О восьмимерности пространства шахматных позиций и их трансляции в управляющие системы

Р.В. Хелемендик[1]

[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*

Аннотация. В работе определён формат записи произвольной шахматной позиции в виде так называемого шахбайта, который обладает новыми возможностями по сравнению с известным стандартом FEN. Шахбайту сопоставлена булева функция от 8 переменных, что позволяет представлять шахматные позиции в 8-мерном пространстве (булевом кубе). Для полученной по шахматной позиции функции описано построение некоторых типов управляющих систем, понимаемых в терминологии А.А.Ляпунова и С.В.Яблонского.

Ключевые слова: булева функция, управляющая система, шахматы, шахбайт

On the eight-dimensionality of the space of chess positions and their translation into control systems

R.V. Khelemendik[1]

[1] *Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences)*

Abstract. In the paper is defined the format for recording an arbitrary chess position in the form of a so-called chessbyte, which has new features compared to the well-known FEN standard. A boolean function of 8 variables is mapped to the chessbyte, which makes it possible to represent chess positions in an 8-dimensional space (in boolean cube). For the function obtained from the chess position, the construction of some types of control systems, understood in the terminology of A.A.Lyapunov and S.V.Yablonsky, is described.

Keywords: boolean function, control system, chess, chessbyte

1. Введение

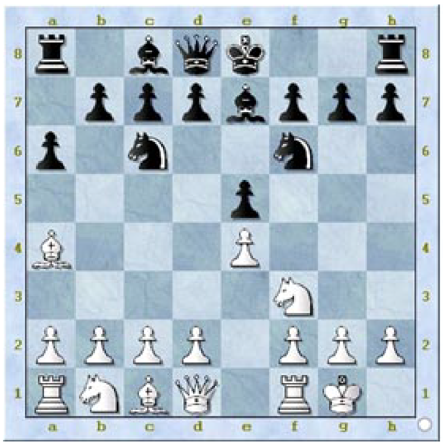
Понятие *управляющей системы* (УС) в математической кибернетике было введено С.В.Яблонским и А.А.Ляпуновым в работах [1-2]. Рассматриваемые поначалу как математические модели физических управляющих систем, в дальнейшем УС объединили десятки разнотипных объектов математической кибернетики. При этом в теории УС с самого начала её развития большое внимание уделяется как поиску общих закономерностей, так и разработке методов для конкретных УС, путей расширения области их применения для других типов УС. Отметим, что уже в указанных работах шахматы упоминаются многократно, однако рассматриваются в основном как пример физических управляющих систем, иллюстрирующий содержательные аспекты теории УС. В направлении практического применения шахмат в интересах народного хозяйства (управления производством, экономики) важную роль играют работы М.М.Ботвинника (см., например, [3]) в области формализации мышления шахматного мастера. Некоторые современные ресурсы шахмат и пути их использования при решении разнотипных задач рассмотрены в [4].

В настоящей работе проводится построение по произвольной шахматной позиции булевой функции (б.ф.) от 8 переменных и осуществляется её трансляция в несколько видов УС. Таким образом, геометрически шахматная позиция представляется в восьмимерном пространстве и при этом становится представителем сразу нескольких типов УС.

В первом разделе статьи вводится определение шахбайта, описывается построение по произвольной позиции канонического шахбайта (являющегося более компактным объектом по сравнению с популярными форматами, в частности, стандартом FEN), доказывается однозначность его соответствия позиции, б.ф. от 8 переменных, а также покрытию вершин 8-мерного булева куба. Во втором разделе рассмотрено понятие УС Ляпунова-Яблонского и построены трансляции б.ф. от 8 переменных в следующие УС: булевы формулы, множества булевых формул, схемы из функциональных элементов, которые формализуют шахматы в языке УС, а также представляют интерес для изучения УС средствами шахмат.

2. Реализация шахматных позиций булевыми функциями

Для задания шахматной позиции есть два основных пути. На первом из них позиция указывается непосредственно: расставляется на доске (обычной деревянной или на экране электронного устройства), печатается на диаграмме или записывается в текстовом виде на языке шахматной нотации. На другом пути прилагается текст фрагмента шахматной партии (или варианта), после воспроизведения которого на доске из уже известной позиции (например, начальной) получается данная позиция – см. пример



Эта позиция в текстовом виде может быть записана следующим образом.
Белые: Крg1,Фd1, Ла1, Лf1, Са4, Сс1, Кb1, Кf3, пешки: а2, b2, c2, d2, e4, f2, g2, h2;
черные: Кре8, Фd8, Ла8, Лh8, Сс8, Се7, Кс6, Кf6, пешки: а6, b7, c7, d7, e5, f7, g7, h7; ход белых.

Позиция получена из начальной серией ходов:
1.е4 е5 2.Кf3 Кс6 3.Сb5 а6 4.Са4 Кf6 5.0-0 Се7.
В англоязычном варианте серия ходов такова:
1.e4 e5 2.Nf3 Nc6 3.Bb5 a6 4.Ba4 Nf6 5.0-0 Be7.

Рис. 1. Способы задания шахматной позиции

на рис. 1. Здесь приняты распространённые русскоязычные сокращения названий фигур: король – Кр, ферзь – Ф, ладья – Л, слон – С, конь – К, пешка – П (или без обозначения); их англоязычные аналоги: King – K, Queen – Q, Rook – R, Bishop – B, Knight – N, Pawn – P.

Для полного задания позиции, необходимого для нахождения всех допустимых в ней ходов, в первом способе также требуется указание информации о возможностях специальных ходов – рокировок и взятия пешки на проходе. Для рокировок эта специальная информация задаётся в виде указания наличия единичных значений 4-х булевых переменных (битов): двух для белых и двух для чёрных – для короткой и длинной сторон. Для возможного взятия на проходе обычно отмечается пройденное пешкой поле, если последний ход в позиции был сделан на два поля данной пешкой (сразу после ответного хода эта отметка исчезает). Запись такой специальной информации назовём *локально корректной*, или сокращенно *л-корректной*, при выполнении следующих условий: 1) если указан бит рокировки белых в короткую (длинную) сторону, то в позиции на поле e1 должен стоять белый король, на поле a1 (соответственно, h1) – белая ладья, при наличии бита рокировки чёрных в короткую (длинную) сторону поле e8 должен стоять чёрный король, на поле a8 (h8) – чёрная ладья; 2) если последний ход в позиции был сделан белой (чёрной) пешкой на два поля, то пройденное ей поле должно быть пустым, а очередь хода в позиции должна быть за чёрными (соответственно, белыми).

Формат записи FEN. С ростом применения компьютеров в шахматном мире указанным путям задания шахматных позиций соответствуют две группы стандартов, представителями которых являются широко известные форматы FEN (Forsyth-Edwards Notation, см. [5]) и PGN (Portable Game Notation, см. [6]). Формат PGN предназначен в первую очередь для записи, воспроизведения шахматных партий, поэтому для задания позиций в основном применяется первый формат. Формат FEN представляет собой строку текста, состоящую из 6 блоков, разделенных пробелами. Первые два блока назовём основными, следующие два – дополнительными, последние два – информационно-накопительными.

