^2}\Omega}\beta_z^{np}$$

где $\mu = 0,4$ – коэффициент Пуассона материала мембранной пленки паруса.

Геометрическая интерпретация полученного соотношения отражена на рисунке 2.2. Так как $H = A\Omega$, то знаки μ_z^{np} и β_z^{np} совпадают, а $\left|\mu_z^{np}\right| < \left|\beta_z^{np}\right|$.

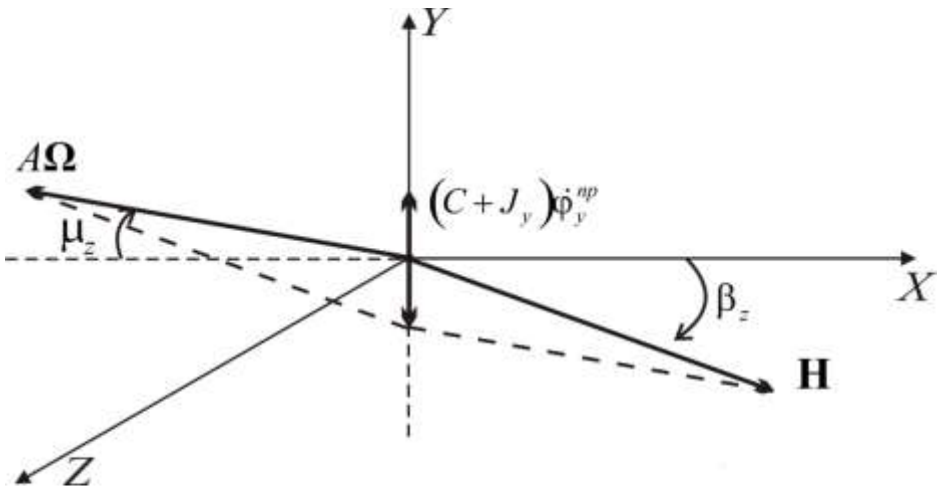


Рис. 2.2: Гиростатическая схема программного разворота вокруг оси OY КА с солнечным парусом в установившемся режиме

2.3 Результаты математического моделирования углового движения КА с солнечным парусом

2.3.1 Расчетная схема математического моделирования

Рассмотрим систему уравнений, полученную при применении теоремы об изменении кинетического момента для солнечного паруса.

Зная кинетический момент солнечного паруса в проекциях на связанные оси (2.12), применяя теорему об изменении кинетического момента отдельно к парусу, и пренебрегая силами солнечного давления, воздействующими на парус, получим систему уравнений движения солнечного паруса вокруг осей OY и OZ:

$$\begin{cases} -A\Omega\dot{\mu}_z + C\ddot{\mu}_y + C\ddot{\varphi}_y - A\Omega\dot{\varphi}_z = -k^2 C\mu_y \\ A\Omega\dot{\mu}_y + C\ddot{\mu}_z + C\ddot{\varphi}_z + A\Omega\dot{\varphi}_y = -k^2 C\mu_z \end{cases} \tag{2.18}$$

Учитывая соотношение между осевым и экваториальным моментами инерции паруса ($A = 2C$), представим систему (2.18) в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{\mu}_y - 2\Omega\dot{\mu}_z + k^2\mu_y = -\ddot{\varphi}_y + 2\Omega\dot{\varphi}_z \\ \ddot{\mu}_z + 2\Omega\dot{\mu}_y + k^2\mu_z = -\ddot{\varphi}_z - 2\Omega\dot{\varphi}_y \end{cases} \tag{2.19}$$

Вводя вектор состояния $\mathbf{X}(t) = \left[\mu_y(t) \;\; \dot{\mu}_y(t) \;\; \mu_z(t) \;\; \dot{\mu}_z(t)\right]^T$, запишем систему (2.19) в виде неоднородного матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \dot{\mathbf{F}}(t)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k^2 & 0 & 0 & 2\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\Omega & -k^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi}_y + 2\Omega\varphi_z \\ 0 \\ -\dot{\varphi}_z - 2\Omega\varphi_y \end{bmatrix}$$

Как известно, решение неоднородного уравнения через матричную экспоненту [55] имеет вид:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0) + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\xi}\dot{\mathbf{F}}(\xi)d\xi \tag{2.20}$$

Решая характеристическое уравнение однородной системы уравнений, получим собственные значения:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + k^2 & -2\Omega\lambda \\ 2\Omega\lambda & \lambda^2 + k^2 \end{vmatrix} = (\lambda^2 + k^2)^2 + 4\Omega^2\lambda^2 = \lambda^4 + 2(2\Omega^2 + k^2)\lambda^2 + k^4 = 0,$$

$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$, где $\omega_1 = \sqrt{\Omega^2 + k^2} - \Omega$, $\omega_2 = \sqrt{\Omega^2 + k^2} + \Omega$.

Тогда решение однородной системы уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \mu_y = A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t) + C_1\cos(\omega_2 t) + D_1\sin(\omega_2 t) \\ \mu_z = B_1\cos(\omega_1 t) - A_1\sin(\omega_1 t) + D_1\cos(\omega_2 t) - C_1\sin(\omega_2 t) \end{cases} \tag{2.21}$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 – постоянные коэффициенты, которые находятся из начальных условий:

$$\begin{cases} \mu_y(0) = \mu_y^0 = A_1 + C_1 \\ \mu_z(0) = \mu_z^0 = B_1 + D_1 \\ \dot{\mu}_y(0) = \dot{\mu}_y^0 = B_1\omega_1 + D_1\omega_2 \\ \dot{\mu}_z(0) = \dot{\mu}_z^0 = -A_1\omega_1 - C_1\omega_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = (\dot{\mu}_z^0 + \omega_2\mu_y^0)\big/(\omega_2 - \omega_1) \\ B_1 = (-\dot{\mu}_y^0 + \omega_2\mu_z^0)\big/(\omega_2 - \omega_1) \\ C_1 = (-\dot{\mu}_z^0 - \omega_1\mu_y^0)\big/(\omega_2 - \omega_1) \\ D_1 = (\dot{\mu}_y^0 - \omega_1\mu_z^0)\big/(\omega_2 - \omega_1) \end{cases} \tag{2.22}$$

Решение однородной системы уравнений $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0)$, где

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\begin{bmatrix} \omega_2 c_1 - \omega_1 c_2 & -s_1 + s_2 & \omega_2 s_1 - \omega_1 s_2 & c_1 - c_2 \\ -\omega_1\omega_2(s_1 - s_2) & -\omega_1 c_1 + \omega_2 c_2 & \omega_1\omega_2(c_1 - c_2) & -\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2 \\ -\omega_2 s_1 + \omega_1 s_2 & -c_1 + c_2 & \omega_2 c_1 - \omega_1 c_2 & -s_1 + s_2 \\ -\omega_1\omega_2(c_1 - c_2) & \omega_1 s_1 - \omega_2 s_2 & -\omega_1\omega_2(s_1 - s_2) & -\omega_1 c_1 + \omega_2 c_2 \end{bmatrix}$$

в обозначениях $c_1 = \cos(\omega_1 t)$, $c_2 = \cos(\omega_2 t)$, $s_1 = \sin(\omega_1 t)$, $s_2 = \sin(\omega_2 t)$.

Чтобы найти решение неоднородной системы уравнений, найдем решение на малом промежутке времени $t \in [t_0, t_0 + h]$, где h – такт интегрирования разностного уравнения. После некоторых преобразований, считая, что $\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{F}(t) = \mathbf{const}$ на малом интервале времени t, получаем:

$$\mathbf{X}(t)=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0)+e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}e^{-\mathbf{A}\xi}\dot{\mathbf{F}}(\xi)d\xi=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0)+e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}e^{-\mathbf{A}\xi}d\mathbf{F}(\xi)=$$

$$=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0)+e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}\xi}\,\mathbf{F}(\xi)\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}(e^{-\mathbf{A}\xi})'\mathbf{F}(\xi)d\xi\right)=$$

$$=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0)+e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{F}(t)-e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{F}(t_0)-\left(\int_{t_0}^{t}(e^{-\mathbf{A}\xi})'d\xi\right)\mathbf{F}(t)\right)=$$

$$=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0)+\mathbf{F}(t)-e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{F}(t_0)-e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}\xi}\Big|_{t_0}^{t}\right)\mathbf{F}(t)=$$

$$=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\left[\mathbf{X}(t_0)-\mathbf{F}(t_0)\right]+\mathbf{F}(t)-e^{\mathbf{A}t}\left(e^{-\mathbf{A}t}-e^{-\mathbf{A}t_0}\right)\mathbf{F}(t)=$$

$$=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\left[\mathbf{X}(t_0)-\mathbf{F}(t_0)\right]+\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(t)+e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{F}(t)=$$

$$=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\left[\mathbf{X}(t_0)+\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(t_0)\right]$$

Таким образом, разностное уравнение, соответствующее неоднородному дифференциальному уравнению (2.19), принимает вид:

$$\mathbf{X}(n+1)=e^{\mathbf{A}h}\left[\mathbf{X}(n)+\mathbf{F}(n+1)-\mathbf{F}(n)\right] \tag{2.23}$$

Перечисленная ниже совокупность уравнений полностью описывает расчетную схему математического моделирования динамического поведения космической платформы с вращающимся солнечным парусом.

$$\begin{cases}-A\Omega\mu_z+C\dot{\mu}_y+(C+J_y)\dot{\varphi}_y+H\beta_z=0\\ A\Omega\mu_y+C\dot{\mu}_z+(C+J_z)\dot{\varphi}_z-H\beta_y=0\\ \mathbf{X}(n+1)=e^{\mathbf{A}h}\left(\mathbf{X}(n)+\mathbf{F}(n+1)-\mathbf{F}(n)\right)\\ \dot{\beta}_z=K_1\varphi_y+K_2\dot{\varphi}_y+K_3\dot{\mu}_y\\ \dot{\beta}_y=-\left(K_1\varphi_z+K_2\dot{\varphi}_z+K_3\dot{\mu}_z\right)\end{cases}$$

Моделирование реализовано в программных пакетах MATLAB 7.9.0 и Simulink. Блок-схема моделирования с параметрами модели представлена на рис. 2.3.

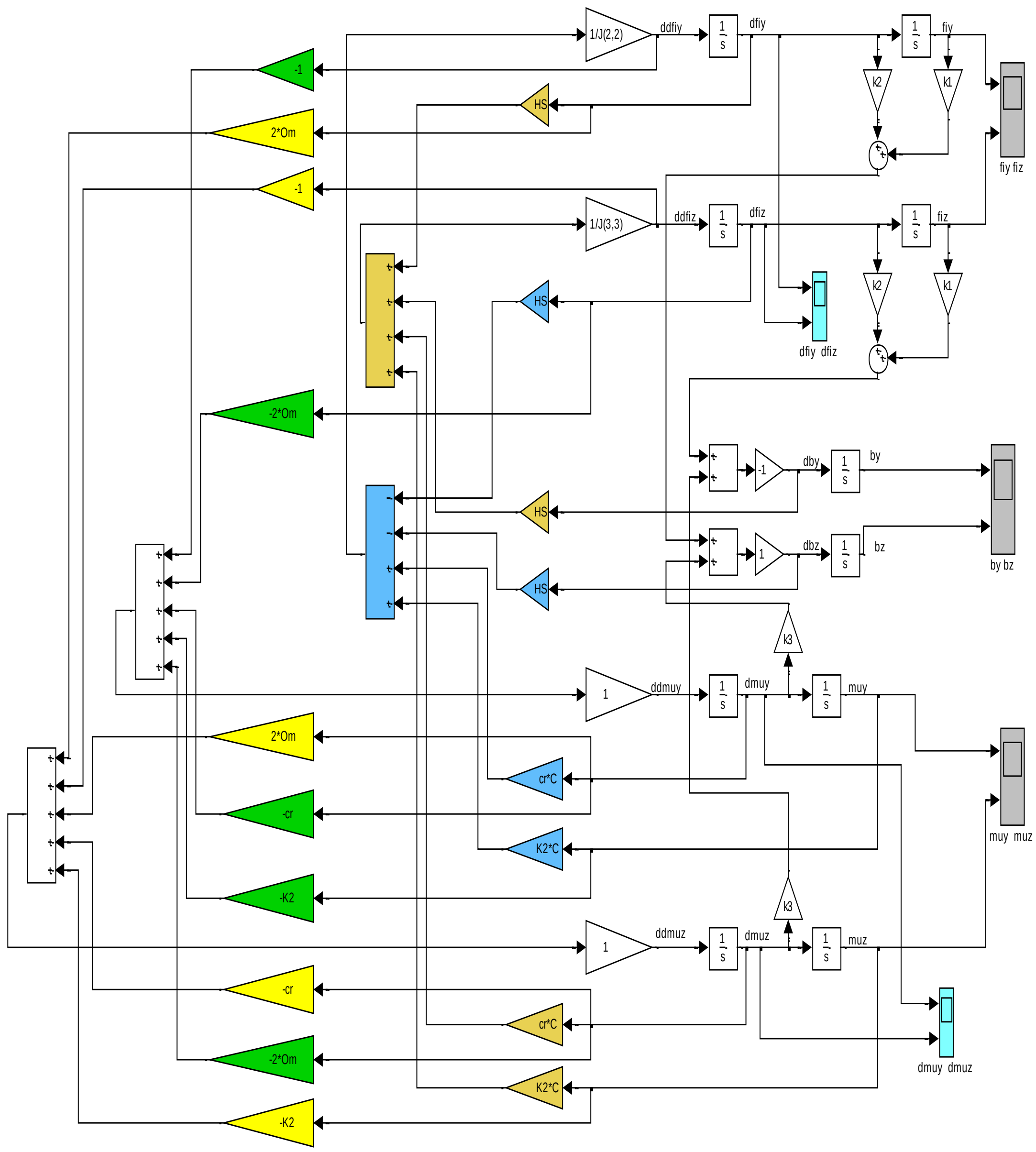


Рис. 2.3: Блок-схема моделирования и параметры модели

При математическом моделировании коэффициенты в законе управления скоростью прецессии силового гироскопа в подвесе Гука имели следующие значения:

$$K_1 = 0{,}8\ c^{-1}; \quad K_2 = 3{,}6; \quad K_3 = 1{,}2.$$

Необходимо отметить, что исследования проведены без учета естественного демпфирования колебаний мембранного диска солнечного паруса, т.е. рассматривался вариант активного демпфирования.

2.3.2 Гашение начальных угловых скоростей

Динамическое поведение космической платформы с солнечным парусом в режиме гашения начальных угловых скоростей [56] при активном демпфировании упругих колебаний мембранного диска солнечного паруса показано на рисунках 2.4–2.9. Для иллюстрации переходного процесса на начальном этапе демпфирования на рисунках 2.10–2.15 приведены те же графики в увеличенном временном масштабе.

В представленной реализации математического моделирования режима гашения угловых скоростей значения начальных угловых скоростей вокруг осей OY и OZ были заданы равными – по 0,1 Град/с.

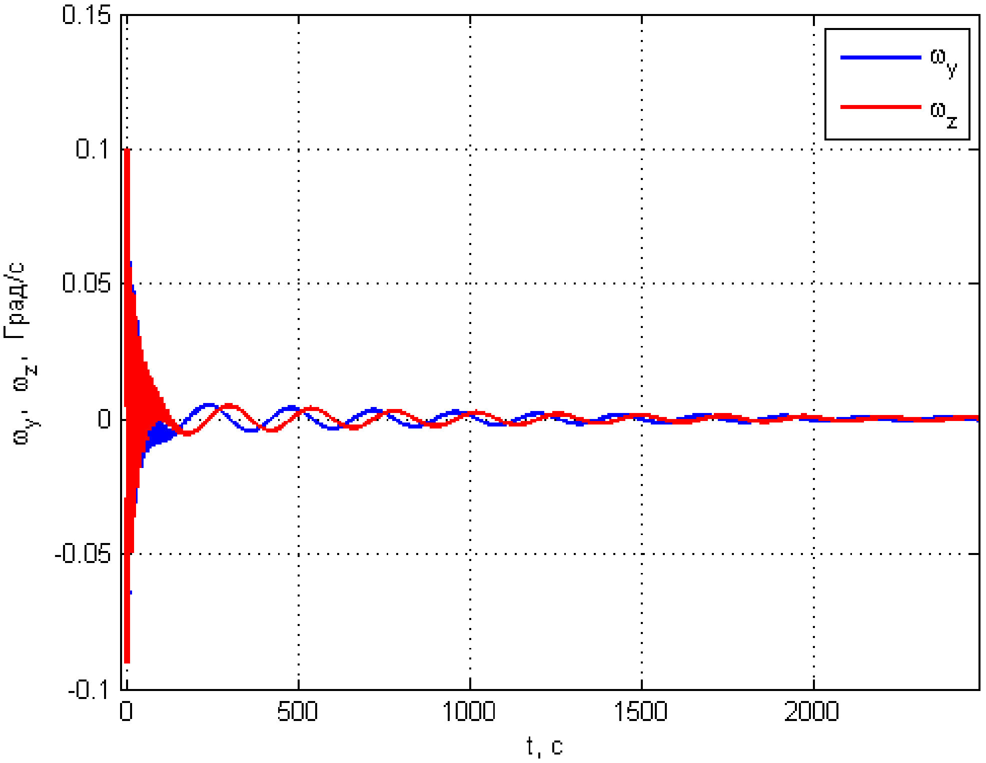


Рис. 2.4: Поведение компонент абсолютной угловой скорости КА вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме гашения

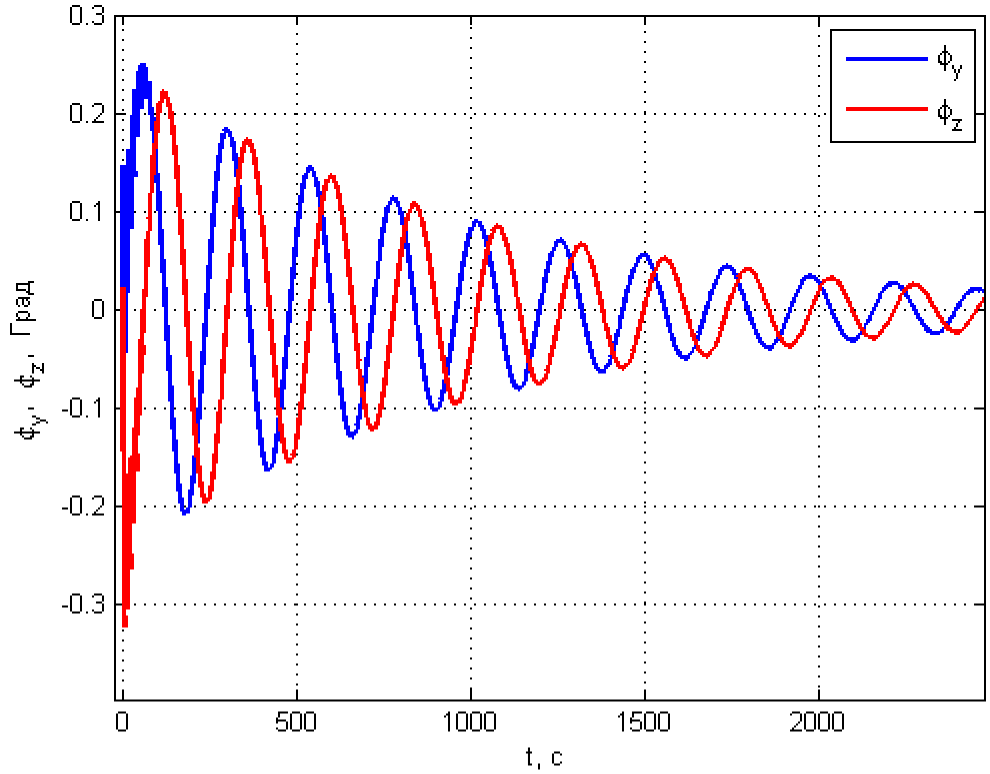


Рис. 2.5: Поведение угловых компонент положения КА вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме гашения

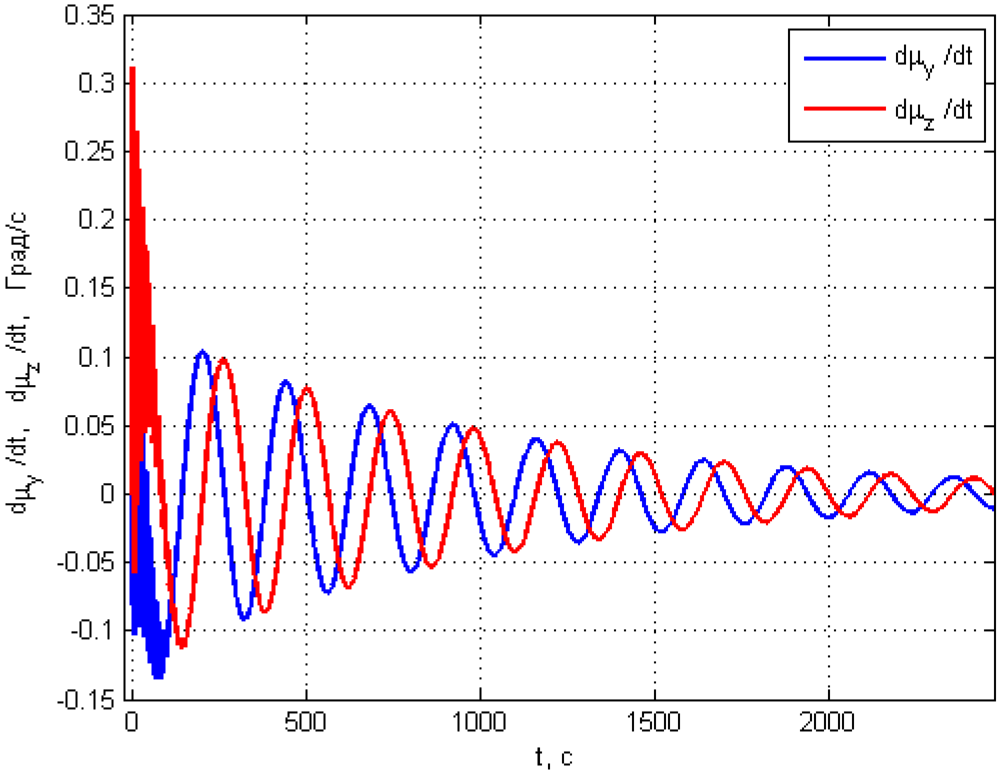


Рис. 2.6: Угловая скорость плоскости вращения солнечного паруса относительно связанного базиса вокруг осей OY и OZ в режиме гашения

