



Тучкова Н.П., Беляев К.П., Михайлов
Г.М.

**Анализ пространственно-временной
изменчивости коэффициентов
стохастического дифференциального
уравнения потоков тепла в Северной
Атлантике**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Тучкова Н.П., Беляев К.П., Михайлов Г.М. Анализ пространственно-временной изменчивости коэффициентов стохастического дифференциального уравнения потоков тепла в Северной Атлантике // Научный сервис в сети Интернет: труды XXV Всероссийской научной конференции (18-21 сентября 2023 г., онлайн). — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2023. — С. 359-366.

<https://doi.org/10.20948/abrau-2023-21>

<https://keldysh.ru/abrau/2023/theses/21.pdf>

Видеозапись выступления

Анализ пространственно-временной изменчивости коэффициентов стохастического дифференциального уравнения потоков тепла в Северной Атлантике

Тучкова Н.П.¹, Беляев К.П.^{1,2}, Михайлов Г.М.¹

¹*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН*

²*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН*

Аннотация. Для анализа потоков тепла использованы данные наблюдений за 1979-2018 гг. в районе Северной Атлантики. Пространственно-временная изменчивость полного потока тепла, представляющего собой сумму потоков скрытого и явного тепла, моделировалась стохастическим диффузионным процессом. Коэффициенты стохастического дифференциального уравнения, представляющего стохастический процесс, были статистически определены из исходного набора данных. Ранее существование и единственность решения в сильном смысле стохастического дифференциального уравнения, порожденного построенным диффузионным процессом, были доказаны при выполнении условий Колмогорова. В настоящей работе анализируется пространственная и многолетняя изменчивость поля тепловых потоков. По заданному ряду длиной 40 лет с 1979 по 2018 г. были построены пространственные карты и временные кривые. Численные расчеты на суперкомпьютере «Ломоносов-2» МГУ им. М.В. Ломоносова.

Ключевые слова: анализ временных рядов, климатический сезонный ход, максимальные и минимальные значения тепловых потоков внутри климатического года

Analysis of spatiotemporal variability of the coefficients of the stochastic differential equation of heat fluxes in the North Atlantic

N.P. Tuchkova^{1*}[0000-0001-5357-9640], K.P. Belyaev^{1,2**}[0000-0003-2111-2709],
G.M. Mikhaylov^{1***}[0000-0002-4535-7180]

¹ *Dorodnicyn Computing Center FRC CSC of RAS*

² *Shirshov Institute of Oceanology of RAS*

*natalia_tuchkova@mail.ru, **kosbel55@gmail.com ***gmickail@ccas.ru

Abstract. For the analysis of heat fluxes observational data for 1979-2018 in the North Atlantic region were used. The spatiotemporal variability of the total heat flux, which is the sum of latent and sensible heat fluxes, was modeled by a stochastic diffusion process. The coefficients of the stochastic differential equation representing the stochastic process were statistically determined from the original dataset. Previously, the existence and uniqueness of a solution in the strong sense of a stochastic differential equation generated by the constructed diffusion process were proved under the conditions of Kolmogorov. In this paper, we analyze the spatial and long-term variability of the heat flux field. For a given series of 40 years in length from 1979 to 2018, spatial maps and time curves were constructed. Numerical calculations realized on the Lomonosov-2 supercomputer of the Lomonosov Moscow State University

Keywords: time series analysis, climatic seasonal cycle, maximum and minimum heat fluxes values within a climatic year

В работе представлены результаты исследований пространственно-временного распределения тепловых потоков в Северной Атлантике [1]. Данные потоков брались из открытого для научных использований варианта Атласа международного проекта, размещенного в Internet [2]. Область моделирования (<https://naad.ocean.ru/>) иллюстрируется на Рис. 1.

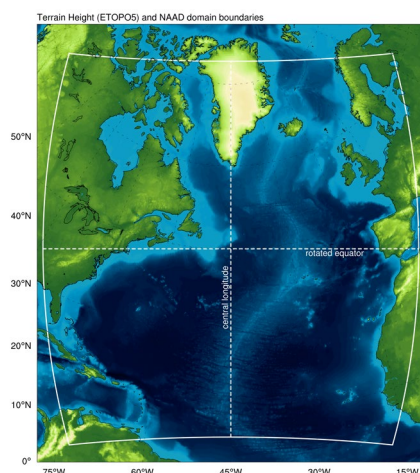


Рис. 1. Зона прогноза атмосферы Северной Атлантики (10°–80° с.ш.) за 40 лет проекта NAAD(<https://naad.ocean.ru/datarequest.php>).