В первом блоке последовательно перечисляется содержимое полей горизонталей (начиная с 8-й горизонтали, заканчивая 1-й), отделённых символами “/“. При этом белые фигуры обозначаются заглавными буквами: PNBRQK, а чёрные – соответствующими строчными: pnbrqk. Если поле пусто, то можно считать, что на его месте стоит 0, однако в формате FEN в первом блоке нули не допускаются: вместо последовательности нулей указывается конкретная цифра (от 1 до 8), равная количеству подряд идущих пустых полей в горизонтали. Так, для позиции, изображенной на рис. 1, первые два блока FEN таковы: r1bqk2r/1pppbppp/p1n2n2/4p3/B3P3/5N2/PPPP1PPP/RNBQ1RK1 w.

Третий блок имеет 4 символа и последовательно записывает возможности рокировки в короткую и длинную сторону сначала для белых, затем для чёрных. Возможность рокировки белых (чёрных) в короткую сторону обозначается символом K (k), в длинную – символом Q (q); отсутствие возможности всех рокировок обозначается через “-“. Четвёртый блок предназначен для указания возможности специального хода – взятия пешки на проходе. Если в позиции последним был сделан ход пешкой на два поля, то указывается координата того поля, через которое эта пешка прошла, а иначе пишется “-“. Координата ⟨h,j⟩, где h – номер горизонтали, а j – номер вертикали, как обычно, записывается в виде двух символов v(j)h, где v(j) – латинское буквенное обозначение j-й вертикали, т.е. поле ⟨h,j⟩ записывается как v(j)h, например, ⟨3,2⟩ – это b3.

Пятый и шестой блоки предназначены для указания чисел полуходов (с момента последнего взятия или продвижения пешки) и полных ходов (считая от игры с исходной позиции), соответственно. Эти числа могут использоваться, например, при фиксировании ничьи в случае выполнения «правила 50 ходов»[1], однако на определение множества допустимых в позиции ходов они не влияют[2]. В связи с этим ниже будет рассматриваться формат, полученный из FEN отсечением двух последних блоков, который обозначим через FEN4.

Приведём примеры записи позиций в формате FEN. Для исходной позиции FEN: rnbqkbnr/pppppppp/8/8/8/8/PPPPPPPP/RNBQKBNR w KQkq - 0 1. После хода 1.e4: rnbqkbnr/pppppppp/8/8/4P3/8/PPPP1PPP/RNBQKBNR b KQkq e3 0 1. Для диаграммы на рис. 1, т.е. после хода 5...Be7: r1bqk2r/1pppbppp/p1n2n2/4p3/B3P3/5N2/PPPP1PPP/RNBQ1RK1 w kq - 4 6.

[1] Ничья по требованию, если за 50 ходов не было ни одного взятия и ни одного хода пешкой.

[2] Они не дают и полноты информации для шахматных арбитров, так как не накапливают сведения о повторениях позиций для верификации их троекратного повторения при фиксации ничьи по требованию игрока.

Обозначим i-й блок формата FEN4 (FEN) через FEN4(i) (FEN(i)), где $1 \le i \le 4$ $(1 \le i \le 6)$. Очевидно, $\forall i$ $(1 \le i \le 4)$ FEN4(i)=FEN(i). Тогда для рис. 1: FEN4(1)=r1bqk2r/1pppbppp/p1n2n2/4p3/B3P3/5N2/PPPP1PPP/RNBQ1RK1, FEN4(2)=w, FEN4(3)=kq, FEN4(4)= "-".

Запись в формате FEN4 назовём *л-корректной*, если она удовлетворяет двум условиям: 1) если в FEN4(3) есть символ K (Q), то в позиции на поле e1 должен стоять белый король, на поле a1 (соответственно, h1) – белая ладья, при наличии символа k (q) на поле e8 должен стоять чёрный король, на поле a8 (h8) – чёрная ладья; 2) если FEN4(4)=$\langle h,j \rangle$, то поле $\langle h,j \rangle$ пусто, причём либо $j=6$ и в позиции ход белых, либо $j=3$ и в позиции ход чёрных. Требование локальной корректности позволяет исключить заведомо бессмысленные записи (дополнительных блоков) позиций, что полезно для последующих соответствий между форматами; поэтому в дальнейшем будут рассматриваться преимущественно локально корректные FEN4.

Запись шахматной позиции в виде k-значных наборов. Запишем информацию о шахматной позиции в виде наборов переменных, каждая из которых принимает не более k значений и убедимся, что такое задание позиции эквивалентно её записи в формате FEN4.

Следуя с некоторыми модификациями работе [7], введём набор $\mathbf{y}=\langle y_1,\ldots,y_{68} \rangle$ переменных, каждая из которых принимает значения из множества $\{0..k-1\}$, где $k=13$, или специального его подмножества. Разобьём этот набор на 4 блока – наборы $\mathbf{y(1)}$, $\mathbf{y(2)}$, $\mathbf{y(3)}$, $\mathbf{y(4)}$, т.е. $\mathbf{y}=\langle \mathbf{y(1)},\mathbf{y(2)},\mathbf{y(3)},\mathbf{y(4)} \rangle$. При этом набор i-го блока $(1 \le i \le 4)$ при записи позиции будет играть ту же роль, что и блок FEN4(i) в формате FEN4. Так, в первом блоке $\mathbf{y(1)}=\langle y_1,...,y_{64} \rangle$ переменные $y_1,\ldots,y_{64}$ соответствуют содержимому клеток шахматной доски, занумерованных слева направо и затем снизу вверх, начиная от поля a1 (левого нижнего углового поля). Каждая переменная y_m, где $1 \le m \le 64$, принимает значение из множества $\{0..12\}$; в частности, $y_m=0$, если m-е поле пусто. При $y_m=1$ $(y_m=7)$ на поле m находится белый (чёрный) король, при $y_m=2$ $(y_m=8)$ – белый (чёрный) ферзь, при $y_m=3$ $(y_m=9)$ – белая (чёрная) ладья, при $y_m=4$ $(y_m=10)$ – белый (чёрный) слон, при $y_m=5$ $(y_m=11)$ – белый (чёрный) конь, при $y_m=6$ $(y_m=12)$ – белая (чёрная) пешка. Набор второго блока $\mathbf{y(2)}$ состоит из единственной переменной y_{65}, т.е. $\mathbf{y(2)}=\langle y_{65} \rangle$, которая принимает значения 0 или 1: в случае $y_{65}=0$ в позиции ход белых, а в случае $y_{65}=1$ – ход чёрных.

Набор третьего блока $\mathbf{y(3)}=\langle y_{66},y_{67} \rangle$ состоит из двух переменных, принимающих значения из множества $\{0..3\}$, и соответствующих возможностям рокировок за белых и чёрных. Так, для белых при $y_{66}=0$ рокировка уже невозможна, при $y_{66}=1$ – возможна только в длинную сторону, при $y_{66}=2$ – только в короткую сторону, при $y_{66}=3$ – в обе стороны. Аналогичным образом значение переменной y_{67} определяет возможности рокировки для чёрных. Наконец, переменная y_{68}, где **y(4)**=$\langle y_{68}\rangle$, $y_{68}\in\{0..8\}$, сигнализирует о том, что последний ход в позиции был сделан пешкой на два поля, что важно для дальнейшего выяснения возможности специального ответного хода – взятия этой пешки на проходе. При y_{68}=0 последний ход в позиции не являлся ходом пешкой на два поля; в противном случае y_{68}=j, где j – номер вертикали, по которой ходила эта пешка.