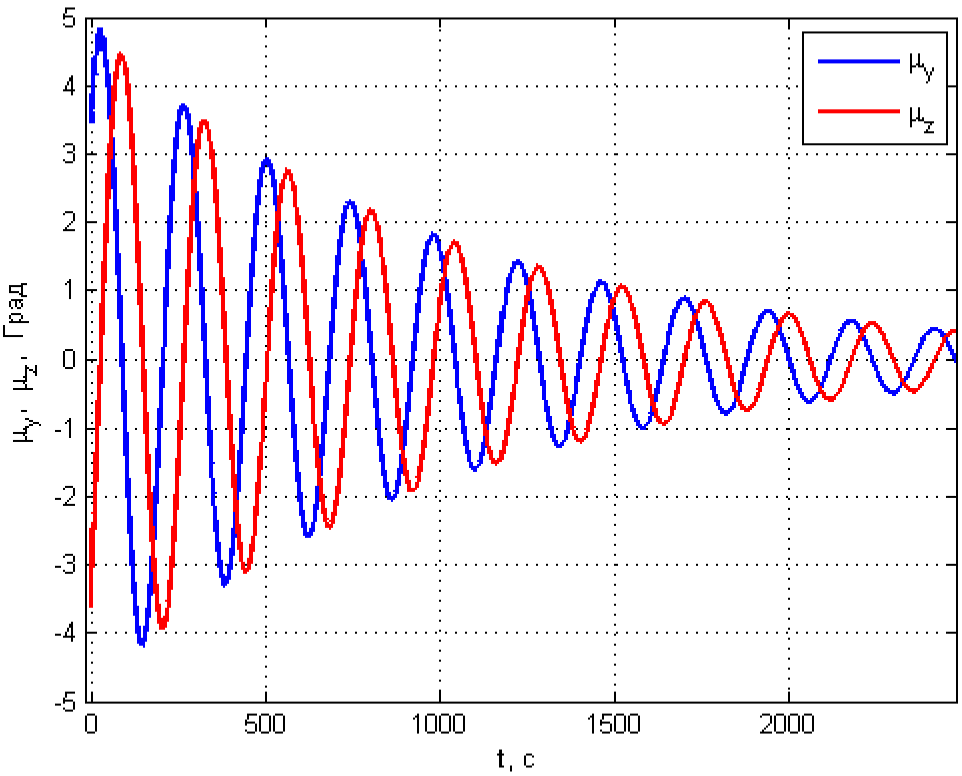


Рис. 2.7: Угловое отклонение солнечного паруса вокруг осей OY и OZ в режиме гашения

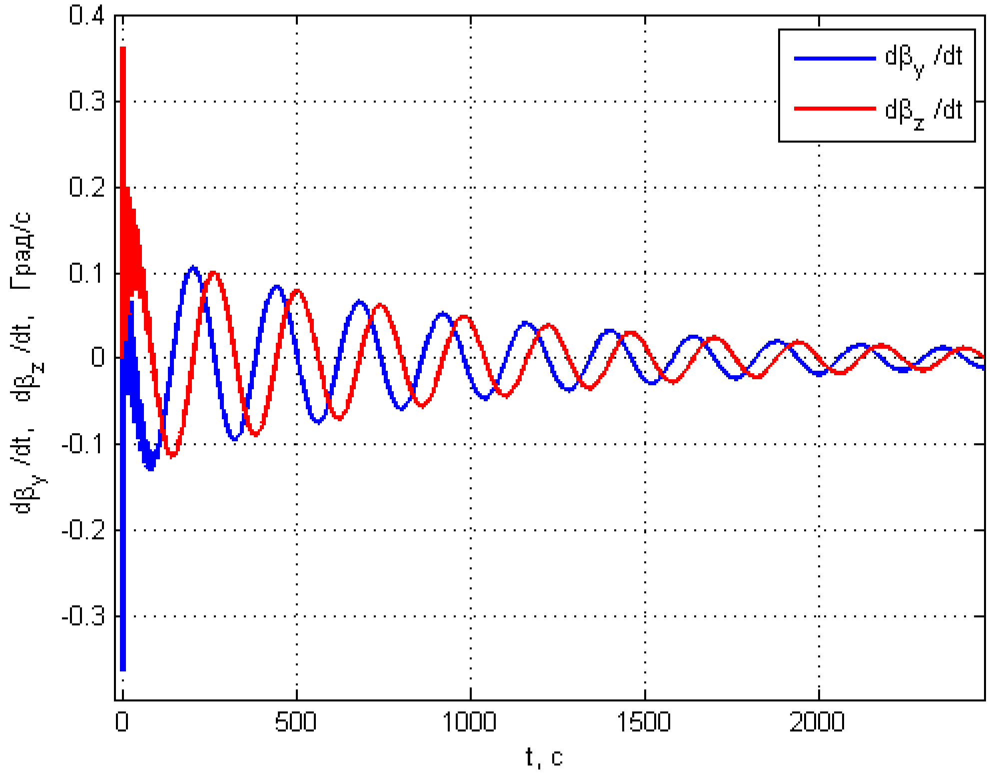


Рис. 2.8: Скорости прецессии силового гироскопа в подвесе Гука вокруг осей OY и OZ в режиме гашения

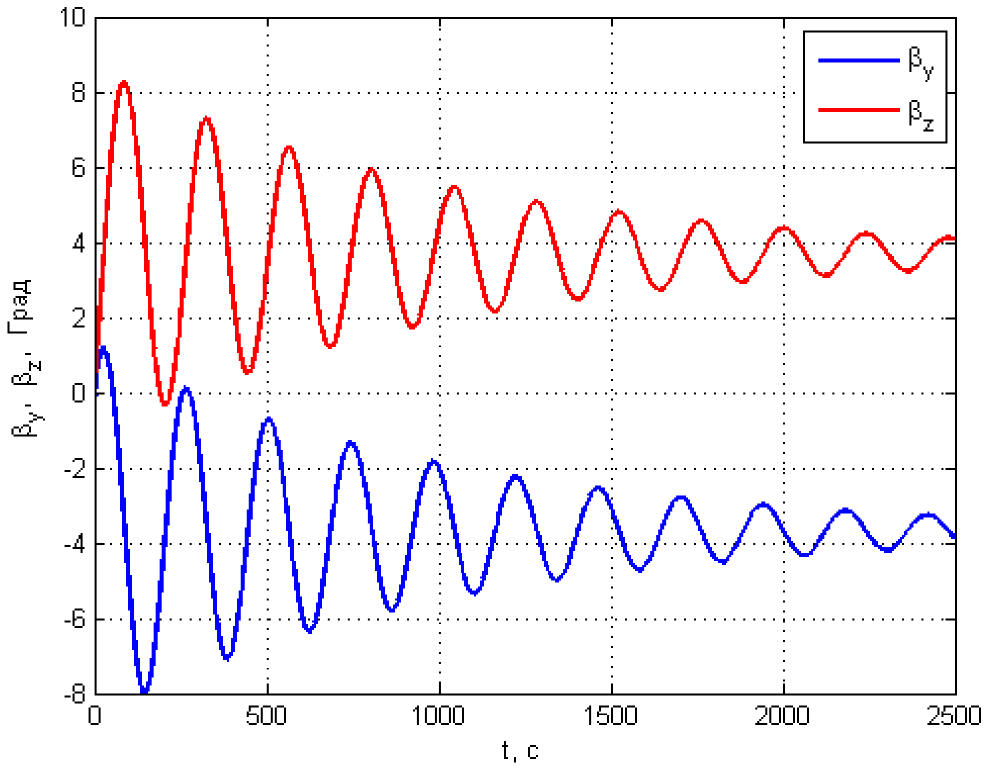


Рис. 2.9: Углы отклонения ротора силового гироскопа в подвесе Гука относительно связанного базиса вокруг осей OY и OZ в режиме гашения

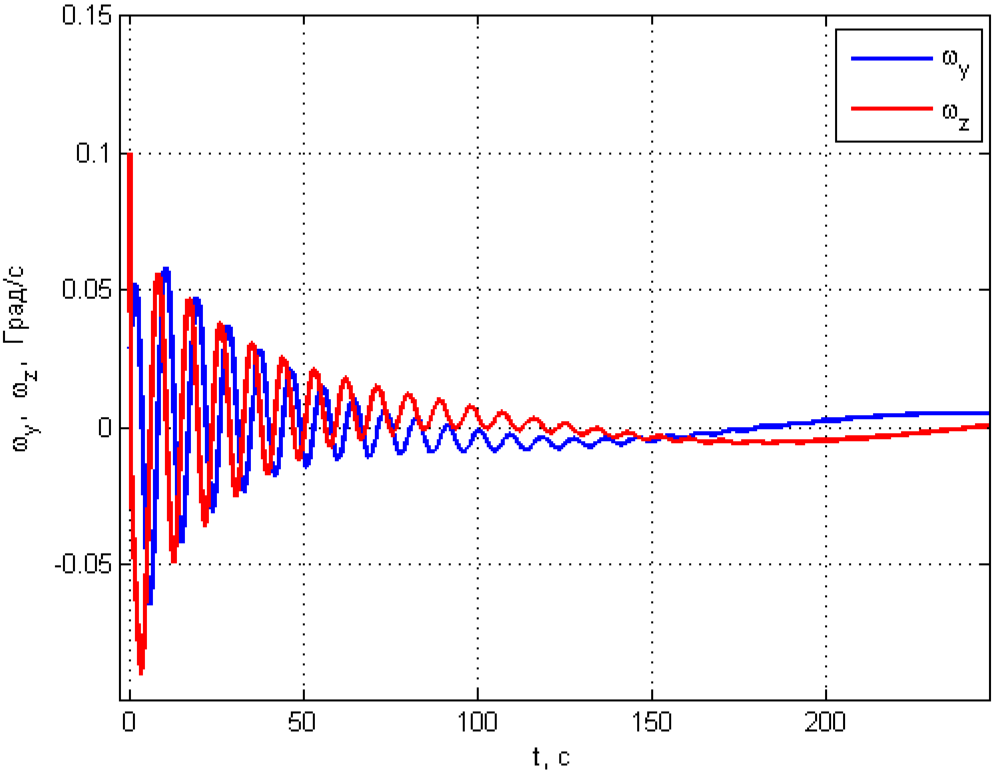


Рис. 2.10: Поведение компонент абсолютной угловой скорости КА вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме гашения

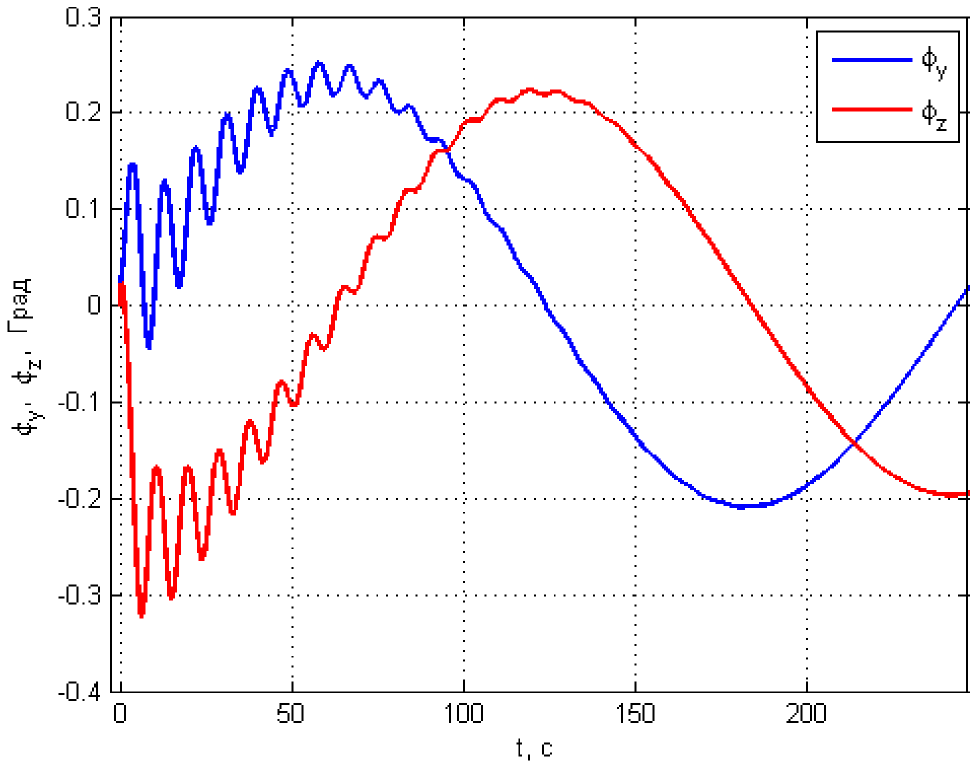


Рис. 2.11: Поведение угловых компонент положения КА вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме гашения

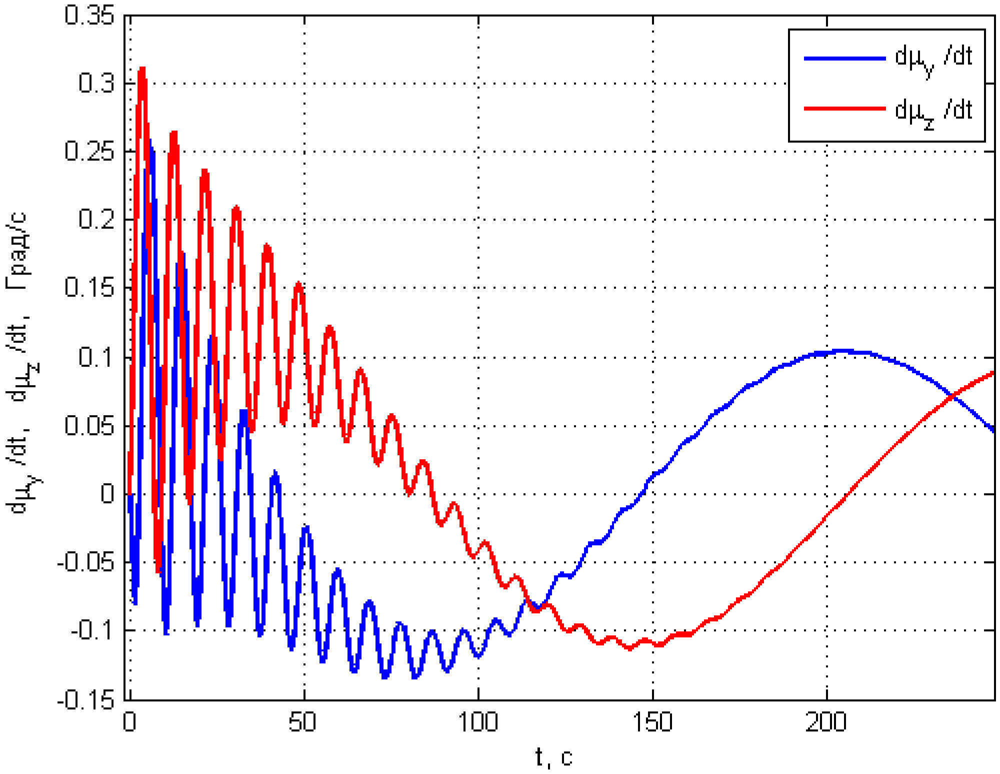


Рис. 2.12: Угловая скорость плоскости вращения солнечного паруса относительно связанного базиса вокруг осей OY и OZ в режиме гашения

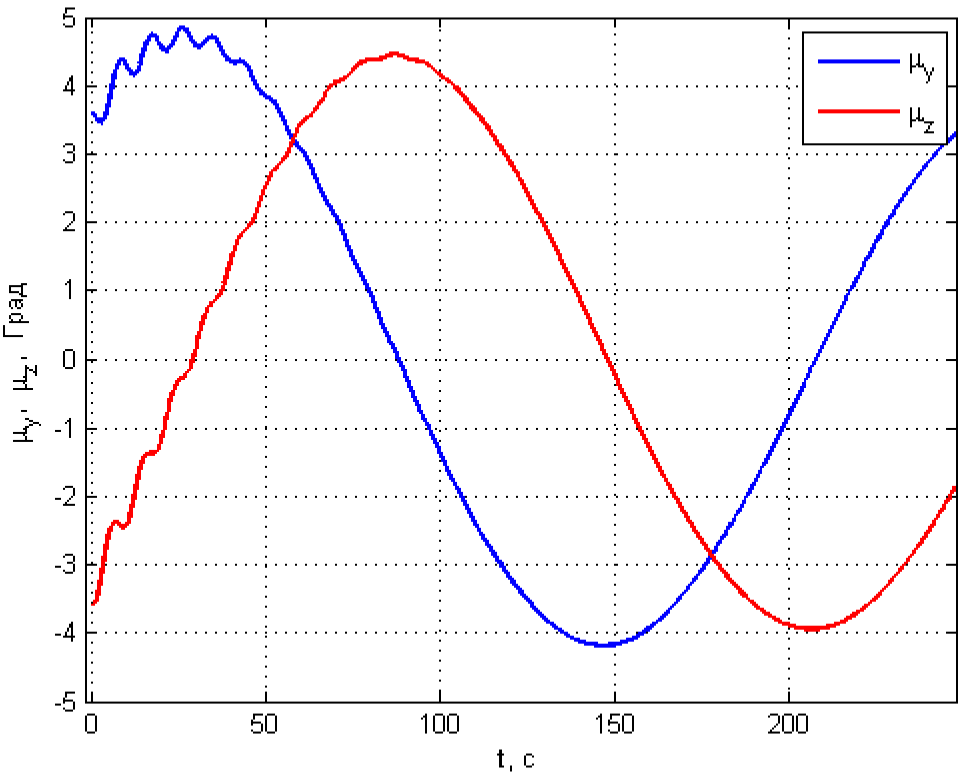


Рис. 2.13: Угловое отклонение солнечного паруса вокруг осей OY и OZ в режиме гашения

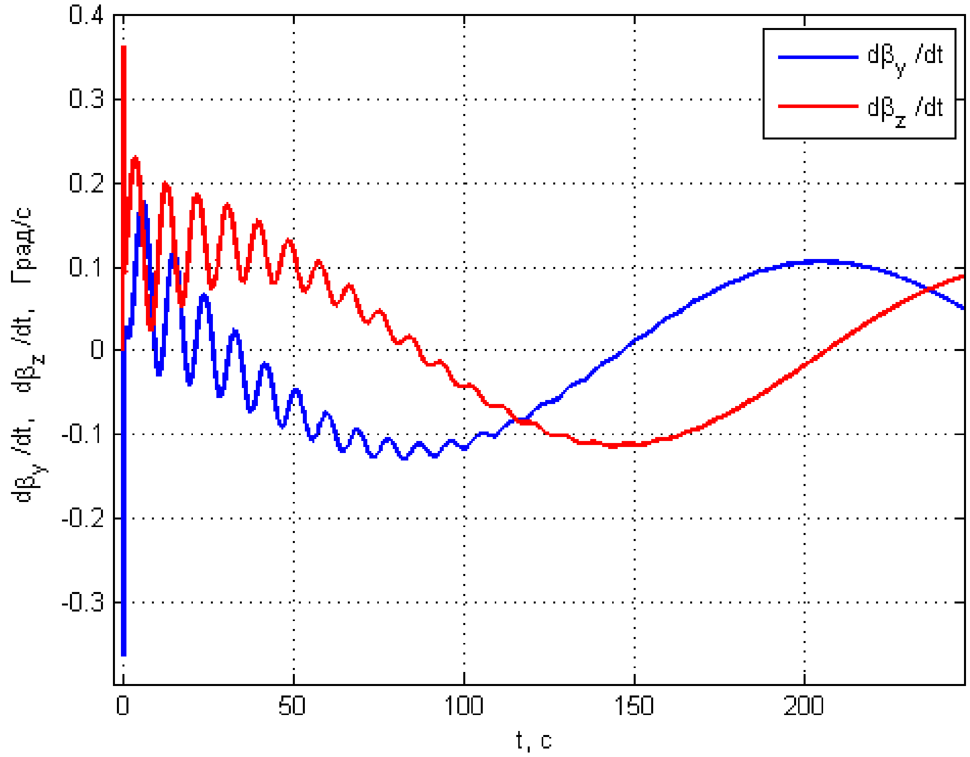


Рис. 2.14: Скорости прецессии силового гироскопа в подвесе Гука вокруг осей OY и OZ в режиме гашения

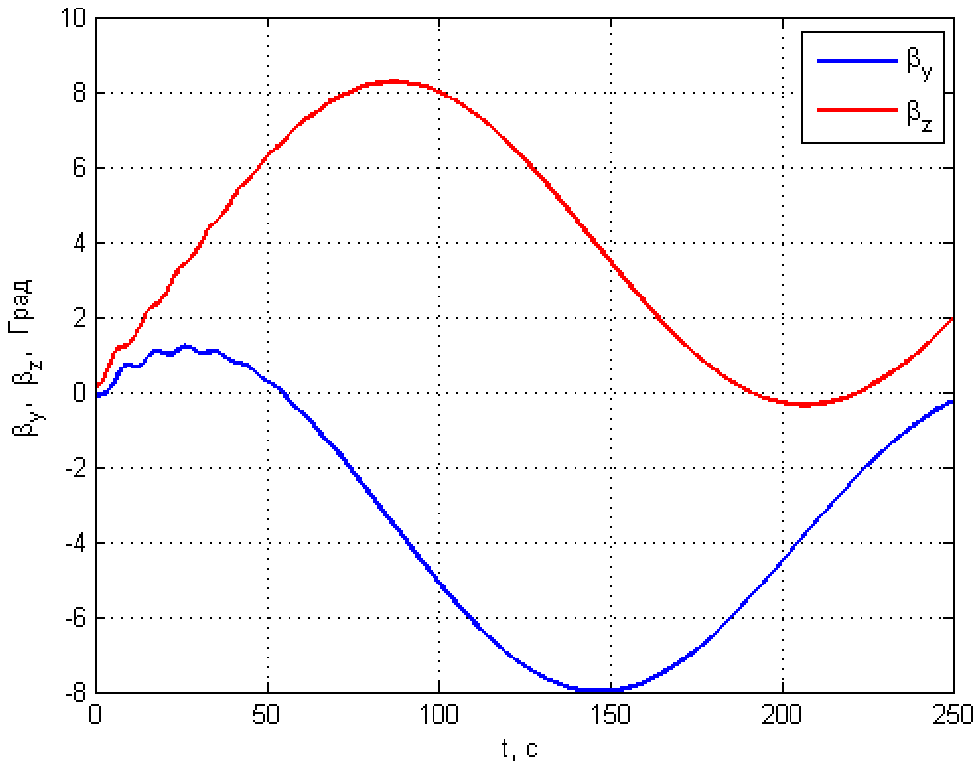


Рис. 2.15: Углы отклонения ротора силового гироскопа в подвесе Гука относительно связанного базиса вокруг осей OY и OZ в режиме гашения

2.3.3 Программные развороты

Динамическое поведение космической платформы с солнечным парусом в режиме программных разворотов показано на рисунках 2.16–2.21. Для иллюстрации переходного процесса на начальном этапе программного разворота на рисунках 2.22–2.27 приведены те же графики в увеличенном временном масштабе.