Изменение потоков моделировалось с помощью стохастического дифференциального уравнения (уравнение Ланжевена) [3]

$$dX = a(t, X)dt + b(t, X)dW, \quad (1)$$

где X – поток тепла в точке плоскости x в момент времени t , а dW – стандартное обозначение «Гауссовского белого шума».

Статистическими методами [4] определялись коэффициенты уравнения (1): $a(t, x)$ – коэффициент сноса, $b(t, x)$ – коэффициент диффузии. Строились временные и пространственные распределения этих величин.

На Рис. 2, 3 приведены графики временного хода за 1979, 1999 и 2018 годы для средних значений коэффициентов $a(t, x)$ и $b(t, x)$.

Представлен краткий анализ полученных коэффициентов и их физический смысл. Рис. 2(а-в) показывают поведение коэффициента сноса $a(t, x)$ в течение времени (t меняется через сутки в течение года, а значение x определяется как среднее значение потока по рассматриваемой области в заданный момент времени, то есть среднее по области за фиксированные сутки). На Рис. 2(а-в) приведены соответствующие значения за 1979, 1999 и 2018 годы. Из представленных иллюстраций видно, что сглаженное значение этих коэффициентов хорошо аппроксимируется тригонометрической зависимостью с годовой гармоникой, как на Рис. 2(а), и несколькими гармониками, как на Рис. 2(б) и 2(в). При этом на Рис. 2(а) амплитуда основной гармоники положительна, а на остальных рисунках отрицательна. Это позволяет смоделировать климатическую (долговременную) изменчивость соответствующих коэффициентов как

$$a(t, x) = A(x) \exp(it\omega), \quad (2)$$

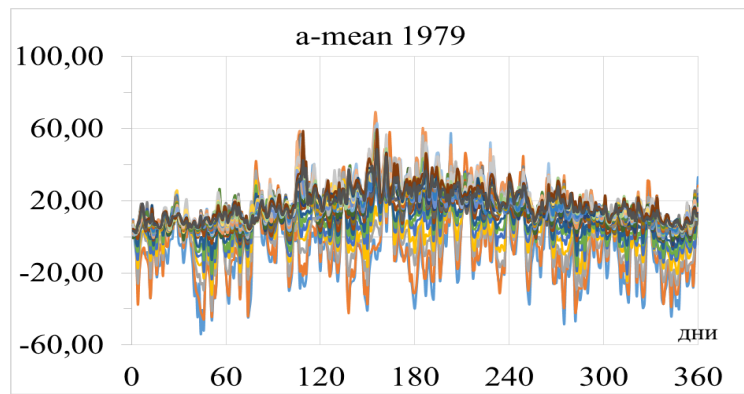
где $A(x)$ - амплитуда основной (как правило, годовой) гармоники, зависящей только от значения потока; ω - соответственно, частота основной гармоники, $i = \sqrt{-1}$. Амплитуда в (2), вообще говоря, может быть комплексной, но физический смысл имеет только ее реальное значение. В принципе можно вместо (2) рассматривать более общую модель вида

$$a(t, x) = \sum_{o=1}^N A_o(x) \exp(i\omega_o t).$$

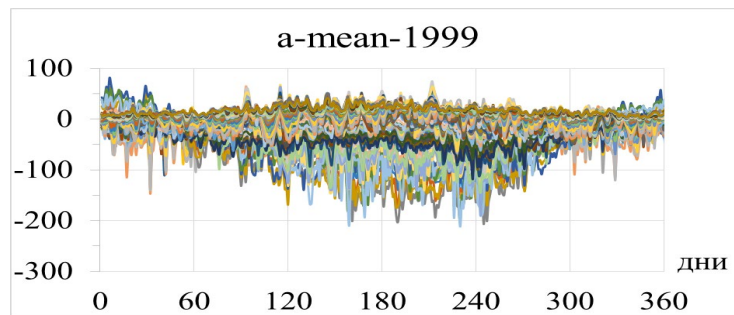
При этом коэффициенты $A_j(x)$ подбираются методом наименьших квадратов после сглаживания значений коэффициента $a(t, x)$, как это делается, например, в работе [5].

Аналогичный анализ можно сделать относительно коэффициента диффузии $b(t, x)$, показанного на Рис. 3(а,б,в). На Рис. 3(а) показано поведение коэффициента $b(t, x)$ за 1979 год, а на рис. 3(б) и 3(в) за 1999 и 2018, соответственно. Так же, как и для Рис. 2, коэффициент $b(t, x)$ рассчитывался посуточно при значении потока, равного среднему по области.