Наборы значений **a(1)**, **a(2)**, **a(3)**, **a(4)**, где **y(1)=a(1)**, **y(2)=a(2)**, **y(3)=a(3)**, **y(4)=a(4)**, составляют набор **a**=$\langle$**a(1)**,**a(2)**,**a(3)**,**a(4)**$\rangle$, который будем называть k-*значной записью* (или просто k-*записью*) шахматной позиции. Назовём k-запись *л-корректной* (*локально корректной*) при выполнении двух условий: 1) если $y_{66}\in\{1..3\}$ ($y_{67}\in\{1..3\}$), то в позиции на поле e1 (e8) должен стоять белый (чёрный) король, если y_{66}=1 (y_{67}=1), то на поле a1 (соответственно, a8) – белая (чёрная) ладья; если y_{66}=2 (y_{67}=2), то на поле h1 (h8) – белая (чёрная) ладья; если y_{66}=3 (y_{67}=3), то на полях a1, h1 (a8, h8) – белые (чёрные) ладьи; 2) если y_{68}=j>0, то при ходе белых (чёрных) поле $\langle 6,j\rangle$ (соответственно, $\langle 3,j\rangle$) должно быть пусто. Аналогично формату FEN4 (сокращённо – FEN4-*записи*), ниже будем рассматривать прежде всего л-корректные k-записи. Запись в формате FEN4 и k-запись будем считать *эквивалентными*, если они задают одну и ту же позицию и являются л-корректными.

Утверждение 1. Запись шахматной позиции в формате FEN4 эквивалентна ее k-значной записи.

Доказательство. Для каждого блока FEN4(i) ($1\le i\le 4$) установим эквивалентность записи соответствующей информации о шахматной позиции её записи в виде значений набора **y(i)**. По блоку FEN4(1) построим матрицу $A_{FEN4(1)}$ размером 8x8 следующим образом. Для этого сначала в FEN4(1) каждое число (т.е. цифру) заменим на равное ей число нулей (по определению FEN оно не больше 8), обозначив полученный блок через FEN4'(1). Поскольку этот блок состоит из 8 последовательностей по 8 символов каждая, ему можно взаимно однозначно сопоставить символьную матрицу $A'_{FEN4(1)}$ размером 8x8. Заменим в этой матрице символы на числа по следующему списку переобозначений: '0'=0, 'P'=6, 'N'=5, 'B'=4, 'R'=3, 'Q'=2, 'K'=1, 'p'=12, 'n'=11, 'b'=10, 'r'=9, 'q'=9, 'k'=7; полученную целочисленную матрицу обозначив через $A''_{FEN4(1)}$. Затем заменим эту матрицу на симмметричную ей относительно горизонтальной линии между 4-ой и 5-ой горизонталями (т.е. поменяем 1-ю строку и 8-ю, 2-ю и 7-ю, и т.д.), получив искомую матрицу $A_{FEN4(1)}$. Тогда координата поля $\langle h,j\rangle$, где h – номер горизонтали, а j – номер вертикали, и его порядковый номер m, где $1\le m\le 64$, связаны равенствами: $m=(h-1)\cdot 8+j$, $h=h(m)=\lfloor (m-1)/8\rfloor+1$, $j=j(m)=m-8\cdot(h(m)-1)$, откуда следует $y_m=A_{FEN4(1)}[h,j]$. Наконец, замечая, что по матрице $A_{FEN4(1)}$ блок FEN4(1) тоже получается однозначно, мы получаем завершение доказательства утверждения для первого блока. Эквивалентность записей для оставшихся трех блоков устанавливается аналогично с учетом требований л-корректности. Утверждение доказано.

Таким образом, k-значная запись шахматной позиции вполне пригодна в качестве стандарта, аналогичного формату FEN4. Однако в настоящей работе она играет прежде всего вспомогательную роль – для перехода к определяемой ниже специальной бинарной записи. Но перед этим желательно выбрать более подходящее количество переменных.

Модификация k-записи. Построим по аналогии с определённой выше k-значной записью шахматной позиции так называемую k'-значную запись и докажем их эквивалентность. Для этого увеличим параметр k, заменив его на $k'=k+1=14$, но уменьшим число переменных в наборе **y**, положив $\mathbf{y'}=\langle y'_1,\ldots,y'_{64}\rangle$, где $y'_m\in\{0..k'-1\}$, $1\le m\le 64$. Так, в наборе **y** все переменные подразделялись на 4 последовательных блока, а в наборе **y'** за счёт большего k' роли переменных $y_{65},\ldots,y_{68}$ распределятся «внутри» подмножества переменных $\{y'_m\}$, соответствующих содержимому полей шахматной доски. С этой точки зрения не все поля шахматной доски являются одинаково информативными.

Так, если в m-м поле, $1\le m\le 64$, стоит фигура[3] (т.е. в k-записи $y_m\in\{1..12\}$), то поле с номером 1 считаем *занятым полем*, а иначе (при $y_m=0$) – *свободным*. Множество номеров всех полей обозначим через A: $A=\{1..64\}$, множество свободных полей[4] – через F. Заметим, что для любой шахматной позиции (в том числе и для шахмат Фишера) верно $|F|\ge 32$. Поля a1, h1, a3..h3, a6..h6, a8, h8 назовём *специализированными*, множество их номеров обозначим через S: $S=\{1,8,17..24,41..48,57,64\}$, остальные поля – *не специализированными*. Кроме того, поля a1, h1, a8, h8 назовём *специализированными по рокировке*: $S_1=\{1,8,57,64\}$, а поля a3..h3, a6..h6 – *специализированными по взятию на проходе*: $S_2=\{17..24,41..48\}$, $S=S_1\cup S_2$, $S_1\cap S_2=\varnothing$. Среди свободных не специализированных полей выделим особое поле m^1, где $m^1=\min(m\colon m\in F\cap(A\setminus S))$, которое назовём *минимальным* (свободным не специализированным). Являясь формально не специализированным, m^1 будет иметь в k'-записи «неявную специализацию» – отвечать за очередь хода в позиции. Кроме того, для взятия на проходе[5] выделим особое поле $m^{ep}\in S_2$, которое определено тогда и только тогда, когда в позиции последним ходом двигалась пешка на два поля ($y_{68}\ne 0$), проходя через поле $\langle h,j\rangle$: $m^{ep}=(h-1)*8+j$.

[3] Здесь и далее пешки считаются фигурами, их различение оговаривается особо.

[4] Поле и его номер считаем синонимами.

[5] Англоязычный термин для этого хода – en passant.