При математическом моделировании режима программного разворота угол разворота вокруг оси OY был задан равным 90°. Скорость разворота принималась равной 0,06 Град/с.

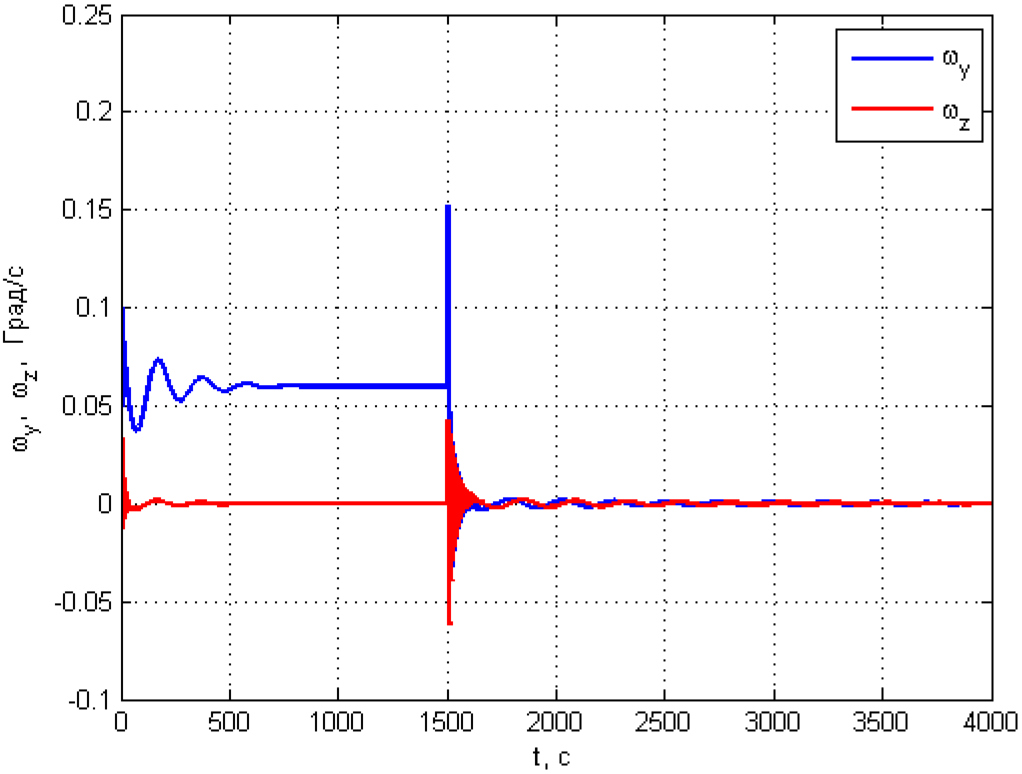


Рис. 2.16: Поведение компонент абсолютной угловой скорости КА вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме программного разворота

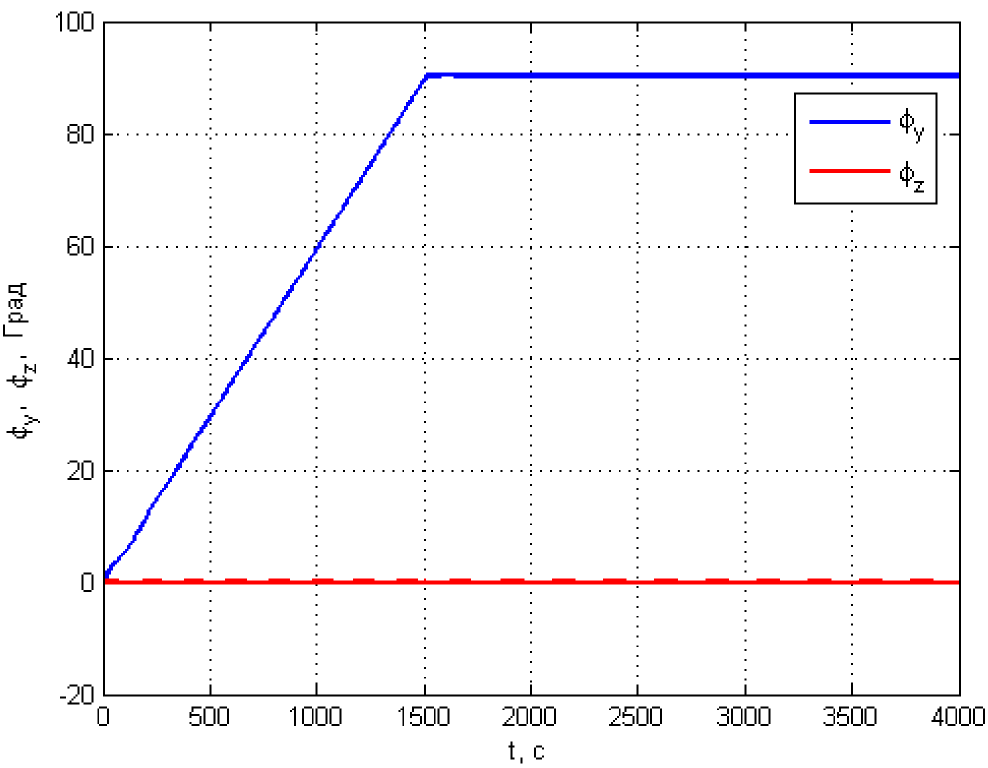


Рис. 2.17: Поведение угловых компонент положения КА вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме программного разворота.

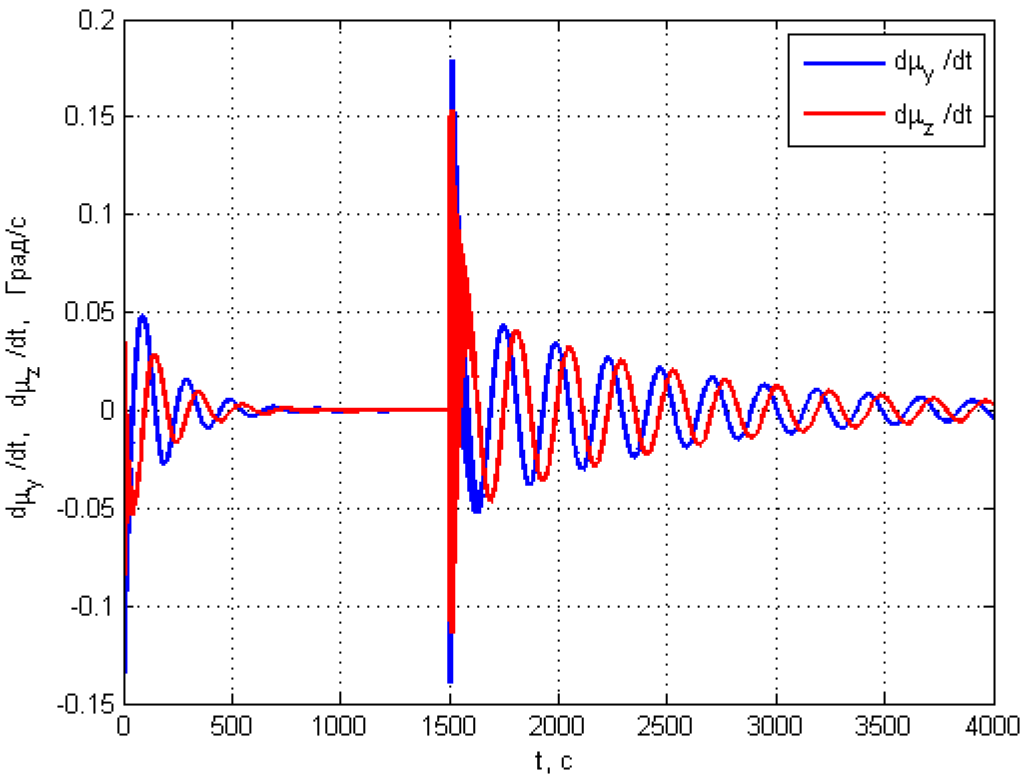


Рис. 2.18: Угловая скорость плоскости вращения солнечного паруса относительно связанного базиса вокруг осей OY и OZ в режиме программного разворота

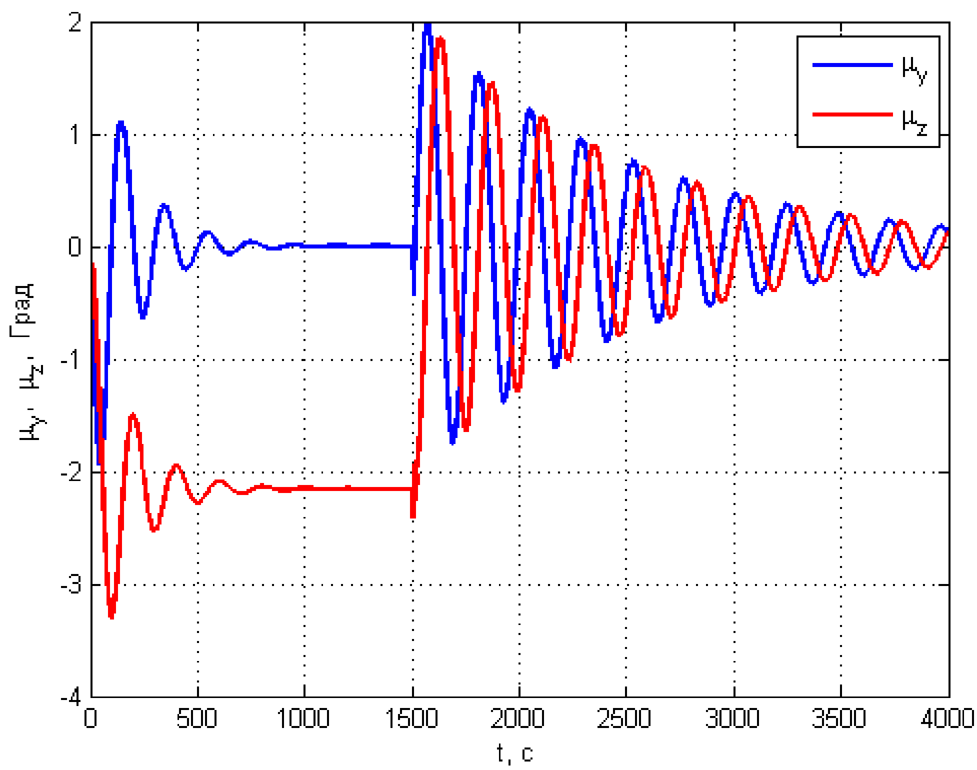


Рис. 2.19: Угловое отклонение солнечного паруса вокруг осей OY и OZ в режиме программного разворота

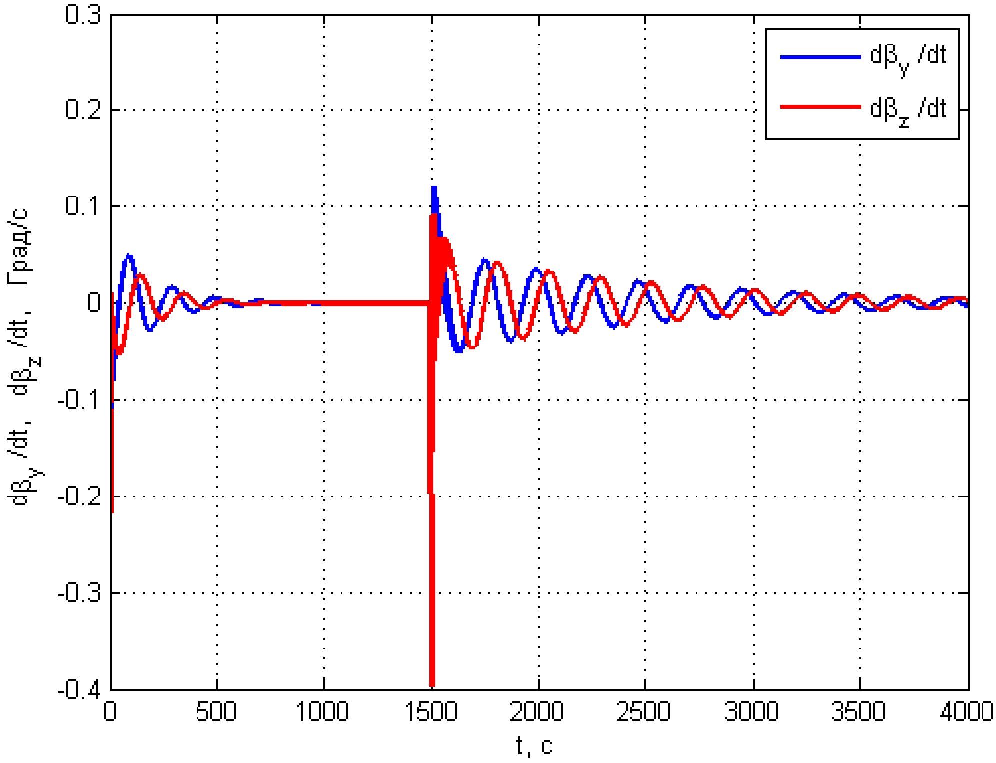


Рис. 2.20: Скорости прецессии силового гироскопа в подвесе Гука вокруг осей OY и OZ в режиме программного разворота

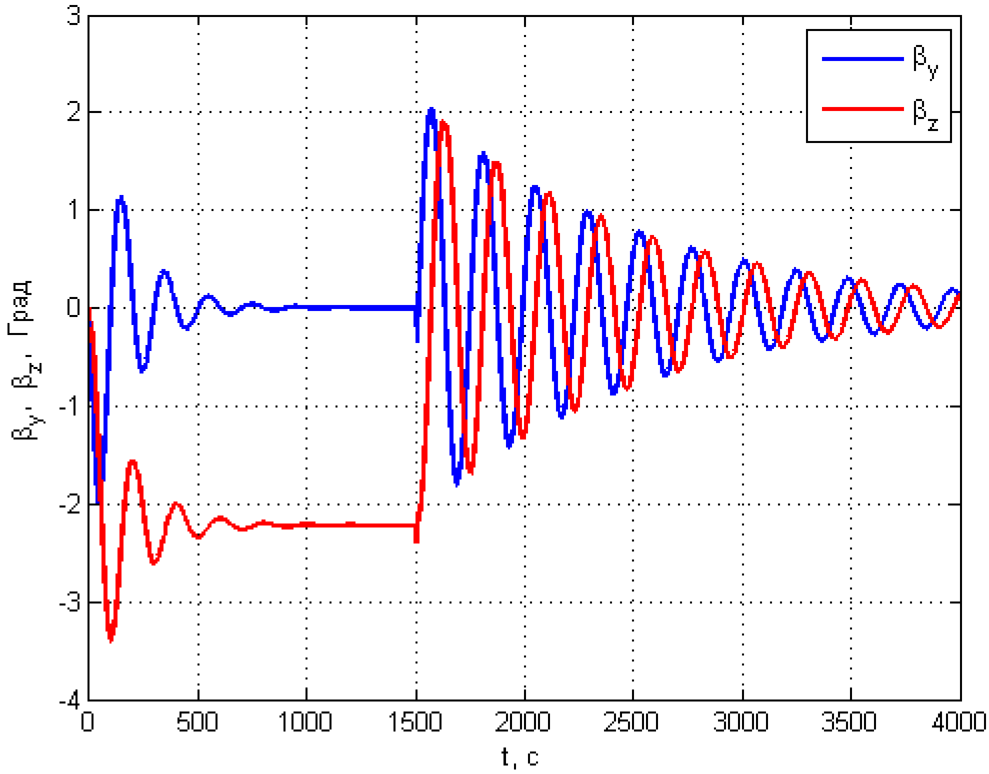


Рис. 2.21: Углы отклонения ротора силового гироскопа в подвесе Гука относительно связанного базиса вокруг осей OY и OZ в режиме программного разворота

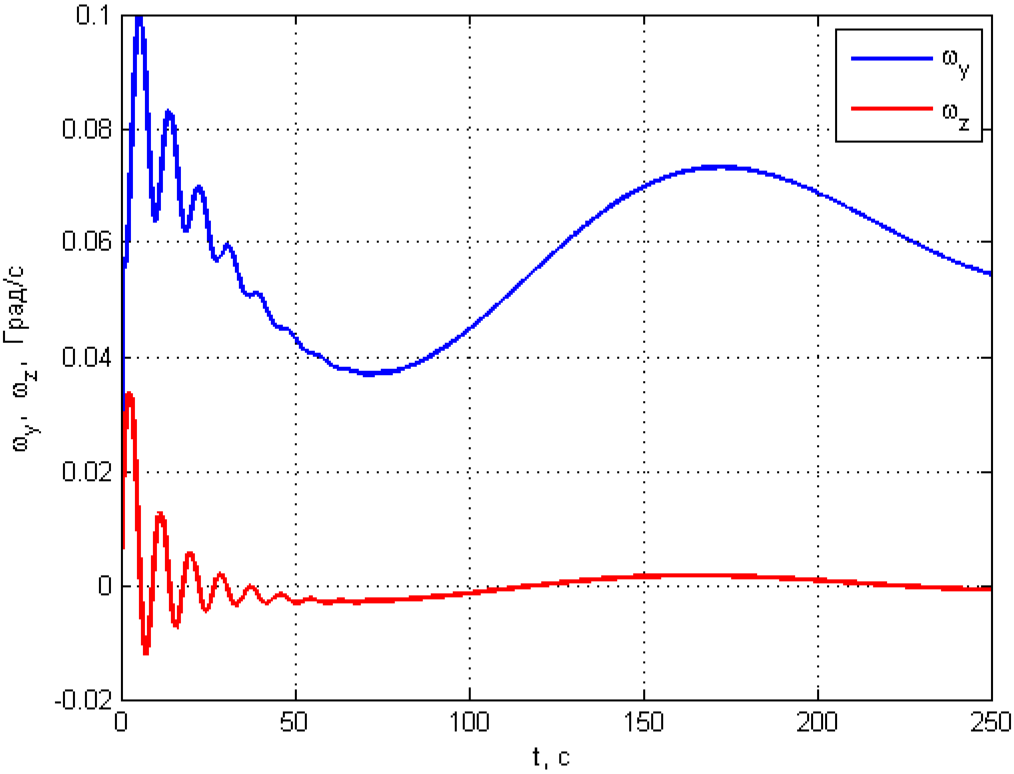


Рис. 2.22: Поведение компонент абсолютной угловой скорости КА вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме программного разворота