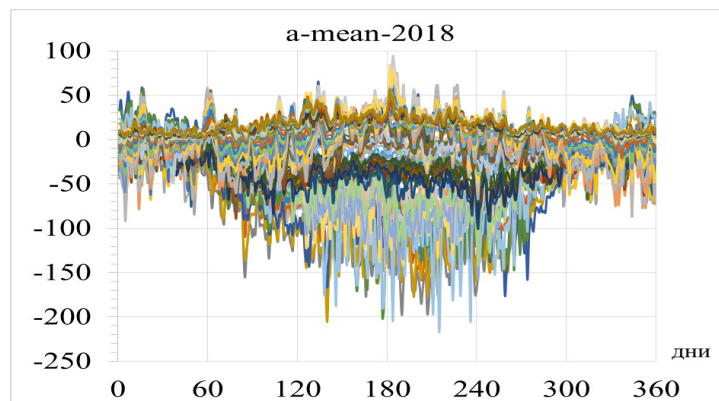
Из Рис. 3 хорошо видно, что при сглаживании коэффициент $b(t, x)$ также хорошо моделируется формулой $b(t, x) = B(x) \exp(it\omega)$, при этом значения коэффициента всегда положительны.



(а)



(б)



(в)

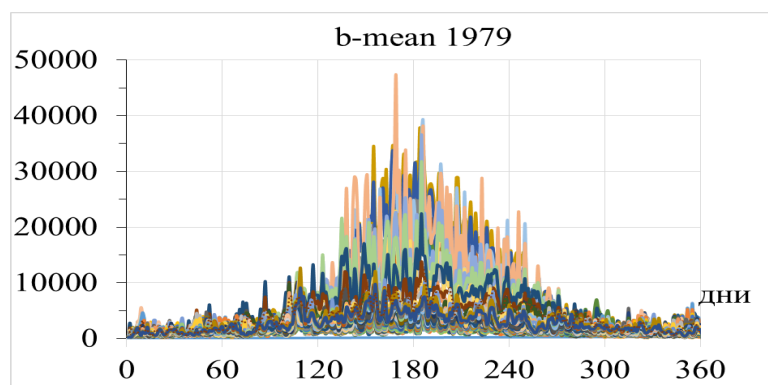
Рис. 2. Изменение средних значений коэффициента $a(t,x)$ с шагом 1 день за а) 1979; б) 1999; в) 2018 годы

Как следствие, можно написать уравнение для расчета вероятностей значений потока в заданный (климатический) момент времени в виде

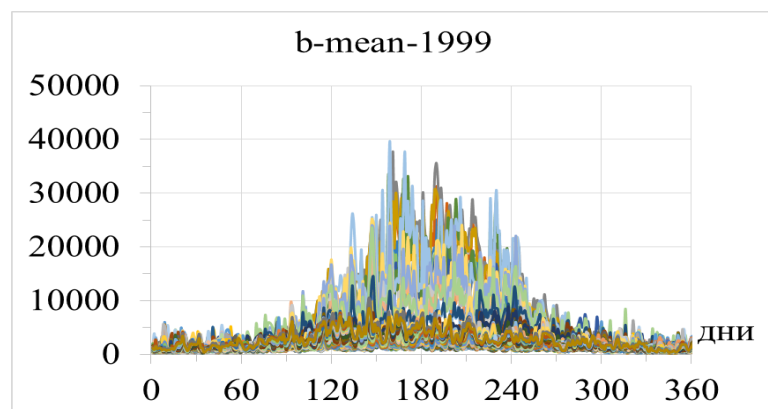
$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(\exp(it\omega)A(x)p)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\exp(i\omega t)B(x)p)}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где $p(t,x)$ - искомая плотность вероятности в момент t значения потока x , остальные обозначения приведены выше. Уравнение (3) (уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова) формально записывается для комплексных коэффициентов, но физический смысл имеет только для вещественных значений. Оно решается при граничных условиях $p(t,\pm\infty) = 0$ и начальном