Определим теперь k'-запись. При построении этой записи для поля m возможны 4 варианта, которые рассмотрим аналогично определению 4-х блоков **y(i)**, $1 \le i \le 4$, в определении k-записи. 1) $m \notin S$, $m \ne m^1$, тогда $y'_m = y'_m$. 2) При $m = m^1$ полагаем $y'_m = 0$ ($y'_m = 13$) если в позиции ход белых (соответственно, чёрных). 3) $m \in S_1$, тогда если указано, что рокировка белых в длинную (короткую) сторону возможна, то полагаем $y'_1 = 13$ ($y'_8 = 13$), а иначе – $y'_1 = y_1$ (соответственно, $y'_8 = y_8$); если рокировка чёрных в длинную (короткую) сторону возможна, то $y'_{57} = 13$ ($y'_{64} = 13$), иначе – $y'_{57} = y_{57}$ ($y'_{64} = y_{64}$). 4) При $m \in S_2$ если поле m^{ep} не определено, то $y'_m = y_m$, иначе при $m = m^{ep}$ полагаем $y'_m = 13$, а при $m \ne m^{ep}$ – $y'_m = y'_m$. Набор значений $\mathbf{a'} = \langle a'_1, \dots, a'_{64} \rangle$, где $\mathbf{y'} = \mathbf{a'}$, построенный по правилам вариантов 1)–4), будем называть *k'-значной записью* (или просто *k'-записью*) шахматной позиции.

Назовём k'-запись *локально корректной* (*л-корректной*) при выполнении условий: 1) если $y'_1 = 13$ или $y'_8 = 13$ ($y'_{57} = 13$ или $y'_{64} = 13$), то в позиции на поле e1 (e8) должен стоять белый (чёрный) король; если $y'_1 = 13$ ($y'_8 = 13$), то на поле a1 (соответственно, h1) белая ладья, если $y'_{57} = 13$ ($y'_{64} = 13$), то на поле a8 (h8) чёрная ладья; 2) если m^{ep} определено, $m = m^{ep}$, то $y'_m = 13$, причём $m^{ep} = (h-1) \cdot 8 + j$, где $h \in \{3,6\}$, поле $\langle h,j \rangle$ пусто, и при ходе белых (чёрных) $h = 6$ (соответственно, $h = 3$). Определения эквивалентности k'-записи и записи в формате FEN4, а также эквивалентности k-записи и k'-записи, аналогичны определению эквивалентности k-записи и FEN4-записи.

Утверждение 2. Для шахматных позиций k-запись и k'-запись, FEN4-запись и k'-запись попарно эквивалентны.

Доказательство первой части утверждения следует из определения k'-записи, практически идентичной k-записи, а отсюда с учётом утверждения 1 получается доказательство и второй части утверждения.

Переход к двоичной записи. Выбранные ранее параметры в k'-записи позволяют уже достаточно просто перейти от неё к двоичной записи шахматной позиции. В этой записи роль каждой переменной y'_m будет исполнять квартет булевых переменных $x_{4(m-1)+1}$, $x_{4(m-1)+2}$, $x_{4(m-1)+3}$, $x_{4(m-1)+4}$, которые представляют собой разряды двоичного представления переменной y'_m: $y'_m = \sum^4_{i=1} x_{4(m-1)+i} \cdot 2^{4-i}$. Таким образом, мы получаем набор $\mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_{256} \rangle$ переменных, где $x_j \in \{0,1\}$, $1 \le j \le 256$. Набор значений $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{256} \}$ этих переменных, связанный с k'-записью $\mathbf{y'} = \mathbf{a'}$ соотношениями $a'_m = \sum^4_{i=1} \alpha_{4(m-1)+i} \cdot 2^{4-i}$, $1 \le m \le 64$, называется *простым двоичным образом* k'-записи (или просто *2^*-записью*) шахматной позиции. При этом по определению 2^*-запись считается *локально корректной* (*л-корректной*), если она является двоичным образом л-корректной k'-записи. Поскольку, очевидно, 2^*-запись эквивалентна k'-записи, получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. Для шахматной позиции её FEN4-запись, k-запись, k'-запись и 2^*-запись попарно эквивалентны.

Доказательство следует из утверждения 2.

Заметим, что запись позиций двоичными значениями (битами) применяется разработчиками шахматного программного обеспечения (см. [8-9]), причём выделение количества битов на позицию по возможности сокращается (например, до 192, см. [9]). Однако то же самое уменьшение объема информации может быть достигнуто и путем применения внешних архиваторов к записи в формате FEN, вследствие чего двоичные форматы (Binary FEN) не получили широкого распространения.

Шахбит и шахбайт. Как известно, наименьшей единицей измерения информации считается бит. Из битов составляются байты: 1 байт равен 8 битам, 1 килобайт – 2^{10}=1024 байтам, и т.д. Введём похожую систему измерения и для шахматных позиций.

Для четвёрки булевых переменных $\mathbf{x}^{\mathbf{shb}}_{\mathbf{m}}=\langle x_{4(m-1)+1},x_{4(m-1)+2},x_{4(m-1)+3},x_{4(m-1)+4}\rangle$ из 2^*-записи шахматной позиции число $\sum^4_{i=1}x_{4(m-1)+i}\cdot 2^{4-i}$ назовём m-м *шахбитом* shb_m, а саму эту четверку – *двоичным представлением шахбита*, в дальнейшем для краткости отождествляя это число и булеву четвёрку. Поскольку набор значений переменных этой четвёрки является двоичным разложением числа из диапазона 0..15, значение шахбита может быть также представлено равной этому числу цифрой в шестнадцатеричной системе счисления. Таким образом, следуя принятым обозначениям шестнадцатеричных символов, мы получаем 16 значений шахбитов[6]: $\langle 0000\rangle$=\$0, $\langle 0001\rangle$=\$1, …, $\langle 1111\rangle$=\$F. Легко видеть, что 2^*-запись является двоичным представлением набора 64-х шахбитов: $\mathbf{sh}=\mathbf{a}^{\prime\$}=\langle a^{\prime\$}_1,\ldots,a^{\prime\$}_m,\ldots,a^{\prime\$}_{64}\rangle$, где $a^{\prime\$}_m=a'_m=\sum^4_{i=1}\alpha_{4(m-1)+i}\cdot 2^{4-i}$; однако в этой записи не все шахбиты равноправны. Так, шахбиты со значениями \$E и \$F не встречаются по определению, а шахбит $a^{\prime\$}_m$=\$D может встретиться лишь при $m=m^1$, или $m\in S$. Кроме того, можно рассматривать и другие способы задания k'-записи и её двоичных образов: например, набор $\mathbf{a}^{\prime\$(\mathbf{D}\leftrightarrow\mathbf{E})}$, отличающийся от $\mathbf{a}^{\prime\$}$ лишь заменой всех шахбитов $a^{\prime\$}_m$=\$D на $a^{\prime\$(D\leftrightarrow E)}_m$=\$E, тоже будет двоичным образом почти идентично определённой (путем замены $y'_m=13$ на $y'_m=14$ в вариантах 2)–4)) k'-записи, причём эта запись будет эквивалентна k-записи.

Назовём *шахбайтом* 64-х шахбитный двоичный образ k'-записи, эквивалентный k-записи. Таким образом, всякий шахбайт по определению представим двоичным набором длины 256, но не всякий такой набор является шахбайтом. Рассмотренный выше шахбайт **sh**, представляющий собой 2^*-запись, назовём *каноническим шахбайтом*; тогда как, например,

---

[6] Внутри наборов запятые для краткости пропущены.