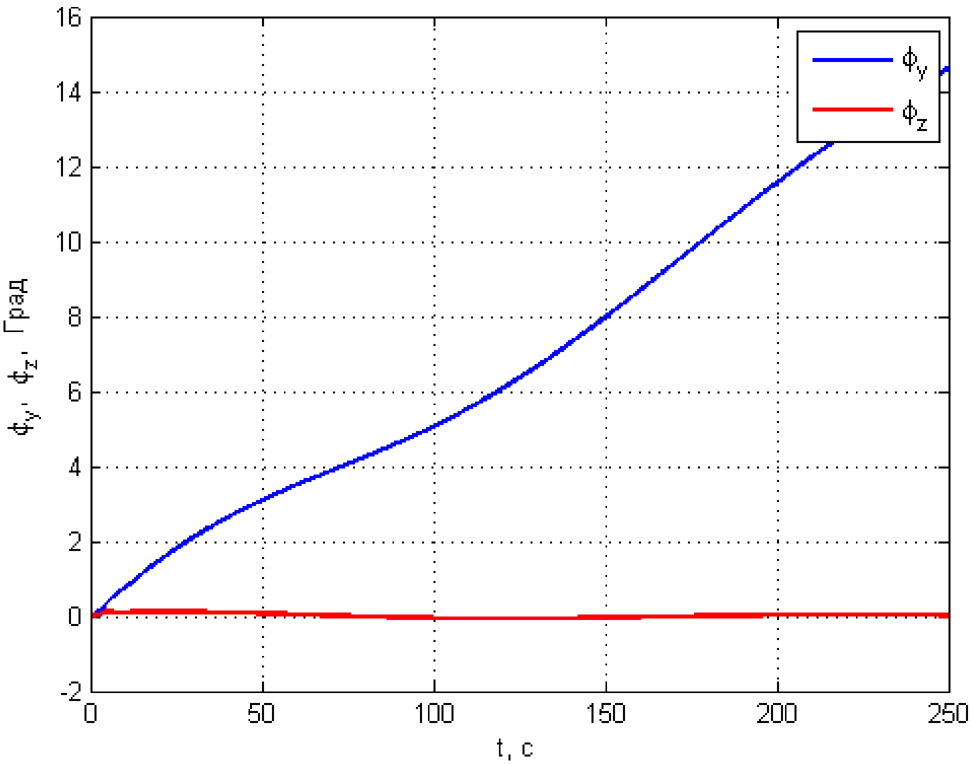


Рис. 2.23: Поведение угловых компонент положения КА вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме программного разворота

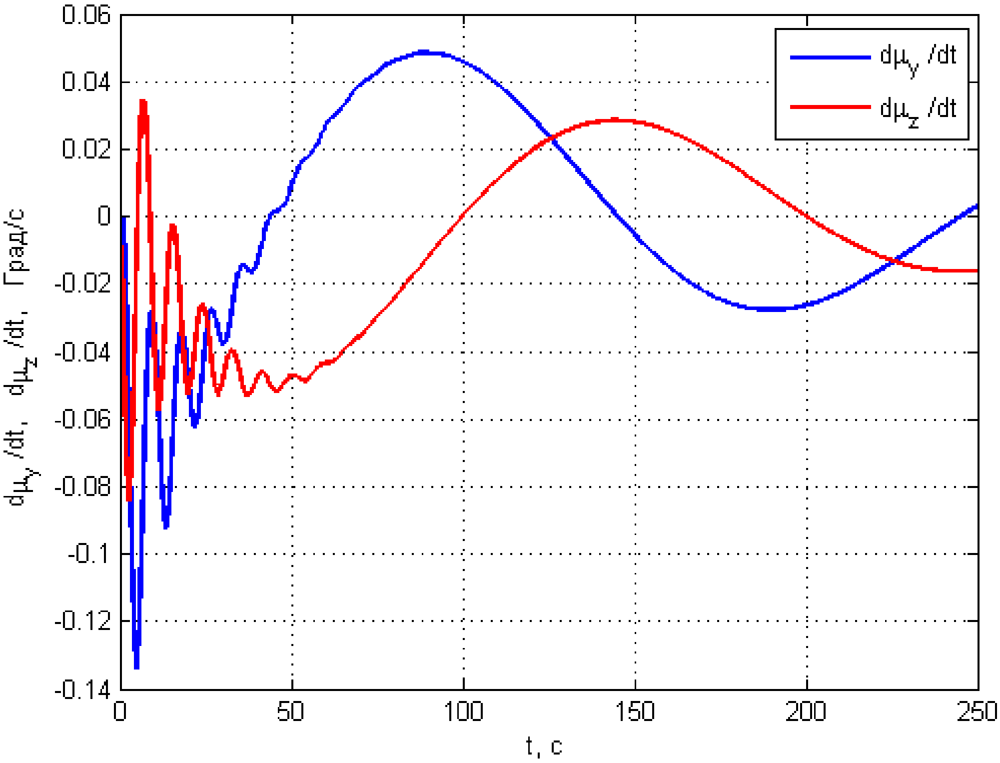


Рис. 2.24: Угловая скорость плоскости вращения солнечного паруса относительно связанного базиса вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме программного разворота

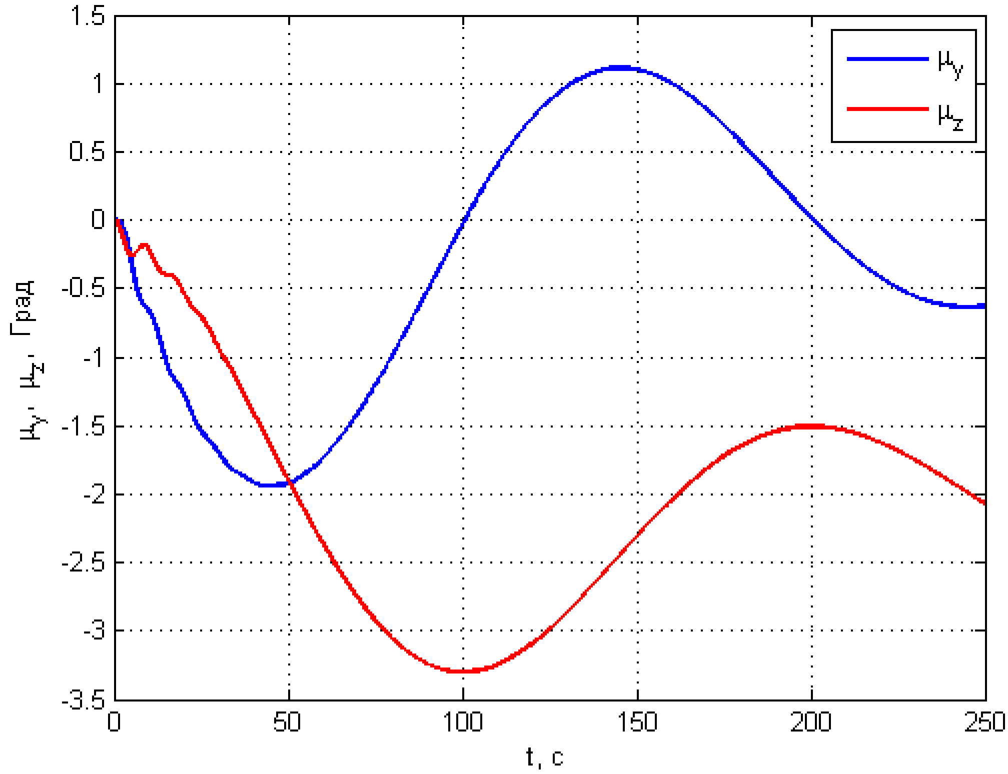


Рис. 2.25: Угловое отклонение солнечного паруса вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме программного разворота

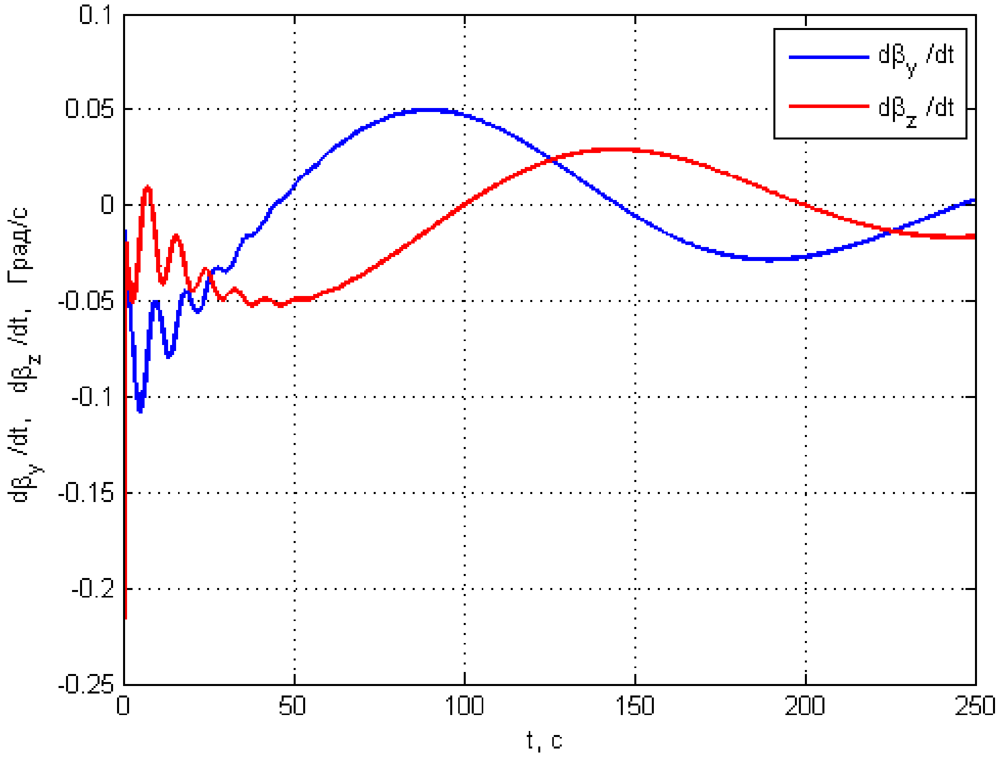


Рис. 2.26: Скорости прецессии силового гироскопа в подвесе Гука вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме программного разворота

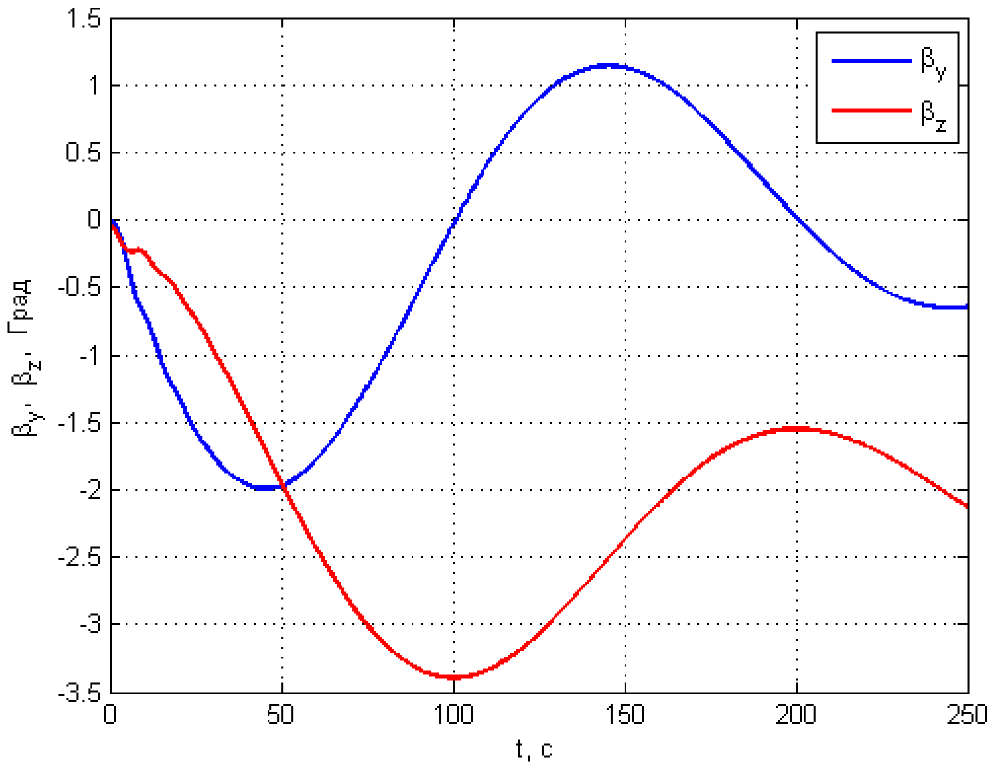


Рис. 2.27: Углы отклонения ротора силового гироскопа в подвесе Гука относительно связанного базиса вокруг осей *OY* и *OZ* в режиме программного разворота

2.3.4 Анализ результатов математического моделирования

Из рисунков 2.4–2.27 видно, что при выбранном законе управления и параметрах конструкции космической платформы с вращающимся солнечным парусом углы отклонения плоскости вращения мембранного диска паруса в режиме активного демпфирования не превосходят 5 градусов, а в режиме программных разворотов со скоростью 0,06 Град/с не превосходят 3,5 градуса. При этом во всех промоделированных режимах скорости прецессии ротора силового гироскопа в подвесе Гука не превосходят 0,5 Град/с, а углы отклонения оси ротора не превосходят 9 градусов.

2.4 Обсуждение результатов второй главы

Полученные фундаментальные результаты в первой главе совместно с результатами работ [30, 39, 46] помогли преодолеть сложности в описании динамического поведения космического аппарата как объекта управления с распределенными параметрами в процессе выполнения им угловых маневров. Это позволило представить поведение вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой в виде гироскопа в упругом подвесе со своей приведенной жесткостью крепления подвеса и приведенным кинетическим моментом. На основе этих результатов разработана математическая модель динамики вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой.

С целью подтверждения правильности выбранной концепции построения космических платформ с вращающимся солнечным парусом, выбора основных параметров базовой конструкции платформы [57] и проверки разработанных алгоритмов управления ее движением было проведено математическое моделирование динамического поведения объекта управления в режиме гашения начальных угловых скоростей при активном демпфировании упругих колебаний мембранного диска солнечного паруса, а также в режиме программных разворотов.

Моделирование реализовано в программных пакетах MATLAB 7.9.0 и Simulink. Анализ результатов моделирования подтвердил правильность выбранной концепции конструкции космической платформы, а также законов управления угловым движением.

ГЛАВА 3. ДИНАМИКА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА В ПРОЦЕССЕ ЕГО РАСКРЫТИЯ

При исследовании управляемого движения космической платформы с солнечным парусом большую роль играет первоначальный этап раскрытия в рабочее положение поверхности мембранного диска из уложенного состояния [58, 59]. В настоящее время имеется обзор технических решений конструирования космических платформ с центробежными бескаркасными крупногабаритными конструкциями [6, 7], а также описание кинематической схемы эксперимента по выпуску полотна солнечного паруса [60]. В настоящей главе рассматривается строгое математическое обоснование динамики процесса раскрытия вращающегося солнечного паруса из уложенного состояния.

3.1 Введение

При решении задачи разворачивания мембранного диска из уложенного состояния центробежными силами на схему укладки предъявляются определенные требования [7]. Одним из основных требований являются минимальные габаритные характеристики в уложенном состоянии, а также обеспечение устойчивости симметрии геометрии на всех этапах роспуска. Примером укладки пленочного отражателя, теряющей геометрическую симметрию на этапах развертывания центробежными силам, является укладка типа «гармошка» (рис. 3.1) [7], когда полотнище первоначально складывается вдоль оси в складки, а полученные два конца радиальных тросов спирально наматываются на центральный барабан. Предполагаемое раскрытие происходит в обратной последовательности: придавая вращение центральному барабану, радиальные тросы расходятся спирально каждый в свою сторону, а после полного раскрытия тросов и занятия ими положения вдоль основной осевой линии происходит раскрытие половинок полотнища в разные стороны. Указанная схема рассматривалась как в СССР, так и в США. Проведенные в крупномасштабных вакуумных камерах исследования [61, 62] разворачивания полотнищ из данной схемы укладки показали её неустойчивость.

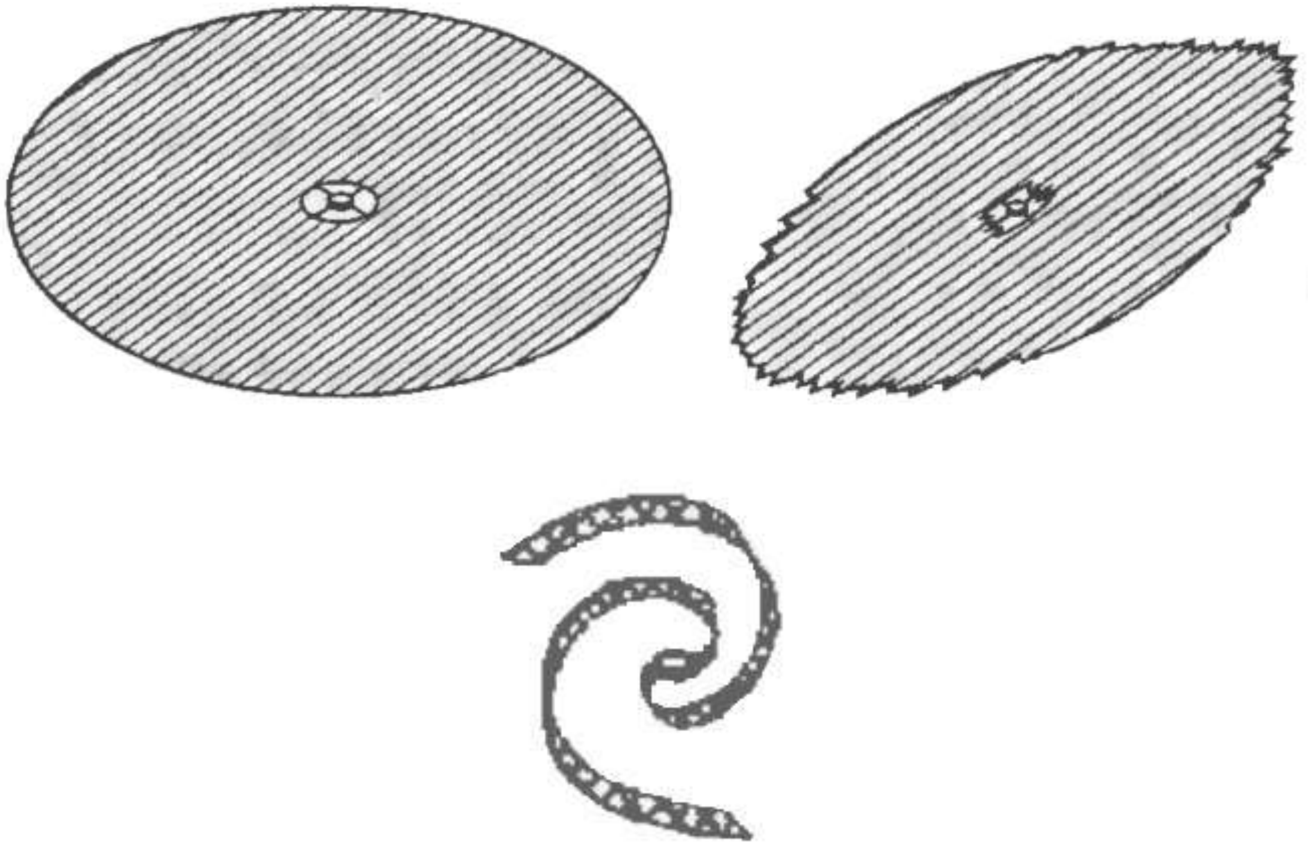


Рис. 3.1: Схема укладки типа «гармошка», теряющая геометрическую симметрию на этапах развертывания

В данной главе рассматривается модель выпуска полотна солнечного паруса, в рамках которой парус, раскрываемый из уложенного состояния, представляется в виде четырех выпускаемых тросов [60]. Схема укладки в предлагаемой модели представлена на рисунке 3.2.