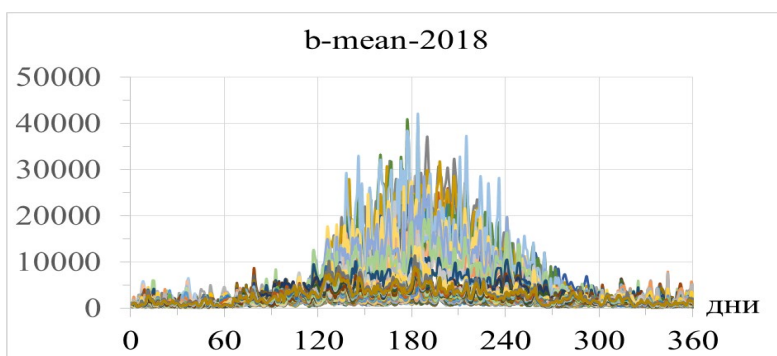
условии, если ставится задача Коши $p(0, x) = p_0(x)$, где $p_0(x)$ задано. Аналитически эта задача, вообще говоря, не решается, но численно ее решение не представляет особых трудностей. Однако, если потребовать, чтобы решение удовлетворяло определенным условиям на границе, например, потребовать, чтобы $p(t, x) \cong \exp(-\lambda x^2)$ при $x \sim$ бесконечности, то обычными разностными методами это сделать непросто. Поэтому в работе используется модифицированный метод Галеркина, решающий эту проблему, детали которого будут составлять продолжение данных исследований.



(а)



(б)



(в)

Рис. 3. Изменение средних значений коэффициента $b(t, x)$ с шагом 1 день за а) 1979; б) 1999; в) 2018 годы

Полученные зависимости для коэффициентов $a(t,x)$ и $b(t,x)$ были аппроксимированы аналитическими функциями, которые в дальнейшем используются для решения уравнения (1). Проанализированы тренды временного хода 40-летнего периода (Рис. 4,5)

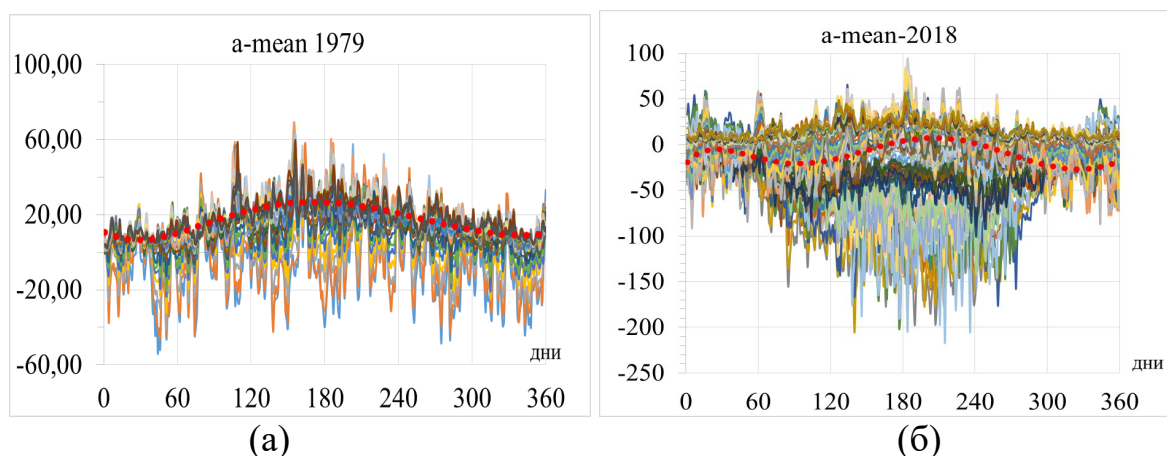


Рис. 4. Характеристики средних (снос) значений коэффициента $a(t,x)$, где красным пунктиром обозначены тренды: а) 1979 г. и б) 2018 г.

На Рис. 4(а,б) и Рис. 5(а,б) видно, что тренды значений коэффициентов $a(t,x)$ и $b(t,x)$ (красный пунктир) за 40 лет сохранились и носят более выраженный характер.

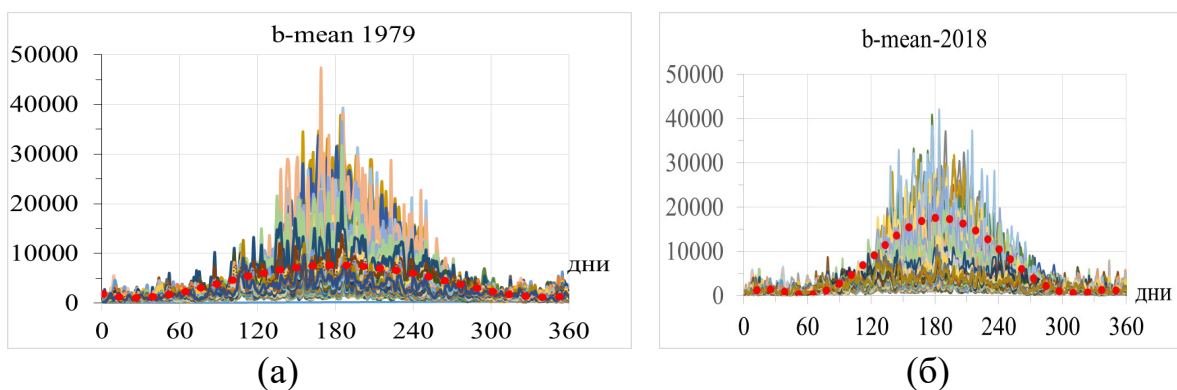


Рис. 5. Характеристики средних (диффузия) значений коэффициента $b(t,x)$, где красным пунктиром обозначены тренды: а) 1979 г. и б) 2018 г.