набор $\mathbf{sh}^{\mathbf{\$(D\leftrightarrow E)}}$, полученный из **sh** указанной выше заменой $a'^{\$}_{m}=\$D$ на $a'^{\$(D\leftrightarrow E)}_{m}=\$E$ тоже является шахбайтом, но не каноническим.

Утверждение 4. Записи шахматной позиции в формате FEN4 и в виде шахбайта эквивалентны.

Доказательство следует из утверждения 3.

Таким образом, шахбайт является эквивалентной альтернативой записи позиции в формате FEN4. Кроме того, не канонические шахбайты могут «вместить в себя» значительный объём дополнительной информации, достаточный, например, для кодирования (необязательных для задания позиции) пятого и шестого блоков в формате FEN. Укажем один из простых способов такого кодирования. Пусть $F_0=(F\cap(A\backslash S))\backslash\{m^1\}$, тогда из $|F|\geq 32$ следует, что $|F_0|\geq 7$. Если $m\in F_0$, то m-й шахбит в каноническом шахбайте равен нулю: $shb^{\$}_{m}=\$0$. Имея (как минимум) два дополнительных значения для шахбитов: \$E и \$F, мы можем заменить набор значений всех таких шахбитов для полей из F_0 любым из $2^{2|F0|}-1 =4^{|F0|}-1\geq 16383$ способов, получив после этого не канонический шахбайт, однако задающий ту же самую шахматную позицию. При этом каждый из таких шахбайтов (которые легко упорядочить) может быть выбран для записи позиции вместе с некоторой дополнительной информацией, которая, в частности, может служить для позиций метаданными.

Приведём примеры канонических шахбайтов для записи рассмотренных выше (см. рис. 1) шахматных позиций. Символ “\$“ и запятые внутри наборов для краткости пропускаем, а выражение G^n считаем за сокращение n идущих подряд шестнадцатеричных цифр G. Шахбайт $\mathbf{sh^0}$ начальной позиции: $\mathbf{sh^0}=\langle D542145D6^{8}0^{32}C^{8}DBA87ABD\rangle$; после 1.e4: $\mathbf{sh^{1w}}=\langle D542145D6^{4}D6^{3}0^{4}D0^{7}60^{19}C^{8}DBA87ABD\rangle$; шахбайт после 5...Ce7: $\mathbf{sh^{5b}}=\langle 354203106^{4}06^{3}0^{5}50^{2}40^{3}60^{7}C0^{3}C0B0^{2}B0^{3}C^{3}AC^{3}D0A870^{2}D\rangle$.

Представление шахматной позиции в 8-мерном булевом кубе. Запись шахматных позиций в виде шахбайта позволяет перейти от них к некоторым объектам математической кибернетики и математической логики. Так, поскольку шахбайт представляет собой специальный набор из $2^8=256$ булевых значений некоторой булевой функции $f(x_1,\ldots,x_8)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Шахматная позиция представима в виде булевой функции от 8 переменных.

Доказательство следует из утверждения 4 и размера шахбайта.

Множество всех двоичных наборов длины n может рассматриваться как множество всех вершин двоичного n-мерного куба (см. [10]). В частности, при n=8 каждый набор $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ задаёт в 8-мерном булевом кубе вершину с номером (кодом) $\sum^{8}_{i=1}\alpha_i\cdot 2^{8-i}$, а множество всех наборов, для которых $f(x_1,\ldots,x_8)=1$, однозначно задаёт некоторое подмножество[7] всех вершин 8-мерного куба. На рис. 2 изображена плоская проекция 8-мерного пространства (булева куба), в котором представима любая шахматная позиция. Этот куб представляет собой соединение двух 7-мерных кубов (например, верхнего и нижнего – см. рис. 2), каждый из которых состоит

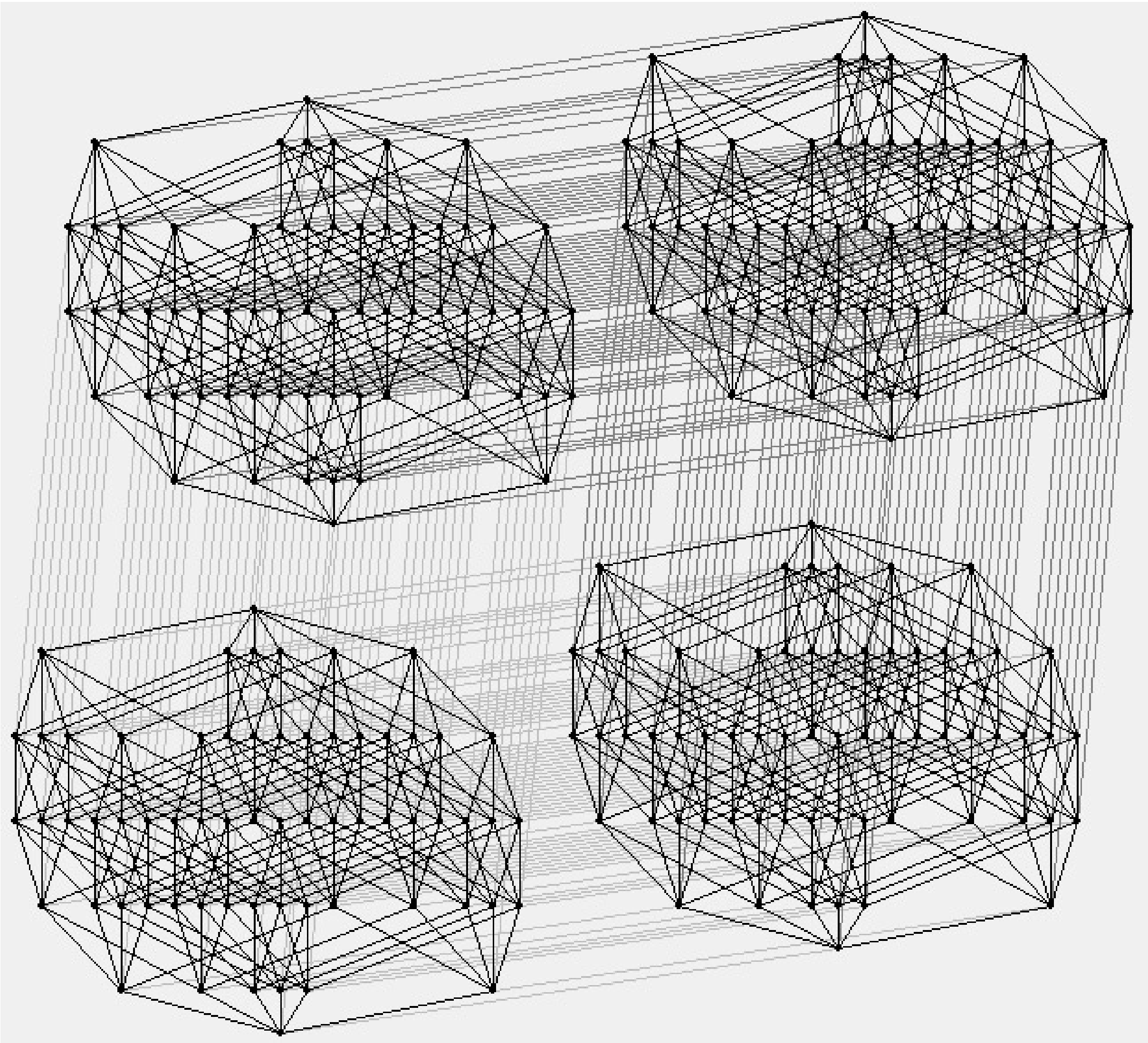


Рис. 2. Восьмимерный булев куб для задания шахматных позиций

из 2-х шестимерных (правого и левого). Полная нумерация вершин для 6-мерного куба приведена в [10]. В нашем случае вершины левого нижнего 6-мерного куба (лн-куба) занумерованы кодами в диапазоне 0..63, а правого нижнего (пн-куба), левого верхнего (лв-куба), правого верхнего (пв-куба) – соответственно, в диапазонах 64..127, 128..191, 192..255. Самая нижняя вершина лн-куба (пн-куба, лв-куба, пв-куба) имеет номер 0 (64,

[7] Это подмножество также называется множеством единичных значений (единиц) булевой функции f.