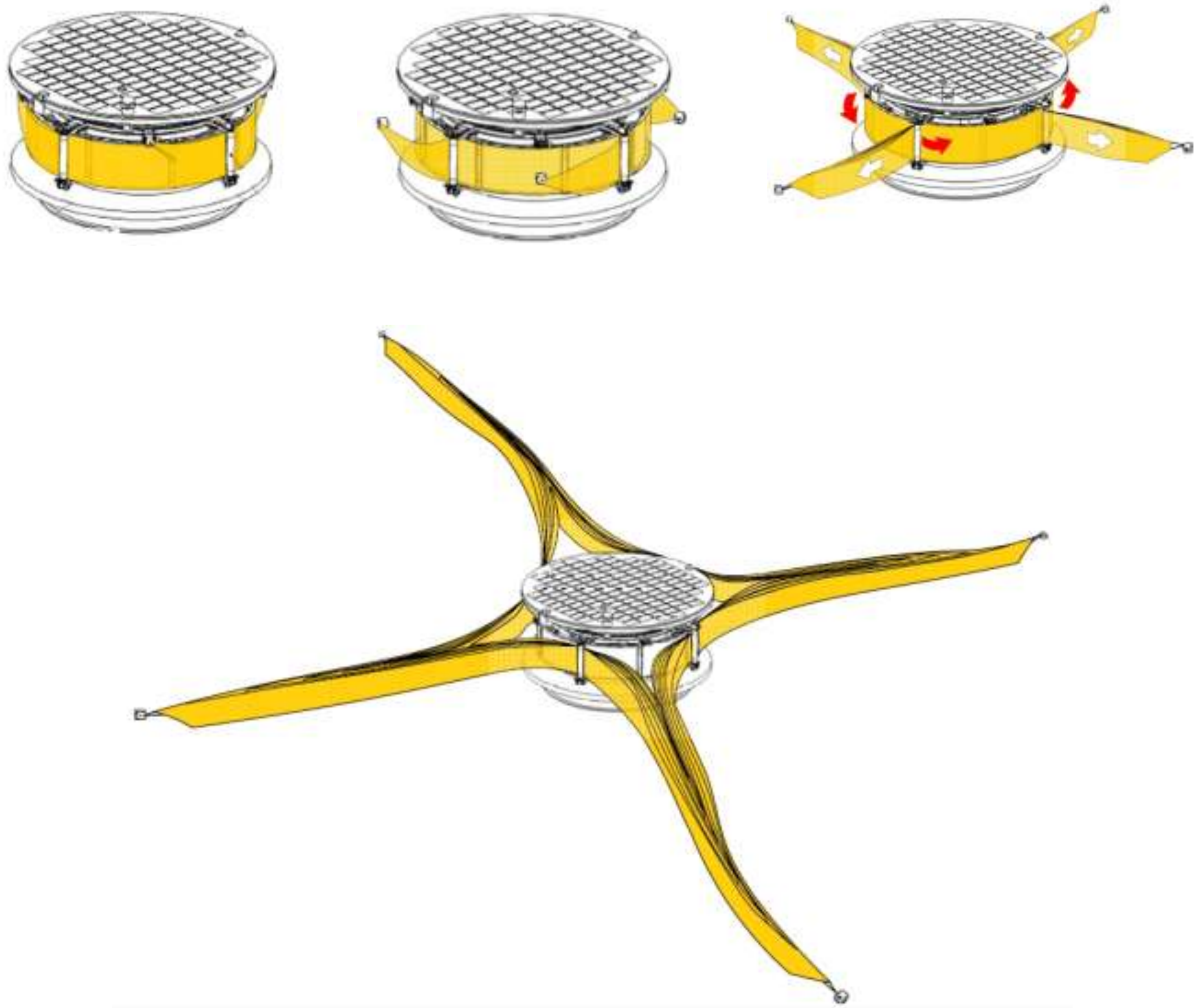


Рис. 3.2: Схема укладки солнечного паруса в виде четырёх выпускаемых тросов

Первоначально полотнище мембранного диска складывается вдоль симметричных относительно оси вращения центрального барабана радиальных направляющих в четыре лепестка (троса). Полученные тросы спирально наматываются на центральный барабан со специальными технологическими проставками, с помощью которых парус удерживается в уложенном состоянии. Придавая вращение центральному барабану, первоначально происходит симметричный выпуск тросов. После окончания выпуска четырех тросов и установления симметричного движения происходит снятие удерживающих связей, и полотно солнечного паруса за счет центробежных сил расправляется и принимает форму мембранного диска.

3.2 Режим развертывания вращающегося солнечного паруса

На начальном этапе развертывания солнечного паруса при учете центральной симметрии конструкционного расположения катушек с тросами предполагается, что все тросы выпускаются синхронно, и система управления выпуском обеспечивает динамическую симметрию процесса. С учетом такого предположения достаточно рассмотреть динамику выпуска одного троса с точечной массой на конце. Также предполагается, что во время всего выпуска угловая скорость вращения центрального барабана поддерживается постоянной.

Рассмотрим уравнение движения точечной массы m, выпускаемой на невесомом тросе из цилиндрического контейнера радиуса a, вращающегося вокруг неподвижной относительно инерциального пространства оси симметрии с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \left[\dot{\mathbf{\Omega}},\ \mathbf{r}\right] + 2\left[\mathbf{\Omega},\ \dot{\mathbf{r}}\right] + \mathbf{\Omega}\left(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}\ \right) - \mathbf{\Omega}^2\mathbf{r} = \frac{\mathbf{T}}{m} \tag{3.1}$$

Введем систему координат $Oxyz$, вращающуюся вместе с контейнером. Ось x проходит из центра вращения через точку выпуска троса на ободе цилиндра, ось z совпадает с осью вращения цилиндра, ось y дополняет систему координат до правой тройки. Обозначим через α угол между тросом и осью x, а через β — угол между радиус-вектором материальной точки и той же осью x (рис. 3.3). В координатном виде уравнение (3.1) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Omega} & 0 \\ \dot{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \Omega^2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

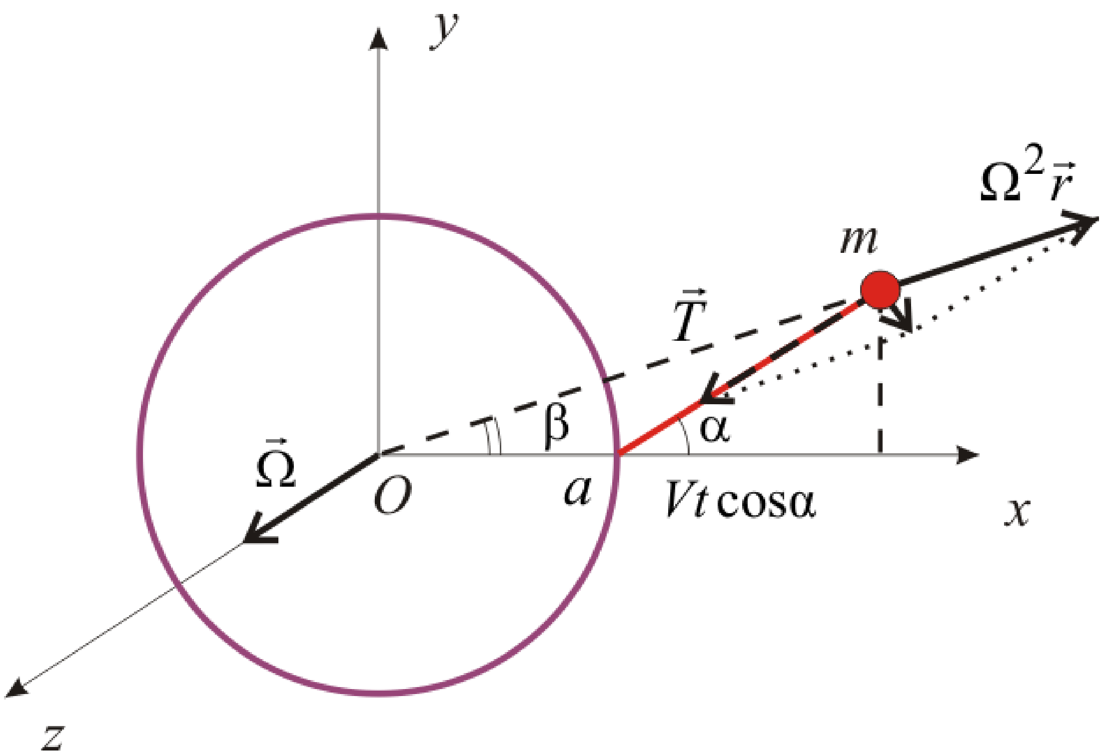


Рис. 3.3: Геометрическая схема выпуска точечной массы на невесомом тросе

Предполагая, что движение вытягиваемой массы происходит только в плоскости вращения, положим составляющую силы натяжения троса **T** по оси z равной нулю. Составляющие по осям x и y будут равны $-T\cos\alpha$ и $-T\sin\alpha$ соответственно. Используя геометрические соотношения между переменными и учитывая малость углов α и β, систему уравнений движения точечной массы m в плоскости вращения запишем в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x = -T/m \\ &\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y = -T\alpha/m \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2.1 Равномерный выпуск

Рассмотрим случай выпуска троса с постоянной скоростью V при постоянной величине скорости вращения контейнера Ω. Имеем:

$$\ddot{x} = 0, \quad x = a + Vt, \quad \alpha = \frac{y}{Vt}, \quad \beta = \frac{y}{a+Vt}$$

откуда из системы (3.3) получаем уравнение относительно переменной y:

$$\ddot{y} + 2\Omega\frac{y\dot{y}}{Vt} + \Omega^2\frac{ay}{Vt} = -2\Omega V$$

Поскольку нелинейное слагаемое $2\Omega(Vt)^{-1}y\dot{y}$ имеет второй порядок малости (с учетом нулевых начальных условий), то линеаризованное уравнение малых колебаний точечной массы, находящейся на конце невесомого троса, имеет вид:

$$\ddot{y}+\frac{\chi^2}{t}y=-2\Omega V, \quad \chi=\Omega\sqrt{\frac{a}{V}} \tag{3.4}$$

Погрешность пренебрежения нелинейным членом оценивается далее в разделе математического моделирования путем сравнения численного расчета, проведенного с учетом всех нелинейных слагаемых, с полученным ниже аналитическим решением линеаризованного уравнения.

Однородное уравнение (3.4) совпадает с линеаризованным уравнением, полученным А. Ю. Ишлинским при описании движения грузика, связанного нитью с точкой, перемещающейся по кругу, но при постоянной длине нити [63].

Уравнение (3.4) путем замены

$$y=w-\frac{2V^2}{\Omega a}t \tag{3.5}$$

сводится к

$$\ddot{w}+\frac{\chi^2}{t}w=0,$$

которое в свою очередь является частным случаем *уравнения Ломмеля*

$$\ddot{w}+\frac{1-2\alpha}{\xi}\dot{w}+\left[\left(\beta\gamma\xi^{\gamma-1}\right)^2+\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{\xi^2}\right]w=0$$

при численных значениях постоянных параметров $\alpha=1/2$, $\beta=2\chi$, $\gamma=1/2$, $\nu=1$ и ξ – новой независимой переменной.

Общее решение уравнения Ломмеля известно [47] и в рассматриваемом случае выглядит следующим образом:

$$w(\xi)=\xi^{\alpha}Z_{\nu}\left(\beta\xi^{\gamma}\right),$$

где Z_{ν} – суперпозиция функций Бесселя первого и второго рода:

$$Z_{\nu}(z)=c_1J_{\nu}(z)+c_2Y_{\nu}(z), \quad c_1,c_2=\text{const}$$

Возвращаясь к искомой функции y и независимой переменной t, получим решение уравнения (3.4) в следующем виде:

$$y = \sqrt{t}\left[c_1 J_1\left(2\chi\sqrt{t}\right) + c_2 Y_1\left(2\chi\sqrt{t}\right)\right] + y_s, \tag{3.6}$$

где

$$y_s = -\frac{2V^2 t}{\Omega a}, \tag{3.7}$$

$J_1(z)$ и $Y_1(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода первого порядка [50].

Постоянные c_1 и c_2 определяются из начальных условий при решении задачи Коши

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \tag{3.8}$$

Так как функции Бесселя второго рода в нуле имеют особенности

$$Y_0(z) \to \frac{2}{\pi}\ln z, \quad Y_1(z) \to -\frac{2}{\pi z} \quad \text{при } z \to 0,$$

то отсюда находим $c_1 = \dfrac{2V^2}{\Omega\chi a}$ и $c_2 = 0$.

Таким образом, получаем аналитическое решение задачи Коши (3.4), (3.8):

$$y = \frac{2V^2}{\Omega^2 a}\sqrt{\frac{Vt}{a}} J_1\left(2\Omega\sqrt{\frac{at}{V}}\right) - \frac{2V^2 t}{\Omega a} \tag{3.9}$$

При достижении конечной длины выпускаемого троса $l = R - a$, где R – максимальная длина радиуса вращения точечной массы, поперечная составляющая силы Кориолиса становится равной нулю, и начинаются колебания груза на конце троса, которые описываются уравнением гармонического осциллятора

$$\ddot{y}_R + \kappa^2 y_R = 0, \quad \kappa^2 = \Omega^2 a/l \tag{3.10}$$

с начальными условиями, определяемыми конечными данными для уравнения (3.4):

$$y_{R0} = \frac{2V^2}{\Omega^2 a}\sqrt{\frac{l}{a}}J_1\left(\frac{2\Omega}{V}\sqrt{al}\right) - \frac{2Vl}{\Omega a}$$
$$\dot{y}_{R0} = \frac{2V^2}{\Omega a}J_0\left(\frac{2\Omega}{V}\sqrt{al}\right) - \frac{2V^2}{\Omega a} \tag{3.11}$$

Решение задачи Коши (3.10), (3.11) имеет вид:

$$y_R = y_{R0}\cos\left(\kappa(t - l/V)\right) + \dot{y}_{R0}\kappa^{-1}\sin\left(\kappa(t - l/V)\right)$$

Графическая иллюстрация «сшитых» решений уравнения выпуска и уравнения гармонических колебаний при

$$V = 0{,}01 \text{ м/с}, \quad a = 1 \text{ м}, \quad \Omega = 1/2 \text{ рад/с}, \quad l = R - a = 5 \text{ м} \tag{3.12}$$

представлена на рисунке 3.4.

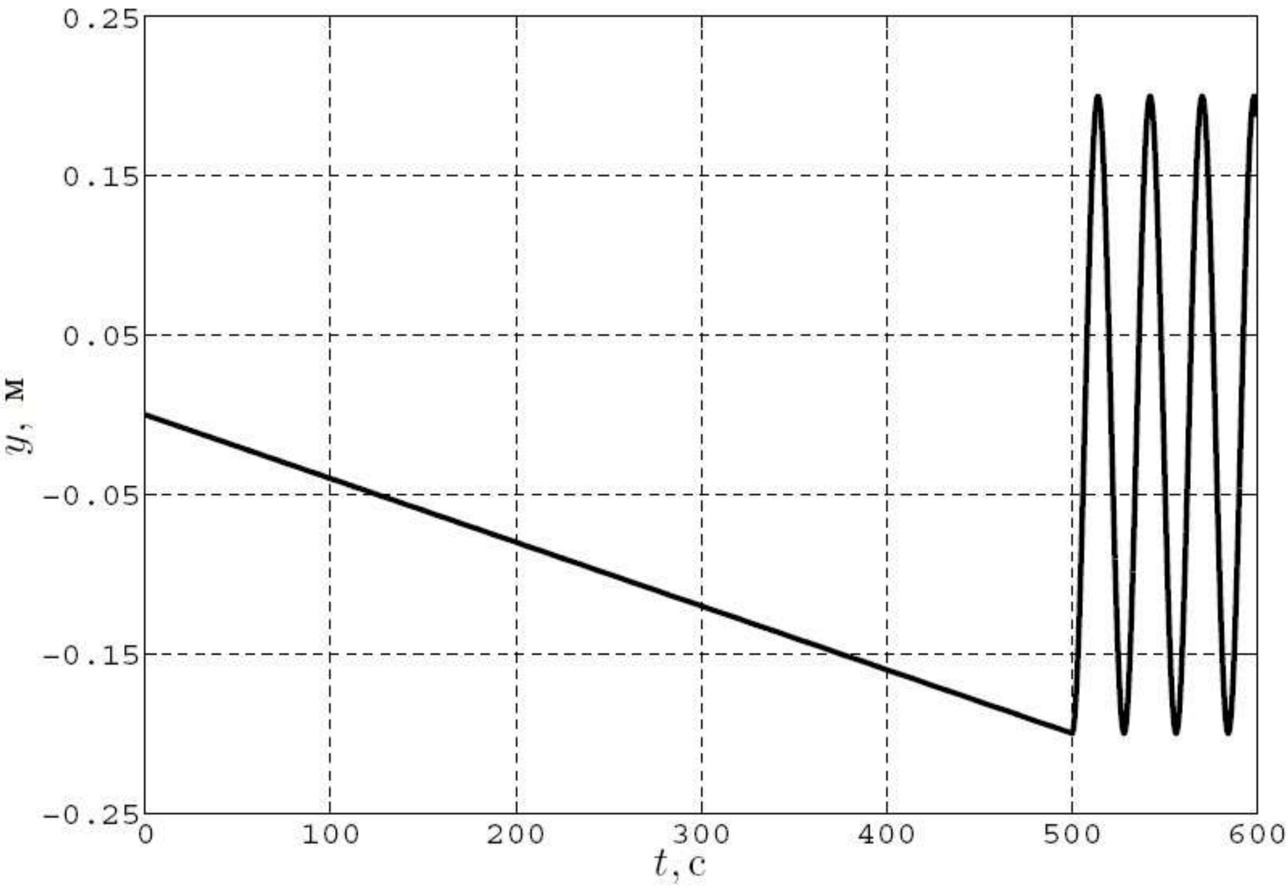


Рис. 3.4: Отклонение точечной массы на конце троса при равномерном выпуске

На рисунке 3.5 изображено отклонение $\Delta y = y - y_s$ решения y (3.9) от квазистационарного решения y_s (3.7) в первые пять секунд выпуска.

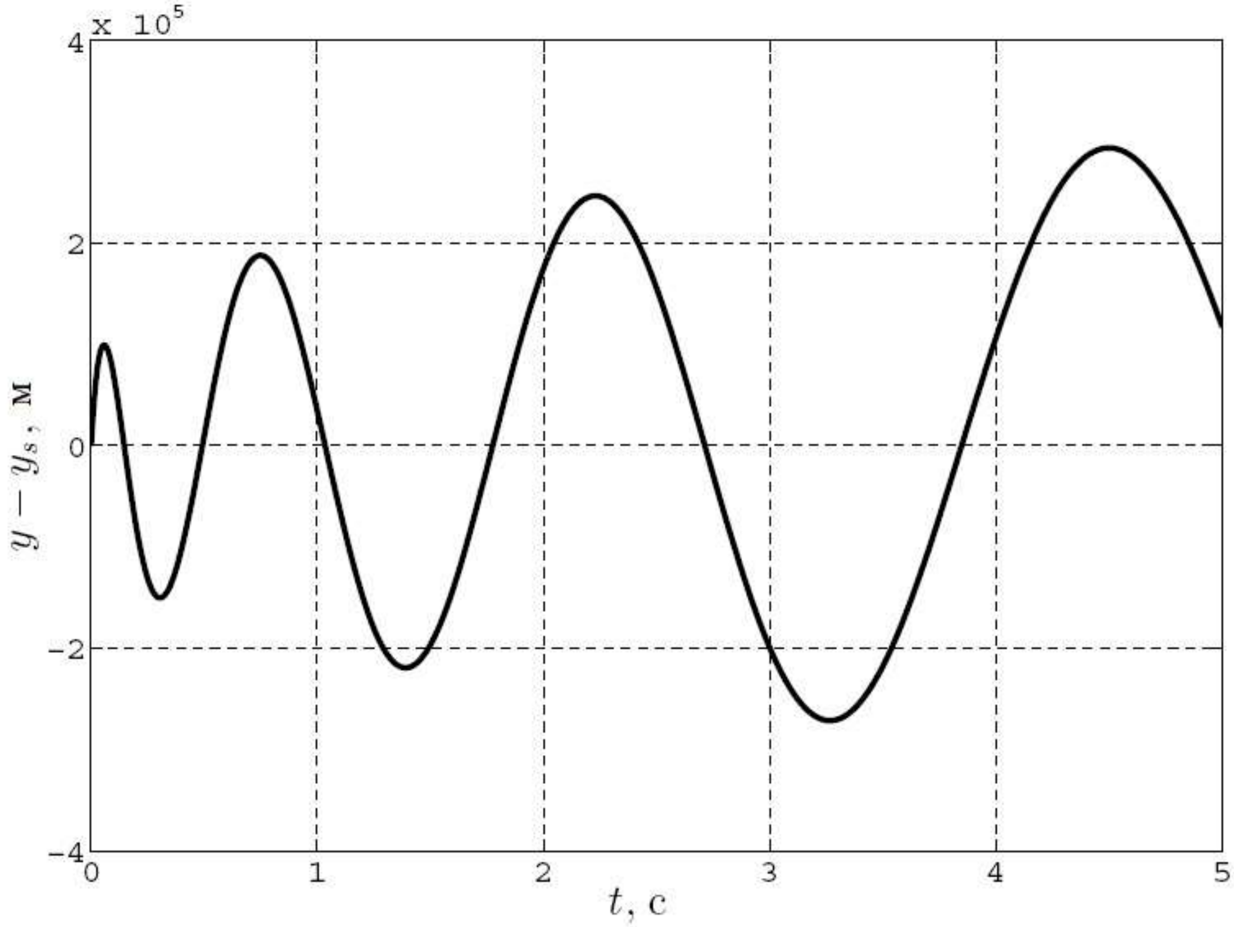


Рис. 3.5: Отклонение конца выпускаемого троса от квазистационарного положения в первые 5 секунд выпуска

3.2.2 Равномерно замедленный выпуск

Аналогично случаю равномерного выпуска троса получается решение системы (3.3) для равномерно замедленного выпуска.

Из системы (3.3) при $\ddot{x} = -A$, где A – постоянная величина ускорения, после замены переменной $\tau = \dfrac{At}{2V}$, где V – начальная скорость выпуска троса, получим уравнение:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{k_1 y}{\tau(1-\tau)} = k_2(1-2\tau), \quad k_1 = 2\frac{\Omega^2 a}{A} + 2, \quad k_2 = -8\frac{V^3\Omega}{A^2} \tag{3.13}$$

Соответствующее однородное уравнение является частным случаем гипергеометрического уравнения:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1-z)}\frac{dw}{dz} - \frac{\alpha\beta w}{z(1-z)} = 0$$

с параметрами $\alpha = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + k_1}$, $\beta = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k_1}$, $\gamma = 0$.

Для наглядности введем следующее обозначение:

$$G_n(k_1, \tau) = F\left(\frac{1}{2} + n + \sqrt{\frac{1}{4} + k_1},\ \frac{1}{2} + n - \sqrt{\frac{1}{4} + k_1},\ 2 + n,\ \tau\right)$$

где в правой части стоит гипергеометрическая функция. Общее решение однородного уравнения (3.13) запишем следующим образом [51]:

$$y = C\tau G_0(k_1, \tau), \quad C = const.$$

Второе линейно независимое решение имеет в нуле неограниченную производную, поэтому должно быть отброшено как не имеющее физического смысла.