Дальнейшие исследования предполагают:

- *совместное исследование нескольких климатических характеристик (температуры и суммарного потока) методами вероятностного анализа;*
- *выявление регулярных и стохастических составляющих процессов для аналитической оценки аномальных явлений;*
- *сравнение характеристик различных периодов, в том числе аномальных.*

Работа представлена в рамках выполнения темы НИР 0063-2019-0003 ФИЦ ИУ РАН и темы НИР 0128-2021-0002 ИО РАН.

Литература

1. Belyaev K., Mikhaylov G., Salnikov A., Tuchkova N. Seasonal and Decadal Variability of Atmosphere Pressure in Arctic, its Statistical and Temporal Analysis // CEUR Workshop Proceedings, M. Jeusfeld c/o Redaktion Sun SITE, Informatik V, RWTH Aachen (Aachen, Germany), 2020. V. 2784. P. 51-61. <http://ceur-ws.org/Vol-2784/rpaper05.pdf>.
2. Gavrikov A., Gulev S., Markina M., Tilinina N., Verezemskaya P., Barnier B., Dufour A., Zolina O., Zyulyaeva Y., Krinitskiy M., Okhlopkov I., and Sokov A. RAS-NAAD: 40-yr High-Resolution North Atlantic Atmospheric Hindcast for Multipurpose Applications (New Dataset for the Regional Mesoscale Studies in the Atmosphere and the Ocean) // Journal of Applied Meteorology and Climatology. 2020, vol. 59, issue 5, pp. 793–817. <https://doi.org/10.1175/JAMC-D-19-0190.1>
3. Don Lemons S., Anthony Gythiel A. Paul Langevin's 1908 paper “On the Theory of Brownian Motion” //Am. J. Phys. 1997. P. 65-111.
4. Гихман И., Скороход А. Введению в теорию случайных процессов. М.:Наука, 1965. 655 с.
5. Беляев К.Л., Лаппо С.С., Музыченко А.С., Селеменов К.М. Анализ статистических закономерностей временной изменчивости поверхностной температуры воды в Атлантическом и Тихом океанах // Сб. Статистические закономерности климатической изменчивости океанов. Ред. Лаппо С.С. Л: Гидрометиздат, 1988. С. 3-55.

References

1. Belyaev K., Mikhaylov G., Salnikov A., Tuchkova N. Seasonal and Decadal Variability of Atmosphere Pressure in Arctic, its Statistical and Temporal Analysis // CEUR Workshop Proceedings, M. Jeusfeld c/o Redaktion Sun SITE, Informatik V, RWTH Aachen (Aachen, Germany), 2020. V. 2784. P. 51-61. <http://ceur-ws.org/Vol-2784/rpaper05.pdf>.
2. Gavrikov A., Gulev S., Markina M., Tilinina N., Verezemskaya P., Barnier B., Dufour A., Zolina O., Zyulyaeva Y., Krinitskiy M., Okhlopkov I., and Sokov A. RAS-NAAD: 40-yr High-Resolution North Atlantic Atmospheric Hindcast for Multipurpose Applications (New Dataset for the Regional Mesoscale Studies in the Atmosphere and the Ocean) // Journal of Applied Meteorology and Climatology. 2020, vol. 59, issue 5, pp. 793–817. <https://doi.org/10.1175/JAMC-D-19-0190.1>

3. Don Lemons S., Anthony Gythiel A. Paul Langevin's 1908 paper "On the Theory of Brownian Motion" //Am. J. Phys. 1997. P. 65-111.
4. Gihman I., Skorohod A. Vvedeniye v teoriyu sluchajnyh processov. M.Nauka, 1965. 655 p.
5. Belyaev K., Lappo S., Muzychenko A., Selemenov K. Analysis of statistical patterns of Sea Surface Temperature temporal variability in Atlantic and Pacific oceans. In "Statistical patterns of ocean climate variability. Ed. by Lappo S. S. L.: Hydrometizdat, 1988, p. 3-55.