128, 196), а самая верхняя – номер 63 (127, 191, 255). Каждая вершина одного из 4-х 6-мерных кубов соединена с 8 соседними[8] (по каждой из 8 координат) вершинами ребром: с шестью соседями из своего куба и с двумя соседями из двух соседних кубов. Например, вершина 0 имеет в своем кубе соседей с номерами 1, 2, 4, 8, 16, 32 (это вершины первого яруса лн-куба на рис. 2), а также соседей с номерами 64 (из пн-куба) и 128 (из лв-куба), т.е. по совокупности восьми измерений каждая вершина куба (точка пространства) имеет свой уникальный набор координат. Таким образом, приведена наглядная геометрическая интерпретация представления любой шахматной позиции в восьмимерном пространстве.

3. Шахматные позиции и управляющие системы

Понятие *управляющей системы* (УС) в математической кибернетике было введено С.В.Яблонским и А.А.Ляпуновым в работах [1-2]. В первой из этих работ УС рассматривались прежде всего как математические модели *физических управляющих систем*, понимаемых в широком смысле, например таких систем как: автоматическая станочная линия, цифровая вычислительная машина, алгоритм для решения математической задачи, молекула, нервная ткань и т.п. (см. [1]). Во второй работе авторы продолжили выделение в УС и изучение общих составных частей: схем, информации, координат, функций, подробно проиллюстрировав их содержание на 5 примерах – начиная с вычислительных машин и заканчивая шахматами. Далее для исследования УС были выделены так называемые *макроподход* и *микроподход*, к которым отнесены 12 вполне определённых групп задач (4 группы к первому и 8 ко второму). Эти группы задач подробно описаны в [2], указан соответствующий им математический аппарат и показаны пути их дальнейшей детализации применительно к изучению УС различной природы, возникающих в различных областях знаний: программировании, технической кибернетике, экономике, биологии (в том числе теории эволюции) и др. Для систематизации проблем кибернетики А.А.Ляпуновым и С.В.Яблонским построена большая таблица, состоящая из более чем 150 клеток и позволяющая детализировать изучение групп задач применительно к конкретным областям знаний. В последующие годы благодаря большой работе, проведённой в математической кибернетике, клетки этой таблицы стали наполняться новым содержанием и результатами: методами, алгоритмами, теоремами, количественными и качественными оценками. Это в свою очередь позволило в следующие десятилетия рассматривать многие математические объекты (булевы формулы, схемы из функциональных элементов, автоматы, программы и др.) с позиций УС.

[8] Вершина (с номером) $\sum^{n}_{i=1}\alpha_i\cdot 2^{n-i}$ называется соседней по j-й координате с вершиной $\sum^{n}_{i=1}\beta_i\cdot 2^{n-i}$, если $\alpha_i=\beta_i$ при $i\neq j$, но $\alpha_j\neq\beta_j$.

Отметим, что сейчас УС играют важную роль и при обучении дискретной математике (см. [10]).

Шахматная позиция и УС. Согласно направлению, заданному работами [1-2], шахматы для УС представляют интерес прежде всего в качестве иллюстрации многих важных понятий: функционирования, структуры, эволюции УС. Однако сами по себе шахматы как УС систематически не рассматривались. Во многом это связано с практическими вопросами о пользе применения УС для шахмат, с выбором подходящих УС для подходящего «приближения» шахмат, если считать их аналогом физических управляющих систем. Однако в настоящее время можно посмотреть на проблему и по-другому: какую пользу накопленные в шахматах (точные) знания и технологии могут принести теории УС? Как будет показано в дальнейших пунктах, шахматным позициям можно сопоставить конкретные УС некоторых видов. Это уже позволяет работать с ними как в языке УС, так и получать некоторые преобразования УС по шахматной информации и трансляции шахматных позиций в УС.

Шахматные позиции и их реализация булевыми формулами. Для булевых формул класс УС в простейшем случае имеет вид $U=\langle\Sigma,\Phi\rangle$, где Σ – схема, т.е. в данном случае формула, а $\Phi=\varphi(\Sigma)$ – функционирование УС, определяемое по формуле, т.е. булева функция f, реализуемая формулой ψ. Тогда если в качестве Σ_1 выбрать класс формул в базисе $\{\&,\neg,\vee\}$, то любая булева функция (в частности, от 8 переменных), может быть реализована в этом базисе формулой, например, в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (сднф, см. [10]). Следовательно, по теореме 1 шахматная позиция представима и в виде булевой формулы от 8 переменных, т.е. реализуема в УС $U_1=\langle\Sigma_1,\Phi_1\rangle$ – классе булевых формул. Рассмотрим в качестве примера известный этюд Рети (см. [3], а также рис. 3). Белые: Kph8, п.c6; чёрные: Kpa6, п.h5; ход белых. Данная позиция записывается каноническим шахбайтом $\mathbf{sh^0}=\langle 0^{39}C7060^{20}1\rangle$, соответствующей булевой функцией $f^0(x_1,\dots,x_8)$ и представима также формулой[9] (более короткой, чем сднф) $\psi^0=x_1(x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 \vee \neg x_2(\neg x_3x_4x_5x_6\neg x_7 \vee x_3\neg x_4\neg x_6((\neg x_5\vee\neg x_7)x_8 \vee x_7\neg x_8)))$, реализующей функцию f^0. В этом этюде стоит задача сделать белыми ничью, и позиция после первых ходов 1.Kpg7 h4 2.Kpf6 (для неё $\mathbf{sh^{2w}}=\langle 0D0^{29}C0^{8}7060^{2}10^{18}\rangle$) представима формулой $\psi^{2w}=\neg x_1x_6(\neg x_2\neg x_3\neg x_4\neg x_5 (\neg x_7\vee x_8) \vee x_2x_3x_4x_5\neg x_7) \vee x_1\neg x_2x_3(\neg x_4\neg x_6((\neg x_5\vee\neg x_7)x_8 \vee x_7\neg x_8) \vee x_4\neg x_5x_6x_7x_8)$. Таким образом, шахматные позиции, варианты и партии можно рассматривать в терминах последовательностей булевых формул.

---

[9] Внешние скобки и знак конъюнкции опускаем, скобки восстанавливаются по стандартному приоритету булевых связок.