Частное решение уравнения (3.13) ищем в виде

$$y_p = \tau(1-\tau)(c_1 + c_2\tau)$$

После подстановки в уравнение (3.13) находим

$$c_1 = \frac{k_2}{k_1 - 6}, \quad c_2 = -\frac{2k_2}{k_1 - 6} \quad \text{при } k_1 \neq 6.$$

При $k_1 = 6$ частное решение не приводится ввиду его громоздкости.

В итоге, определив постоянную C из второго начального условия (3.8), получаем решение уравнения (3.13). Возвратившись к переменной t, запишем его в виде

$$y = \frac{2V^2\Omega t}{\Omega^2 a - 2A}\left[G_0\left(k_1,\ \frac{At}{2V}\right) - \left(1 - \frac{At}{2V}\right)\left(1 - \frac{At}{V}\right)\right] \qquad (3.14)$$

При $A \to 0$ это решение переходит в решение (3.9).

При достижении конечной длины троса $l = R - a$ при $t_f = V/A$ дальнейшее поведение точечной массы описывается следующим образом:

$$y_R = y(t_f)\cos\left(\kappa(t - t_f)\right) + \dot{y}(t_f)\kappa^{-1}\sin\left(\kappa(t - t_f)\right)$$

где

$$y(t_f) = \frac{2V^3\Omega}{A(\Omega^2 a - 2A)} G_0\left(k_1,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\dot{y}(t_f) = \frac{2V^2\Omega}{\Omega^2 a - 2A}\left[G_0\left(k_1,\ \frac{1}{2}\right) - \frac{k_1}{4} G_1\left(k_1,\ \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

Полученное решение при значениях определяющих параметров (3.12) с $l = R - a = 2{,}5$ м и $A = 2 \cdot 10^{-5}$ м/с^2 иллюстрируется графиком, представленным на рисунке 3.6.

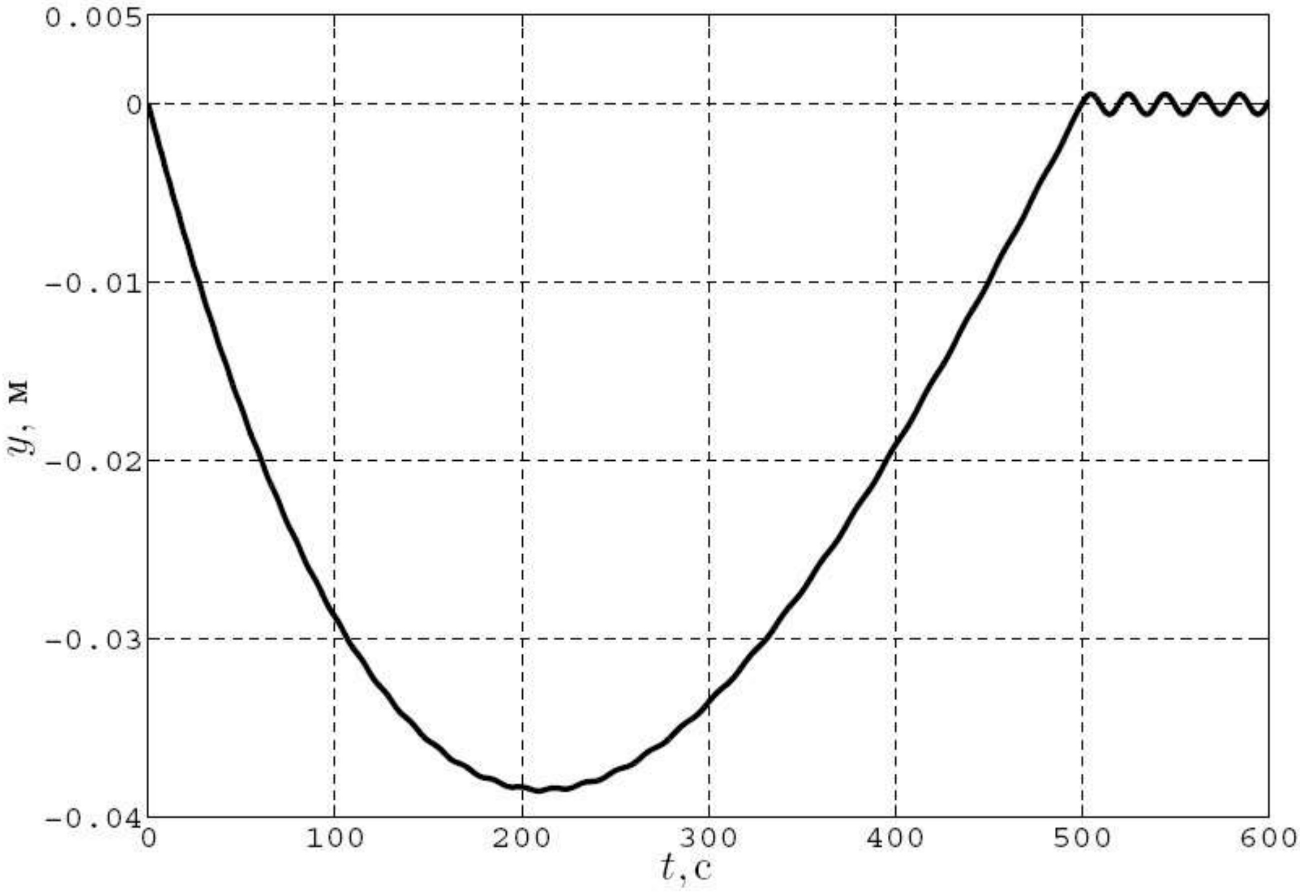


Рис. 3.6: Отклонение точечной массы на конце троса при равномерно замедленном выпуске

Отклонение $\Delta y = y - y_p$ решения y от частного решения y_p, определяемого формулой (3.14) при $G_0 \equiv 0$, в первые пять секунд выпуска показано на рисунке 3.7, которое почти похоже на кривую для случая равномерного выпуска.

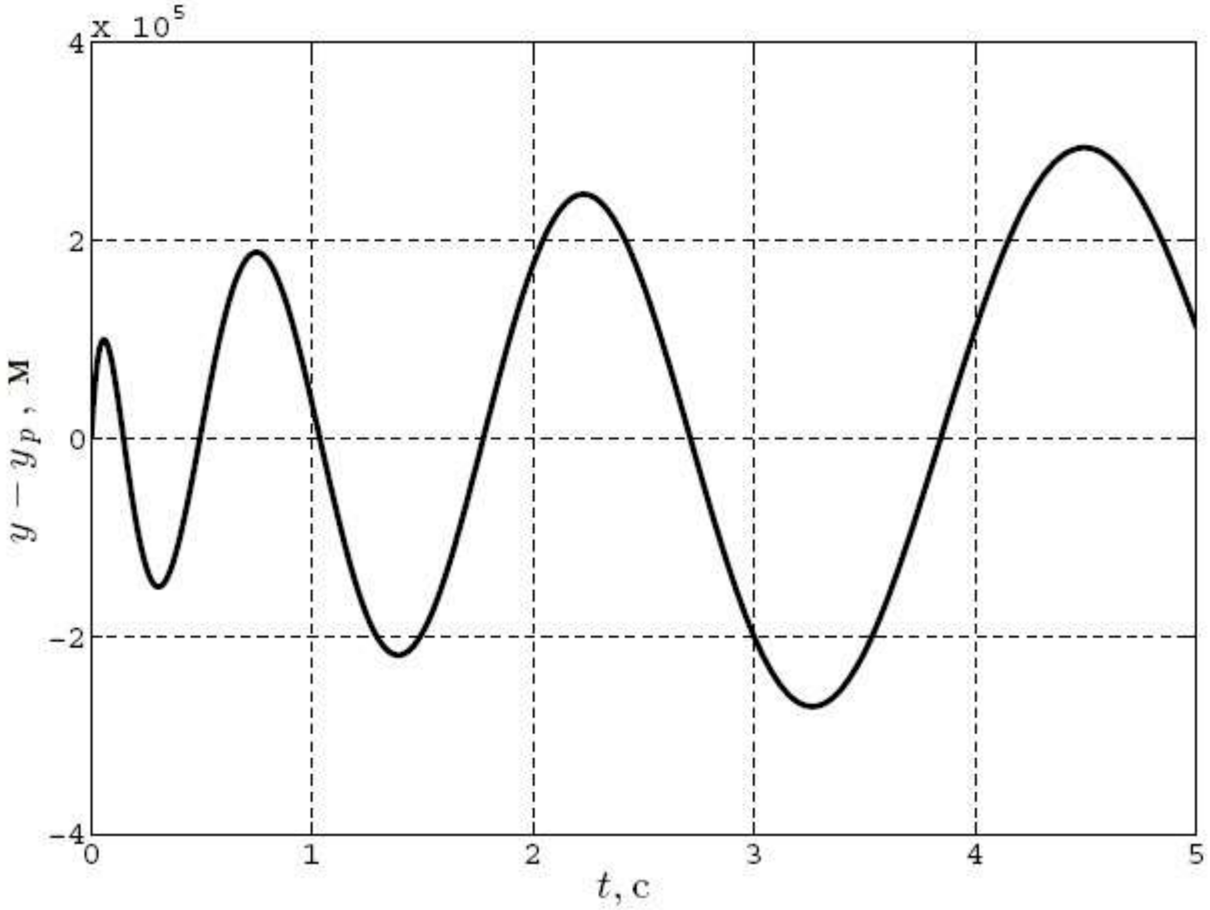


Рис. 3.7: Отклонение конца выпускаемого троса от частного решения в первые 5 секунд равномерно замедленного выпуска

3.3 Стационарная форма троса в квазистатической постановке задачи

Из предыдущего раздела видна роль силы Кориолиса: в результате ее действия при постоянной скорости выпуска возникает равновесное положение троса, около которого происходят колебания троса вследствие придаваемых в процессе выпуска возмущений (это отражается, например, в способе задания начальных условий). Получим общий вид квазистационарной формы троса при постоянной скорости выпуска V и постоянной скорости вращения Ω для весомого троса.

Уравнение поперечных колебаний вращающегося с постоянной угловой скоростью Ω троса с внутренним радиусом a и внешним R при силе натяжения троса $T(x)$ берем в виде

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\rho\Omega^2 U-2\rho\Omega V,\quad a\le x\le R \tag{3.15}$$

$$T(x)=\int_x^R \rho\Omega^2\xi d\xi=\frac{\rho\Omega^2}{2}(R^2-x^2)$$

Здесь ρ – плотность массы, распределенной по длине троса, $U(t,x)$ – поперечное отклонение троса в плоскости вращения, $\rho\Omega^2 U$ – центробежная составляющая, $2\rho\Omega V$ – поперечная компонента силы Кориолиса, действующей на трос.

Для нахождения квазистационарной формы троса ищем $U(t,x)$ в виде функции $U(x)$, зависящей только от x, с краевыми условиями на левом конце $x=a$ первого рода (закрепленный конец) и на правом конце $x=R$ второго рода (свободный конец).

Сделав замену переменной $x=R\xi$, перейдем к уравнению:

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dU}{d\xi}\right)+2U=\frac{4V}{\Omega} \tag{3.16}$$

Соответствующее однородное уравнение представляет собой уравнение Лежандра

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dU}{d\xi}\right)+\nu(\nu+1)U=0 \quad \text{при } \nu=1,$$

и поэтому его решение – функция Лежандра первого рода: $U=P_1(\xi)=\xi$. Функция Лежандра второго рода не может быть решением в силу краевого условия на свободном конце троса.

Решение неоднородного уравнения (3.16) будем искать методом вариации постоянной в виде $U(\xi)=\xi C(\xi)$, используя условие отсутствия особенности на конце троса (при $x=R$) и краевое условие $U=0$ на закрепленном конце троса (при $x=a$). Имеем:

$$\frac{d}{d\xi}\Big((1-\xi^2)(\mathrm{C}(\xi)+\xi C'(\xi))\Big)+2\xi C(\xi)=\frac{4V}{\Omega}$$

$$(\xi-\xi^3)\mathrm{C}''(\xi)+(2-4\xi^2)C'(\xi)=\frac{4V}{\Omega}$$

Для получения в левой части уравнения полного дифференциала умножаем левую и правую часть полученного уравнения на ξ:

$$\frac{d}{d\xi}\Big((\xi^2-\xi^4)\mathrm{C}'(\xi)\Big)=\frac{4V}{\Omega}\xi,\quad \xi\in[a/R;1],$$

откуда с учетом особенности на конце троса при $\xi=1$ находим

$$\mathrm{C}'(\xi)=-\frac{2V}{\Omega\xi^2}$$

Интегрируя с учетом краевого условия $U(a)=0$ на закрепленном конце троса, а также возвращаясь к старой переменной, окончательно получаем квазистационарную форму троса в процессе развертывания, которая описывается уравнением

$$U(x)=\frac{2V}{\Omega}\left(1-\frac{x}{a}\right) \tag{3.17}$$

Этот вывод с небольшими изменениями сохраняется для любого, не обязательно постоянного распределения массы по координате x.

3.4 Модель, учитывающая массу троса

Так как результаты предыдущего раздела были получены в квазистатической постановке, то возникает вопрос о погрешности, вносимой этим допущением в описание реального поведения троса.

В данном разделе для проверки различных предлагаемых гипотез рассматривается приближенная дискретная математическая модель выпуска тросов. Каждый трос представляется в виде совокупности материальных точек, последовательно соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями. В этих точках сосредоточены действующие на трос центробежные силы, силы Кориолиса и силы натяжения соединяющих цепь нитей. Кроме того, такая модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет, в дополнение к предложенному в разделе 3.2 аналитическому методу, учесть массу троса и действие на трос сил инерции вследствие вращательного движения троса. Силы считаются приложенными к указанным материальным точкам и определяются их массами, положением в пространстве и скоростями. Модели такого рода позволяют эффективно изучать движение уже развернутой системы, однако было неясно, как в рамках такой модели изучать процесс развертывания. Ниже предлагается возможный способ решения этой задачи методом В.В. Сазонова [64].

Далее будем рассматривать задачу о развертывании одного троса. В процессе развертывания трос должен быть постоянно натянут. Самым сложным в этом отношении является начальный этап развертывания. Выпуск троса из цилиндрического контейнера моделируется выпуском невесомой нерастяжимой нити с закрепленными на ней материальными точками (далее «шарики»). Ближайшему к центральному цилиндру шарику придается постоянная относительно вставки скорость выпуска. После того как расстояние между ним и центральным контейнером достигает определенного значения, этот шарик отпускается, и начинается выпуск новой массы. В момент отделения каждого такого шарика от центрального цилиндра число шариков модели увеличивается на единицу.

Пусть N – натуральное число, P_1, P_2, …, P_N – материальные точки, образующие модель. Точки P_i и P_{i+1} соединены невесомой нерастяжимой нитью длины l_i $(i = 1,\ 2, \ldots, N-1)$. В рамках этой модели точка P_1 – первый выпущенный шарик, P_N – шарик, закрепленный на центральном барабане. Шарики с номерами $1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$ свободно движутся под действием центробежных сил и сил Кориолиса. Силой инерции от углового ускорения центрального барабана пренебрегаем, так как угловая скорость Ω поддерживается постоянной. Вводя обозначения для m_i и $\mathbf{r}_i$ – массы и радиус-вектора шарика P_i, T_i – силы натяжения нити между шариками P_i и P_{i+1}, уравнения движения шариков в предположении, что все нити натянуты, можно записать в виде (штрих означает производную по t):

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1' = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{V}_1' = \mathbf{a}_1 - \dfrac{T_1}{m_1}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{r}_1' = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{V}_i' = \mathbf{a}_i + \dfrac{T_{i-1}}{m_i}\mathbf{e}_{i-1} - \dfrac{T_i}{m_i}\mathbf{e}_i, \quad i = 2,\ldots,N-1 \\ \mathbf{r}_N' = \mathbf{V}_N, \quad \mathbf{V}_N' = \mathbf{a}_N + \dfrac{T_{N-1}}{m_N}\mathbf{e}_{N-1} \end{cases} \tag{3.18}$$

Здесь

$\mathbf{e}_i = \dfrac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}\right|}$, $i = 1,\ 2,\ldots,N-1$ – единичный вектор направления шарика P_i относительно шарика P_{i+1},

$\mathbf{a}_i = -\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_i) - 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}_i$, $i = 1,\ 2,\ldots,N$ – суммарное центробежное и кориолисово ускорение.

Выпуск троса со скоростью V осуществляется в данном случае следующим способом: скорость V шарика P_N поддерживается постоянной относительно центрального цилиндра до тех пор, пока пройденное им расстояние не станет равным расстоянию до следующего выпускаемого шарика. Поэтому последнее уравнение системы (3.18) перепишется в виде $\mathbf{V}_N' = 0$ с начальным условием для N-го шарика

$$\mathbf{V}_N(t_N) = (V,0,0)^T, \tag{3.19}$$

где t_N – время начала выпуска N-го шарика.

Длины нитей поддерживаются постоянными, т.е. в процессе выпуска должны выполняться равенства, выражающие условия нерастяжимости нитей:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}| = l_i, \quad i = 1,\ 2,\ldots,N-1 \tag{3.20}$$

Эти соотношения позволяют найти силы натяжения T_i с помощью процедуры, применяемой при исключении реакций связей в уравнениях Лагранжа первого рода. Силы определяются следующим образом. Возведем обе части каждого равенства (3.20) в квадрат и продифференцируем их дважды по времени:

$$\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{V}_i' - \mathbf{V}_{i+1}'\right) + (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i+1})^2 = 0, \quad i = 1,\ 2,\ldots,N-1 \tag{3.21}$$

Подставив в соотношения (3.21) выражения $\mathbf{V}_i'$ из системы (3.18), получим

$$(\mathbf{V}_i-\mathbf{V}_{i+1})^2+\left[\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{i+1},\ \mathbf{a}_i-\mathbf{a}_{i+1}+\frac{T_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}-T_i\mathbf{e}_i}{m_i}-(1-\delta_{i,N-1})\frac{T_i\mathbf{e}_i-T_{i+1}\mathbf{e}_{i+1}}{m_{i+1}}\right]=0$$

$i=1,\ 2,\ldots,N-1;$

Здесь $\delta_{i,N-1}=0$ при $i<N-1,\quad \delta_{N-1,N-1}=1$.

После преобразований получим трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений относительно T_i:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)T_1-\frac{A_2}{m_2}T_2=B_1\\
&-\frac{A_i}{m_i}T_{i-1}+\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_{i+1}}\right)T_i-\frac{A_{i+1}}{m_{i+1}}T_{i+1}=B_i,\quad i=2,...,N-2\\
&-\frac{A_{N-1}}{m_{N-1}}T_{N-2}+\frac{1}{m_{N-1}}T_{N-1}=B_{N-1}
\end{aligned}\tag{3.22}$$

Коэффициенты A_i и B_i данной системы для всех $i=1,\ 2,\ldots,N-1$ вычисляются по следующим формулам:

$$A_i=(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_{i-1}),\quad B_i=\left(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{a}_i-(1-\delta_{i,N-1})\mathbf{a}_{i+1}\right)+\frac{(\mathbf{V}_i-\mathbf{V}_{i+1})^2}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{i+1}|}.$$

Система (3.22) имеет трехдиагональную матрицу [65]. Для строк этой матрицы в силу оценок $|A_i|\le 1\ (i=2,\ 3,\ \ldots,N-1)$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{|A_2|}{m_2}>0,\\
&\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_{i+1}}-\frac{|A_i|}{m_i}-\frac{|A_{i+1}|}{m_{i+1}}\ge 0,\quad (i=2,...,N-2)\\
&\frac{1}{m_{N-1}}-\frac{|A_{N-1}|}{m_{N-1}}\ge 0.
\end{aligned}$$

Неравенства выписаны в порядке следования строк и означают, что указанная матрица удовлетворяет условиям диагонального преобладания [65]. Следовательно, система (3.22) невырожденная, и ее решение может быть найдено методом прогонки. Подставив решение системы (3.22) в уравнения (3.18), получим замкнутую систему уравнений относительно $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{V}_i$ $(i=1,\ 2,\ ...\ ,N)$. Эта система может быть проинтегрирована численно, причем при каждом вычислении ее правой части необходимо решать систему (3.22). В процессе интегрирования следует проверять выполнение неравенств $T_i > 0$ – описанный способ решения системы (3.18), (3.20) физически содержателен только в том случае, когда все нити натянуты.

На начальном этапе $N = 2$. При окончании выпуска N-го шарика порядок системы уравнений (3.18) увеличивается на единицу.

3.5 Результаты моделирования

Ниже приводятся результаты моделирования численным интегрированием полученной выше системы обыкновенных дифференциальных уравнений и дается сравнение с квазистационарной формой (3.17). Рассматриваются два способа выпуска тросовой системы, поясняющие особенности данного способа моделирования.

На рисунке 3.8 сплошными кривыми изображены графики промежуточных форм выпускаемого троса для разных значений N. Всего выпускалось 50 шариков при одинаковых расстояниях между ними $l_i = 0,5$ м, угловой скорости вращения $\Omega = 0,5$ рад/с и радиусе центрального барабана $a = 5$ м. Пунктиром изображена квазистационарная форма (3.17).