Утверждение 5. Шахматная партия (последовательность позиций) представима последовательностью булевых формул не более чем от 8 переменных.

Доказательство следует из того, что шахматная партия представляет собой последовательность позиций, записываемых шахбайтами, которые по теореме 1 задаются булевыми функциями от 8 переменных и, следовательно, могут быть представимы формулами не более чем от 8 переменных[10].

Трансляция шахматных позиций во множества булевых формул не более чем от 3 переменных. Число переменных в булевой функции, представляющей конкретную шахматную позицию, равно 8, т.е. 2^n, где n=3. Таким образом, набор значений длины 8 однозначно определяет булеву функцию от 3 переменных, причём общее число всех функций от 3 переменных в точности равно $2^8=256$. Поэтому каждая функция от 8 переменных может быть представлена некоторым множеством функций от 3 переменных, которые в свою очередь реализуемы формулами не более чем от 3 переменных.

Теорема 2. Шахматная позиция представима в виде множества булевых формул не более чем от 3 переменных.

Доказательство следует из теоремы 1 и соответствия множеств булевых функций от 3 переменных функциям от 8 переменных.

Таким образом, шахматные позиции представимы в виде УС $U_2=\langle \Sigma_2,\Phi_2\rangle$, где Σ_2 – множество формул не более чем от 3 переменных, а Φ_2 – множество реализуемых ими булевых функций. Так, булева функция f^0, реализующая шахматную позицию из этюда Рети, представима множеством булевых функций $G^0(\mathbf{u}^3)=\{g_{156},g_{157},g_{161},g_{162},g_{163},g_{169},g_{170},g_{255}\}$, где столбцы значений функций из $G^0(u_1,u_2,u_3)$ являются двоичными разложениями единичного набора функции f^0, код которого равен нижнему индексу данной функции g. Так, $g_{156}(\mathbf{u}^3)=\langle 1001\ 1100\rangle$, $g_{157}(\mathbf{u}^3)=\langle 1001\ 1101\rangle$, … , $g_{255}(\mathbf{u}^3)=\langle 1111\ 1111\rangle$. Реализуем эти функции булевыми формулами в базисе[11] $\{\&,\neg,\vee,\sim\}$: $\psi_{156}=u_1\neg u_2 \vee \neg u_1(u_2\sim u_3)$, $\psi_{157}=u_1\neg u_2 \vee (u_2\sim u_3)$, $\psi_{161}=\neg u_1\neg u_3 \vee u_1u_2u_3$, $\psi_{162}=\neg u_1\neg u_3 \vee u_1u_2\neg u_3$, $\psi_{163}=\neg u_1\neg u_3 \vee u_1u_2$, $\psi_{169}=\neg u_1\neg u_3 \vee u_1(u_2\sim u_3)$, $\psi_{170}=\neg u_3$, $\psi_{255}=u_1\vee\neg u_1$.

Утверждение 6. Шахматная партия (последовательность позиций) представима последовательностью множеств булевых формул не более чем от 3 переменных.

Доказательство следует теоремы 2 и утверждения 5.

Трансляция шахматных позиций в схемы из функциональных элементов. Рассмотрим теперь запись шахматных позиций в виде *схем из функциональных элементов* (*СФЭ*), представляющих собой УС $U_3=\langle \Sigma_3,\Phi_3\rangle$,

---

[10] так как часть переменных может входить в формулу фиктивно.

[11] Связка ~ реализует функцию эквивалентности: f(x1~x2)=⟨1001⟩.

где Σ_3 – схема УС, т.е. СФЭ, а Φ_3 – её функционирование, т.е. набор булевых функций, реализуемый этой схемой (см. [10]). СФЭ представляет собой связный ориентированный граф без ориентированных циклов, вершины которого помечены символами булевых переменных – это *входы* схемы, либо символами функциональных элементов, реализующих элементарные булевы функции. Вычисление значений функций во внутренних вершинах по конкретным булевым значениям входов (входных переменных) определяется индукцией по строению СФЭ (см. [10]). Выделенные m вершин в СФЭ считаем *выходами* схемы, на которых реализуются булевы функции $g_1,\ldots,g_m$. *Булевым весом функции* f называем число её единиц, а *булевым весом шахбайта* – число единиц в его двоичной записи.

Заметим, что если m=1, то СФЭ реализует единственную булеву функцию f, поэтому для СФЭ с 8 входами и одним выходом имеют место аналоги теоремы 1 и утверждения 5 – о представлении шахматных позиций в виде СФЭ. Однако при $m\geq 1$ и сокращении числа входов до 3 шахматные позиции могут транслироваться в более компактные СФЭ.

Теорема 3. Шахматная позиция представима в виде СФЭ с 3 входами и числом выходов, равным булевому весу её канонического шахбайта.

Доказательство. Пусть шахматная позиция записывается шахбайтом с булевым весом m, где m>0 (иначе в позиции на доске вообще нет фигур). Тогда она представима множеством из m булевых функций от 3 переменных, поэтому по теореме о полноте реализации систем булевых функций в виде СФЭ в полном базисе данный набор функций может быть реализован СФЭ с 3 входами и m выходами.

Заметим, что формулы, множества формул, СФЭ не единственным образом представляют булевы функции, поэтому в некоторых случаях (в том числе в рассматриваемом ниже примере) для их поиска и верификации полезно применение программных инструментов (например, [11]). Пример СФЭ, реализующей начальную позицию из этюда Рети, приведён на рис. 3. На этом рисунке цифрами с подчеркиванием и короткими жирными стрелками обозначены выходы СФЭ, на которых реализуются соответствующие им функции из $G^0(\mathbf{u}^3)$. При этом показаны все стрелки, приводящие в итоге к первому выходу, а остальные 23 стрелки легко восстанавливаются по номерам функциональных элементов и другим обозначениям на рисунке.

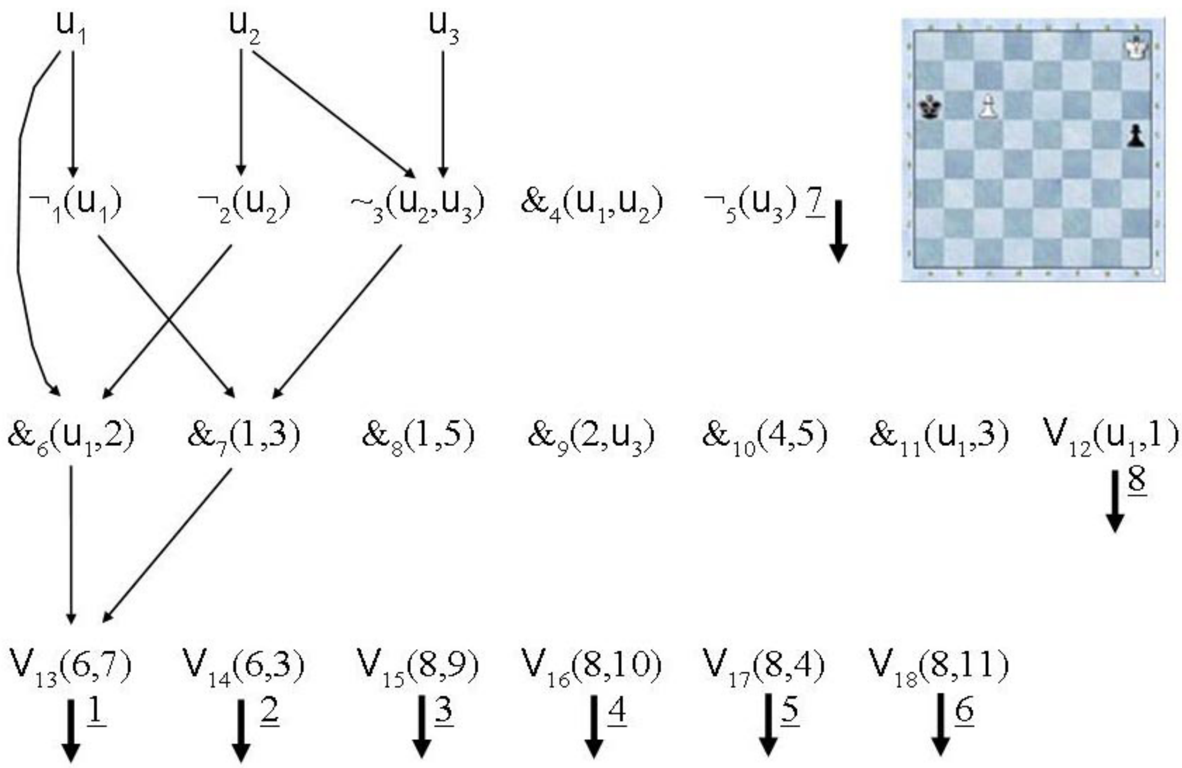


Рис. 3. СФЭ, реализующая начальную позицию этюда Рети.

Утверждение 7. Шахматная партия (последовательность позиций) представима последовательностью СФЭ с 3 входами и числом выходов, равным булевому весу канонических шахбайтов позиций.

Доказательство следует теоремы 3 и утверждения 6.

Таким образом, описаны трансляции шахматных позиций в УС U_1, U_2, U_3 – булевы формулы, множества булевых формул, СФЭ.

4. Заключение

В работе введено понятие шахбайта, представляющего с технологической точки зрения формат записи шахматных позиций. Описано построение канонического шахбайта по произвольной шахматной позиции, доказана его эквивалентность известному стандарту FEN в смысле задания позиций, а также показаны новые возможности шахбайта по сравнению с этим стандартом. С использованием логических свойств шахбайта доказана теорема о реализации произвольной шахматной позиции в виде булевой функции от 8 переменных и показано представление позиций в восьмимерном пространстве – 8-мерном булевом кубе.

Во второй части работы дано краткое описание управляющей системы в смысле Ляпунова-Яблонского. Благодаря представлению шахматных позиций в 8-мерном булевом кубе построены их трансляции в следующие УС: булевы формулы, множества булевых формул, схемы из функциональных элементов.

Таким образом, трактовка шахматных позиций в терминах конкретных УС предоставляет новые возможности для взаимодействия теоретического аппарата математической кибернетики и цифровых технологий в шахматах. В частности, это позволяет работать с шахматными позициями как с объектами УС, сочетая макроподход и микроподход, исследовать функционирование, алгоритмизацию, эквивалентные преобразования, эволюцию УС. С другой стороны, накопленные в шахматах (точные) знания и технологии, оценки, вычисления переводимы в область УС, поэтому и взгляд на УС с точки зрения шахмат представляется интересным как в теории, так и на практике.

Литература

1. Яблонский С.В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. Вып. 2: Сборник статей / Под ред. А.А. Ляпунова. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 7–38.
2. Ляпунов А.А., Яблонский С.В. Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. Вып. 9: Сборник статей / Под ред. А.А. Ляпунова. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 5–22.
3. Ботвинник М.М. От шахматиста – к машине. — М.: Физкультура и спорт, 1979. — 176 с.
4. Хелемендик Р.В. О логико-игровом подходе к проблемам работы с большими данными // Научный сервис в сети Интернет: труды XXIII Всероссийской научной конференции (20-23 сентября 2021 г., онлайн). — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021. — С. 384-397. — URL: https://doi.org/10.20948/abrau-2021-18
5. Forsyth-Edwards Notation // Chess Programming Wiki. — https://www.chessprogramming.org/Forsyth-Edwards_Notation
6. Portable Game Notation Specification and Implementation Guide. — https://www.chessclub.com/help/PGN-spec
7. Хелемендик Р.В. О решении шахматных позиций с помощью формул логики ветвящегося времени // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т.11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 111–121.
8. Programming // Chess Programming Wiki. — https://www.chessprogramming.org/Programming
9. Binary FEN // Binary FEN – TalkChess.com. — http://www.talkchess.com/forum3/viewtopic.php?t=57065
10. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику / М.: Наука, 1986. — 384 с.
11. Хелемендик Р.В. SFECalc: Программа построения по большим булевым формулам минимизированных схем из функциональных элементов, их анализа и синтеза с заданными параметрами /

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013615516, зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 11.06.2013.

References

1. Yablonskii S.V. Osnovnye poniatiia kibernetiki // Problemy kibernetiki. Vyp. 2: Sbornik statei / Pod red. A.A. Lyapunova. — M.: Fizmatgiz, 1959. — S. 7–38.
2. Lyapunov A.A., Yablonskii S.V. Teoreticheskie problemy kibernetiki // Problemy kibernetiki. Vyp. 9: Sbornik statei / Pod red. A.A. Lyapunova. — M.: Fizmatgiz, 1963. — S. 5–22.
3. Botvinnik M.M. Ot shakhmatista – k mashine. — M.: Fizkultura i sport, 1979. — 176 s.
4. Khelemendik R.V. O logiko-igrovom podkhode k problemam raboty s bolshimi dannymi // Nauchnyi servis v seti Internet: trudy XXIII Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii (20-23 sentiabria 2021 g., onlain). — M.: IPM im. M.V. Keldysha, 2021. — S. 384-397. — URL: https://doi.org/10.20948/abrau-2021-18
5. Forsyth-Edwards Notation // Chess Programming Wiki. — https://www.chessprogramming.org/Forsyth-Edwards_Notation
6. Portable Game Notation Specification and Implementation Guide. — https://www.chessclub.com/help/PGN-spec
7. Khelemendik R.V. O reshenii shakhmatnykh pozitsii s pomoshchiu formul logiki vetviashchegosia vremeni // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. 2011. T.11. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, vyp. 1. S. 111–121.
8. Programming // Chess Programming Wiki. — https://www.chessprogramming.org/Programming
9. Binary FEN // Binary FEN – TalkChess.com. — http://www.talkchess.com/forum3/viewtopic.php?t=57065
10. Yablonskii S.V. Vvedenie v diskretnuiu matematiku / M.: Nauka, 1986. — 384 s.
11. Khelemendik R.V. SFECalc: Programma postroeniia po bolshim bulevym formulam minimizirovannykh skhem iz funktsionalnykh elementov, ikh analiza i sinteza s zadannymi parametrami / Svidetelstvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlia EVM №2013615516, zaregistrirovano v reestre programm dlia EVM 11.06.2013.