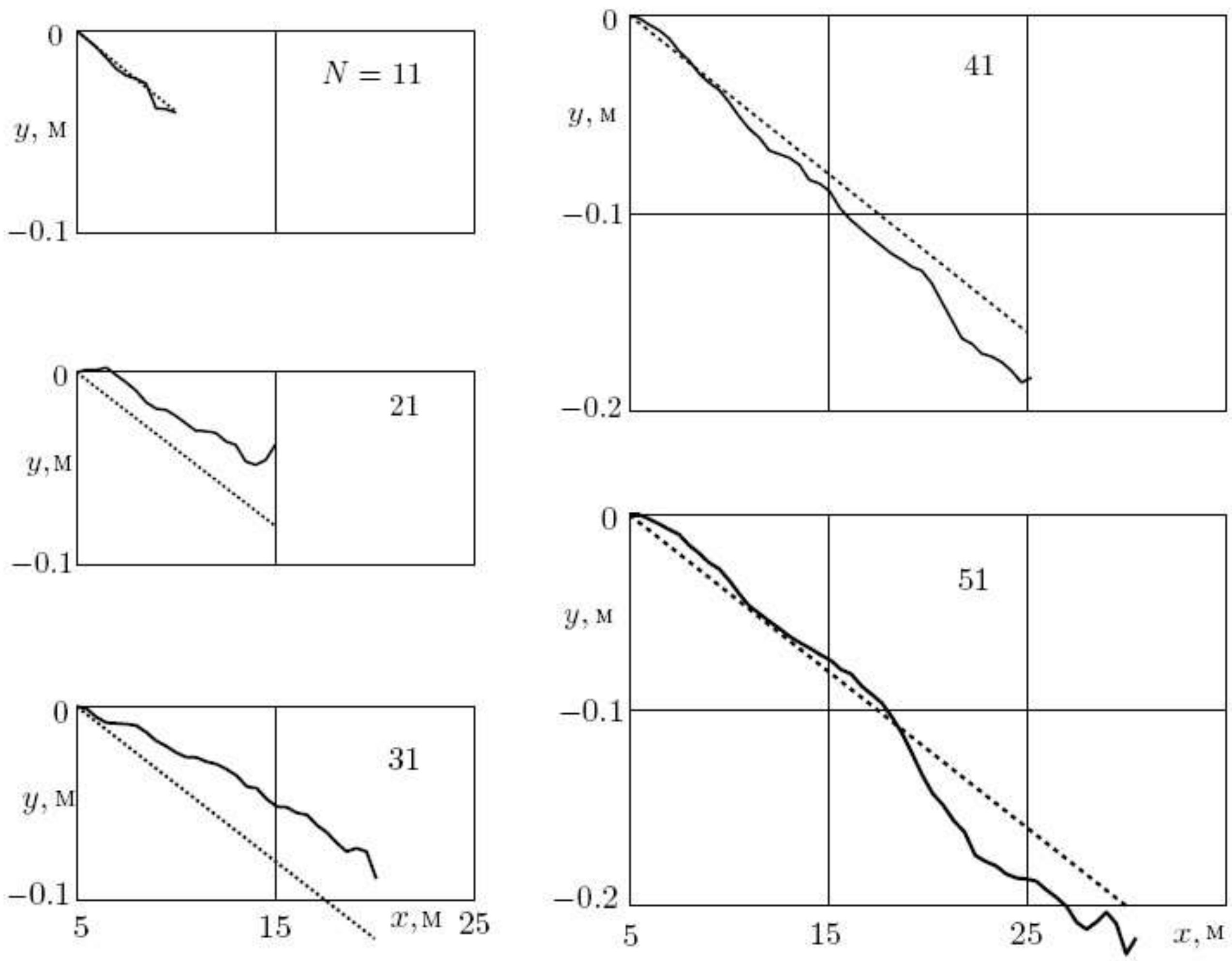


Рис. 3.8: Промежуточные формы весомого троса при выпуске с постоянной скоростью в радиальном направлении в различные моменты времени

Пусть выпуск каждой точечной массы m_N производится строго в радиальном направлении от цилиндрического контейнера со скоростью $V = 0{,}01$ м/с. При достижении расстояния $l_N = 0{,}5$ м шарик отпускается и выпускается следующий, при этом между отпущенным и новым выпускаемым шариком поддерживается постоянное расстояние с помощью нерастяжимой нити. Из рисунка 3.8 видно, что такой способ выпуска создает постоянные возмущения на выпускаемом конце троса, который в каждый момент отпускания шариков отклоняется от квазистационарной формы (3.17). Это приводит к достаточно большому накоплению колебаний, так как создаваемые при таких возмущениях волны не демпфируются.

Пусть теперь каждая новая точечная масса выпускается в направлении квазистационарной формы, т.е. вместо условия (3.19) начальное условие для нового N-го шарика имеет вид:

$$\mathbf{V}_N(t_N) = \left(V\cos\alpha_{\text{st}}, -V\sin\alpha_{\text{st}}, 0\right)^T, \quad \alpha_{\text{st}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{2V}{\Omega a}\right),$$

где α_{st} – угол наклона квазистационарной формы троса к радиусу, проведенному в точку выпуска (см. формулу (3.17)). В отличие от описанного выше способа выпуска троса в радиальном направлении в данном случае возмущения, возникающие на выпускаемом конце троса, имеют намного меньший порядок. В масштабе рисунка 3.8 графики квазистационарной формы и формы троса при таком способе выпуска практически совпадают. Данные результаты показывают важность выбора способа выпуска и подтверждают результат раздела 3.2.

3.6 Выпуск весомого троса с переменной скоростью

Перейдем к моделированию выпуска троса с переменной скоростью. Обозначим длину нити между N-ым шариком на центральном цилиндре и выпускаемым $(N-1)$-м шариком через $l(t)$, так что $l'(t) = V(t)$, где $V(t)$ – переменная скорость выпуска троса. В этом случае уравнение (3.20) при $i = N-1$ принимает вид

$$|\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N| = l(t) \tag{3.23}$$

Данное уравнение выражает условие переменности длины нити между шариком, закрепленным на центральном барабане, и шариком, который связан с ним нерастяжимой нитью. Действуя аналогичным способом, получим вместо (3.21) при $i = N-1$

$$\left(\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N, \mathbf{V}'_{N-1} - \mathbf{V}'_N\right) + (\mathbf{V}_{N-1} - \mathbf{V}_N)^2 = l'(t)^2 + l(t)l''(t)$$

Поэтому изменение коснется только формулы для B_{N-1}:

$$B_{N-1} = \left(\mathbf{e}_{N-1}, \mathbf{a}_{N-1} - (1-\delta_{N-1,N-1})\mathbf{a}_N\right) + \frac{\left(\mathbf{V}_{N-1} - \mathbf{V}_N\right)^2 - l'^2 - l\cdot l''}{\left|\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N\right|}$$

Здесь следует сделать замечание относительно начала выпуска $(N-1)$-го шарика. В начальный момент при данном способе выпуска положение $(N-1)$-го шарика совпадает с положением N-го шарика, который в процессе выпуска остается закрепленным на цилиндрическом контейнере. Поэтому расстояние $|\mathbf{r}_{N-1}-\mathbf{r}_N|=l(t)$ в начале выпуска очень мало и, следовательно, полученные формулы для коэффициентов последнего уравнения трехдиагональной системы линейных уравнений нельзя прямо применять из-за деления на $|\mathbf{r}_{N-1}-\mathbf{r}_N|$.

Для решения данной проблемы на первоначальном этапе выпуска для каждого нового шарика модели определение сил выполняется следующим образом. Дифференцируя уравнение (3.23) по времени, а также пользуясь введенными выше обозначениями, получим:

$$\left(\mathbf{e}_{N-1},\mathbf{r}'_{N-1}-\mathbf{r}'_N\right)=l'(t) \tag{3.24}$$

Дифференцируя второй раз с учетом равенств (3.23) и (3.24), приходим к уравнению

$$\left(\mathbf{e}_{N-1},\ \mathbf{V}'_{N-1}-\mathbf{V}'_N\right)+\frac{(\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N)^2-l'(t)^2}{l(t)}=l''(t)$$

При малых расстояниях $l(t)$ ко второму слагаемому в левой части применяем правило Бернулли – Лопиталя и после простых преобразований находим:

$$\left(\mathbf{e}_{N-1}+\frac{2}{l'(t)}(\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N),\ \ \mathbf{V}'_{N-1}-\mathbf{V}'_N\right)=3l''(t) \tag{3.25}$$

Естественно, что такая процедура имеет место только при $l(t)\le\varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число (в расчетах ε принимало значение, равное 10^{-6}). При $l(t)>\varepsilon$ следует пользоваться формулами начала этого раздела.

Подставляя в равенство (3.25) выражение для $\mathbf{V}'_{N-1}$ из (3.18), учитывая, что $\mathbf{V}'_N=0$, а также используя равенство (3.24), окончательно получим последнее уравнение системы (3.22) в следующем виде:

$$-\frac{1}{m_{N-1}}\left[\left(\mathbf{e}_{N-1},\mathbf{e}_{N-2}\right)+\frac{2}{l'(t)}\left(\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N,\mathbf{e}_{N-2}\right)\right]T_{N-2}+\frac{3}{m_{N-1}}T_{N-1}=$$
$$=-3l''(t)+\left(\mathbf{a}_{N-1}-\mathbf{a}_N,\mathbf{e}_{N-1}\right)+\frac{2}{l'(t)}(\mathbf{a}_{N-1}-\mathbf{a}_N,\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N)$$

Величины $\mathbf{a}_N$ и $\mathbf{V}_N$ полагаются равными нулю, а $\mathbf{r}_N=(a,0,0)^T$. Таким образом, коэффициенты последнего уравнения системы (3.22) при $l(t)\le\varepsilon$ должны вычисляться по формулам

$$A_{N-1}^{\text{new}}=\left(\mathbf{e}_{N-1},\mathbf{e}_{N-2}\right)+\frac{2}{l'(t)}\left(\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N,\mathbf{e}_{N-2}\right)$$
$$B_{N-1}^{\text{new}}=-3l''(t)+\left(\mathbf{a}_{N-1}-\mathbf{a}_N,\mathbf{e}_{N-1}\right)+\frac{2}{l'(t)}(\mathbf{a}_{N-1}-\mathbf{a}_N,\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N)$$

а коэффициент при T_{N-1} должен быть равным $3/m_{N-1}$.

Единственное препятствие к вычислениям по последним формулам – это неопределенность выбора единичного вектора $\mathbf{e}_{N-1}$, который следует представлять в виде

$$\mathbf{e}_{N-1}=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)^T,$$

где угол φ подлежит определению. Для его нахождения воспользуемся формулой (3.24), так как направление скорости $\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N$ вполне определенно:

$$\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N=|\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N|(\cos\psi,\sin\psi,0)^T,\quad -\pi<\psi\le\pi$$

Следовательно,

$$\varphi=\psi\pm\delta,\quad \delta=\arccos\left(\dot{l}/\left|\mathbf{V}_{N-1}-\mathbf{V}_N\right|\right) \tag{3.26}$$

Знак плюс или минус выбирается в зависимости от поведения траектории до текущего момента времени. В случае, когда начальная скорость $(N-1)$-го шарика задается в радиальном направлении, при достаточно малом времени от начала его выпуска можно полагать, что под действием силы Кориолиса и центробежной силы траектория изогнется вниз (если смотреть на плоскость Oxy с конца оси z), и поэтому следует выбирать знак плюс.

Графики выпуска единичной точечной массы на невесомом тросе на расстояние 5 м за 500 с при равномерной скорости выпуска и значениях определяющих параметров (3.12) полностью совпадают с соответствующими графиками на рисунках 3.4 и 3.5. Так как мгновенное изменение скорости выпуска троса со значения V до нуля требует введения дельта-функции в функцию натяжения и физически невозможно, то остановка выпуска производилась в течение одной секунды уменьшением скорости выпуска с величины V в момент времени 500 с до нуля в момент времени 501 с (по линейному закону). Зависимость силы натяжения троса при $499\text{ с} \le t \le 502\text{ с}$ изображена на рисунке 3.9.

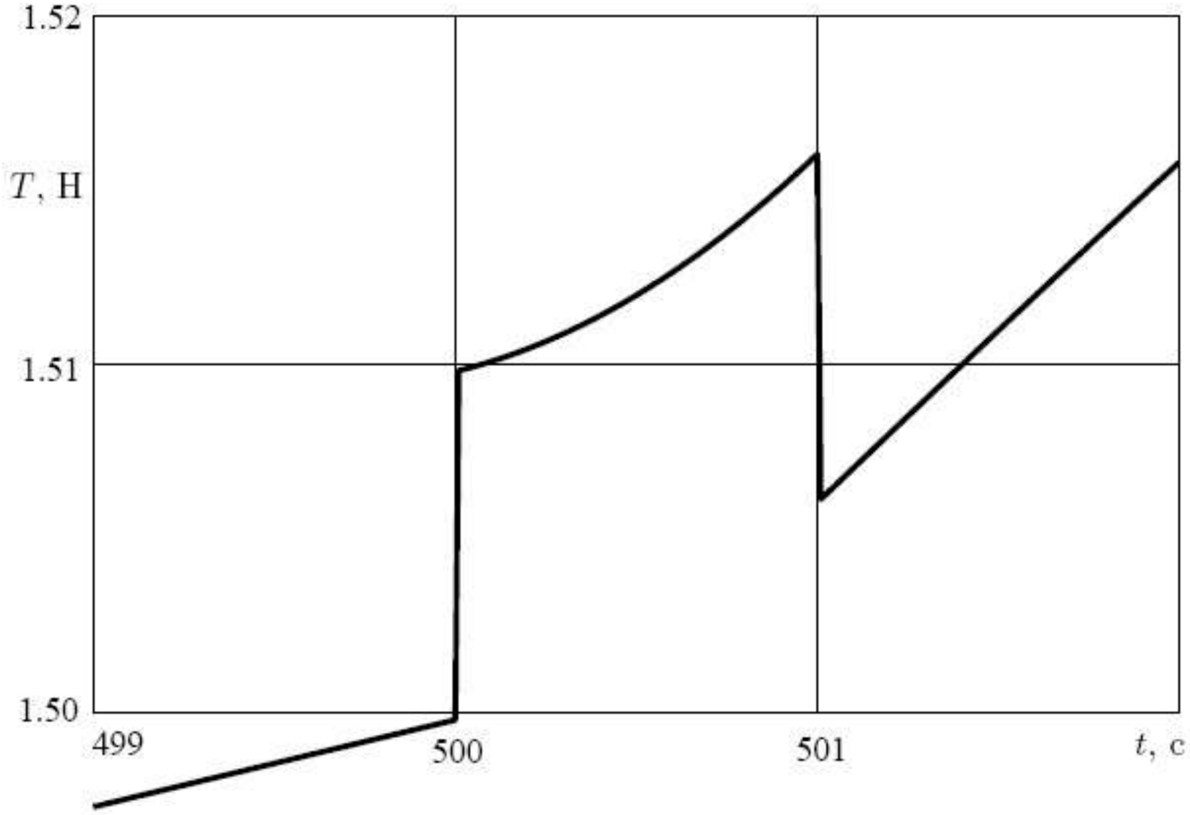


Рис. 3.9: Натяжение нити, соединяющей «шарик» с центральным цилиндром, в момент остановки

Графики выпуска единичной точечной массы на невесомом тросе на расстояние 2,5 м за 500 с, при равномерно замедленном способе выпуска, начиная со скорости $V = 0,01$ м/с и заканчивая нулевой скоростью с теми же значениями $a=1$ м и $\Omega=1/2$ рад/с, полностью совпадают с соответствующими графиками, изображенными на рисунках 3.6 и 3.7.

Приведенные графики показывают, что найденные в разделе 3.2 решения линеаризованных уравнений фактически совпадают с численными решениями, полученными в данном разделе.

Для того чтобы показать, что в случае весомого троса ситуация принципиально не меняется, приведем при значениях определяющих параметров (3.12) и $A = 2\cdot10^{-5}$ м/с^2 графики равномерно замедленного выпуска весомого троса длины $2{,}5$ м с распределенными по нему шестью единичными массами, находящимися на расстоянии $l_i = 0{,}5$ м друг от друга. На рисунке 3.10 изображены поперечные смещения $y_1 - y_5$ первых пяти шариков. Смещение y_5 соответствует шарику, ближайшему к центральному барабану, шестой шарик – закреплен на центральном барабане.

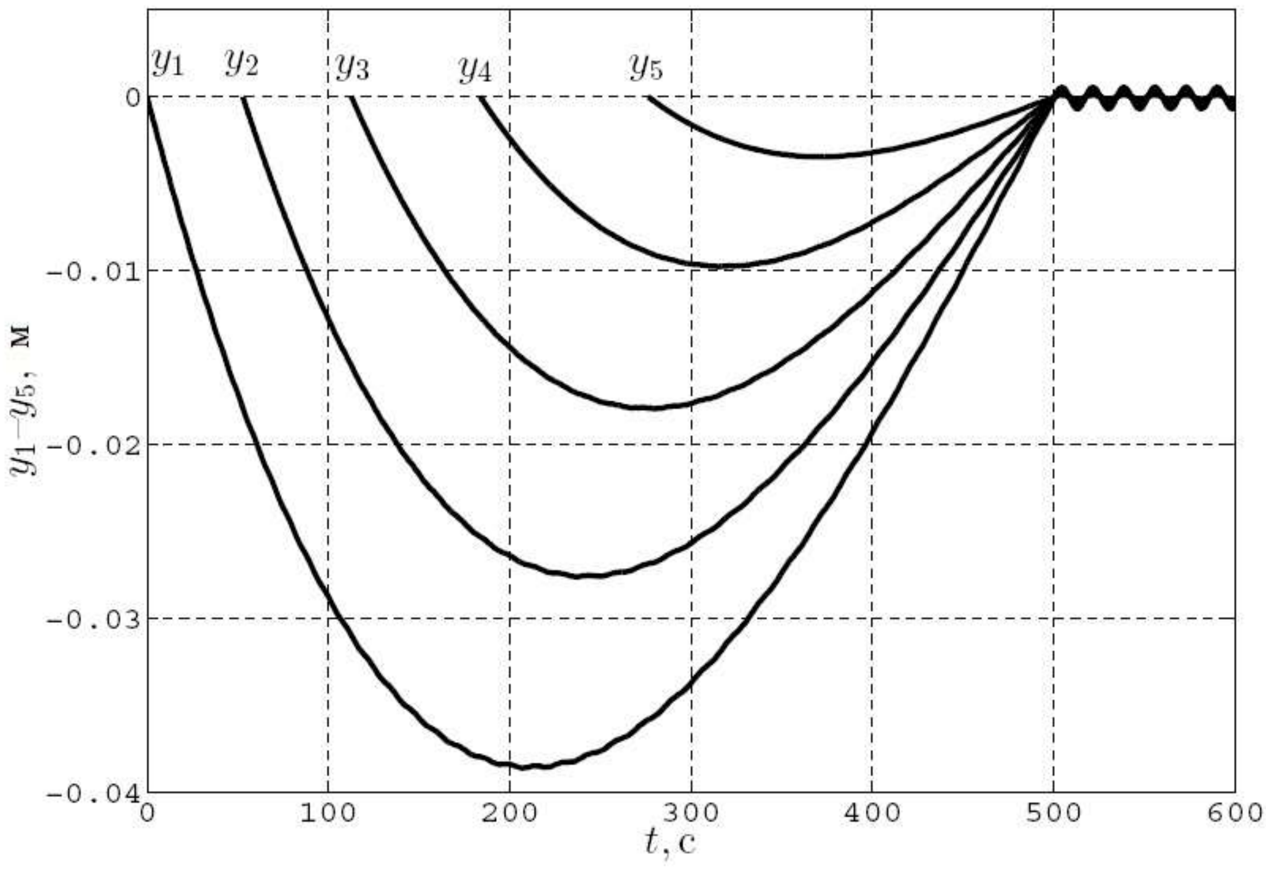


Рис. 3.10: Отклонения единичных точечных масс на тросе, расположенных на равных расстояниях, при равномерно замедленном выпуске

Окончание процесса выпуска в этом случае и гармонические колебания, установившиеся после его окончания, в увеличенном масштабе изображены на рисунке 3.11.

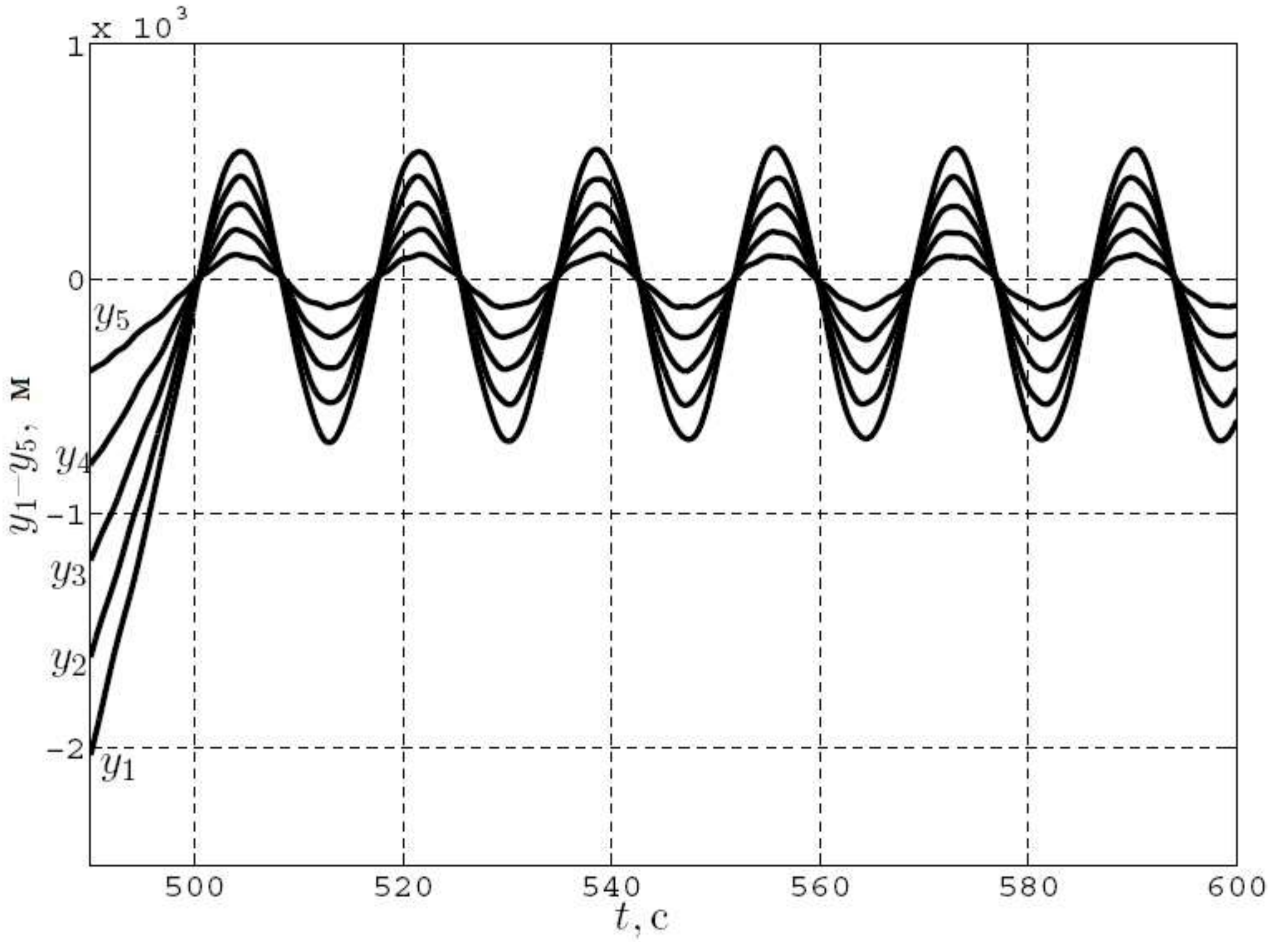


Рис. 3.11: Отклонения единичных точечных масс на тросе после окончания процесса равномерно замедленного выпуска

3.7 Обсуждение результатов третьей главы

В данной главе рассмотрены различные способы укладки солнечного паруса, их преимущества и недостатки. На основе проведенного анализа предложена схема укладки солнечного паруса в виде четырех геометрически симметричных тросов. В предположении центральной симметрии конструкционного расположения тросов и их синхронного выпуска, а также обеспечении динамической симметрии процесса выпуска системой управления, рассматривалась динамика выпуска одного троса с точечной массой на конце.

Получены аналитические решения линеаризованной задачи выпуска невесомого троса с точечной массой на конце из цилиндрического контейнера, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Решение найдено через функции Бесселя для случая равномерного выпуска и через гипергеометрические функции для случая равномерно замедленного выпуска.

Для проверки правильности аналитических решений была разработана математическая модель динамики разворачивания троса с точечной массой на конце. Поведение точечной массы на конце троса, полученное аналитически, практически совпало с результатами полномасштабного численного моделирования. Это позволило применить численный метод к решению динамической задачи выпуска весомого троса, представив его в виде совокупности точечных масс, равномерно распределенных по длине троса и соединенных невесомыми и нерастяжимыми нитями.

Рассмотренные различные способы выпуска весомого троса показали важность правильного выбора способа выпуска. Установлено, что равномерно замедленный выпуск приводит к намного меньшим амплитудам поперечных колебаний троса после окончания процесса выпуска.

Проведенное моделирование процесса выпуска мембраны с использованием пакета прикладных программ MATLAB с учетом как равномерного распределения точечных масс на вытягиваемом тросе, так и массивного тела на конце вытягиваемого троса подтвердило правильность выбора параметров мембранного диска и способа его выпуска из уложенного состояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации изложены основные результаты исследований динамического поведения космической платформы с вращающимся солнечным парусом. Несмотря на предварительный характер результатов, еще не получивших широкую известность в научных кругах, часть из них, с точки зрения автора, имеет фундаментальное значение. Прежде всего, это касается результатов аналитического решения линеаризованной задачи выпуска невесомого троса с точечной массой на конце из цилиндрического контейнера, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

На основе аналитического решения уравнения в частных производных для вращающейся мембраны с центральной жесткой вставкой была разработана математическая модель в виде набора независимых гироскопически связанных мод движения. Другими словами, был разработан механический аналог вращающегося пленочного диска в виде набора гироскопов в упругих подвесах, каждый со своим приведенным кинетическим моментом и жесткостью подвеса. Из нормировки полученных мод движения на приведенные массы (моменты инерции) строго следует, что 99,9% массы пленочного диска паруса совершает колебания на первой кососимметричной форме колебаний паруса (с одним узловым диаметром и без узловых окружностей). Это позволило с большой степенью точности заменить описание динамики углового движения объекта управления, как системы с распределенными параметрами, его описанием, как КА с одним гироскопом в упругом подвесе (вращающийся мембранный диск солнечного паруса) и управляющим силовым гироскопом в подвесе Гука с равным по величине и противоположно направленным кинетическим моментом.

В первой главе получена стационарная форма паруса при регулярной прецессии оси его вращения, как частное решение неоднородного уравнения вращающейся мембраны с центральной жесткой вставкой. Устойчивость найденной стационарной формы паруса была доказана прямым методом Ляпунова, примененным к системе с распределенными параметрами. Применяя гипотезу Фойгта, была доказана асимптотическая устойчивость стационарной формы. Полученные математические соотношения, описывающие стационарную форму вращающегося паруса при равномерной прецессии, были использованы для оценки отклонения плоскости вращения паруса в режиме программных разворотов космической платформы.

Во второй главе разработаны алгоритмы управления угловым положением космической платформы с солнечным парусом за счет гироскопического момента сил, возникающего при отклонении оси вращения ротора силового гироскопа в кардановом подвесе Гука. С целью подтверждения правильности выбранной концепции построения космических платформ с вращающимся солнечным парусом, выбора основных параметров базовой конструкции платформы и проверки разработанных алгоритмов было проведено математическое моделирование динамики углового движения объекта управления в двух различных режимах работы: гашение начальных угловых скоростей приборного отсека и программный разворот вокруг одной из поперечных центральных осей космической платформы.

В третьей главе представлена схема укладки солнечного паруса в виде четырех симметричных тросов. Получены аналитические решения линеаризованной задачи выпуска невесомого троса с точечной массой на конце из цилиндрического контейнера, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Решение найдено через функции Бесселя для случая равномерного выпуска и через гипергеометрические функции для случая равномерно замедленного выпуска. Впервые разработана математическая модель вращающегося весомого троса в процессе его выпуска. Предложенная модель применима для любого распределения массы троса по его длине, что делает данную модель универсальной, поэтому ее можно применять для любых способов укладки солнечных парусов в виде независимых секторов или тросов.

Поставленные задачи в виду своей сложности решались исключительно численными методами интегрирования. Результаты, полученные в диссертации, закладывают фундаментальные основы в теорию раскрытия больших пленочных систем. Среди полученных результатов необходимо упомянуть нахождение стационарной формы в случае равномерного выпуска и вращения, а также нахождение точного аналитического решения уравнения поперечных колебаний вытягиваемой центробежными силами точечной массы на невесомом тросе из вращающегося центрального блока в терминах цилиндрических функций.

Моделирование реализовано в программных пакетах MATLAB 7.9.0 и Simulink. Анализ результатов моделирования подтвердил правильность выбранной концепции конструкции космической платформы, а также законов управления движением.

Полученные теоретические результаты могут послужить основой для подготовки проведения космического эксперимента «Раскрытие двух пленочных отражателей, формируемых центробежными силами на транспортном грузовом корабле «Прогресс-М», регистрация микрочастиц, освещение Земли отраженным солнечным светом, управление гироскопической парой, ретрансляция радиоволн» ТЗ.МКС-КЭ.ККР/11.08 от 24.11.2008 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает свою признательность научному руководителю В.Н. Платонову и научному консультанту С.Н. Тимакову за плодотворные обсуждения идей диссертации. Автор благодарен коллегам А.В. Субботину и Е.А. Леонтьеву за консультацию и помощь при реализации алгоритмов, а также всему коллективу отдела 033 РКК «Энергия», проявившему интерес к работе. Автор признателен заведующей аспирантурой РКК «Энергия» Е.В. Потрываевой за предоставление возможности участия в различных конференциях. Слов благодарности также заслуживают В.В. Сазонов, В.В. Сидоренко и В.А. Козьминых, высказавшие ряд полезных замечаний и предложений по содержанию работы и способам представления результатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Семенов Ю.П., Бранец В.Н., Григорьев Ю.И., Кошелев В.А., Мельников В.М., Сыромятников В.С.* Космический эксперимент по развертыванию пленочного бескаркасного отражателя D=20 м («Знамя-2») // Космические исследования. 1994. Т. 32. № 4-5. С. 186-193.
2. Подготовка и проведение космического эксперимента на ГК «Прогресс М» №215 и ОК «Мир» по разворачиванию тонкоплёночного бескаркасного отражателя диаметром 20 м, формируемого центробежными силами: Отчет о НИР по теме «Лампа» // НПО «Энергия», НИИТП. Руководитель В.М. Мельников. 1993. 208 с.
3. *Yamaguchi T., Mimasu Y., Tsuda Y., Takeuchi H. and Yoshikawa M.* Estimation of Solar Radiation Pressure Force for Solar Sail Navigation // 61st International Astronautical Congress, Prague, CZ. 2010. Paper IAC-10-C1.6.4. 6 p.
4. *Johnson L.* Status of Solar Sail Technology within NASA // Advances in Space Research. Volume 48, Issue 11, 1 December 2011, pp. 1687-1694.
5. *Johnson L., Whorton M., Heaton A., Pinson R., Laue G., Charles A.* NanoSail-D: A solar sail demonstration mission // Acta Astronaut. 2011. V. 68, N. 5-6. P. 571-575.
6. *Комков В.А., Мельников В.М., Харлов Б.Н.* Формируемые центробежными силами космические солнечные батареи. М.: «Черос», 2007. 188 с.
7. *Райкунов Г.Г., Комков В.А., Мельников В.М., Харлов Б.Н.* Центробежные бескаркасные крупногабаритные космические конструкции. М.: Физматлит, 2009. 448 с.
8. *Mayorova V., Nerovnyy N., Popov A., Rachkin D., Tenenbaum S.* Space experiment "BMSTU-Sail" // Proceedings of 64th International Astronautical Congress. Beijing, China, 2013. Paper IAC-13-E2.4.9. 9 p.
9. *Поляхова Е.Н.* Космический полёт с солнечным парусом: проблемы и перспективы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 304 с.

10. Математическая модель и динамические характеристики изделий 11Ф615 А55 с вращающейся пленкой и СПК как объектов управления // Научно-технический отчет НПО «Энергия» им. С.П. Королёва. 1991. 38 с.
11. *Легостаев В.П., Зыков А.В., Платонов В.Н., Субботин А.В., Сумароков А.В., Тимаков С.Н.* Исследование динамики управляемого движения космического аппарата с большим вращающимся солнечным парусом // Научно-технический отчет РКК «Энергия» им. С.П. Королёва. 2011. 154 с.
12. *Черемных Е.А., Зыков А.В.* Разработка алгоритмов управления и исследование динамического поведения спутника с большим вращающимся солнечным парусом // Труды МАИ. 2011. № 45. С. 25.
13. *Зыков А.В.* Разработка алгоритмов управления космической платформы с большим вращающимся солнечным парусом // Гироскопия и навигация. 2011. № 2 (73). С. 111.
14. *Зыков А.В.* Разработка алгоритмов управления космической платформой с большим вращающимся солнечным парусом // Материалы XIX научно-технической конференции молодых ученых и специалистов РКК «Энергия» им. С.П. Королёва. 2012. С. 48-52.
15. *Зыков А.В.* Разработка алгоритмов управления космической платформой с большим вращающимся солнечным парусом // Труды LIV научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2011. С. 26-28.
16. *Зыков А.В.* Исследование управляемого движения космического аппарата с большим вращающимся солнечным парусом // Шестые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике. 2012. С. 87-88.

    Zykov A.V. Controlled Motion Research of Spacecraft with a Big Rotating Solar Sail // Sixth Polyakhov's reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics. 2012. P. 87-88.

17. *Зыков А.В.* О возможности проведения разгрузки накопленного кинетического момента КА с большим вращающимся солнечным парусом с помощью сил солнечного давления // Труды LV научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2012. Т. 1. С. 13-14.
18. *Зыков А.В., Субботин А.В., Тимаков С.Н.* Исследование динамики управляемого углового движения космического аппарата с вращающимся солнечным парусом // Актуальные проблемы Российской космонавтики: Труды XXXVII Академических чтений по космонавтике. 2013. С. 526-527.
19. *Зыков А.В.* Моделирование управляемого раскрытия большого вращающегося солнечного паруса // Гироскопия и навигация. 2013. № 2 (81). С. 156-157.
20. *Zykov A.V.* Control Algorithms Development for Space Platform with a Rotating Solar Sail // Proceedings of the International Astronautical Congress, Beijing, China. 2013. Paper IAC-13-C1.2.11. 5 p.
21. *Зыков А.В.* Моделирование управляемого раскрытия большого вращающегося солнечного паруса // Навигация и управление движением. Материалы XV конференции молодых ученых. 2013. С. 310-316.
22. *Зыков А.В.* Первоначальный этап раскрытия солнечного паруса // Труды LVI научной конференции МФТИ «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе». Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2013. Т. 1. С. 84-85.
23. *Зыков А.В.* Задача равномерно замедленного раскрытия весомого троса на орбите Земли // Гироскопия и навигация. 2014. № 2 (85). С. 111.
24. *Зыков А.В., Субботин А.В., Тимаков С.Н.* Динамика вращающейся тросовой системы в процессе управляемого выпуска // Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2014). 2014. С. 509-518.
25. *Зыков А.В.* Моделирование управляемого раскрытия солнечного паруса // Тезисы докладов XX научно-технической конференции молодых ученых и специалистов РКК «Энергия» им. С.П. Королёва. 2014. С. 175-176.
26. *Зыков А.В., Субботин А.В., Тимаков С.Н.* Управляемый выпуск троса из

вращающегося барабана за счет центробежных сил инерции // Актуальные проблемы Российской космонавтики: Труды XXXIX Академических чтений по космонавтике. 2015. С. 414-415.

27. *Зыков А.В.* Управляемое раскрытие вращающегося солнечного паруса из уложенного состояния // Седьмые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике. 2015. С. 33.

    Zykov A.V. Controllable Deployment of a Rotating Solar Sail from the Packed Configuration // The Seventh Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics. 2015. P. 33.

28. *Зыков А.В.* Управляемое раскрытие большого вращающегося солнечного паруса // Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Космодром «Восточный» и перспективы развития российской космонавтики». Тезисы докладов. 2015. С. 75-76.

29. *Зыков А.В., Субботин А.В.* Моделирование раскрытия солнечного паруса из уложенного состояния // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2015. С. 1532-1534.

30. *Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Зыков А.В.* Об устойчивости стационарной формы вращающейся кольцеобразной мембраны с регулярно прецессирующей центральной жесткой вставкой // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 3 (11). С. 73-78.

    Legostaev V.P., Subbotin A.V., Timakov S.N., Zykov A.V. On stability of the precession motion of a rotating ring-shaped membrane with central rigid insertion // Proceedings of MIPT. 2011. V. 3. N. 3 (11). P. 73-78.

31. *Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Зыков А.В.* Исследование динамики управляемого углового движения космического аппарата с вращающимся солнечным парусом // Труды МФТИ. 2013. Т. 5. № 2 (18). С. 106-119.

    Legostaev V.P., Subbotin A.V., Timakov S.N., Zykov A.V. Research on the dynamics of the controlled angular motion of a spacecraft with a rotating solar sail // Proceedings of MIPT. 2013. V. 5. N. 2 (18). P. 106-119.

32. *Амелькин Н.И., Зыков А.В.* О равновесиях и устойчивости спутника с системой двухстепенных силовых гироскопов в центральном гравитационном поле // Труды МФТИ. 2014. Т. 6. № 2 (22). С. 68-74.

Amelkin N.I., Zykov A.V. On equilibrium and stability of a satellite with a system of two-degree-of-freedom powered gyroscopes in a central gravitational field // Proceedings of MIPT. 2014. V. 6. N. 2 (22). P. 68-74.

33. *Зыков А.В., Легостаев В.П., Субботин А.В., Сумароков А.В., Тимаков С.Н.* Динамика вращающегося солнечного паруса в процессе его раскрытия // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 1. С. 48-60.

Zykov A.V., Legostaev V.P., Subbotin A.V., Sumarokov A.V., Timakov S.N. The Dynamics of a Rotating Solar Sail When It is Deployed // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. V. 79. N. 1. P. 35-43.

34. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. школа, 1982. 264 с.

35. *Колесников К.С.* Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение, 1969. 300 с.

36. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1964. 539 с.

37. *Гуляев В.И., Кравченко С.Г., Лизунов П.П.* Колебания вращающейся круговой мембраны в поле инерционных и гравитационных сил // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 11. С. 112-117.

38. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: «Машиностроение», 1977. 488 с.

39. *Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Черемных Е.А.* Собственные колебания вращающейся мембраны с центральной жесткой вставкой (применение функций Хойна) // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 224-238.

40. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001. 716 с.

41. *Magnus K. Kreisel*. Theorie und Anwendungen. Berlin: Springer, 1971. = *Магнус К*. Гироскоп: Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.

42. *Heun K.* Zur Theorie der Riemann'schen Funktionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten // Math. Ann. 1889. Bd. 33. S. 161-179.
43. Heun's Differential Equation. Ed. A. Ronveaux. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. 380 p.
44. *Сидоренко В.В.* Об устойчивости стационарных движений упругого кольца в плоскости круговой орбиты // Космические исследования, 1987. Т. 25. № 4. С. 483-490.
45. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.
46. *Гуляев В.И., Гром А.А., Кошкин В.Л., Лизунов П.П.* Динамика орбитальной пленочной системы с двойным вращением // Прикл. механика. 1993. Т. 29. № 5. С. 88-95.
47. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 303 с.
48. *Тарасов В. Ф.* Вырожденное уравнение Хойна с двумя особыми точками и модифицированное уравнение Шредингера с двумя вспомогательными параметрами // Фунд. и прикл. математика. 2000. Т. 6. № 1. С. 311-314.
49. *Becker P. A.* Normalization integrals of orthogonal Heun functions // J. Math. Phys. 1997. V. 38. № 7. P. 3692-3699.
50. *Козко А.И., Соболева Е.С., Субботин А.В.* Математические методы решения химических задач. М.: Академия, 2013. 368 с.
51. *Kamke E.* Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Bd 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig: Akad. Verlag., 1944. = *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
52. *Лунц Я.Л.* Введение в теорию гироскопов. М.: Наука, 1972. 297 с.
53. *Николаи Е.Л.* Теория гироскопов. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 38 с.
54. Задачи стабилизации составных спутников // Механика. Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1975. 208 с.

55. *Whittaker E. T., Watson G. N.* A Course of Modern Analysis. An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. = *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
56. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
57. *Funase R., Mori O., Tsuda Y., Shirasawa Y., Saiki T., Mimasu Y., Kawaguchi J.* Attitude Control of IKAROS Solar Sail Spacecraft and its Flight Results // 61st International Astronautical Congress, Prague, CZ. 2010. Paper IAC-10-C1.4.3. 6 p.
58. *Гуляев В.И., Кошелев В.А., Лизунов П.П., Мельников В.М.* Динамика разворачивания круговой мембраны // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев, 1989. Вып. 55. С. 20-24.
59. Математическое моделирование процесса раскрытия отражателя в КЭ «Знамя 2»: Отчет о НИР по теме «Знамя» // НПО «Энергия»; Руководитель В.М. Мельников. П-30613-782; инв. № 1162. Калининград, 1992. 33 с.
60. *Shirasawa Y., Mori O., Sawada H., Imaizumi T., Mimasu Y., Sato Sh., Tanaka K., Motooka N., Kitajima M. and Kawaguchi J.* Demonstration of Solar Sail Deployment System using a High Altitude Balloon // 27th International Symposium on Space Technology and Science, Tsukuba, Japan. 2009. 4 p.
61. Экспериментальное исследование процессов развертывания и функционирования пленочных конструкций, формируемых центробежными силами: Отчет о НИР по теме «Знамя» // ЦНИИМАШ, НПО «Энергия». Калининград, 1990. Кн. 70. 222 с.
62. Теоретические и экспериментальные исследования процессов управления и раскрытия пленочных отражающих конструкций, формируемых центробежными силами: Отчет о НИР по теме «Знамя» // НПО «Энергия». Калининград, 1990. 68 с.
63. *Ишлинский А.Ю.* Механика относительного движения и силы инерции. М. Наука, 1981. 191 с.

64. *Сазонов В.В.* Математическое моделирование развертывания тросовой системы с учетом массы троса // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. № 58. 36 с.
http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-58
65. *Ильин В.П., Кузнецов Ю.И.* Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 208 с.

СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА